

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б. Н. ЕЛЬЦИНА

**ВВЕДЕНИЕ  
В ОБЩУЮ ТЕОРИЮ  
ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ,  
ЕЕ СОВРЕМЕННОЕ РАЗВИТИЕ  
И ПРИЛОЖЕНИЯ**

Рекомендовано методическим советом УрФУ  
в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся  
по программам бакалавриата и магистратуры  
по направлению подготовки 03.03.02, 03.04.02 «Физика»,  
по специальности 03.05.01 «Астрономия»

Екатеринбург  
Издательство Уральского университета  
2015

УДК 530.12:531.51(075.8)

B24

Авторы:

С. О. Алексеев, Е. А. Памятных, А. В. Урсулов,  
Д. А. Третьякова, К. А. Ранну

Рецензенты:

кафедра теоретической физики Челябинского государственного университета (заведующий кафедрой доктор физико-математических наук, профессор А. Е. Дудоров);

А. А. Шацкий, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Астрокосмического центра Физического института им. П. Н. Лебедева РАН

Научный редактор:

С. О. Алексеев, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Государственного астрономического института им. П. К. Штернберга МГУ

Введение в общую теорию относительности, ее современное развитие и приложения : [учеб. пособие] / С. О. Алексеев, Е. А. Памятных, А. В. Урсулов, Д. А. Третьякова, К. А. Ранну ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2015. — 380 с.

ISBN 978-5-7996-1584-0

Изложены основы общей теории относительности, дано введение в ее современное развитие и состояние. Достаточно полно, но без перегрузки деталями излагается необходимый математический аппарат. Обсуждаются основные принципы и следствия теории, ее экспериментальный и наблюдательный статус. Дано представление о современном состоянии общей теории относительности и ее приложениях к астрофизике, физике черных дыр, космологии. Обсуждаются возможные расширения теории и способы их экспериментальной проверки.

Для студентов, специализирующихся по теоретической физике, астрофизике и астрономии, аспирантов, молодых преподавателей, а также для всех, кто интересуется проблемами и достижениями теории гравитации.

При оформлении обложки использована гравюра анонимного автора («Гравюра Фламариона», 1888 г.).

ISBN 978-5-7996-1584-0

©Уральский федеральный университет, 2015

## Оглавление

Список основных сокращений . . . . .	5
Предисловие . . . . .	6
Глава 1. Физические основы ОТО . . . . .	13
1.1 Ньютоновская теория гравитации . . . . .	13
1.2 Физические основы ОТО . . . . .	19
Глава 2. Элементы математического аппарата ОТО . . . . .	26
2.1 Тензоры . . . . .	26
2.2 Тензорная алгебра . . . . .	32
2.3 Ковариантное дифференцирование. Связность . . . . .	39
2.4 Параллельный перенос. Геодезическая . . . . .	47
2.5 Тензор кривизны . . . . .	61
2.6 Метрический тензор . . . . .	70
2.7 Кривизна римановых пространств . . . . .	80
Глава 3. Частицы в гравитационном поле . . . . .	91
3.1 Расстояния и промежутки времени в ОТО . . . . .	91
3.2 Движение частицы в гравитационном поле . . . . .	96
3.3 Слабое гравитационное поле. Ньютоновский предел . . . . .	98
3.4 Постоянное гравитационное поле . . . . .	100
3.5 Распространение света в постоянном гравитационном поле. Гравитационное смещение спектральных линий . . . . .	103
Глава 4. Уравнения гравитационного поля . . . . .	107
4.1 Уравнения Эйнштейна . . . . .	107
4.2 Уравнения Эйнштейна и вариационный принцип . . . . .	116
4.3 Тензор энергии-импульса . . . . .	121
4.4 Ньютоновский предел . . . . .	127
4.5 Космологическая постоянная . . . . .	132
4.6 Законы сохранения . . . . .	136
Глава 5. Гравитационные волны . . . . .	143
5.1 Слабые гравитационные поля в отсутствие источников. Гравитационные волны . . . . .	143
5.2 Плоские гравитационные волны. Поляризация гравитационных волн . . . . .	146
5.3 Поиски гравитационных волн . . . . .	151
Глава 6. Центральное-симметричное гравитационное поле . . . . .	155
6.1 Решение Шварцшильда . . . . .	155
6.2 Движение частиц в центральное-симметричном гравитационном поле. Смещение перигелия орбит планет . . . . .	164

6.3	Распространение лучей света в центрально-симметричном гравитационном поле. Гравитационное отклонение лучей света . . . . .	172
6.4	Радиальное движение частиц и света в центрально-симметричном гравитационном поле. Черные дыры . . . . .	179
6.5	Гравитационный коллапс . . . . .	189
Глава 7.	Физика черных дыр . . . . .	198
7.1	Классификация черных дыр . . . . .	198
7.2	Законы термодинамики черных дыр . . . . .	200
7.3	Испарение черных дыр . . . . .	204
7.4	Информационный парадокс . . . . .	213
Глава 8.	Космология . . . . .	217
8.1	Наблюдательные основы космологии . . . . .	218
8.2	Метрика Фридмана — Робертсона — Уокера . . . . .	229
8.3	Модели расширяющейся Вселенной . . . . .	236
8.4	Теоретические основы современной космологии . . . . .	248
8.5	Нерешенные проблемы современной космологии . . . . .	259
Глава 9.	Наблюдательный статус ОТО . . . . .	265
9.1	Параметризованный постньютоновский формализм . . . . .	265
9.2	Современные подтверждения ОТО . . . . .	286
9.3	Нерешенные проблемы . . . . .	292
9.4	Необходимость расширения ОТО . . . . .	295
Глава 10.	Расширенные теории гравитации . . . . .	297
10.1	Теория Бранса — Дикке . . . . .	298
10.2	Модифицированная ньютоновская динамика . . . . .	315
10.3	Гравитационные теории $f(R)$ . . . . .	318
10.4	Скалярно-тензорные теории . . . . .	327
10.5	Квантовые теории . . . . .	331
10.6	Космологические расширения . . . . .	344
	Заключение . . . . .	351
	Список библиографических ссылок . . . . .	353
	Список рекомендуемой литературы . . . . .	370

## Список основных сокращений

- БАК — большой адронный коллайдер
- МОНД — модифицированная ньютоновская динамика
- ОТО — общая теория относительности
- ППН — параметризованный постньютоновский (формализм)
- СТО — специальная теория относительности
- CDM — Cold Dark Matter (холодная темная материя)
- GPS — Global Positioning System (система глобального позиционирования)
- GUT — Grand Unification Theory (теория великого объединения)

## Предисловие

Общая теория относительности (ОТО) — одно из наиболее значительных достижений физики, а наблюдения предсказываемых ею эффектов не только блестяще подтвердили эту теорию, но и внесли значительный вклад в развитие физических экспериментов и наблюдений. Уже одного этого достаточно для обязательного знакомства всех студентов, специализирующихся в области физики, с основами ОТО.

Другая причина, делающая необходимым знакомство с основными принципами и методами ОТО, — наблюдаемое в последние годы бурное развитие ОТО, ее методов и приложений в космологии, физике звезд, черных дыр, гравитационных волн, квантовой гравитации, а также во многих смежных направлениях, включая физику твердого тела. Именно в понимании и развитии ОТО совершен прорыв по разным направлениям, который, возможно, уже в ближайшие годы выведет нас на новый уровень понимания космологических и гравитационных задач. Знание ОТО для современных физиков (и общее представление о ней других специалистов в области естественных наук) на современном этапе развития научной мысли не менее важно, чем знание других разделов теоретической физики: механики, электродинамики, квантовой механики, статистической физики и т. д.

В настоящее время имеется обширная литература, посвященная ОТО и ее приложениям, которую условно можно разделить на три направления. Первое включает специальные книги, оригинальные обзорные и исследова-

тельские статьи (в подавляющем большинстве на английском языке), излагающие различные аспекты ОТО, ее развитие и приложения на высоком современном уровне, написанные прежде всего для специалистов, активно работающих в данной области. Как правило, такую литературу нужно читать, уже имея представление об ОТО и обладая багажом современных методов теоретической физики.

Другая часть литературы по ОТО носит популярный характер, излагая основные идеи, принципиальные результаты и ожидаемые перспективы, но опуская большую часть математического аппарата. Часто эти книги написаны крупнейшими специалистами, активно работающими в данных направлениях. Такие книги чрезвычайно нужны и для информирования людей о грандиозных достижениях науки, и для широкого привлечения молодых исследователей (и школьников) в эту чрезвычайно актуальную область исследований. Однако они недостаточны для ее профессионального изучения (их авторы и не ставят таких задач).

Третье направление — вузовские учебники, в которых, как правило, излагается уже устоявшийся стандартный материал. Ярчайшим и всемирно признанным примером такого учебника является второй том курса теоретической физики Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица под названием «Теория поля». При всей незаменимости этих книг для студентов, обучающихся по физическим направлениям и не специализирующихся в данный момент в области ОТО и ее приложений, курс обучения должен включать не только основы теории, но и давать представление о *современных достижениях, проблемах, путях дальнейшего развития*. На наш взгляд, учебной литературы по ОТО именно такого рода явно недостаточно.

Существует и обширная «любительская» псевдонауч-

ная литература, посвященная проблемам гравитации, черным дырам, космологии и т. п. В ней содержится множество спорных и подчас просто неверных утверждений. Необходимо понимать, что математический аппарат ОТО отнюдь не прост, и далеко не каждый непрофессионал готов разбираться с тензорным анализом, теорией сингулярности, границами применимости. Именно из-за непонимания или незнания этих и других разделов математики и физики появляются нелепые и бессмысленные представления, широко распространенные среди обычного населения. Поэтому еще одну цель данной книги мы видим в знакомстве читателя с научным взглядом на Вселенную, взглядом, следствием которого явилось техническое и технологическое развитие нашей цивилизации.

В этом и состояла основная цель нашей работы: восполнить указанные пробелы хотя бы на уровне учебного пособия. С этой целью был сформирован авторский коллектив, включающий как специалистов Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, активно работающих в области расширения ОТО и поиска ее экспериментально проверяемых следствий, так и преподавателей Уральского федерального университета, которые в течение длительного времени читают студентам — физикам и астрономам — курсы «Общая теория относительности» и «Релятивистская механика» и представляют, какого типа учебное пособие необходимо студентам, специализирующимся в разных направлениях.

Такой состав авторов приводит к некоторым особенностям данной книги. Хотя весь текст написан и обсужден всеми авторами в долгой и очень непростой совместной работе, стиль изложения разделов отличается. Авторский коллектив понимает эти проблемы. Однако после длительного обсуждения мы сочли целесообразным оста-

вить книгу именно в таком виде, прежде всего потому, что это — учебное пособие по специальному курсу. Целью данного учебного пособия является, во-первых, помощь студентам в изучении предмета «Общая теория относительности» (математический аппарат, идеи и принципы, границы применимости, приложение всего этого к исследованию конкретных вопросов) и, во-вторых, ознакомление их на достаточно серьезном уровне с современными направлениями развития ОТО и ее обобщений и с конкретными приложениями ОТО к рассмотрению различных астрофизических и космологических задач так, чтобы студенты могли разбираться в современной научной литературе по данным вопросам. Поэтому некоторые величины могут иметь неодинаковые обозначения в разных разделах книги. Мы идем на это сознательно, чтобы унифицировать наше изложение с другими источниками и облегчить понимание читателем этих источников, так как при изучении теории гравитации всерьез эта книга может служить лишь прологом... Нам представляется, что принятый формат книги попутно поможет решить еще одну важную педагогическую задачу — помочь читателю научиться воспринимать разный стиль изложения (из разных источников) и уметь свободно пользоваться различными обозначениями и системами единиц, при необходимости переходя от одной к другой. Все это необходимо при чтении оригинальной научной литературы.

Структура настоящего учебного пособия следующая:

- В гл. 1 мы обсуждаем физические основы ОТО, включая ньютоновскую теорию гравитации, принцип эквивалентности, геометризацию гравитации, принцип общей ковариантности и т. д.
- Гл. 2 посвящена элементам математического аппарата ОТО и включает изложение отдельных вопросов

из теории тензоров, тензорной алгебры, ковариантного дифференцирования, связностей, параллельного переноса, геодезических, тензора кривизны, метрического тензора, римановых пространств.

- В гл. 3 рассматриваются расстояния и промежутки времени в ОТО, движение частицы в гравитационном поле, постоянное гравитационное поле и замедление хода часов, распространение света в гравитационном поле.
- Гл. 4 посвящена уравнениям гравитационного поля (уравнениям Эйнштейна) и включает изложение вопросов получения уравнений гравитационного поля и их свойств, вывод уравнений из вариационного принципа, тензор энергии-импульса, слабое гравитационное поле и ньютоновский предел, введение космологической постоянной, законы сохранения в ОТО.
- В гл. 5 рассматриваются гравитационные волны, свойства этих волн, экспериментальный поиск и проблемы, связанные с их обнаружением.
- Гл. 6 посвящена центрально-симметричному гравитационному полю и метрике Шварцшильда, включая получение и исследование свойств решения Шварцшильда уравнений гравитационного поля, движение частицы в центрально-симметричном гравитационном поле, распространение лучей света в центрально-симметричном гравитационном поле, радиальное движение частиц и света в центрально-симметричном гравитационном поле, возможность существования черных дыр, гравитационный коллапс.

- В гл. 7 рассмотрены отдельные вопросы физики черных дыр, включая их классификацию, законы термодинамики черных дыр, «испарение» черных дыр, обобщенную формулировку 2-го закона термодинамики черных дыр, информационный парадокс.
- Гл. 8 посвящена космологии и разбирает такие вопросы, как наблюдательные основы космологии, метрику Фридмана — Робертсона — Уокера, модели расширяющейся Вселенной, теоретические основы современной космологии, нерешенные проблемы современной космологии.
- Гл. 9 рассказывает о наблюдательном статусе ОТО и включает в себя описание таких вопросов, как параметризованный постньютоновский формализм, современные подтверждения ОТО, нерешенные проблемы, необходимость расширения ОТО.
- Гл. 10 посвящена расширенным теориям гравитации, включая теорию Бранса — Дикке, модифицированную ньютоновскую динамику (МОНД), теории гравитации вида  $f(R)$ , скалярно-тензорные теории, квантовые теории и космологические расширения.
- В заключении подводятся итоги изложенному и даются некоторые рекомендации относительно дальнейшего изучения предмета.

Пособие снабжено обширной библиографией, включающей как труды, ставшие к настоящему времени классическими, так и работы, опубликованные в последние годы. В заключительной части пособия приведен список рекомендуемой литературы. В той или иной степени приведенная там литература использовалась при написании

соответствующих частей данного пособия. Хотя этот список не может претендовать на исчерпывающую полноту, мы надеемся, что, обратившись к приведенному в нем материалу, заинтересованный читатель сможет получить дополнительную информацию по всему спектру вопросов современной теории гравитации и связанных с ней научных дисциплин.

### **Благодарности**

Работа поддержана фондом Д. И. Зимина «Династия» (С. О. Алексеев), государственным контрактом № 02.740.11.0575 Федерального агентства по науке и инновациям Российской Федерации (С. О. Алексеев, К. А. Ранну, Д. А. Третьякова), а также Программой повышения конкурентоспособности 02.А03.21.0006 Правительства РФ и проектов № 1437 и 2725 Госзадания МОН РФ.

# Глава 1

## Физические основы ОТО

### 1.1. Ньютонская теория гравитации

Первая научная теория гравитации была сформулирована Исааком Ньютоном в 1687 г. в знаменитом трактате «Математические начала натуральной философии». В соответствии с этой теорией массивные тела (частицы) движутся в абсолютных (т. е. существующих независимо ни от чего другого и друг от друга) пространстве и времени, а взаимодействие частиц осуществляется согласно закону всемирного тяготения:

$$\vec{F}_{ik} = -G \frac{m_i m_k}{r_{ik}^3} \vec{r}_{ik}, \quad (1.1)$$

где  $\vec{F}_{ik}$  — сила, действующая на частицу с номером  $i$  со стороны частицы с номером  $k$ ;  $m_i, m_k$  — массы, а  $\vec{r}_i$  и  $\vec{r}_k$  — радиусы-векторы  $i$ -й и  $k$ -й частиц соответственно; вектор  $\vec{r}_{ik} = \vec{r}_i - \vec{r}_k$  направлен от частицы  $k$  к частице  $i$ ;  $r_{ik} = |\vec{r}_{ik}|$  — расстояние между частицами;  $G \simeq 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 \text{ г}^{-1} \text{ с}^{-2}$  — гравитационная постоянная. Знак минус в выражении (1.1) означает, что гравитационные силы являются силами притяжения. Кроме того, эти силы являются центральными (т. е. направленными вдоль прямой, соединяющей взаимодействующие частицы, и зависящими только от расстояния между ними) и потенциальными, т. е. их можно представить в виде

$$\vec{F}_{ik} = -\vec{\nabla}_{ik} V_{ik}, \quad (1.2)$$

где

$$V_{ik} = -G \frac{m_i m_k}{r_{ik}} \quad (1.3)$$

есть потенциальная энергия взаимодействия  $i$ -й и  $k$ -й частиц, а  $\vec{\nabla}_{ik}$  — оператор градиента, построенный на компонентах вектора  $\vec{r}_{ik}$ .

Введем напряженность и потенциал — характеристики гравитационного поля в точке пространства  $\vec{r}$ , не зависящие от гравитационной массы пробных частиц. Из (1.1) следует, что сила, действующая со стороны гравитационного поля на пробную частицу с радиус-вектором  $\vec{r}$ , пропорциональна ее гравитационной массе  $m$ :

$$\vec{F} = m \vec{g}(\vec{r}), \quad (1.4)$$

где

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G \sum_k \frac{m_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^3} (\vec{r} - \vec{r}_k) \quad (1.5)$$

есть напряженность гравитационного поля, создаваемого системой тел. Напряженность  $\vec{g}(\vec{r})$  представляет собой силу, действующую на единичную массу, и может быть выражена через потенциал гравитационного поля  $\varphi(\vec{r})$ :

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}), \quad (1.6)$$

где

$$\varphi(\vec{r}) = -G \sum_k \frac{m_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|}. \quad (1.7)$$

Согласно представлениям классической механики частица, кроме гравитационной массы  $m$ , играющей роль гравитационного заряда, обладает еще «инертной» массой  $\mu$ . Эта характеристика частицы  $\mu$ , описывающая способность

тела сопротивляться ускорению, входит в качестве коэффициента пропорциональности во второй закон Ньютона:

$$\mu \vec{w} = \vec{F}, \quad (1.8)$$

где  $\vec{w}$  — ускорение частицы. К настоящему времени с точностью до  $10^{-13}$  экспериментально установлено, что инертная и гравитационная массы равны  $\mu = m$ . Тогда из выражений (1.4) и (1.8) следует, что напряженность гравитационного поля  $\vec{g}$  равна ускорению частицы в этом поле  $\vec{w}$ :  $\vec{g} = \vec{w}$ . Таким образом, в одинаковых гравитационных полях все частицы, независимо от их массы, ускоряются одинаково.

Переход к континуальному приближению (т. е. такому приближению, в котором величины могут принимать непрерывный ряд значений) осуществляется в уравнениях (1.3) и (1.5) заменой суммирования на интегрирование по правилу

$$\sum_k m_k \dots \rightarrow \int_M dm \dots = \int_V d\vec{r} \rho(\vec{r}) \dots, \quad (1.9)$$

где  $M$  — полная масса системы,  $V$  — объем, занимаемый системой,  $dm$  и  $d\vec{r}$  — элементы массы и объема соответственно, а  $\rho(\vec{r})$  — массовая плотность в точке  $\vec{r}$ . В результате этого перехода получаем, что

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G \int_V \frac{d\vec{r}' \rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (1.10)$$

$$\varphi(\vec{r}) = -G \int_V \frac{d\vec{r}' \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (1.11)$$

Выражения (1.10) и (1.11), при условии спадания поля на бесконечности, являются решениями уравнения для

напряженности гравитационного поля  $\vec{g}(\vec{r})$ :

$$\vec{\nabla}\vec{g}(\vec{r}) = -4\pi G\rho(\vec{r}), \quad (1.12)$$

или, соответственно, уравнения Пуассона для потенциала гравитационного поля  $\varphi(\vec{r})$ :

$$\Delta\varphi(\vec{r}) = 4\pi G\rho(\vec{r}), \quad (1.13)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа. Таким образом, теория гравитации Ньютона является статической (гравистатика). Зависимость потенциала  $\varphi$  от времени  $t$  может появиться только в том случае, если плотность  $\rho$  будет зависеть от времени:  $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ . В этом случае поле тяготения в момент времени  $t$  на любом расстоянии от системы определяется распределением масс этой системы в тот же момент времени  $t$ , т. е. в этой теории гравитационное поле распространяется мгновенно (с бесконечной скоростью). В начале XX в. стало понятно, что положение о мгновенном распространении поля противоречит эксперименту и специальной теории относительности (СТО), в соответствии с которой никакое взаимодействие не может распространяться со скоростью, превышающей скорость света в вакууме. Отметим, что в силу соответствия многочисленным наблюдательным и экспериментальным данным уравнение (1.13) должно являться нерелятивистским пределом (пределом малых скоростей, реализующимся в макром мире вокруг нас) для любой более общей теории гравитации (это положение называют *принципом соответствия*).

Уравнение Пуассона (1.13) можно решить, если известна плотность  $\rho$ , входящая в уравнения движения сплошной среды. Последние получены следующим образом. Скорости точек сплошной среды образуют некоторое векторное поле  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$ . Тогда с учетом равенства инертной и

гравитационной масс второй закон Ньютона можно записать в виде

$$\dot{\vec{v}} = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}, t) + \vec{f}(\vec{r}, t), \quad (1.14)$$

где  $\vec{f}(\vec{r}, t)$  — сторонняя массовая сила, выражаемая через давление  $p(\vec{r}, t)$  как

$$\vec{f}(\vec{r}, t) = -\frac{\vec{\nabla}p(\vec{r}, t)}{\rho(\vec{r}, t)}. \quad (1.15)$$

Расписав полную производную по времени  $\dot{\vec{v}}$ , получаем уравнение Эйлера:

$$\vec{v}_t + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\vec{\nabla}p}{\rho}. \quad (1.16)$$

В силу сохранения массы в процессе движения плотность  $\rho$  и скорость  $\vec{v}$  удовлетворяют уравнению непрерывности

$$\rho_t + \vec{\nabla}(\rho\vec{v}) = 0. \quad (1.17)$$

Наконец, систему уравнений необходимо дополнить уравнением состояния. В изоэнтропическом (адиабатическом) случае оно сводится к виду

$$p = p(\rho). \quad (1.18)$$

Уравнения (1.13), (1.16)—(1.18) представляют собой замкнутую самосогласованную систему, описывающую гравитационное поле и движение материи в приближении сплошной среды в нерелятивистском случае.

Остановимся подробнее на недостатках и ограничениях, внутренне присущих теории гравитации Ньютона.

Гравитационные возмущения распространяются с бесконечной скоростью (мгновенно), что противоречит как

современным данным, так и СТО. Отсюда следует ограничение на область применимости гравитации Ньютона, а именно: теория справедлива при малых скоростях частиц:

$$v \ll c, \quad (1.19)$$

где  $c$  — скорость света. В самом деле, рассмотрим движение одной частицы в гравитационном поле. Из классической механики следует, что, в силу закона сохранения энергии, скорости  $\vec{v}$  достигаются частицами в гравитационных полях с потенциалом

$$\varphi = -\frac{v^2}{2}. \quad (1.20)$$

Отрицательные значения потенциала ( $\varphi < 0$ ) означают, что гравитационное поле является полем притяжения. Из (1.19) и (1.20) получаем условие применимости теории гравитации Ньютона:

$$\frac{|\varphi|}{c^2} \ll 1. \quad (1.21)$$

Таким образом, теория гравитации Ньютона применима только в достаточно слабых полях, которые, впрочем, типичны для нашего ближайшего окружения. Например, легко получить, что в выбранных нами единицах на поверхности Земли  $|\varphi|/c^2 \sim 10^{-9}$ , а на поверхности Солнца  $|\varphi|/c^2 \sim 10^{-6}$ .

Однако даже в слабых полях теория гравитации Ньютона применима не во всех случаях. Она не справедлива, в частности, когда время распространения сигнала от источника поля существенно в рамках решаемой задачи (например, данное время сравнимо или превышает характерные времена движения тел в системе). Даже в слабых полях

этот подход неприменим в случаях, когда частицы, пролетающие вблизи массивных тел, имеют скорости, сравнимые со скоростью света (ультрарелятивистский предел), или, как в задачах распространения света в поле тяжести, равны ей.

## 1.2. Физические основы ОТО

Как отмечалось выше, сила гравитации  $\vec{F}_G$ , действующая на пробную частицу с радиусом-вектором  $\vec{r}$ , будет пропорциональна ее гравитационной массе  $m$ :

$$\vec{F}_G = m\vec{g}(\vec{r}, t), \quad (1.22)$$

где  $\vec{g}(\vec{r}, t)$  — напряженность гравитационного поля. С другой стороны, из механики известно, что сила инерции  $\vec{F}_I$ , действующая на тело в неинерциальной системе отсчета, пропорциональна его инертной массе  $\mu$ :

$$\vec{F}_I = \mu\vec{a}(\vec{r}, t), \quad (1.23)$$

где

$$\vec{a}(\vec{r}, t) = -\vec{W} + [\vec{r}\dot{\vec{\Omega}}] + 2[\dot{\vec{r}}\vec{\Omega}] + [\vec{\Omega}[\vec{r}\vec{\Omega}]] \quad (1.24)$$

есть полное ускорение неинерциальной системы отсчета, обусловленное ее поступательным движением с ускорением  $\vec{W}(t)$  и вращением с переменной угловой скоростью  $\vec{\Omega}(t)$ . Равенство инертной и гравитационной масс указывает на определенную эквивалентность гравитационного поля и поля сил инерции. Имеются, однако, и существенные отличия между этими полями. Действительно, как видим из (1.24), в общем случае  $\vec{a}$  растет с увеличением  $\vec{r}$ . Таким образом, величина силы инерции, вообще говоря,

возрастает при удалении от начала координат. В то же время силы гравитации могут вести себя иным образом. Например, сила тяжести, создаваемая точечным источником, уменьшается при удалении от источника.

Рассмотрим теперь равновесие в неинерциальной системе отсчета частицы, находящейся в поле тяжести. В силу равенства инертной и гравитационной масс ( $\mu = m$ ) получаем

$$\vec{g}(\vec{r}, t) = \vec{a}(\vec{r}, t). \quad (1.25)$$

В каждый фиксированный момент времени в точке  $\vec{r}$  вектор напряженности гравитационного поля  $\vec{g}(\vec{r}, t)$  имеет какое-то определенное значение. Параметры неинерциальной системы отсчета (ускорение  $\vec{W}(t)$  и угловая скорость  $\vec{\Omega}(t)$ ) могут быть подобраны таким образом, что равенство (1.25) удовлетворяется в этой точке. Другими словами, для механического движения мы можем перейти в такую неинерциальную систему отсчета, в которой локально (т. е. в заданной точке пространства в текущий момент времени) силы гравитации будут скомпенсированы силами инерции. Считая, что данное утверждение справедливо для механического движения с любыми скоростями, а не только со скоростями много меньшими скорости света, получим *слабый принцип эквивалентности*. Кратко его можно сформулировать так: *для механических процессов всегда существует система отсчета, называемая локально-инерциальной системой отсчета, в которой силы инерции локально эквивалентны силам тяжести*. Заметим, что речь идет именно о локальной эквивалентности, так как в силу отмеченной выше разницы между силами инерции и силами гравитации глобальная эквивалентность, вообще говоря, невозможна. Исключение составляют однородные (одинаковые во всех точках пространства) поля — в них гравитация глобально (во всем простран-

стве) эквивалентна инерции. Однако гравитационные поля, как физические поля, должны спадать на бесконечности и, следовательно, не могут быть глобально однородными.

Следует обратить внимание на следующие два аспекта принципа эквивалентности.

Во-первых, если в данной точке равнодействующая сил инерции и гравитации равна нулю, система отсчета в этой точке (и с заданной точностью, в малой ее окрестности) будет инерциальной.

Во-вторых, всегда существует такая неинерциальная система отсчета, в которой наблюдатель не может отличить действие сил инерции (в отсутствие гравитации) от действия эквивалентных им сил гравитации (в отсутствие сил инерции).

Слабый принцип эквивалентности изначально ограничен механическим движением частиц. Можно отказаться от этого ограничения и считать, что действие силы инерции локально эквивалентно действию силы тяжести *для любых физических процессов*. Это утверждение известно как *сильный принцип эквивалентности*. В самом общем виде сильный принцип эквивалентности можно сформулировать следующим образом: *в произвольном гравитационном поле в каждой точке пространства-времени существует «локально-инерциальная система отсчета», в которой в достаточно малой окрестности рассматриваемой точки законы природы будут иметь ту же самую форму, что и в не ускоренных декартовых системах отсчета СТО*.

Отметим следующее:

- сильный принцип эквивалентности постулирует универсальность гравитации: гравитационное поле взаимодействует со всеми материальными телами

и всеми другими полями (электромагнитным, сильным, слабым), существующими в природе;

- принцип эквивалентности (как слабый, так и сильный) применим для движений с любыми скоростями, в том числе и со скоростями, близкими или равными скорости света. Поскольку, как известно из СТО, такие движения адекватно описываются в четырехмерном пространстве-времени, то принцип эквивалентности должен формулироваться не в трехмерном пространстве, а в четырехмерном пространстве-времени.

Пусть  $x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$  — декартовы координаты. Тогда метрика плоского пространства-времени определяется выражением

$$ds^2 = \eta_{ik} dx^i dx^k, \quad (1.26)$$

где

$$\eta_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

есть метрический тензор плоского пространства-времени. В выражении (1.26) по дважды встречающимся индексам производится суммирование. Выражение (1.27) удобно записать в виде  $\eta_{ik} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . В дальнейшем мы будем пользоваться подобной формой для записи диагональных тензоров.

Перейдем теперь в неинерциальную систему отсчета. Преобразование из инерциальной системы отсчета в неинерциальную задается с помощью выражений

$$x^i = x^i(\acute{x}), \quad (1.28)$$

где  $\acute{x} = \{\acute{x}^i, i = 0, 1, 2, 3\}$  — совокупность координат новой (неинерциальной) системы отсчета. После преобразования (1.28) в новых координатах метрика принимает вид

$$d\acute{s}^2 = g_{ik}(\acute{x})d\acute{x}^i d\acute{x}^k, \quad (1.29)$$

где

$$g_{ik}(\acute{x}) = \eta_{ls} \frac{\partial \acute{x}^l}{\partial x^i} \frac{\partial \acute{x}^s}{\partial x^k} \quad (1.30)$$

есть метрический тензор плоского пространства-времени в новой (штрихованной) системе координат. В силу принципа эквивалентности метрика пространства-времени при наличии гравитационного поля будет также иметь вид (1.29). Таким образом, действие гравитации приводит к изменению метрики пространства-времени.

Как отмечалось выше, важное отличие сил инерции от сил гравитации состоит в том, что действие сил инерции может быть устранено во всем пространстве-времени (глобально) переходом в инерциальную систему отсчета. Другими словами, с помощью обратного к (1.28) преобразования можно свести метрику (1.29) к виду (1.26) для всего пространства-времени. Действие же гравитационного поля глобально не может быть устранено никакими преобразованиями координат, т. е. при наличии гравитационного поля никакими преобразованиями координат метрику (1.29) не свести к виду (1.26) во всех точках пространства-времени. Таким образом, гравитация изменяет геометрию пространства-времени: действие гравитационного поля эквивалентно тому, что пространство-время перестает быть плоским — его метрика приобретает вид (1.29), а метрический тензор начинает зависеть от четырех пространственно-временных компонент, и никакими преобразованиями координат эту зависимость не устранить глобально. Другими словами, под действием гравитационного поля пространство-время перестает быть плоским, а,

наоборот, искривляется. Это утверждение называется *геометризацией гравитации*.

Из сказанного, в частности, следует, что гравитационное поле имеет тензорный характер и описывается с помощью компонент метрического тензора  $g_{ik}$ . Это, в свою очередь, приводит к тому, что при наличии гравитационного поля изменяется понятие системы отсчета. Действительно, расстояние между двумя точками пространства

$$dl^2 = g_{\alpha\beta}(x^0; x^1, x^2, x^3) dx^\alpha dx^\beta, \quad (1.31)$$

где  $x^0$  — временная переменная,  $x^1, x^2, x^3$  — пространственные переменные,  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$  — индексы, которые нумеруют пространственные переменные<sup>1</sup>. Так как в общем случае метрический тензор  $g_{ik}$  зависит от времени, то пространственные интервалы  $dl$  будут постоянно изменяться во времени. Значит, будут изменяться во времени взаимные расстояния пробных тел, внесенных в гравитационное поле. Из последнего утверждения следует, что в кривом пространстве-времени невозможна, в самом общем случае, взаимная неподвижность системы тел, а значит, невозможно принятое в СТО понятие системы отсчета как совокупности неподвижных линеек с одинаково синхронизованными во всем пространстве часами. В этой ситуации в качестве системы отсчета выбирается бесконечная совокупность «невесомых» тел, непрерывно заполняющих все пространство подобно некоторой сплошной среде. Каждое из этих тел снабжено собственными часами таким образом, чтобы при переходе от точки к точке их показания изменялись непрерывным образом. Очевидно, что таких

---

<sup>1</sup> Здесь и далее, если не оговорено специально, латинские буквы будут использоваться для нумерации индексов 4-тензоров, а греческие — для нумерации индексов пространственных компонент этих тензоров.

систем отсчета можно построить бесконечное множество, так как существует бесконечное число способов параметризации этой сплошной среды и настройки часов. С математической точки зрения, задание системы отсчета в рассматриваемом случае сводится к присвоению каждой точке искривленного пространства-времени четверки чисел таким образом, чтобы их совокупность образовывала непрерывное множество — континуум. Такое задание системы отсчета будет соответствовать заданию системы координат в четырехмерном пространстве, отвечающем физическому пространству-времени.

В связи с изменением понятия «системы отсчета» должен также измениться принцип относительности. В СТО этот принцип постулировал эквивалентность всех инерциальных систем отсчета. Таким образом, математическое описание движения в СТО строилось так, чтобы уравнения имели одинаковый вид во всех инерциальных системах отсчета. Другими словами, уравнения должны быть ковариантными (т. е. не изменять своего вида) относительно линейных преобразований, задающих переход из одной инерциальной системы отсчета в другую. Теперь теорию нужно строить таким образом, чтобы уравнения были ковариантны относительно любых преобразований координат, задающих переход из одной произвольной системы отсчета в другую. Сформулированный подобным образом принцип относительности можно назвать общим, в отличие от специального принципа относительности, используемого в СТО. Теория гравитационного поля, построенная на основе принципа эквивалентности и общего принципа относительности, называется *общей теорией относительности* — ОТО.

## Глава 2

# Элементы математического аппарата ОТО

Адекватным математическим аппаратом для построения ОТО является тензорный анализ в искривленных пространствах, основы которого будут изложены в данной главе.

### 2.1. Тензоры

**1. Системы координат.** Рассмотрим некоторое непрерывное множество точек (физических событий)  $M$ . Поставим в соответствие каждой точке  $P$  этого множества упорядоченную совокупность из  $n$  действительных чисел  $x = \{x^i; i = 0, \dots, n - 1\}$ , которую будем называть *координатами* точки  $P$ . Множество всех координат всех точек образует арифметическое пространство размерности  $n$  (в ОТО таким пространством является пространство-время с  $n = 4$ ). Взаимно-однозначное соответствие между множеством точек  $M$  и множеством их координат  $x$  называется *системой координат*. Будем обозначать ее буквой  $X$ .

Важно понимать, что система координат может быть введена не единственным образом. Пусть заданы две системы координат  $X$  и  $\acute{X}$ . Координаты точки  $P$  в системе координат  $\acute{X}$  будем обозначать  $\acute{x}$ . Предположим, что

- между системами координат  $X$  и  $\acute{X}$  существуют как прямая, так и обратная функциональные зависимости

сти:

$$x^i = x^i(\acute{x}), \quad \acute{x}^i = \acute{x}^i(x); \quad (2.1)$$

- функции  $x^i = x^i(\acute{x})$  и  $\acute{x}^i = \acute{x}^i(x)$  непрерывны вместе со своими производными до порядка  $N \geq 2$ ;
- якобианы прямого  $J$  и обратного  $\acute{J}$  преобразований отличны от нуля:

$$J = \det \left| \frac{\partial x^i}{\partial \acute{x}^i} \right| \neq 0, \quad \acute{J} = \det \left| \frac{\partial \acute{x}^i}{\partial x^i} \right| \neq 0. \quad (2.2)$$

Далее перейдем к преобразованиям между системами координат  $X$  и  $\acute{X}$ . Величины, задаваемые в системе координат  $X$ , будем записывать без штриха (например,  $\varphi$ ,  $A^i$ ,  $A_i$ ,  $A^i_k$  и т. д.), а в системе координат  $\acute{X}$  — со штрихом (например,  $\acute{\varphi}$ ,  $\acute{A}^i$ ,  $\acute{A}_i$ ,  $\acute{A}^i_k$  и т. д.). Еще раз специально подчеркнем, что здесь и везде далее (если нет специальных оговорок)  $x$  и  $\acute{x}$  являются координатами одной и той же точки  $P$ . Поэтому все преобразования координат и соответствующие им законы преобразований различных величин относятся к одной и той же точке  $P$ .

**2. Инварианты.** Пусть в системе координат  $X$  физическая величина описывается функцией  $\varphi = \varphi(x)$ , а в системе координат  $\acute{X}$  та же самая физическая величина описывается функцией  $\acute{\varphi} = \acute{\varphi}(\acute{x})$ . Если в любой точке пространства

$$\varphi(x) = \acute{\varphi}(\acute{x}), \quad (2.3)$$

то такая величина называется *инвариантом* относительно преобразований координат, или *скаляром*, или *тензором нулевого ранга*. Другими словами, инвариантом является величина, для которой в каждой точке пространства ее значение в разных системах координат одно и то

же. В качестве примера рассмотрим потенциал, создаваемый частицей массы  $m$ , в ньютоновской теории гравитации. Исследуем его инвариантность относительно трехмерных преобразований координат. Рассуждаем следующим образом. В декартовой системе координат потенциал задается функцией  $\varphi(x, y, z) = -Gm/(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ , а, например, в сферической системе координат — функцией  $\dot{\varphi}(r) = -Gm/r$ . Замечаем, что при переходе из одной системы координат в другую меняется вид функциональной зависимости. Однако значение потенциала в данной точке  $P$  не зависит от системы координат. Таким образом,  $\varphi(x, y, z) = \dot{\varphi}(r)$ , что означает, что потенциал является инвариантом относительно преобразований от декартовых координат к сферическим. Поскольку подобные рассуждения остаются справедливыми при любом выборе систем координат, то потенциал является инвариантом относительно любых трехмерных преобразований координат. Физические поля, описываемые функциями, являющимися инвариантами во всех точках пространства, называются *скалярными полями*. Потенциал в ньютоновской теории гравитации является примером скалярного поля.

**3. Векторы.** Совокупность  $n$  величин  $A^i$ , которые при преобразованиях координат преобразуются по закону

$$\dot{A}^i = \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial x^k} A^k, \quad (2.4)$$

называется *контравариантным тензором первого ранга*, или *контравариантным вектором*. Здесь и везде далее по дважды встречающимся индексам производится суммирование.

Примером контравариантного вектора могут служить дифференциалы координат  $dx^i$ , поскольку при преобразо-

вании координат они преобразуются по формулам

$$d\acute{x}^i = \frac{\partial \acute{x}^i}{\partial x^k} dx^k. \quad (2.5)$$

Совокупность  $n$  величин  $A_i$ , которые при преобразованиях координат преобразуются по закону

$$\acute{A}_i = \frac{\partial x^k}{\partial \acute{x}^i} A_k, \quad (2.6)$$

называется *ковариантным тензором первого ранга* или *ковариантным вектором*. Примером ковариантного вектора является градиент скалярной функции (инварианта), поскольку при преобразованиях координат его компоненты преобразуются согласно выражению

$$\frac{\partial \phi(\acute{x})}{\partial \acute{x}^i} = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \acute{x}^i}, \quad (2.7)$$

которое является частным случаем формулы (2.6).

**4. Тензоры второго ранга.** Напомним некоторые определения. Совокупность  $n \times n = n^2$  величин  $A^{ik}$ , при преобразованиях координат преобразующаяся по закону

$$\acute{A}^{ik} = \frac{\partial \acute{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial \acute{x}^k}{\partial x^m} A^{lm}, \quad (2.8)$$

называется *контравариантным тензором второго ранга*.

Совокупность  $n \times n = n^2$  величин  $A_{ik}$ , при преобразованиях координат преобразующаяся по закону

$$\acute{A}_{ik} = \frac{\partial x^l}{\partial \acute{x}^i} \frac{\partial x^m}{\partial \acute{x}^k} A_{lm}, \quad (2.9)$$

называется *ковариантным тензором второго ранга*.

Совокупность  $n \times n = n^2$  величин  $A^i_{\cdot k}$ , при преобразованиях координат преобразующаяся по закону

$$\dot{A}^i_{\cdot k} = \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial \dot{x}^k} A^l_{\cdot m}, \quad (2.10)$$

называется *смешанным тензором второго ранга*.

Точка в  $A^i_{\cdot k}$  ( $\dot{A}^i_{\cdot k}$ ) указывает на то, что индекс  $k$  стоит на втором месте, так как, вообще говоря,  $A^i_{\cdot k} \neq A^i_k$  ( $\dot{A}^i_{\cdot k} \neq \dot{A}^i_k$ ). В дальнейшем, если не возникает недоразумений, точки перед индексами будем опускать.

Примерами тензоров второго ранга являются тензоры, компоненты которых представляют собой произведения компонент векторов:

$$A^{ik} = A^i B^k, \quad (2.11)$$

$$A_{ik} = A_i B_k, \quad (2.12)$$

$$A^i_k = A^i B_k. \quad (2.13)$$

Отметим, что компоненты не всякого тензора второго ранга можно представить в виде произведения компонент соответствующих векторов.

Докажем, что компоненты символа Кронекера

$$\delta^i_k = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \quad (2.14)$$

образуют смешанный тензор второго ранга. Пусть в системе координат  $X$  компоненты некоторого смешанного тензора второго ранга  $A^i_{\cdot k}$  совпадают с компонентами символа Кронекера  $\delta^i_k$ :  $A^i_{\cdot k} = \delta^i_k$ . Переходя в штрихованную систему координат  $\dot{X}$ , получаем

$$\dot{A}^i_{\cdot k} = \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial \dot{x}^k} A^l_{\cdot m} = \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial \dot{x}^k} \delta^l_m = \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial \dot{x}^k} = \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \dot{x}^k} = \delta^i_k. \quad (2.15)$$

Последнее равенство в выражении (2.15) справедливо в силу того, что при  $i \neq k$  координаты  $\acute{x}^i$  и  $\acute{x}^k$  независимы, так как являются координатами одной и той же системы координат  $\acute{X}$ . Таким образом, и в системе координат  $\acute{X}$  компоненты тензора  $\acute{A}^i_k$  совпадают с компонентами символа Кронекера  $\acute{\delta}^i_k$ :  $\acute{A}^i_k = \acute{\delta}^i_k$ . А это как раз и означает, что символ Кронекера представляет собой смешанный тензор второго ранга.

**5. Общее определение тензора.** Совокупность  $n^{\mathfrak{R}}$  величин  $A^i_{k\dots r}$ , которые при преобразованиях координат преобразуются по закону

$$\acute{A}^i_{kr\dots} = \frac{\partial \acute{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial \acute{x}^s}{\partial x^l} \dots \frac{\partial x^m}{\partial \acute{x}^k} \frac{\partial x^p}{\partial \acute{x}^r} \dots A^j_{mp\dots}, \quad (2.16)$$

называется *смешанным тензором ранга  $\mathfrak{R}$* . Здесь  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_c + \mathfrak{R}^c$ , где  $\mathfrak{R}_c$  — число нижних (ковариантных) индексов,  $\mathfrak{R}^c$  — число верхних (контравариантных) индексов. Если  $\mathfrak{R}_c = 0$ , то тензор становится контравариантным, а если  $\mathfrak{R}^c = 0$  — ковариантным. Отметим, что поскольку системы координат  $X$  и  $\acute{X}$  равноправны, то штрихованные и нештрихованные переменные и величины могут меняться местами. В частности, выражение (2.16) может быть записано в виде

$$A^i_{kr\dots} = \frac{\partial x^i}{\partial \acute{x}^j} \frac{\partial x^s}{\partial \acute{x}^l} \dots \frac{\partial \acute{x}^m}{\partial x^k} \frac{\partial \acute{x}^p}{\partial x^r} \dots \acute{A}^j_{mp\dots}. \quad (2.17)$$

Из выражений (2.16) и (2.17) следует, что преобразования тензоров линейны и однородны по отношению к самим тензорам.

Подчеркнем, что тензоры мы ввели независимо от метрики, т. е. они могут быть определены в пространствах, где метрика конкретно не определена.

## 2.2. Тензорная алгебра

**1. Равенство тензоров.** Если все компоненты одного тензора в данной системе координат равны соответствующим компонентам другого тензора в этой же системе координат, то такие два тензора называются *равными*. Если все компоненты тензора в данной точке равны нулю, говорят, что в этой точке тензор равен нулю. Из свойств преобразований тензоров сразу же следуют два утверждения:

- если тензоры равны в одной системе координат, то они будут равны и в другой системе координат, т. е. если в системе координат  $X$

$$A_{kr\dots}^{is\dots} = B_{kr\dots}^{is\dots}, \quad (2.18)$$

то и в системе координат  $\acute{X}$

$$\acute{A}_{kr\dots}^{is\dots} = \acute{B}_{kr\dots}^{is\dots}; \quad (2.19)$$

- если в данной точке  $P$  в системе координат  $X$  какой-либо тензор равен нулю:

$$A_{kr\dots}^{is\dots} = 0, \quad (2.20)$$

то в этой же самой точке  $P$  в другой системе координат  $\acute{X}$  этот же тензор также будет равен нулю:

$$\acute{A}_{kr\dots}^{is\dots} = 0. \quad (2.21)$$

Из этих утверждений следует общая ковариантность (неизменность вида) тензорных уравнений, записанных в разных системах координат. Таким образом, если какое-либо тензорное уравнение имеет определенный вид в одной системе координат, то оно имеет точно такой же вид и в другой системе координат.

**2. Сложение и вычитание тензоров.** Пусть  $A_{kr\dots}^{is\dots}$  и  $B_{kr\dots}^{is\dots}$  — два тензора одинакового ранга и одинаковой ковариантности (т. е. с одинаковым числом ко- и контравариантных индексов). Составим числа  $C_{kr\dots}^{is\dots}$ , равные суммам и разностям соответствующих компонент тензоров:

$$C_{kr\dots}^{is\dots} = A_{kr\dots}^{is\dots} \pm B_{kr\dots}^{is\dots}. \quad (2.22)$$

Числа  $C_{kr\dots}^{is\dots}$  образуют тензор того же ранга и той же ковариантности, что тензоры  $A_{kr\dots}^{is\dots}$  и  $B_{kr\dots}^{is\dots}$ . Действительно, поскольку  $A_{kr\dots}^{is\dots}$  и  $B_{kr\dots}^{is\dots}$  — тензоры, то

$$\acute{A}_{kr\dots}^{is\dots} = \frac{\partial \acute{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial \acute{x}^s}{\partial x^l} \cdots \frac{\partial x^m}{\partial \acute{x}^k} \frac{\partial x^p}{\partial \acute{x}^r} \cdots A_{mp\dots}^{jl\dots}, \quad (2.23)$$

$$\acute{B}_{kr\dots}^{is\dots} = \frac{\partial \acute{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial \acute{x}^s}{\partial x^l} \cdots \frac{\partial x^m}{\partial \acute{x}^k} \frac{\partial x^p}{\partial \acute{x}^r} \cdots B_{mp\dots}^{jl\dots}. \quad (2.24)$$

Тогда

$$\acute{C}_{kr\dots}^{is\dots} = \acute{A}_{kr\dots}^{is\dots} \pm \acute{B}_{kr\dots}^{is\dots} = \frac{\partial \acute{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial \acute{x}^s}{\partial x^l} \cdots \frac{\partial x^m}{\partial \acute{x}^k} \frac{\partial x^p}{\partial \acute{x}^r} \cdots (A_{mp\dots}^{jl\dots} \pm B_{mp\dots}^{jl\dots}). \quad (2.25)$$

Учитывая (2.22), получаем, что числа  $C_{kr\dots}^{is\dots}$  преобразуются как компоненты тензора

$$\acute{C}_{kr\dots}^{is\dots} = \frac{\partial \acute{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial \acute{x}^s}{\partial x^l} \cdots \frac{\partial x^m}{\partial \acute{x}^k} \frac{\partial x^p}{\partial \acute{x}^r} \cdots C_{mp\dots}^{jl\dots}. \quad (2.26)$$

Тензор  $C_{kr\dots}^{is\dots}$  называется суммой (разностью) тензоров  $A_{kr\dots}^{is\dots}$  и  $B_{kr\dots}^{is\dots}$ , а операции образования его компонент — *сложением* (*вычитанием*) этих тензоров. Как следует непосредственно из определения, складывать и вычитать можно только тензоры одинакового ранга и одинаковой ковариантности. Как уже отмечалось, тензор, получающийся

в результате сложения или вычитания двух других тензоров, будет иметь тот же ранг и ту же ковариантность, что и исходные тензоры.

**3. Свертывание тензоров.** Операция свертки заключается в том, что в исходном тензоре два индекса — один ковариантный и один контравариантный — приравниваются друг другу и по этим одинаковым индексам производится суммирование по всем возможным их значениям. В результате получается тензор, ранг которого на две единицы меньше ранга исходного тензора.

Рассмотрим смешанный тензор  $A_{k\dots r}^{i\dots s\dots}$  ранга  $\mathfrak{R}(A)$  (индексы  $s$  и  $r$  могут по отдельности стоять на любом месте). Свертывание осуществляется путем приравнивания между собой каких-либо двух индексов различной ковариантности (например,  $r = s$ ) и суммированием по дважды встречающемуся индексу  $s$ . Получившаяся в результате совокупность чисел  $B_{k\dots}^{i\dots} = A_{k\dots s\dots}^{i\dots s\dots}$  будет являться тензором ранга  $\mathfrak{R}(B) = \mathfrak{R}(A) - 2$ . Действительно, так как  $A_{k\dots r}^{i\dots s\dots}$  — тензор, то он преобразуется по закону

$$A_{k\dots r}^{i\dots s\dots} = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \dots \frac{\partial x^s}{\partial x^l} \dots \frac{\partial x^m}{\partial x^k} \dots \frac{\partial x^p}{\partial x^r} \dots A_{m\dots p\dots}^{j\dots l\dots} \quad (2.27)$$

Свертывая по индексам  $s$  и  $r$ , получаем

$$\begin{aligned} A_{k\dots s\dots}^{i\dots s\dots} &= \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \dots \frac{\partial x^s}{\partial x^l} \frac{\partial x^p}{\partial x^s} \dots \frac{\partial x^m}{\partial x^k} \dots A_{m\dots p\dots}^{j\dots l\dots} = \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \dots \delta_l^p \dots \frac{\partial x^m}{\partial x^k} \dots A_{m\dots p\dots}^{j\dots l\dots} = \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^m}{\partial x^k} \dots A_{m\dots l\dots}^{j\dots l\dots}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

что дает тензорный закон преобразования для величин, получившихся в результате свертывания.

Очевидно, что операцию свертывания можно применять к тензору неоднократно до тех пор, пока ранг тензора не станет меньше двух. Тензор нечетного ранга может быть свернут до вектора, а тензор четного ранга — до скаляра. В частности, скаляр получается путем однократной свертки смешанного тензора второго ранга. Действительно, в силу закона преобразования смешанных тензоров второго ранга (2.10) имеем

$$\dot{A}_i^i = \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial \dot{x}^i} A_{.m}^l = \delta_l^m A_m^l = A_l^l, \quad (2.29)$$

что и доказывает инвариантность свертки смешанного тензора второго ранга.

Отметим, что операцию, подобную операции свертывания тензоров (приравнивание одинакового числа верхних и нижних индексов с последующим по ним суммированием), можно ввести для других (не тензорных) объектов, зависящих от большого числа индексов.

**4. Умножение тензоров.** Пусть  $A_{kr\dots}^{is\dots}$  и  $B_{kr\dots}^{is\dots}$  — два тензора произвольных (и, в общем случае, различных) рангов и ковариантностей. Составим числа  $C_{kr\dots fh\dots}^{is\dots qq\dots}$ , равные всевозможным произведениям компонент одного тензора на компоненты другого:

$$C_{kr\dots fh\dots}^{is\dots qq\dots} = A_{kr\dots}^{is\dots} B_{fh\dots}^{qq\dots}. \quad (2.30)$$

Пусть  $\mathfrak{R}(A)$  — ранг тензора  $A_{kr\dots}^{is\dots}$ , а  $\mathfrak{R}(B)$  — ранг тензора  $B_{kr\dots}^{is\dots}$ , тогда числа  $C_{kr\dots fh\dots}^{is\dots qq\dots}$  образуют тензор ранга  $\mathfrak{R}(C)$ , равного сумме рангов сомножителей:  $\mathfrak{R}(C) = \mathfrak{R}(A) + \mathfrak{R}(B)$ . Действительно, поскольку  $A_{kr\dots}^{is\dots}$  и  $B_{kr\dots}^{is\dots}$  — тензоры, то в

силу выражений (2.23) и (2.24) имеем:

$$\begin{aligned} \acute{C}_{kr...fh...}^{is...qq...} &= \acute{A}_{kr...}^{is...} \acute{B}_{fh...}^{qq...} = \\ &= \frac{\partial \acute{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial \acute{x}^s}{\partial x^l} \cdots \frac{\partial x^m}{\partial \acute{x}^k} \frac{\partial x^p}{\partial \acute{x}^r} \cdots \frac{\partial \acute{x}^q}{\partial x^t} \frac{\partial \acute{x}^g}{\partial x^v} \cdots \frac{\partial x^d}{\partial \acute{x}^f} \frac{\partial x^e}{\partial \acute{x}^h} \cdots A_{mp...}^{jl...} B_{de...}^{tv...} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Учитывая (2.30), получаем, что величины  $C_{kr...fh...}^{is...qq...}$  преобразуются как компоненты тензора

$$\acute{C}_{kr...fh...}^{is...qq...} = \frac{\partial \acute{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial \acute{x}^s}{\partial x^l} \cdots \frac{\partial x^m}{\partial \acute{x}^k} \frac{\partial x^p}{\partial \acute{x}^r} \cdots \frac{\partial \acute{x}^q}{\partial x^t} \frac{\partial \acute{x}^g}{\partial x^v} \cdots \frac{\partial x^d}{\partial \acute{x}^f} \frac{\partial x^e}{\partial \acute{x}^h} \cdots C_{mp...de...}^{jl...tv...} \quad (2.32)$$

Тензор  $C_{kr...fh...}^{is...qq...}$  называется *тензорным произведением* тензоров  $A_{kr...}^{is...}$  и  $B_{kr...}^{is...}$ , а операция образования его компонент — *тензорным умножением* этих тензоров. Тензор, получающийся в результате тензорного произведения двух других тензоров, будет иметь ранг, равный сумме рангов сомножителей. Примером тензорного произведения тензоров является рассмотренное выше произведение векторов (2.11)—(2.13).

Внутреннее произведение — это тензорное произведение с последующей сверткой по части индексов. Например,  $A_{is}B^{sk} = C_k^i$ . В частности, внутреннее произведение двух тензоров первого ранга (т. е. векторов) есть хорошо знакомое из векторной алгебры скалярное произведение векторов, которое является инвариантом:  $A_i B^i = inv$ .

**5. Симметричные и антисимметричные тензоры.** Симметричными тензорами называются такие тензоры, которые не изменяются при перестановке двух индексов одинаковой ковариантности. Например, тензор  $A_{...}$  будет симметричным по индексам  $i$  и  $k$ , если

$$A_{...i...k...} = A_{...k...i...}, A_{...i...k...} = A_{...k...i...}. \quad (2.33)$$

Соответственно антисимметричными называются такие тензоры, которые изменяют знак на противоположный при перестановке двух индексов одинаковой ковариантности:

$$A_{\dots i \dots k \dots} = -A_{\dots k \dots i \dots}, A_{\dots}{}^{i \dots k \dots} = -A_{\dots}{}^{k \dots i \dots}. \quad (2.34)$$

В качестве примера рассмотрим ковариантный тензор второго ранга  $A_{ik}$ . Определим для него следующие операции:

- симметризация, т. е. построение из тензора  $A_{ik}$  симметричного тензора  $A_{(i,k)}$ :

$$A_{(i,k)} = \frac{1}{2}(A_{ik} + A_{ki}); \quad (2.35)$$

- антисимметризация, т. е. построение из тензора  $A_{ik}$  антисимметричного тензора  $A_{[i,k]}$ :

$$A_{[i,k]} = \frac{1}{2}(A_{ik} - A_{ki}). \quad (2.36)$$

Очевидно, что любой ковариантный тензор второго ранга можно представить в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров:

$$A_{ik} = A_{(i,k)} + A_{[i,k]}. \quad (2.37)$$

Рассмотрим симметричный  $C^{ik}$  и антисимметричный  $A_{ik}$  тензоры второго ранга. Свернем их тензорное произведение по всем индексам. Тогда в силу симметрии и антисимметрии тензоров получаем

$$C^{ik} A_{ik} = -C^{ki} A_{ki}. \quad (2.38)$$

Переобозначая немые индексы суммирования, имеем

$$C^{ik} A_{ik} = -C^{ik} A_{ik}. \quad (2.39)$$

Последнее равенство означает, что  $C^{ik} A_{ik} = 0$ . Таким образом, свертка по двум парам индексов произведения симметричного тензора второго ранга с антисимметричным тензором второго ранга равна нулю.

**6. Признак тензорной величины.** Какой-либо неизвестный индексный объект является тензором, если его внутреннее произведение с другим тензором также является тензором. Это утверждение называется *правилом частного*, или *строгой теоремой частного*.

Проиллюстрируем доказательство этой теоремы на следующем примере. Пусть  $A(i, k)$  — некоторый двухиндексный объект, закон преобразования которого неизвестен. Однако известно, что в любой системе координат свертка  $A(i, k)$  с *любым* контравариантным вектором  $B^k$  образует ковариантный вектор  $C_i$ :

$$A(i, k)B^k = C_i. \quad (2.40)$$

Запишем это равенство в штрихованной системе координат. Имеем

$$\acute{A}(i, k)\acute{B}^k = \acute{C}_i. \quad (2.41)$$

Пользуясь законами преобразования векторов и переобозначая, где необходимо, индексы, из этих выражений получаем

$$A(i, k)B^k = \frac{\partial \acute{x}^l}{\partial x^i} \acute{C}_l = \frac{\partial \acute{x}^l}{\partial x^i} \acute{A}(l, j) \acute{B}^j = \frac{\partial \acute{x}^l}{\partial x^i} \frac{\partial \acute{x}^j}{\partial x^k} \acute{A}(l, j) B^k. \quad (2.42)$$

Сравнивая начало и конец этого выражения, в силу произвольности вектора  $B^k$  получаем

$$A(i, k) = \frac{\partial \acute{x}^l}{\partial x^i} \frac{\partial \acute{x}^j}{\partial x^k} \acute{A}(l, j). \quad (2.43)$$

Таким образом, совокупность величин  $A(i, k)$  преобразуется как ковариантный тензор второго ранга:  $A(i, k) = A_{ik}$ .

## 2.3. Ковариантное дифференцирование. Связность

**1. Частная производная от тензора — не тензор.** Выше мы установили (см. (2.7)), что производная от тензора нулевого ранга (инварианта) является ковариантным тензором первого ранга (ковариантным вектором). В дальнейшем будем обозначать операцию дифференцирования с помощью запятой. Например,  $\varphi_{,i}$  означает частную производную функции  $\varphi$  по  $x^i$ , а выражение (2.7) в этих обозначениях запишется в виде

$$\dot{\varphi}_{,i} = \frac{\partial x^k}{\partial \dot{x}^i} \varphi_{,k}. \quad (2.44)$$

Итак, производная от инварианта  $\varphi_{,i}$  — вектор. А чем является производная от вектора? Рассмотрим, например, закон преобразования производной от ковариантного вектора

$$A_{i,j} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j}. \quad (2.45)$$

В результате преобразований координат получаем

$$\dot{A}_{i,j} = \left( \frac{\partial x^k}{\partial \dot{x}^i} A_k \right)_{,j} = \frac{\partial x^k}{\partial \dot{x}^i} \frac{\partial x^m}{\partial \dot{x}^j} A_{k,m} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} A_k. \quad (2.46)$$

Закон преобразования (2.46) не является тензорным. Таким образом, частная производная по координатам от вектора не является тензором. То же самое можно сказать и в общем случае: *частная производная по координатам*

от тензора любого ранга выше нулевого не является тензором. Таким образом, задача состоит в том, чтобы так переопределить производную, чтобы в результате дифференцирования тензоров любого ранга получался тензор. Производные, удовлетворяющие этому требованию, называются ковариантными производными.

**2. Связность. Ковариантная производная вектора.** Для того чтобы определить понятие ковариантной производной, введем в каждой точке пространства совокупность  $n^3$  величин  $\Gamma_{ij}^k$ , которая называется *линейной, или аффинной, связностью* пространства, а сами величины  $\Gamma_{ij}^k$  называются *коэффициентами связности*. В дальнейшем, если не возникает недоразумений, линейную (аффинную) связность будем называть просто связностью.

Рассмотрим ковариантный вектор  $A_i$ . Определим ковариантную производную этого вектора (обозначаем точкой с запятой или оператором  $\nabla$ )  $A_{i;j} \equiv \nabla_j A_i$  так, чтобы она удовлетворяла следующим требованиям:

1. Ковариантная производная ковариантного вектора  $A_{i;j}$  является ковариантным тензором второго ранга;
2. Ковариантная производная  $A_{i;j}$  является линейной формой от  $A_{i,j}$  и  $A_i$ ;
3. Если  $A_i \equiv 0$ , то и  $A_{i;j} \equiv 0$ ;
4. Если коэффициенты связности  $\Gamma_{ij}^k = 0$ , то ковариантная производная совпадает с частной производной:  $A_{i;j} = A_{i,j}$ .

Простейшая функциональная форма, удовлетворяющая этим требованиям, задается выражением

$$A_{i;j} = A_{i,j} - \Gamma_{ij}^k A_k. \quad (2.47)$$

Аналогичным образом ковариантную производную контравариантного вектора запишем в виде

$$A^i_{;j} = A^i_{,j} + \Gamma^i_{kj} A^k. \quad (2.48)$$

Как видим, коэффициенты связности определяют, насколько ковариантная производная вектора отличается от частной производной того же вектора. Чтобы ковариантные производные были тензорами, необходимо, чтобы коэффициенты связности преобразовывались по определенному закону. Найдем этот закон.

**3. Закон преобразования связностей.** По условию ковариантная производная от контравариантного вектора является смешанным тензором второго ранга. Отсюда, переходя в систему координат  $\acute{X}$ , имеем

$$\begin{aligned} \acute{A}^i_{;j} &= \frac{\partial \acute{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial \acute{x}^j} A^l_{;m} = \frac{\partial \acute{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial \acute{x}^j} (A^l_{,m} + \Gamma^l_{pm} A^p) = \\ &= \frac{\partial \acute{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial A^l}{\partial \acute{x}^j} + \frac{\partial \acute{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial \acute{x}^j} \Gamma^l_{pm} A^p = \\ &= \frac{\partial \acute{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial}{\partial \acute{x}^j} \left( \frac{\partial x^l}{\partial \acute{x}^k} \acute{A}^k \right) + \frac{\partial \acute{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial \acute{x}^j} \Gamma^l_{pm} \left( \frac{\partial x^p}{\partial \acute{x}^k} \acute{A}^k \right) = \\ &= \frac{\partial \acute{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial \acute{x}^k} \frac{\partial}{\partial \acute{x}^j} \acute{A}^k + \frac{\partial \acute{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial^2 x^l}{\partial \acute{x}^j \partial \acute{x}^k} \acute{A}^k + \frac{\partial \acute{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^p}{\partial \acute{x}^k} \frac{\partial x^m}{\partial \acute{x}^j} \Gamma^l_{pm} \acute{A}^k = \\ &= \acute{A}^i_{;j} + \left( \frac{\partial \acute{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial^2 x^l}{\partial \acute{x}^j \partial \acute{x}^k} + \frac{\partial \acute{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial \acute{x}^j} \frac{\partial x^p}{\partial \acute{x}^k} \Gamma^l_{pm} \right) \acute{A}^k. \end{aligned} \quad (2.49)$$

С другой стороны,  $\acute{A}^i_{;j}$  — ковариантная производная. Поэтому

$$\acute{A}^i_{;j} = \acute{A}^i_{,j} + \acute{\Gamma}^i_{kj} \acute{A}^k, \quad (2.50)$$

где  $\acute{\Gamma}^i_{kj}$  — компоненты связности в системе координат  $\acute{X}$ . Сравнивая формулы (2.49) и (2.50), получаем искомый за-

кон преобразования связностей:

$$\dot{\Gamma}_{kj}^i = \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial^2 x^l}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^k} + \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial \dot{x}^j} \frac{\partial x^p}{\partial \dot{x}^k} \Gamma_{pm}^l. \quad (2.51)$$

Из-за первого слагаемого в выражении (2.51), целиком обусловленного способом преобразования координат, связность преобразуется не по тензорному закону. Тем не менее, согласно этому закону преобразования, ее компоненты в произвольной системе координат однозначно определяются значениями этих компонент в любой другой системе координат. Следовательно, связности относятся к числу величин, характеризующих внутренние свойства пространства.

Отметим, что значение связности и даже само ее наличие или отсутствие зависит от системы координат, в которой связность задается. Действительно, из (2.51) видно, что если в какой-либо системе координат коэффициенты связности обращаются в нуль ( $\Gamma_{pm}^l = 0$ ), то в другой системе координат эти коэффициенты могут быть отличны от нуля ( $\dot{\Gamma}_{kj}^i \neq 0$ ). Так, например, на плоскости в декартовых координатах коэффициенты связности равны нулю, а в полярных координатах — отличны от нуля.

Пространства, в которых определена связность и не существует систем координат, в которых во всем пространстве (т. е. одновременно во всех точках пространства) связность обращается в нуль, будем называть *пространствами аффинной связности*, или, если не возникает недоразумений, *пространствами со связностью*. Пространства же, в которых существует система координат, называемая *декартовой*, в которой во всем пространстве все коэффициенты связности тождественно обращаются в нуль, будем называть *плоскими* по связности. Имея в виду отличие пространств со связностью от плоских пространств,

мы будем также называть их *кривыми* (*искривленными*) пространствами.

В дальнейшем мы увидим, что в искривленных пространствах, несмотря на то, что не существует системы координат, в которой связности равны нулю во всем пространстве, существуют локальные координаты, в которых связности обращаются в нуль в данной точке.

**4. Тензор кручения.** Итак, мы установили, что связности не образуют тензор. Тем не менее из связностей тензор можно построить, если произвести операцию *альтернирования* по нижним индексам

$$S_{kj}^i = \Gamma_{kj}^i - \Gamma_{jk}^i. \quad (2.52)$$

То, что  $S_{kj}^i$  — тензор, следует непосредственно из закона преобразования связностей (2.51). Действительно, из (2.51) видно, что при перестановке индексов  $k$  и  $j$  первое слагаемое в этом выражении не изменяется, а значит, сократится при составлении разности  $\hat{\Gamma}_{kj}^i - \hat{\Gamma}_{jk}^i = \hat{S}_{kj}^i$ . В результате для  $\hat{S}_{kj}^i$  получим

$$\hat{S}_{kj}^i = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial \hat{x}^j} \frac{\partial x^p}{\partial \hat{x}^k} S_{pm}^l. \quad (2.53)$$

Из (2.53) следует, что  $S_{kj}^i$  является смешанным тензором третьего ранга, который называется *тензором кручения*. Как следует непосредственно из определения (2.52), тензор кручения — антисимметричный тензор:  $S_{kj}^i = -S_{jk}^i$ .

Если во всем пространстве тензор кручения тождественно равен нулю  $S_{kj}^i \equiv 0$ , то  $\Gamma_{kj}^i = \Gamma_{jk}^i$ . Такая связность называется *симметричной*.

Покажем, что в ОТО тензор кручения равен нулю. Действительно, согласно ОТО, единственной причиной

нетривиальной геометрии (искривления) пространства-времени является действие гравитационного поля. Поскольку в рассматриваемой теории геометрия описывается с помощью коэффициентов связности  $\Gamma_{ij}^k$ , то отличие именно их от нуля должно быть вызвано гравитацией. Но, с другой стороны, согласно принципу эквивалентности всегда существуют такие системы отсчета (системы координат  $X$ ), в которых в данной точке  $P$  действие гравитационного поля скомпенсировано, а значит, пространство в точке  $P$  является локально плоским. Это, в свою очередь, означает, что в точке  $P$  в системе координат  $X$  коэффициенты связности обращаются в нуль  $\Gamma_{ij}^k(P) = 0$ , а значит, и тензор кручения также равен нулю:  $S_{ij}^k(P) = 0$ . Но поскольку  $S_{ij}^k$  — тензор, то равенство нулю этого тензора в данной точке  $P$  в одной системе координат  $X$  автоматически означает его равенство нулю в этой же точке  $P$  в любой другой системе координат  $X'$ . Таким образом, тензор кручения равен нулю в точке  $P$  в любой системе координат. Поскольку подобные рассуждения справедливы для любой точки пространства, это означает, что в ОТО во всем пространстве тензор кручения тождественно равен нулю, а связность — симметрична.

**5. Ковариантная производная тензора второго и более высоких рангов.** Выражения для ковариантных производных тензоров более высоких рангов можно получить следующим образом. Построим всевозможные произведения двух векторов  $A^i B_k$ ,  $A^i B^k$ ,  $A_i B_k$ , которые являются примерами тензоров второго ранга, и возьмем от них ковариантную производную. То, что получается в результате, обобщим на случай произвольных тензоров второго ранга.

Полагая, что при ковариантном дифференцировании произведения векторов выполняется правило Лейбница,

получаем

$$\begin{aligned}\nabla_j (A^i B^k) &= (\nabla_j A^i) B^k + A^i (\nabla_j B^k) = \\ &= \frac{\partial(A^i B^k)}{\partial x^j} + \Gamma_{lj}^i A^l B^k + \Gamma_{lj}^k A^i B^l.\end{aligned}\quad (2.54)$$

Обобщая этот результат на произвольный контравариантный тензор второго ранга, получаем

$$\nabla_j A^{ik} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^j} + \Gamma_{lj}^i A^{lk} + \Gamma_{lj}^k A^{il}.\quad (2.55)$$

Аналогично находим

$$\nabla_j A_{ik} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^l A_{lk} - \Gamma_{kj}^l A_{il},\quad (2.56)$$

$$\nabla_j A_k^i = \frac{\partial A_k^i}{\partial x^j} + \Gamma_{lj}^i A_k^l - \Gamma_{kj}^l A_l^i.\quad (2.57)$$

Основываясь на полученных формулах, легко показать, что ковариантная производная от символа Кронекера равна нулю:

$$\nabla_j \delta_k^i = \frac{\partial \delta_k^i}{\partial x^j} + \Gamma_{lj}^i \delta_k^l - \Gamma_{kj}^l \delta_l^i = \Gamma_{kj}^i - \Gamma_{kj}^i = 0.\quad (2.58)$$

Обобщая данный подход, получаем, что ковариантная производная тензора произвольного ранга имеет вид

$$\begin{aligned}\nabla_j A_{pq\dots}^{mn\dots} &= \frac{\partial A_{pq\dots}^{mn\dots}}{\partial x^j} + \\ &+ \Gamma_{sj}^m A_{pq\dots}^{sn\dots} + \Gamma_{sj}^n A_{pq\dots}^{ms\dots} + \dots \\ &- \Gamma_{pj}^s A_{sq\dots}^{mn\dots} - \Gamma_{qj}^s A_{ps\dots}^{mn\dots} - \dots\end{aligned}\quad (2.59)$$

**6. Локально-геодезическая система координат.** Рассмотрим случай, когда связность симметрична:

$\Gamma_{kj}^i = \Gamma_{jk}^i$ . Пусть в системе координат  $X$  в точке  $P$  коэффициенты связности отличны от нуля:  $\Gamma_{kj}^i(P) \neq 0$ . Покажем, что всегда существует система координат  $\acute{X}$ , в которой в той же самой точке связность обращается в нуль:  $\acute{\Gamma}_{kj}^i(P) = 0$ . Такая система координат называется *геодезической в данной точке*, или *локально-геодезической системой координат*. Без ограничения общности можно выбрать точку  $P$  в начале координат. Обозначим коэффициенты связности в системе координат  $X$  в точке  $P$  как  $\bar{\Gamma}_{kj}^i$ :  $\Gamma_{kj}^i(P) = \bar{\Gamma}_{kj}^i$ . Перейдем в новую (штрихованную) систему координат  $\acute{X}$  так, что в бесконечно малой области вокруг начала координат переход из системы координат  $X$  в систему координат  $\acute{X}$  осуществляется по формуле

$$\acute{x}^i = x^i + \frac{1}{2} \bar{\Gamma}_{rs}^i x^r x^s. \quad (2.60)$$

Очевидно, что начала штрихованной и нештрихованной систем координат совпадают. Обратное преобразование приближенно можно записать в виде

$$x^i = \acute{x}^i - \frac{1}{2} \bar{\Gamma}_{rs}^i \acute{x}^r \acute{x}^s. \quad (2.61)$$

Вычисляя производные, получаем

$$\left( \frac{\partial \acute{x}^i}{\partial x^k} \right)_{x=0} = \delta_k^i, \quad \left( \frac{\partial x^i}{\partial \acute{x}^k} \right)_{x=0} = \delta_k^i, \quad \left( \frac{\partial^2 x^i}{\partial \acute{x}^k \partial \acute{x}^j} \right)_{x=0} = -\bar{\Gamma}_{kj}^i. \quad (2.62)$$

Подставляя вычисленные производные в закон преобразования связностей (2.51), получаем  $\acute{\Gamma}_{kj}^i(P) = 0$ . Таким образом, штрихованная система координат является локально-геодезической.

Локально-геодезическую систему координат можно построить для любой точки искривленного пространства.

Однако система, локально-геодезическая в одной точке, вообще говоря, не является таковой в какой-либо другой точке искривленного пространства. Система, геодезическая во всех точках, может быть построена только в плоском пространстве.

## 2.4. Параллельный перенос. Геодезическая

Рассматриваемые здесь понятия являются непосредственным обобщением соответствующих понятий, вводимых в трехмерном евклидовом пространстве.

**1. Производная по направлению.** Как известно, в трехмерном евклидовом пространстве в декартовой системе координат производная по направлению, задаваемому вектором  $\vec{\eta}$  от скалярной функции  $\varphi(x)$  в данной точке, задается выражением

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{\eta}} = \eta^\alpha \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^\alpha}, \quad (2.63)$$

а от вектора  $\vec{A}(x)$  — выражением

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{\eta}} = \eta^\alpha \frac{\partial \vec{A}(x)}{\partial x^\alpha}. \quad (2.64)$$

Здесь  $\alpha = 1, 2, 3$ . Обобщим эти выражения, считая, что вместо трехмерного евклидова пространства рассматривается многомерное искривленное пространство, а вместо скаляра и вектора — тензор произвольного ранга. Для этого нужно заменить частную производную на ковариантную, а скаляр и вектор — на тензор. Обозначая производную по направлению в этом случае символом  $\nabla_{\vec{\eta}}$ , получаем

$$\nabla_{\vec{\eta}} A_{mn\dots}^{ik\dots} = \eta^j \nabla_j A_{mn\dots}^{ik\dots}(x), \quad (2.65)$$

где  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ . Определенная таким образом производная называется *ковариантной производной тензора*  $A_{mn\dots}^{ik\dots}$  по направлению, задаваемому контравариантным вектором  $\eta^j$ .

**2. Параллельные (ковариантно постоянные) тензорные поля.** Рассмотрим трехмерное евклидово пространство. Пусть в этом пространстве имеется параметрически заданная кривая  $x^\alpha = x^\alpha(\mu)$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ), где  $\mu$  — параметр. Пусть вдоль этой кривой задано скалярное  $\varphi(x)$  или векторное  $\vec{A}(x)$  поле. Рассмотрим производные

$$\frac{d}{d\mu}\varphi(\{x^\alpha(\mu)\}) = \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\mu}, \quad (2.66)$$

$$\frac{d}{d\mu}\vec{A}(\{x^\alpha(\mu)\}) = \frac{\partial\vec{A}(x)}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\mu}. \quad (2.67)$$

Вектор  $\vec{u}$  с компонентами

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\mu} \quad (2.68)$$

направлен по касательной к кривой  $x^\alpha = x^\alpha(\mu)$  и называется *вектором скорости*. Если поля  $\varphi(x)$  и  $\vec{A}(x)$  не изменяются (постоянны) вдоль рассматриваемой кривой, то соответствующие производные по параметру  $\mu$  равны нулю:

$$\frac{d}{d\mu}\varphi(\{x^\alpha(\mu)\}) = 0,$$

$$\frac{d}{d\mu}\vec{A}(\{x^\alpha(\mu)\}) = 0.$$

Тогда на основании (2.66)—(2.68) получаем

$$u^\alpha \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^\alpha} = 0, \quad (2.69)$$

$$u^\alpha \frac{\partial\vec{A}(x)}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (2.70)$$

Выражения (2.69) и (2.70) являются условиями постоянства скалярного  $\varphi(x)$  и векторного  $\vec{A}(x)$  полей вдоль кривой  $x^\alpha = x^\alpha(\mu)$  в трехмерном евклидовом пространстве. В частности, если векторное поле  $\vec{A}(x)$  постоянно вдоль рассматриваемой кривой, то это означает, что в каждой точке этой кривой вектор  $\vec{A}$  имеет одинаковые длину и направление. В этом случае говорят, что постоянное векторное поле  $\vec{A}(x)$  *параллельно* вдоль кривой  $x^\alpha = x^\alpha(\mu)$ .

Как видно, скалярные и векторные поля в трехмерном евклидовом пространстве в декартовой системе координат будут постоянны вдоль заданной кривой, если взятые от них производные по направлению, задаваемому вектором скорости, равны нулю. Обобщим сказанное на случай искривленных многомерных пространств и произвольных тензорных полей. Рассмотрим некоторую кривую  $x^j = x^j(\mu)$ , где  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ , в многомерном искривленном пространстве. Контравариантный вектор скорости определим аналогично (2.68):

$$u^j = \frac{dx^j}{d\mu}. \quad (2.71)$$

Тогда, по определению, тензорное поле  $A_{mn\dots}^{ik\dots}(x)$  называется *ковариантно постоянным*, или *параллельным*, вдоль кривой  $x^j = x^j(\mu)$ , если во всех точках этой кривой ковариантная производная от тензора  $A_{mn\dots}^{ik\dots}$ , взятая по направлению, задаваемому вектором скорости  $u^j$ , равна нулю:

$$\nabla_{\vec{u}} A_{mn\dots}^{ik\dots} = u^j \nabla_j A_{mn\dots}^{ik\dots}(x) = 0. \quad (2.72)$$

Как видим, в искривленном пространстве ковариантное постоянство тензора зависит не только от вида кривой  $x^j = x^j(\mu)$  (производных  $u^j = \frac{dx^j}{d\mu}$ ), но и от значений связностей  $\Gamma_{ij}^k$  вдоль этой кривой.

**3. Параллельный перенос вектора.** Рассмотрим контравариантное векторное поле  $A^i(x)$ . Согласно (2.72) это векторное поле будет ковариантно постоянным, если

$$\nabla_{\vec{u}} A^i = u^j \nabla_j A^i(x) = 0. \quad (2.73)$$

Учитывая определения вектора скорости (2.71) и ковариантной производной от контравариантного вектора (2.48), получаем, что рассматриваемое контравариантное векторное поле  $A^i(x)$  удовлетворяет уравнениям

$$\frac{dA^i}{d\mu} + \Gamma_{kj}^i \frac{dx^j}{d\mu} A^k = 0. \quad (2.74)$$

Рассмотрим теперь на кривой  $x^j = x^j(\mu)$  две точки:  $P_0$  с координатами  $x_0^i = x^i(\mu_0)$  и  $P_1$  с координатами  $x_1^i = x^i(\mu_1)$ , которые соединены между собой кривой линией

$$x^j = x^j(\mu), \quad \mu_0 \leq \mu \leq \mu_1.$$

Пусть в точке  $P_0$  задан вектор  $A_0^i$ . Назовем *параллельным переносом* вектора  $A_0^i$  вдоль кривой  $x^j = x^j(\mu)$  такое векторное поле  $A^i(x)$ , которое параллельно в каждой точке кривой  $x^j = x^j(\mu)$  и совпадает с вектором  $A_0^i$  при  $\mu = \mu_0$ . Другими словами, параллельным переносом вектора  $A_0^i$  вдоль кривой  $x^j = x^j(\mu)$  называется векторное поле  $A^i(x)$ , удовлетворяющее системе дифференциальных уравнений (2.74) с начальными условиями

$$A^i(\mu_0) = A_0^i. \quad (2.75)$$

Вектор  $A_1^i = A^i(\mu_1)$  — значение поля  $A^i(x(\mu))$  в точке  $\mu_1$  — называется *результатом* параллельного переноса.

Заметим, что, во-первых, уравнения (2.74) вместе с начальными условиями (2.75) представляют собой задачу

Коши для системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами. Из теоремы существования и единственности решения задачи Коши следует, что параллельный перенос вектора  $A_0^i$  существует и однозначно определяется самим начальным вектором  $A_0^i$  (единственен). Во-вторых, параллельный перенос зависит от связностей  $\Gamma_{ij}^k$ . Отсюда видна разница между параллельным переносом в плоском и искривленном пространствах. Действительно, в плоском пространстве существует система координат, в которой во всем пространстве коэффициенты связности тождественно равны нулю,  $\Gamma_{ij}^k \equiv 0$ . Задача Коши в этом случае сводится к решению уравнения

$$\frac{dA^i}{d\mu} = 0 \quad (2.76)$$

с начальными условиями (2.75). Решая задачу Коши, находим, что  $A^i(\mu_0) = A_0^i$ , причем этот результат не зависит от формы кривой. Таким образом, в плоском пространстве при параллельном переносе вектора  $A^i$  вдоль кривой  $x^j = x^j(\mu)$  этот вектор остается постоянным, не зависящим от формы кривой и полностью определяется своим начальным значением. Наоборот, в кривом пространстве коэффициенты связности являются функциями координат  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k(x)$ . Рассмотрим семейство кривых, соединяющих две точки. Произведение  $\Gamma_{kj}^i \frac{dx^j}{d\mu}$  в уравнениях (2.74) будет изменяться как вдоль одной и той же кривой, так и при переходе от одних кривых к другим. Тот факт, что указанное произведение изменяется вдоль одной и той же кривой, означает, что результат параллельного переноса  $A_1^i$ , вообще говоря, не совпадает с начальным вектором  $A_0^i$ :  $A_1^i \neq A_0^i$ . А из того, что оно зависит от выбора кривой, следует, что при параллельном переносе вдоль различных кривых система уравнений (2.72) будет различна и, следо-

вательно, в искривленном пространстве результат параллельного переноса будет зависеть от формы кривой, вдоль которой он осуществляется. Таким образом, в искривленном пространстве при параллельном переносе вектора  $A^i$  вдоль некоторой кривой  $x^j = x^j(\mu)$  этот вектор изменяется вдоль рассматриваемой кривой и зависит от формы этой кривой.

Аналогичные рассуждения и выводы справедливы относительно параллельного переноса ковариантного вектора. В частности, легко установить, что параллельное ковариантное векторное поле  $A_i$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{dA_i}{d\mu} - \Gamma_{ij}^k \frac{dx^j}{d\mu} A_k = 0. \quad (2.77)$$

Найдем, как будет изменяться скалярное произведение двух векторов  $A^i$  и  $B_i$  при их параллельном переносе вдоль одной и той же кривой  $x^j = x^j(\mu)$ . Пользуясь (2.74) и (2.77) и переобозначая индексы суммирования, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mu}(A^i B_i) &= \frac{dA^i}{d\mu} B_i + \frac{dB_i}{d\mu} A^i = \\ &= -\Gamma_{kj}^i \frac{dx^j}{d\mu} A^k B_i + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^j}{d\mu} B_k A^i = 0. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Отсюда следует, что при параллельном переносе двух векторов различной ковариантности вдоль одной и той же кривой их скалярное произведение не изменяется:

$$A^i B_i = \text{const}. \quad (2.79)$$

Отметим, что до тех пор, пока метрика не определена, не определена и длина вектора. Поэтому, пользуясь полученным результатом, мы пока ничего не можем сказать о том,

как меняются длины векторов при их параллельном переносе.

**4. Приращение вектора при бесконечно малом параллельном переносе.** Из уравнений (2.74) следует, что при бесконечно малом параллельном переносе контравариантный вектор  $A^i$  получает приращение

$$\delta A^i = -\Gamma_{kj}^i A^k \delta x^j, \quad (2.80)$$

где  $\delta x^j$  — бесконечно малый вектор, на который осуществляется перенос.

Аналогичным образом получим приращение ковариантного вектора  $\delta A_i$ . Из (2.80) находим

$$\delta A_i = \Gamma_{ij}^k A_k \delta x^j, \quad (2.81)$$

т. е. приращение вектора при бесконечно малом параллельном переносе является билинейной векторной формой, коэффициентами в которой являются связности. Таким образом, коэффициенты связности определяют изменение вектора при параллельном переносе и, следовательно, характеризуют степень искривленности пространства.

Приращения векторов при бесконечно малом параллельном переносе можно записать в виде

$$\delta A^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^j} \delta x^j, \quad \delta A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} \delta x^j. \quad (2.82)$$

Сравнивая эти выражения с (2.80) и (2.81), получаем

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^j} = -\Gamma_{kj}^i A^k, \quad (2.83)$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k A_k. \quad (2.84)$$

Из полученных формул видно, что при параллельном переносе вектора вдоль некоторой кривой в искривленном

пространстве частные производные от этого вектора пропорциональны самому вектору, а коэффициентами пропорциональности являются коэффициенты связности.

**5. Геодезическая.** Рассмотрим прямую линию в трехмерном евклидовом пространстве. Она обладает тем замечательным свойством, что вектор скорости  $u^\alpha$  в каждой ее точке имеет одну и ту же длину и направление, т. е. постоянен. Другими словами, в трехмерном евклидовом пространстве векторное поле скоростей параллельно вдоль прямой линии. В кривом пространстве аналогичным свойством обладает *геодезическая линия*, или просто *геодезическая*.

По определению геодезической называется линия  $x^j = x^j(\mu)$ , вдоль которой ее векторное поле скоростей  $u^j(x)$  остается ковариантно постоянным (параллельным). Уравнение геодезической получается, если в уравнении (2.74) положить  $A^i = u^i$  и воспользоваться определением вектора скорости (2.71):

$$\frac{d^2 x^i}{d\mu^2} + \Gamma_{kj}^i \frac{dx^j}{d\mu} \frac{dx^k}{d\mu} = 0. \quad (2.85)$$

В плоском пространстве, где существует система координат такая, что во всех точках пространства  $\Gamma_{ij}^k = 0$  уравнение геодезической переходит в уравнение

$$\frac{d^2 x^i}{d\mu^2} = 0, \quad (2.86)$$

решением которого являются прямые линии:  $x^i = a^i \mu + b^i$ , где  $a^i$  и  $b^i$  — постоянные интегрирования. В искривленном пространстве  $\Gamma_{ij}^k \neq 0$ , а уравнение геодезической представляет собой систему, состоящую из  $n$  нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Решения этой системы  $x^i$  будут определены однозначно, если заданы начальные условия

$$x^i(\mu_0) = x_0^i, \frac{dx^i}{d\mu}(\mu_0) = \dot{x}_0^i. \quad (2.87)$$

Уравнения (2.85) с начальными условиями (2.87) образуют задачу Коши, решение которой существует и единственно в окрестности точки с координатами  $x_0^i$ . Геометрически это означает, что в указанной окрестности геодезическая линия определена однозначно, если задана точка  $x_0^i$ , через которую проходит геодезическая, и направление касательной к геодезической в этой точке.

**6. Производная Ли.** Обобщим понятие производной по направлению (2.63). Рассмотрим две точки  $P_0$  и  $P$ , которые соединены бесконечно малым вектором  $\xi^i$ . Координаты этих точек связаны соотношением

$$x^i(P) = x^i(P_0) + \xi^i. \quad (2.88)$$

Пусть задано скалярное поле  $\varphi(x)$ . Вычислим значение поля в точке  $P$ , если значение этого поля в точке  $P_0$  известно. В разложении в ряд Тейлора пренебрежем квадратичными поправками и поправками более высоких порядков. Разность  $\varphi(P) - \varphi(P_0)$  обозначим  $\mathcal{L}_{\xi}\varphi$  и назовем производной Ли от скалярного поля  $\varphi$ . Тогда получаем

$$\mathcal{L}_{\xi}\varphi = \xi^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}. \quad (2.89)$$

Как видим, для скалярного поля производная Ли совпадает с производной по направлению, задаваемому вектором  $\xi^i$ .

Производная Ли позволяет исследовать симметрии рассматриваемого поля. Поясним это на примере.

Пусть в трехмерном пространстве задано сферически-симметричное гравитационное поле  $\phi$ , которое описывается сферическими координатами  $r$ ,  $\vartheta$  и  $\varphi$ . Очевидно, что такое поле зависит от радиуса  $r$ , но не зависит от угловых координат  $\vartheta$  и  $\varphi$ . В этом случае производная от  $\phi$  по координатам  $\vartheta$ ,  $\varphi$  равна нулю. Другими словами, существуют векторы, выделяющие направления, вдоль которых производная Ли равна нулю. В рассматриваемом случае эти векторы направлены вдоль базисных векторов, задающих координаты  $\vartheta$  и  $\varphi$ . Будем говорить, что направление, задаваемое вектором  $\vec{\xi}$ , описывает *точечную симметрию*, если вдоль этого вектора значение скалярного поля в двух бесконечно близких точках  $P_0$  и  $P$  является постоянным.

Определим производную Ли для контравариантного векторного поля  $A^i$ . В отличие от скалярного поля теперь вычисляются величины (компоненты вектора  $A^i$ ), которые зависят от системы координат. Снова рассмотрим две точки  $P$  и  $P_0$ , которые разделены бесконечно малым вектором  $\xi^i$ . Разность значений рассматриваемого векторного поля в точке  $P$  и в точке  $P_0$  с точностью до членов второго порядка малости равна

$$A^i(P) - A^i(P_0) = \xi^j \frac{\partial A^i}{\partial x^j}. \quad (2.90)$$

Рассмотрим преобразование координат

$$\dot{x}^i = x^i + \xi^i, \quad (2.91)$$

в котором  $\xi^i$  — тот же самый бесконечно малый вектор, который фигурирует в выражении (2.88). Это означает, что точка  $P$  имеет те же значения координат в штрихованной системе координат, что и точка  $P_0$  в нештрихованной. Очевидно, что

$$\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial x^j} = \delta_j^i + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}. \quad (2.92)$$

Тогда закон преобразования вектора  $A^i$  в точке  $P$  запишется в виде

$$A^i(P) = \frac{\partial \acute{x}^i}{\partial x^j} A^j(P) = \left( \delta_j^i + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right) A^j(P). \quad (2.93)$$

Разница между преобразованными компонентами контравариантного векторного поля  $A^i(x)$  в точке  $P$  и непреобразованными компонентами того же самого векторного поля в точке  $P_0$  называется производной Ли от рассматриваемого векторного поля:

$$\mathcal{L}_{\xi} A^i = \xi^j \frac{\partial A^i}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} A^j(x). \quad (2.94)$$

Векторное поле  $A^i$  симметрично относительно вектора  $\xi^i$ , если равна нулю производная Ли  $\mathcal{L}_{\xi} A^i = 0$ .

Аналогично можно определить производную Ли от тензорного поля второго ранга  $A^{ik}(x)$ . Пусть в исходной (нештрихованной) системе координат тензор имеет компоненты  $A^{ik}$ . Тогда это же самое поле в преобразованной (штрихованной) системе координат с точностью до линейных по  $\partial \xi^i / \partial x^j$  членов запишется в виде

$$A^{ik}(\acute{x}) = A^{ik}(x) + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} A^{jk}(x) + \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} A^{ij}(x). \quad (2.95)$$

Эти выражения задают отличия компонент тензора в штрихованной и нештрихованной системах координат в одной и той же точке. Теперь вычислим разность компонент этого тензора в точках  $P$  и  $P_0$ . Имеем

$$A^{ik}(P) - A^{ik}(P_0) = \xi^j \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^j}. \quad (2.96)$$

Разница между значениями компонент тензора в точке  $P_0$  в нештрихованной системе координат и значениями

компонент тензора в точке  $P$  в штрихованной системе координат называется производной Ли для тензоров второго ранга:

$$\mathcal{L}_{\xi} A^{ik} = \xi^j \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} A^{jk}(x) + \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} A^{ij}(x). \quad (2.97)$$

Теперь можно определить симметрию тензорного поля  $A^{ik}$  относительно векторного поля  $\xi^i$  как равенство нулю производной Ли  $\mathcal{L}_{\xi} A^{ik} = 0$ .

Обобщим понятие производной Ли на тензоры произвольного ранга. Обозначим производную Ли от тензора  $A_{mn\dots}^{ik\dots}$  символом  $\mathcal{L}_{\xi} A_{mn\dots}^{ik\dots}$ . Потребуем, чтобы производная Ли обладала следующими свойствами:

1. Производная Ли от скаляра должна совпадать с производной по направлению

$$\mathcal{L}_{\xi} \varphi = \xi^i \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^i} \equiv \nabla_{\xi} \varphi. \quad (2.98)$$

2. При действии производной Ли на сумму тензоров должно выполняться свойство линейности

$$\mathcal{L}_{\xi} (aA_{mn\dots}^{ik\dots} + bB_{mn\dots}^{ik\dots}) = a\mathcal{L}_{\xi} A_{mn\dots}^{ik\dots} + b\mathcal{L}_{\xi} B_{mn\dots}^{ik\dots}, \quad (2.99)$$

где  $a$  и  $b$  — произвольные постоянные.

3. При действии производной Ли на произведение тензоров должно выполняться правило Лейбница

$$\mathcal{L}_{\xi} (A_{mn\dots}^{ik\dots} B_{sp\dots}^{jl\dots}) = (\mathcal{L}_{\xi} A_{mn\dots}^{ik\dots}) B_{sp\dots}^{jl\dots} + A_{mn\dots}^{ik\dots} (\mathcal{L}_{\xi} B_{sp\dots}^{jl\dots}). \quad (2.100)$$

4. Производная Ли от свертки тензора по паре индексов должна быть равна свертке от производной Ли от того же тензора по тем же индексам:

$$\mathcal{L}_{\xi} (A_{\dots i\dots}^{\dots i\dots}) = (\mathcal{L}_{\xi} A)_{\dots i\dots}^{\dots i\dots}. \quad (2.101)$$

5. Производная Ли от ковариантного вектора должна быть равна

$$\mathcal{L}_{\xi} A_i = \xi^j \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - A_j \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}. \quad (2.102)$$

Последнее выражение можно обосновать, если рассмотреть коммутатор от двух производных по направлению, действующий на скалярную функцию

$$[\nabla_{\vec{u}}, \nabla_{\vec{v}}] \varphi = \left( u^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} - v^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}. \quad (2.103)$$

В этом выражении производная  $\partial \varphi / \partial x^i$  является ковариантным вектором, а то, что действует на нее, назовем производной Ли от ковариантного векторного поля. После обобщения на произвольные векторные поля и очевидного переобозначения величин мы получаем формулу (2.102).

Найдем производную Ли от контравариантного вектора. Рассмотрим производную Ли от скалярного произведения. Пользуясь тем, что, с одной стороны,

$$\mathcal{L}_{\xi}(A_i B^i) = \xi^k \frac{\partial}{\partial x^k}(A_i B^i), \quad (2.104)$$

а с другой стороны, используя свойства (2.100) и (2.101), в результате получим формулу (2.94).

Используя (2.99)–(2.102) и (2.94), получим общую формулу для производной Ли от тензора произвольного ранга:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\xi} A_{mn\dots}^{ik\dots} &= \xi^s \frac{\partial A_{mn\dots}^{ik\dots}}{\partial x^s} - \\ &- \frac{\partial \xi^s}{\partial x^m} A_{sn\dots}^{ik\dots} - \frac{\partial \xi^s}{\partial x^n} A_{ms\dots}^{ik\dots} - \dots + \\ &+ \frac{\partial \xi^i}{\partial x^s} A_{mn\dots}^{sk\dots} + \frac{\partial \xi^k}{\partial x^s} A_{mn\dots}^{is\dots} + \dots \quad . \end{aligned} \quad (2.105)$$

Теперь можно определить симметрию тензорного поля  $A_{mn\dots}^{ik\dots}(x)$  относительно векторного поля  $\vec{\xi}(x)$  как равенство нулю производной Ли:  $\mathcal{L}_{\vec{\xi}} A_{mn\dots}^{ik\dots}(x) = 0$ . Таким образом, равенство нулю производной Ли от некоторого тензорного поля указывает на наличие определенной симметрии этого поля вдоль некоторого направления в пространстве.

**7. Формула Стокса.** Обобщим известную формулу Стокса в трехмерном евклидовом пространстве:

$$\int_S (\text{rot} \vec{A})_j dS^j = \oint_{\partial S} A_k dx^k, \quad (2.106)$$

где  $S$  — область на поверхности в трехмерном пространстве, а  $\partial S$  — замкнутая кривая, ограничивающая эту область. Запишем компоненты ротора в виде

$$(\text{rot} \vec{A})_j = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}. \quad (2.107)$$

В этих выражениях индексы связаны между собой неравенствами  $j \neq i < k$  ( $i, j, k = 1, 2, 3$ ), благодаря которым формулы (2.107) являются однозначными. Элемент площади  $\vec{dS}$  представим как векторное произведение двух бесконечно малых векторов  $d\vec{r}$  и  $d\vec{r}'$ :

$$\vec{dS} = [d\vec{r}, d\vec{r}']. \quad (2.108)$$

Отсюда

$$dS^j = d\sigma^{ik}, \quad (2.109)$$

где

$$d\sigma^{ik} = dx^i d\acute{x}^k - dx^k d\acute{x}^i \quad (2.110)$$

есть антисимметричный тензор, характеризующий величину площадки и ее ориентацию. В результате формула

Стокса (2.106) запишется в виде

$$\frac{1}{2} \int_S \left( \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) d\sigma^{ik} = \oint_{\partial S} A_k dx^k. \quad (2.111)$$

В этом выражении индексы  $i$  и  $k$  могут принимать любые значения, а множитель  $1/2$  поставлен, чтобы не учитывать суммирование по этим индексам дважды.

В виде (2.111) формула Стокса удобна для использования в многомерных искривленных пространствах. В этом случае  $S$  — область на двумерной поверхности, вложенной в многомерное пространство, а  $\partial S$  — замкнутая кривая, ограничивающая эту область. Отметим, что когда связности симметричны, справедливо равенство

$$\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \nabla_i A_k - \nabla_k A_i. \quad (2.112)$$

Отсюда следует, что в (2.111) вместо частных производных можно писать ковариантные производные. Кроме того, выражения, аналогичные (2.111), можно использовать и в случаях, когда вместо векторов  $A_k$  стоят тензоры более высокого ранга, а также нетензорные индексные величины.

## 2.5. Тензор кривизны

Мы установили, что в плоском пространстве всегда существует система координат, в которой связности везде тождественно обращаются в нуль:  $\Gamma_{ij}^k \equiv 0$ . Наоборот, пространство искривлено, если во всем пространстве в любой системе координат связности отличны от нуля:  $\Gamma_{ij}^k \neq 0$ . Таким образом, связность является мерой кривизны пространства. Однако связность — не тензор, в силу чего с

ее помощью невозможно описать свойства искривленного пространства ковариантным образом. Задача состоит в том, чтобы найти тензоры, с помощью которых можно было бы однозначно описать кривизну пространства. Один из таких тензоров уже найден — это тензор кручения  $S_{kj}^i$  (2.52). Однако, как уже говорилось, в случае, когда связность симметрична,  $\Gamma_{kj}^i = \Gamma_{jk}^i$ , пространство остается искривленным, а тензор кручения обращается в нуль:  $S_{kj}^i = 0$ . Поэтому одного тензора кручения недостаточно — необходимо ввести еще, как минимум, одну тензорную меру кривизны пространства. Такой мерой является тензор кривизны.

**1. Тензор кривизны.** Рассмотрим сначала коммутатор в плоском пространстве, построенный из ковариантных производных  $[\nabla_j, \nabla_k]$  и подействуем им на вектор  $A^i$ . В декартовой системе координат во всем пространстве  $\Gamma_{ij}^k \equiv 0$ , а значит,  $\nabla_j A^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^j}$ . Тогда

$$\begin{aligned} [\nabla_j, \nabla_k] A^i &= (\nabla_j \nabla_k - \nabla_k \nabla_j) A^i = \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k} - \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) A^i = 0. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Таким образом, в декартовых координатах рассматриваемый коммутатор равен нулю. Но так как этот коммутатор есть тензор, то его равенство нулю не зависит от выбора системы координат. Поэтому в плоском пространстве в любой системе координат

$$[\nabla_j, \nabla_k] A^i = 0. \quad (2.114)$$

Вычислим теперь этот коммутатор в кривом простран-

стве, где  $\Gamma_{kj}^i \neq 0$ . Имеем

$$\begin{aligned}\nabla_j \nabla_k A^i &= \nabla_j A_{;k}^i = \frac{\partial A_{;k}^i}{\partial x^j} + \Gamma_{lj}^i A_{;k}^l - \Gamma_{kj}^l A_{;l}^i = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma_{qk}^i A^q \right) + \Gamma_{lj}^i \left( \frac{\partial A^l}{\partial x^k} + \Gamma_{qk}^l A^q \right) - \Gamma_{kj}^l A_{;l}^i.\end{aligned}\quad (2.115)$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}\nabla_j \nabla_k A^i &= \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial \Gamma_{qk}^i}{\partial x^j} A^q + \Gamma_{qk}^i \frac{\partial A^q}{\partial x^j} + \\ &+ \Gamma_{lj}^i \frac{\partial A^l}{\partial x^k} + \Gamma_{lj}^i \Gamma_{qk}^l A^q - \Gamma_{kj}^l A_{;l}^i.\end{aligned}\quad (2.116)$$

Переставляя индексы  $j$  и  $k$ , находим

$$\begin{aligned}\nabla_k \nabla_j A^i &= \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k \partial x^j} + \frac{\partial \Gamma_{qj}^i}{\partial x^k} A^q + \Gamma_{qj}^i \frac{\partial A^q}{\partial x^k} + \\ &+ \Gamma_{lk}^i \frac{\partial A^l}{\partial x^j} + \Gamma_{lk}^i \Gamma_{qj}^l A^q - \Gamma_{jk}^l A_{;l}^i.\end{aligned}\quad (2.117)$$

Составляя разность выражений (2.116) и (2.117), находим искомый коммутатор

$$[\nabla_j, \nabla_k] A^i = R_{qjk}^i A^q + S_{jk}^l A_{;l}^i, \quad (2.118)$$

где

$$R_{qjk}^i = \frac{\partial \Gamma_{qk}^i}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{qj}^i}{\partial x^k} + \Gamma_{lj}^i \Gamma_{qk}^l - \Gamma_{lk}^i \Gamma_{qj}^l \quad (2.119)$$

есть тензор четвертого ранга, называемый *тензором кривизны*, или *тензором Римана*.

Итак, мы получили, что кривизна пространства характеризуется двумя тензорами: тензором кривизны  $R_{qjk}^i$  и тензором кручения  $S_{kj}^i$ . В случае, когда связность симметрична, тензор кручения обращается в нуль:  $S_{kj}^i = 0$ , а мерой искривленности пространства является тензор кривизны  $R_{qjk}^i$ . В этом случае наиболее простой вид этот тензор принимает в локально-геодезической системе координат, где в заданной точке  $\Gamma_{kj}^i = 0$  и остаются только члены, линейные по производным от связностей:

$$R_{qjk}^i = \frac{\partial \Gamma_{qk}^i}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{qj}^i}{\partial x^k}. \quad (2.120)$$

Такой вид тензора кривизны удобен для доказательства тензорных соотношений: если какое-либо тензорное равенство доказано в локально-геодезической системе координат, то оно, в силу своего тензорного характера, будет справедливым в любой системе координат.

**2. Плоские пространства.** В плоских пространствах в любой системе координат тензор кручения равен нулю ( $S_{kj}^i = 0$ ), поскольку он равен нулю в декартовой системе координат, где равны нулю коэффициенты связности  $\Gamma_{kj}^i = 0$ . Значит, в произвольных координатах, где связности в плоском пространстве отличны от нуля, они будут симметричны:  $\Gamma_{kj}^i = \Gamma_{jk}^i$ . Обратное утверждение, вообще говоря, неверно: если тензор кручения равен нулю, то пространство не обязано быть плоским — это может быть искривленное пространство с симметричными связностями.

Кроме того, если пространство плоское, то в нем также равен нулю тензор кривизны  $R_{qjk}^i = 0$ . Действительно, как мы установили, в плоском пространстве  $[\nabla_j, \nabla_k]A^i = 0$  и  $S_{kj}^i = 0$ . Но тогда, согласно (2.118), получаем  $R_{qjk}^i A^q = 0$ . Поскольку последнее выражение справедливо при любых векторах  $A^q$ , то это означает, что равен нулю тензор кри-

визны  $R_{qjk}^i = 0$ , что и требовалось доказать.

Справедливо также обратное утверждение: если в каком-либо пространстве тензоры кручения и кривизны обращаются в нуль ( $S_{kj}^i = 0$  и  $R_{qjk}^i = 0$ ), то это пространство плоское. Таким образом, ненулевые во всем пространстве тензоры кручения и кривизны являются однозначными характеристиками того, что данное пространство искривлено.

**3. Некоторые свойства тензора кривизны. Тожество Бианки. Тензор Риччи.** Рассмотрим отдельно случай, когда связности симметричны. Непосредственно из определения тензора кривизны следует:

- тензор кривизны антисимметричен по второй паре ковариантных индексов

$$R_{qjk}^i = -R_{qkj}^i; \quad (2.121)$$

- если связность симметрична, то, совершая циклическую перестановку ковариантных индексов, получим тождество Риччи

$$R_{qjk}^i + R_{kqj}^i + R_{jqk}^i = 0. \quad (2.122)$$

Докажем теперь тождество Бианки

$$\nabla_l R_{qjk}^i + \nabla_k R_{qlj}^i + \nabla_j R_{qkl}^i = 0. \quad (2.123)$$

В силу тензорного характера выражения (2.123), если мы докажем его справедливость в одной системе координат, то тем самым докажем его справедливость и в любой другой системе координат. Выберем в качестве такой специальной координатной системы локально-геодезическую

систему координат. Имеем

$$\nabla_l R_{qjk}^i = \frac{\partial^2 \Gamma_{qk}^i}{\partial x^l \partial x^j} - \frac{\partial^2 \Gamma_{qj}^i}{\partial x^l \partial x^k}, \quad (2.124)$$

$$\nabla_k R_{qlj}^i = \frac{\partial^2 \Gamma_{qj}^i}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^2 \Gamma_{ql}^i}{\partial x^k \partial x^j}, \quad (2.125)$$

$$\nabla_j R_{qkl}^i = \frac{\partial^2 \Gamma_{ql}^i}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 \Gamma_{qk}^i}{\partial x^j \partial x^l}. \quad (2.126)$$

При сложении выражений (2.124)–(2.126) все члены в правых частях этих равенств сокращаются, что доказывает справедливость (2.123) в локально-геодезической, а значит, в силу тензорного характера выражений, в любой системе координат.

Тензор Риччи получается путем свертки тензора кривизны по контравариантному и среднему ковариантному индексам

$$R_{qk} = R_{qik}^i. \quad (2.127)$$

Тензор Риччи симметричен. Он играет большую роль в ОТО, поскольку непосредственно входит в уравнения гравитационного поля.

**4. Геометрический смысл тензора кривизны.** Выше мы установили, что изменение вектора при его переносе на бесконечно малое расстояние равно

$$\delta A_l = \Gamma_{lk}^j A_j \delta x^k. \quad (2.128)$$

Изменение вектора при параллельном переносе по замкнутому контуру вычислим, пользуясь формулой Стокса:

$$\Delta A_l = \oint \delta A_l = \frac{1}{2} \int \left( \frac{\partial(\Gamma_{lk}^j A_j)}{\partial x^i} - \frac{\partial(\Gamma_{li}^j A_j)}{\partial x^k} \right) d\sigma^{ik}. \quad (2.129)$$

При стягивании контура в точку, с точностью до членов второго порядка малости, получим

$$\begin{aligned}\Delta A_l &\simeq \frac{1}{2} \left( \frac{\partial(\Gamma_{lk}^j A_j)}{\partial x^i} - \frac{\partial(\Gamma_{li}^j A_j)}{\partial x^k} \right) \Delta\sigma^{ik} = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial\Gamma_{lk}^j}{\partial x^i} - \frac{\partial\Gamma_{li}^j}{\partial x^k} \right) A_j + \Gamma_{lk}^j \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \Gamma_{li}^j \frac{\partial A_j}{\partial x^k} \right] \Delta\sigma^{ik},\end{aligned}\quad (2.130)$$

где  $\Delta\sigma^{ik}$  — площадь, опирающаяся на бесконечно малый контур. Учитывая (2.84) и определение тензора кривизны, получаем

$$\Delta A_l = \frac{1}{2} R_{lik}^j A_j \Delta\sigma^{ik}. \quad (2.131)$$

Аналогично для контравариантного вектора

$$\Delta A^l = -\frac{1}{2} R_{jik}^l A^j \Delta\sigma^{ik}. \quad (2.132)$$

Таким образом, как видно из полученных формул, тензор кривизны определяет изменение вектора при переносе его по бесконечно малому замкнутому контуру.

**5. Расхождение (девиация) геодезических.** Рассмотрим множество расположенных бесконечно близко друг к другу геодезических линий. Каждую геодезическую будем описывать с помощью двух параметров: «продольного»  $\mu$  и «поперечного»  $\nu$ . Тогда семейство геодезических задается с помощью функций  $x^j = x^j(\mu, \nu)$ . Первый параметр ( $\mu$ ) изменяется, как и ранее, вдоль геодезической, а второй параметр ( $\nu$ ) изменяется вдоль вектора, перпендикулярного вектору касательной к линии (вектору скорости):

$$u^j = \frac{\partial x^j}{\partial \mu} \quad (2.133)$$

и отсчитывает номер конкретной геодезической в рассматриваемом множестве геодезических линий. Введем второй вектор

$$v^j = \frac{\partial x^j}{\partial \nu}, \quad (2.134)$$

который будет касательным к линии, соединяющей две бесконечно близкие геодезические. Очевидно, что

$$\frac{\partial v^j}{\partial \mu} = \frac{\partial u^j}{\partial \nu}. \quad (2.135)$$

Рассмотрим теперь ковариантную производную по направлению геодезической от вектора  $v^j$ . Считая, что связности симметричны ( $S_{kj}^i = 0$ ) и пользуясь равенством (2.135), получаем

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{u}} v^i &= u^j \nabla_j v^i(x) = \frac{\partial v^i}{\partial \mu} + \Gamma_{kj}^i v^k u^j = \\ &= \frac{\partial u^i}{\partial \nu} + \Gamma_{jk}^i u^j v^k = v^j \nabla_j u^i(x) = \nabla_{\vec{v}} u^i. \end{aligned} \quad (2.136)$$

Сравнивая начало и конец этого равенства, находим

$$\nabla_{\vec{u}} v^i = \nabla_{\vec{v}} u^i, \quad (2.137)$$

или

$$u^j \nabla_j v^i = v^j \nabla_j u^i. \quad (2.138)$$

Найдем, как вектор  $v^j$  изменяется вдоль геодезической линии. Для этого рассмотрим вторую производную от вектора  $v^j$  вдоль геодезической:

$$\nabla_{\vec{u}}^2 v^i = \nabla_{\vec{u}}(\nabla_{\vec{u}} v^i) = u^k \nabla_k (u^j \nabla_j v^i). \quad (2.139)$$

Используя выражение (2.138), получим

$$\nabla_{\vec{u}}^2 v^i = u^k \nabla_k (v^j \nabla_j u^i). \quad (2.140)$$

Воспользовавшись правилом Лейбница и опять применяя равенство (2.138), запишем

$$\nabla_{\bar{a}}^2 v^i = \nabla_k u^j \nabla_j u^i v^k + (\nabla_k \nabla_j u^i) v^j u^k. \quad (2.141)$$

Во втором слагаемом поменяем порядок дифференцирования, пользуясь тем, что в рассматриваемом случае действие коммутатора, составленного из ковариантных производных на вектор, выражается только через тензор кривизны:

$$[\nabla_j, \nabla_k] u^i = R_{qjk}^i u^q, \quad (2.142)$$

т. е.

$$\begin{aligned} \nabla_k \nabla_j u^i &= \nabla_j \nabla_k u^i - R_{qjk}^i u^q, \\ \nabla_{\bar{a}}^2 v^i &= \nabla_k u^j \nabla_j u^i v^k + \nabla_j \nabla_k u^i v^j u^k + R_{qkj}^i v^q u^k u^j. \end{aligned}$$

Здесь мы сменили знак у тензора кривизны, воспользовавшись тем, что он антисимметричен по второй паре ковариантных индексов. Переобозначая в первом слагаемом индексы суммирования  $j$  и  $k$ , получаем

$$\nabla_{\bar{a}}^2 v^i = \nabla_j (u^k \nabla_k u^i) v^j + R_{qkj}^i v^q u^k u^j. \quad (2.143)$$

В силу уравнений геодезической выражение в круглых скобках в правой части этого равенства равно нулю. Тогда

$$\nabla_{\bar{a}}^2 v^i = R_{qkj}^i v^q u^k u^j. \quad (2.144)$$

Полученное уравнение называется *уравнением девиации*, или *расхождения*, геодезических линий. Умножая решение этого уравнения — вектор  $v^i$  — на бесконечно малое изменение «поперечного» параметра  $\delta\nu$ , получим вектор, который соединяет две бесконечно близкие геодезические линии

$$\delta l^i = v^i \delta\nu. \quad (2.145)$$

Длина этого вектора задает расстояние между геодезическими. Поскольку в ОТО по геодезическим происходит свободное движение частиц в гравитационном поле, то вектор  $\delta l^i$  показывает, как меняется расстояние между частицами и ориентация системы двух бесконечно близких друг к другу пробных частиц. В ньютоновской теории тяготения изменение расстояния и взаимной ориентации между пробными частицами вызывается так называемыми приливными силами. Таким образом, в ОТО уравнение девиации геодезических линий позволяет описать движение под действием сил, аналогичных приливным.

## 2.6. Метрический тензор

До сих пор нами рассматривались пространства, геометрия которых определяется только одной структурой — связностью. Такие пространства мы называли пространствами со связностью. При этом каких-либо предположений о конкретном виде метрики в таких пространствах не делалось. Рассмотрим теперь пространства, в которых определена метрика. Такие пространства относятся к классу так называемых *метрических пространств*. Отметим, что связность и метрика, вообще говоря, определяются независимо друг от друга. В том случае, когда связность и метрика определены в пространстве совместно, необходимо указать процедуру, которая согласовывала бы наличие этих двух структур.

**1. Метрика. Метрический тензор.** Будем говорить, что в каком-либо пространстве определена метрика, если каждой паре бесконечно близких точек сопоставлен некоторый инвариант  $ds^2$ , не зависящий от порядка, в котором берутся эти точки. Определим метрику в виде

$$ds^2 = g_{ik}(x)dx^i dx^k, \quad (2.146)$$

где  $g_{ik}(x)$  — функции, в общем случае, всех координат, причем  $\det(g_{ik}) \neq 0$ . Далее предполагаем, что  $g_{ik}$  непрерывны вместе со своими частными производными до порядка  $N \geq 2$ . Пространства, где определена метрика, называются *метрическими пространствами*. Метрические пространства с метрикой (2.146) называются *римановыми пространствами*.

Покажем, что функции  $g_{ik}(x)$  являются тензорами. Действительно, в (2.146) левая часть равенства является инвариантом, а в правой части дифференциалы координат — контравариантные вектора, а их произведение — контравариантный тензор второго ранга. Но тогда по теореме частного  $g_{ik}$  является ковариантным тензором второго ранга, который называется *метрическим*, или *фундаментальным, тензором*.

Покажем, что метрический тензор симметричен:

$$g_{ik} = g_{ki}. \quad (2.147)$$

Для этого разобьем метрический тензор на симметричную  $\sigma_{ik}$  и антисимметричную  $\alpha_{ik}$  части:  $g_{ik} = \sigma_{ik} + \alpha_{ik}$ . После подстановки этого выражения в (2.146) свертка по двум индексам антисимметричного тензора  $\alpha_{ik}$  с симметричным тензором  $dx^i dx^k$  обращается в нуль:  $\alpha_{ik} dx^i dx^k = 0$ . Таким образом,  $\alpha_{ik}$  не вносит вклада в метрику и, без ограничения общности, может быть опущена. В результате в метрическом тензоре остается только симметричная часть:  $g_{ik} = \sigma_{ik}$ .

Подсчитаем число независимых компонент в метрическом тензоре. Всего компонент в тензоре второго ранга  $n^2$ . Из них  $n$  диагональных и  $n^2 - n$  недиагональных компонент. В силу симметрии метрического тензора среди недиагональных компонент независимыми будет только половина из них, т. е.  $\frac{n^2 - n}{2}$  штук. Полное число независимых компонент метрического тензора складывается

из числа диагональных компонент и числа независимых недиагональных компонент и равно  $\frac{n^2-n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$ . Таким образом, в метрическом тензоре полное число независимых компонент равно  $\frac{n(n+1)}{2}$ .

Наряду с ковариантным метрическим тензором  $g_{ik}$  введем контравариантный метрический тензор  $g^{ik}$ . Эти два тензора связаны друг с другом соотношением

$$g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j. \quad (2.148)$$

Как видно, ковариантный и контравариантный метрические тензоры являются взаимно обратными друг к другу.

**2. Касательные пространства.** Самыми простыми видами метрических пространств являются *евклидовы пространства*. В них всегда существует система координат, называемая *галилеевой системой координат*, в которой метрический тензор диагонален, причем все его диагональные элементы принимают значения, равные плюс или минус единице:  $g_{ik} = \eta_{ik} = \text{diag}\{\dots + 1\dots - 1\dots\}$ . Сумму диагональных элементов этой матрицы называют *сигнатурой*. Согласно известной из линейной алгебры теореме об инерции квадратичных форм, сигнатура является инвариантом, т. е. ее нельзя изменить никакими допустимыми преобразованиями координат. Запишем метрику евклидова пространства в виде

$$d\sigma^2 = \eta_{ik}dx^i dx^k. \quad (2.149)$$

Евклидовы пространства в определенном смысле можно называть плоскими по метрике пространствами. Если во всех точках такого пространства метрика неотрицательна ( $d\sigma^2 \geq 0$ ), то такое пространство называется *евклидовым пространством*, а если метрика может принимать еще и отрицательные значения ( $d\sigma^2 < 0$ ), то *псев-*

*доевклидовым пространством.* Для собственно евклидовых пространств метрический тензор в галилеевой системе координат задается с помощью единичной матрицы, а для псевдоевклидовых — с помощью диагональных матриц, в которых на главной диагонали чередуются единицы и минус единицы. Например, пространство СТО — псевдоевклидово. Для него метрический тензор имеет вид  $\eta_{ik} = \text{diag}\{+1, -1, -1, -1\}$  и, следовательно, метрика  $d\sigma = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$  может принимать любой знак.

Отметим, что в евклидовых или псевдоевклидовых пространствах в системе координат, отличной от галилеевой, метрический тензор, вообще говоря, перестает быть диагональным, а его компоненты приобретают вид функциональных зависимостей. Однако всегда существует преобразование к галилеевым координатам, где метрический тензор принимает прежний вид. В общем случае, когда компоненты метрического тензора заданы произвольными функциями, такого преобразования координат, приводящего метрический тензор к диагональному виду сразу во всем пространстве, не существует. Действительно, для того чтобы привести симметричный метрический тензор к диагональному виду сразу во всем пространстве, необходимо преобразовать  $\frac{n(n+1)}{2}$  независимых функций  $g_{ik}(x)$  — столько, сколько независимых компонент у метрического тензора. Эту операцию невозможно осуществить какими-либо преобразованиями координат  $\hat{x}^i = \hat{x}^i(x)$ , поскольку таких преобразований координат всего  $n$  штук, т. е. меньше, чем  $\frac{n(n+1)}{2}$  ( $n > 1$ ) преобразуемых функций  $g_{ik}(x)$ . Следовательно, привести к заранее заданному виду все функции  $g_{ik}(x)$  с помощью одних лишь преобразований координат в общем случае невозможно. Однако в каждой конкретной точке пространства  $P$  метрический тензор  $g_{ik}(P)$

представляет собой симметричную числовую матрицу и, следовательно, может быть приведен к диагональному виду с помощью линейных преобразований координат. Другими словами, всегда существует такая система координат, называемая *локально галилеевой системой координат*, при переходе в которую в данной точке метрический тензор становится диагональным. Более того, всегда можно добиться, чтобы на диагонали стояли только плюс или минус единицы:  $g_{ik}(P) = \text{diag}\{\dots + 1\dots - 1\dots\}$ . Таким образом, в точке  $P$  в локально галилеевой системе координат метрический тензор риманова пространства совпадает с метрическим тензором евклидова пространства  $g_{ik}(P) = \eta_{ik}$ . Введем евклидово пространство, метрический тензор которого во всем пространстве  $\eta_{ik}$  совпадает с метрическим тензором риманова пространства в данной точке  $g_{ik}(P)$ . Такое евклидово пространство называется *касательным пространством* к риманову пространству. Касательное пространство может быть как евклидовым, так и псевдоевклидовым. Соответственно, если касательным к риманову пространству является евклидово пространство, то такое пространство называется *римановым пространством*. Наоборот, если касательным к риманову пространству является псевдоевклидово пространство, то такое пространство называется *псевдоримановым пространством*. Изучением римановых и псевдоримановых пространств занимается *риманова геометрия*. Понятие касательного пространства позволяет перенести в риманову геометрию целый ряд определений евклидовой геометрии, например, определение угла между направлениями, построенными в данной точке, определения, связанные с линией, поверхностью, объемом и т. п. Однако обобщение ряда других геометрических понятий на случай римановой геометрии (например, понятие угла между направле-

ниями, построенными в различных точках) оказывается здесь невозможным.

Покажем, что пространство ОТО — псевдориманово. Действительно, метрический тензор в ОТО обусловлен действием гравитационного поля. Согласно принципу эквивалентности существует система отсчета, в которой в данной точке пространства действие гравитационного поля обнуляется. Это означает, что в указанной точке метрика совпадает с метрикой СТО. Другими словами, в данной точке мы можем перейти в систему координат, где метрический тензор имеет вид  $g_{ik} \equiv \eta_{ik} = \text{diag}\{+1, -1, -1, -1\}$ . Последнее означает, что в рассматриваемой точке может быть построено касательное псевдоевклидово пространство, т. е. пространство ОТО — псевдориманово.

**3. Поднятие и опускание индексов.** Наличие в пространстве метрического тензора позволяет определить операции поднятия и опускания индексов. Эта операция состоит в однократной или многократной свертке по одному индексу метрического тензора с тензором произвольного ранга. Например, если произвести свертку ковариантного вектора  $A_k$  с контравариантным метрическим тензором  $g^{ik}$ , то получим контравариантный вектор  $A^i$  и, наоборот, если произвести свертку контравариантного вектора  $A^k$  с ковариантным метрическим тензором  $g_{ik}$ , то получим ковариантный вектор  $A_i$ :

$$A^i = g^{ik} A_k, A_i = g_{ik} A^k. \quad (2.150)$$

Построенные таким образом векторы  $A_i$  и  $A^i$  называются *сопряженными*. Сопряженные векторы рассматриваются как разные представления одного и того же вектора  $A$ . Говорят, что  $A_i$  являются ковариантными составляющими вектора  $A$ , а  $A^i$  — контравариантными составляющими того же самого вектора  $A$ .

Точно таким же образом осуществляется поднятие и опускание индексов у тензоров произвольного ранга. Например, можно определить ковариантный и контравариантный тензоры кривизны:

$$R_{lqjk} = g_{il} R_{qjk}^i, R^{ilms} = g^{ql} g^{jm} g^{ks} R_{qjk}^i. \quad (2.151)$$

Общее правило таково: каждая свертка тензора по одному индексу с ковариантным метрическим тензором опускает индекс, а свертка с контравариантным поднимает индекс. Благодаря этому правилу, мы можем записать любой тензор как в ковариантном, так и в контравариантном виде.

С помощью метрического тензора можно ввести определение *контравариантной производной*, подняв индекс у оператора ковариантной производной

$$\nabla^i = g^{ik} \nabla_k. \quad (2.152)$$

Эту операцию будем обозначать точкой с запятой на месте контравариантного индекса. Например, контравариантная производная ковариантного вектора  $A_i$  запишется как  $A_i^{;k}$ .

**4. Определитель метрического тензора.** Рассмотрим определитель ковариантного метрического тензора

$$g = \det g_{ik} \equiv |g_{ik}|. \quad (2.153)$$

Найдем определитель контравариантного метрического тензора в виде  $\det g^{ik} = |g^{ik}|$ . Пользуясь выражением  $g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j$  и свойствами определителей, получаем

$$|g_{ik} g^{kj}| = |g_{ik}| |g^{kj}| = g |g^{kj}| = 1. \quad (2.154)$$

В результате

$$|g^{kj}| = \frac{1}{g}. \quad (2.155)$$

Рассмотрим теперь вопрос о том, как преобразуется определитель метрического тензора при преобразованиях координат. Поскольку  $g_{ik}$  — ковариантный тензор второго ранга, то закон его преобразования при переходе из одной системы координат в другую имеет вид

$$\acute{g}_{ik} = \frac{\partial x^l}{\partial \acute{x}^i} \frac{\partial x^m}{\partial \acute{x}^k} g_{lm}. \quad (2.156)$$

Возьмем определитель от обеих частей этого равенства. Имеем

$$|\acute{g}_{ik}| = \left| \frac{\partial x^l}{\partial \acute{x}^i} \frac{\partial x^m}{\partial \acute{x}^k} g_{lm} \right| = \left| \frac{\partial x^l}{\partial \acute{x}^i} \right| \left| \frac{\partial x^m}{\partial \acute{x}^k} \right| |g_{lm}| = \left| \frac{\partial x^l}{\partial \acute{x}^i} \right| \left| \frac{\partial x^m}{\partial \acute{x}^k} \right| g. \quad (2.157)$$

Учитывая, что  $J = \left| \frac{\partial x^i}{\partial \acute{x}^i} \right|$  — якобиан перехода от координат  $x$  к координатам  $\acute{x}$  и обозначая  $\acute{g} = |\acute{g}_{ik}|$ , получаем

$$\acute{g} = J^2 g. \quad (2.158)$$

Аналогично

$$g = \acute{J}^2 \acute{g}, \quad (2.159)$$

где  $\acute{J} = \left| \frac{\partial \acute{x}^i}{\partial x^i} \right|$  — якобиан перехода от координат  $\acute{x}$  к координатам  $x$ . Из полученных соотношений видно, что определители метрического тензора не являются инвариантами, поскольку при переходе из одной системы координат в другую преобразуются не как инварианты. Однако отношение этих определителей всегда положительно:

$$\frac{\acute{g}}{g} = J^2 > 0. \quad (2.160)$$

Таким образом, при преобразованиях координат не изменяется знак определителя  $sign(g)$ , который и является инвариантом

$$sign(g) = inv. \quad (2.161)$$

Частная производная определителя метрического тензора

$$\frac{\partial g}{\partial x^i} = \frac{\partial g}{\partial g_{jk}} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = g g^{jk} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}. \quad (2.162)$$

Здесь мы воспользовались известной формулой, связывающей алгебраическое дополнение  $\frac{\partial g}{\partial g_{jk}}$  с элементом обратной матрицы. Отсюда получаем формулу

$$\frac{\partial \ln g}{\partial x^i} = g^{jk} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}, \quad (2.163)$$

полезную при вычислении компонент тензора Риччи.

**5. Инвариантный объем. Теорема Гаусса.** В многомерном искривленном пространстве элемент объема плоского пространства  $d^n x = dx^0 dx^1 \dots dx^{n-1}$  не является инвариантом. Однако некоторые важные физические величины (например, действие), записывающиеся в виде интегралов по объему, являются инвариантами. Такие инварианты можно построить путем интегрирования по инвариантному объему скалярных функций. Поэтому возникает необходимость введения инвариантного объема и инвариантного элемента объема. Покажем, что инвариантным элементом объема является величина

$$dV = \sqrt{|g|} d^n x = inv. \quad (2.164)$$

Перейдем в штрихованную систему координат. Поскольку  $g = \dot{J}^2 \acute{g}$  и  $d^n \acute{x} = |\dot{J}| d^n x$ , имеем

$$dV = \sqrt{|g|} d^n x = \sqrt{|\acute{g}|} |\dot{J}| d^n x = \sqrt{|\acute{g}|} d^n \acute{x} = d\acute{V}. \quad (2.165)$$

Таким образом, величина  $dV$  является инвариантом:  $dV = d\acute{V}$ . По этой причине  $dV$  будем называть *инвариантным объемом*.

Пусть  $\varphi(x)$  — скалярная функция ( $\varphi(x) = \dot{\varphi}(\dot{x})$ ). Тогда интеграл от нее по инвариантному объему

$$I = \int_V \varphi(x) dV = \int_{\dot{V}} \dot{\varphi}(\dot{x}) d\dot{V} = \dot{I}. \quad (2.166)$$

Таким образом, если  $\varphi(x)$  — скалярная функция, то интеграл от этой функции по инвариантному объему также будет инвариантом:

$$I = \int_V \varphi(x) \sqrt{|g|} d^n x = inv. \quad (2.167)$$

Отсюда, в частности, следует, что сам объем также является инвариантом:  $V = \dot{V}$ . Величины  $\varphi(x) \sqrt{|g|}$  называются *скалярными плотностями*, а  $A_{lm\dots}^{ik\dots} \sqrt{|g|}$  — *тензорными плотностями*. Как легко проверить, интеграл по элементарному объему от тензора произвольного ранга

$$\int_V A_{lm\dots}^{ik\dots} \sqrt{|g|} d^n x \quad (2.168)$$

не является тензором ни, тем более, инвариантом. Это связано с тем, что определение тензора дается в точке (локально), в то время как операция интегрирования определена глобально, так как предполагает суммирование по точкам некоторой области.

Теорема Гаусса из трехмерного евклидова пространства ( $\Omega$  — объем,  $\partial\Omega$  — граница области, занимаемой объемом  $\Omega$ ;  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ ):

$$\int_{\Omega} \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\alpha} d^3 x = \int_{\partial\Omega} A^\beta dS_\beta, \quad (2.169)$$

естественным образом может быть обобщена на случай искривленного многомерного пространства заменой частных производных на ковариантные, а элементарных объемов — на инвариантные:

$$\int_V \nabla_k A^k \sqrt{|g|} d^n x = \int_{\partial V} A^l dS_l, \quad (2.170)$$

где  $V$  — инвариантный объем,  $\partial V$  — граница области, которую занимает этот объем.

## 2.7. Кривизна римановых пространств

### 1. Условия согласования метрики со связностью.

Рассмотрим теперь пространства, в которых определены как метрика, так и связность. Необходимо ввести эти две структуры непротиворечивым, согласованным образом. Для согласования этих двух структур потребуем, чтобы ковариантные производные от контравариантного вектора  $A^i$  и сопряженного ему ковариантного вектора  $A_i = g_{ik} A^k$  образовывали, соответственно, смешанные и ковариантные составляющие одного и того же тензора второго ранга. Другими словами, потребуем, чтобы выполнялось равенство

$$A_{i;j} = g_{ik} A_{;j}^i. \quad (2.171)$$

Пользуясь правилом Лейбница для ковариантного дифференцирования тензоров, получаем

$$A_{i;j} = \nabla_j (g_{ik} A^k) = (\nabla_j g_{ik}) A^k + g_{ik} A_{;j}^i. \quad (2.172)$$

Сравнивая последние два выражения, приходим к выводу, что

$$\nabla_j g_{ik} = 0. \quad (2.173)$$

Это выражение является искомым условием согласования метрики со связностью. Таким образом, метрика согласована со связностью, если метрический тензор является ковариантно постоянным. Аналогичное условие справедливо и для контравариантного метрического тензора. Действительно, возьмем ковариантную производную от обеих частей равенства  $g^{il}g_{lk} = \delta_k^i$ . Учитывая, что  $\nabla_j \delta_k^i = 0$ , получаем

$$\nabla_j(g_{ik}g^{kl}) = (\nabla_j g_{ik})g^{kl} + g_{ik}(\nabla_j g^{kl}) = 0. \quad (2.174)$$

Отсюда

$$\nabla_j g^{kl} = 0. \quad (2.175)$$

Будем говорить, что метрика согласована со связностью, если ковариантная производная от ковариантного или контравариантного метрического тензора равна нулю. Связность, таким образом согласованную с метрикой, называют *римановой связностью*.

**2. Следствия.** Укажем некоторые следствия условия согласования метрики и связности:

1. Метрический тензор можно выносить из-под знака ковариантной производной:

$$\nabla_j(g^{kl}A^{\dots}) = g^{kl}\nabla_j A^{\dots}, \quad (2.176)$$

где  $A^{\dots}$  — произвольная индексная величина.

2. Если вектор  $A^i$  ковариантно постоянен вдоль кривой  $x^j = x^j(\mu)$ , то и сопряженный ему вектор  $A_i = g_{ik}A^k$  также будет ковариантно постоянным вдоль этой кривой. Действительно, согласно (2.72) векторное поле  $A^i$  будет ковариантно постоянным, если

$$\nabla_{\vec{u}} A^i = u^j \nabla_j A^i(x) = 0. \quad (2.177)$$

Тогда, используя (2.176), получаем

$$\nabla_{\vec{u}} A_i = g_{ik} u^j \nabla_j A^k(x) = 0, \quad (2.178)$$

откуда и следует справедливость нашего утверждения о ковариантном постоянстве сопряженного вектора  $A_i$ .

3. Рассмотрим 2 контравариантных вектора  $A^i$  и  $B^k$ , ковариантно постоянных вдоль кривой  $x^j = x^j(\mu)$  ( $\nabla_{\vec{u}} A^i = 0$  и  $\nabla_{\vec{u}} B^i = 0$ ). Тогда

$$\frac{d}{d\mu}(A^i B_i) = \frac{dx^j}{d\mu} \frac{\partial}{\partial x^j}(A^i B_i) = u^j \nabla_j (A^i g_{ik} B^k) = 0. \quad (2.179)$$

Таким образом, при параллельном переносе двух ковариантно постоянных векторов  $A^i$  и  $B^k$  вдоль кривой  $x^j = x^j(\mu)$  их скалярное произведение не изменяется:

$$A^i B_i = \text{const}. \quad (2.180)$$

Выбрав в качестве вектора  $B_i$  вектор  $A_i$ , мы получаем, что при параллельном переносе сохраняется длина вектора

$$|A^i| = \sqrt{A^i A_i} = \text{const}. \quad (2.181)$$

По аналогии с евклидовой геометрией можно ввести косинус угла между двумя векторами, который также будет сохраняться при параллельном переносе векторов:

$$\cos \theta = \frac{A^i B_i}{\sqrt{A^i A_i} \sqrt{B^i B_i}} = \text{const}. \quad (2.182)$$

Следовательно, при параллельном переносе ковариантно постоянных вдоль кривой векторов будет сохраняться их длина и угол  $\theta$  между ними.

4. Пространство является плоским (по связности) тогда и только тогда, когда оно является евклидовым. Действительно, запишем в явном виде условие (2.175) согласованности метрики и связности:

$$\nabla_j g_{ik} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^l g_{lk} - \Gamma_{kj}^l g_{il} = 0. \quad (2.183)$$

Предположим теперь, что пространство плоское. Тогда существует система координат, в которой во всем пространстве коэффициенты связности обращаются в нуль. В результате получаем

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = 0. \quad (2.184)$$

Отсюда следует, что метрический тензор постоянен во всем пространстве, а значит, во всем пространстве можно преобразовать метрический тензор к диагональному виду:  $g_{ik} = \eta_{ik}$ . Таким образом, плоское пространство является евклидовым. Наоборот, пусть пространство евклидово. Тогда в галилеевой во всем пространстве системе координат  $g_{ik} = \eta_{ik}$ , а значит,

$$\Gamma_{ij}^l \eta_{lk} - \Gamma_{kj}^l \eta_{il} = 0. \quad (2.185)$$

Поскольку все функции  $\Gamma_{kj}^i = \Gamma_{jk}^i$  независимы, то (2.175) удовлетворяются, если они обращаются в нуль во всем пространстве:  $\Gamma_{kj}^i = 0$ . Значит, евклидово пространство является одновременно и плоским по связности.

Проводя аналогичные рассуждения в кривом пространстве в заданной точке, можно показать, что локально-геодезическая система координат является одновременно и локально-галилеевой.

5. Рассмотрим теперь симметрии метрического тензора. Легко проверить непосредственным вычислением, что производная Ли метрического тензора равна

$$\mathcal{L}_{\vec{\xi}}g_{ik} = \nabla_i\xi_k + \nabla_k\xi_i. \quad (2.186)$$

Приравнивая к нулю производную Ли, получаем *уравнение Киллинга*:

$$\nabla_i\xi_k + \nabla_k\xi_i = 0, \quad (2.187)$$

которое определяет симметрии метрического тензора вдоль вектора  $\vec{\xi}$ : если метрический тензор  $g_{ik}$  удовлетворяет уравнению Киллинга (2.187), то его компоненты не будут изменяться вдоль вектора  $\vec{\xi}$ .

**3. Символы Кристоффеля.** Аффинная связность — это дополнительная характеристика пространства, которая определяется совершенно независимо от других его характеристик, например таких, как метрика. Однако наличие метрики и определенного способа ее согласования со связностью позволяет однозначным образом выразить коэффициенты связности через компоненты метрического тензора.

Обозначим

$$\Gamma_{i,kj} = g_{il}\Gamma_{kj}^l. \quad (2.188)$$

Тогда выражение (2.183) запишется в виде

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = \Gamma_{k,ij} + \Gamma_{i,kj}. \quad (2.189)$$

Совершая циклическую перестановку индексов  $i$ ,  $k$  и  $j$ , получаем

$$\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} = \Gamma_{j,ki} + \Gamma_{k,ji}, \quad (2.190)$$

$$\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} = \Gamma_{i,jk} + \Gamma_{j,ik}. \quad (2.191)$$

Складывая выражения (2.190) и (2.191) и вычитая из полученной суммы (2.189), имеем

$$2\tilde{\Gamma}_{j,ik} = S_{ijk} + S_{kji} + \Gamma_{j,ik} + \Gamma_{j,ki}, \quad (2.192)$$

где

$$S_{ikj} = g_{il}S_{kj}^l \quad (2.193)$$

есть ковариантный тензор кручения, а

$$\tilde{\Gamma}_{j,ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \right) \quad (2.194)$$

есть символы Кристоффеля первого рода. Свертывая обе части равенства (2.192) с  $g^{lj}$ , получаем

$$2\tilde{\Gamma}_{ik}^l = S_{i.k}^l + S_{k.i}^l + \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{ki}^j, \quad (2.195)$$

где

$$S_{i.k}^l = g^{lj}S_{ijk} = g^{lj}g_{im}S_{jk}^m, \quad (2.196)$$

а

$$\tilde{\Gamma}_{ik}^l = \frac{1}{2}g^{lj} \left( \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \right) \quad (2.197)$$

есть символы Кристоффеля второго рода.

Обе части равенств (2.192) и (2.195) симметричны относительно перестановки индексов  $i$  и  $k$ . В случае, когда связность симметрична ( $\Gamma_{kj}^i = \Gamma_{jk}^i$ ) и, следовательно, тензор кручения обращается в нуль ( $S_{kj}^i \equiv 0$ ), коэффициенты связности совпадают с символами Кристоффеля:

$$\Gamma_{ik}^l = \tilde{\Gamma}_{ik}^l, \Gamma_{j,ik} = \tilde{\Gamma}_{j,ik}. \quad (2.198)$$

Символы Кристоффеля, в которых произведена свертка по двум индексам, называются *упрощенными символами Кристоффеля*. Используя (2.163), легко получить

$$\Gamma_{ik}^i = \frac{1}{2}g^{lj} \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k}. \quad (2.199)$$

Рассмотрим производную от определителя метрического тензора

$$\frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial g}{\partial g_{ik}} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^k}. \quad (2.200)$$

Поскольку производная  $\frac{\partial g}{\partial g_{ik}}$  равна алгебраическому дополнению к  $g$ , то  $\frac{\partial g}{\partial g_{ik}} = gg^{ik}$ . Отсюда получаем

$$\Gamma_{ik}^i = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial \ln \sqrt{|g|}}{\partial x^k}. \quad (2.201)$$

Последнее выражение позволяет связать упрощенные символы Кристоффеля с производными от определителя метрического тензора.

**4. Тензор кривизны римановых пространств.** Ковариантный тензор кривизны

$$R_{ijkl} = g_{is} R_{sjkl}^s \quad (2.202)$$

обладает следующими свойствами симметрии:

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij}, \quad (2.203)$$

Кроме того, справедливы тождества Риччи

$$R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj} = 0 \quad (2.204)$$

и Бианки

$$\nabla_l R_{iqjk} + \nabla_k R_{iqjl} + \nabla_j R_{iqkl} = 0. \quad (2.205)$$

Тензор кривизны связан с метрическим тензором с помощью соотношения

$$R_{iklm} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^l} \right) + g_{np} (\Gamma_{kl}^n \Gamma_{im}^p - \Gamma_{km}^n \Gamma_{il}^p), \quad (2.206)$$

где символы Кристоффеля  $\Gamma_{kj}^i$  определяются выражениями (2.197).

Непосредственно из определения тензора Риччи и выражений для упрощенных символов Кристоффеля (2.201) следует:

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^p}{\partial x^p} - \frac{\partial^2 \ln \sqrt{|g|}}{\partial x^k \partial x^i} + \Gamma_{ik}^n \frac{\partial \ln \sqrt{|g|}}{\partial x^n} - \Gamma_{ip}^n \Gamma_{kn}^p. \quad (2.207)$$

Такая форма записи тензора Риччи во многих случаях удобна при непосредственном вычислении его компонент.

Из (2.207) видно, что тензор Риччи симметричен:

$$R_{ik} = R_{ki}. \quad (2.208)$$

**5. Пространства постоянной кривизны.** Рассмотрим двумерную поверхность в пространстве размерности  $n \geq 2$ . Пусть  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$  — два линейно независимых вектора, касательных в некоторой точке к этой поверхности. Величина

$$K = \frac{R_{iklm} A^i A^l B^k B^m}{(g_{il} g_{km} - g_{im} g_{lk}) A^i A^l B^k B^m} \quad (2.209)$$

называется *римановой кривизной* двумерной поверхности в этой точке. Как видно,  $K$  является скалярной функцией. Из этого выражения непосредственно следует, что

$$D_{iklm} A^i A^l B^k B^m = 0, \quad (2.210)$$

где

$$D_{iklm} = R_{iklm} - K(g_{il} g_{km} - g_{im} g_{lk}). \quad (2.211)$$

Если в некоторой точке  $P$  риманова кривизна  $K$  не зависит от того, какая двумерная поверхность проведена через эту точку, т. е. не зависит от выбора векторов  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$ , то  $D_{iklm} = 0$  и, следовательно,

$$R_{iklm} = K(g_{il} g_{km} - g_{im} g_{lk}). \quad (2.212)$$

Далее, если в римановом пространстве справедливо выражение (2.212), то кривизна пространства в данной точке не зависит от ориентации плоскости и может быть функцией только координат точки. Такое пространство называется *пространством постоянной кривизны*: в каждой его точке кривизны одинаковы во всех двумерных направлениях. Выполняется и обратное: если кривизна в каждой точке пространства Римана в направлении любой плоскости равна одной и той же скалярной функции  $K$ , то тензор Римана имеет вид (2.212). Указанное определение пространства постоянной кривизны требует, чтобы в данной точке кривизна не зависела от ориентировки плоскости. Другими словами, пространство должно быть изотропным. Однако в этом определении нет явных условий о значениях кривизны в различных точках, вследствие чего вопрос о виде скалярной функции  $K = K(x)$  остается открытым. Решение этого вопроса содержится в теореме Шура, утверждающей, что в пространстве постоянной кривизны с числом измерений  $n > 2$  во всех точках кривизны одинаковы:  $K = const$ .

Докажем последнее утверждение. Возьмем ковариантную производную от (2.212). В силу ковариантного постоянства метрического тензора

$$\nabla_s R_{iklm} = \partial_s K (g_{il}g_{km} - g_{im}g_{lk}). \quad (2.213)$$

Подставляя теперь это выражение в тождества Бианки (2.205) и свертывая по  $i, j$  и  $q, k$ , находим

$$\partial_s K = 0. \quad (2.214)$$

Отсюда следует, что

$$K = const, \quad (2.215)$$

что и требовалось доказать. Полученный результат означает, что риманово пространство, изотропное во всех точках, является однородным. Другими словами, пространства постоянной кривизны являются однородными, изотропными.

Поднимая в тензоре Римана (2.212) индекс и производя свертку, получаем выражение для тензора Риччи:

$$R_{ik} = 3K g_{ik}. \quad (2.216)$$

Отсюда скалярная кривизна

$$R = 12K. \quad (2.217)$$

Таким образом, скалярная кривизна однородных, изотропных пространств постоянна.

### **6. Геодезическая как линия кратчайшей длины.**

Рассмотрим заданную параметрически кривую  $x^j = x^j(s)$ , где в качестве параметра выбрана текущая длина кривой  $s$ . Длина кривой между точками  $P_1$  и  $P_2$  равна

$$S = \int_{P_1}^{P_2} ds, \quad (2.218)$$

где элемент длины имеет вид

$$ds = \sqrt{g_{ik} dx^i dx^k}. \quad (2.219)$$

Найдем уравнение, которому должна удовлетворять кривая, соединяющая точки  $P_1$  и  $P_2$ , имеющая наименьшую длину. Условие того, что длина кривой между этими двумя точками минимальна, состоит в утверждении, что функционал  $S$  имеет экстремум на этой кривой при условии, что начальная и конечная точки закреплены:  $\delta S = 0$ ,

$\delta x^k(P_1) = \delta x^k(P_2) = 0$ . Выполнив вариацию  $\delta S$  по координатам с учетом того, что

$$\delta g_{ik} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \delta x^l, \quad (2.220)$$

после интегрирования по частям получаем

$$\delta S = \int_{P_1}^{P_2} \delta ds = \int_{P_1}^{P_2} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} u^i u^k \delta x^l + g_{ik} u^i \frac{d}{ds} \delta x^k \right) ds, \quad (2.221)$$

где  $u^i = \frac{dx^i}{ds}$  — компоненты вектора скорости. Приравняв  $\delta S$  к нулю, находим, что

$$\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} u^i u^k - \frac{d}{ds} (g_{il} u^i) = 0. \quad (2.222)$$

Поскольку

$$\frac{d}{ds} (g_{il} u^i) = \frac{dg_{il}}{ds} u^i + \frac{du^i}{ds} g_{il}, \quad (2.223)$$

$$\frac{dg_{il}}{ds} u^i = \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} u^i u^k = \left( \frac{1}{2} \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \right) u^i u^k, \quad (2.224)$$

используя определение символов Кристоффеля, находим

$$g_{il} \frac{du^i}{ds} + \Gamma_{l,ik} u^i u^k = 0. \quad (2.225)$$

После свертки с обратным метрическим тензором и переобозначения индексов получаем

$$\frac{d^2 x^j}{ds^2} + \Gamma_{ik}^j \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0. \quad (2.226)$$

Последнее выражение совпадает с полученным ранее уравнением геодезической (2.85). Таким образом, геодезическая линия является кратчайшей линией между двумя точками в искривленном пространстве.

## Глава 3

### Частицы в гравитационном поле

#### 3.1. Расстояния и промежутки времени в ОТО

Система отсчета в ОТО фактически представляет собой некоторую сплошную среду, каждая точка которой совершает движение, не зависящее от движения других точек (пыль без соударений). С каждой точкой такой среды связаны произвольно движущиеся часы. События в такой системе отсчета задаются четырехмерным радиус-вектором  $x^i$ . Обсудим, как по координатам  $x^i$  событий в рассматриваемой системе отсчета определить промежутки времени и расстояния между событиями.

Промежуток времени  $d\tau$  между двумя событиями, отсчитываемый часами, находящимися в точке, где эти события происходят, связан с интервалом между этими событиями (началом и концом отсчета времени)  $ds$  соотношением

$$ds = cd\tau. \quad (3.1)$$

Согласно общему выражению (2.146) интервал между двумя событиями, происходящими в одной точке пространства, будет равен

$$ds = \sqrt{g_{00}dx^0dx^0} = \sqrt{g_{00}}dx^0. \quad (3.2)$$

Тогда для  $d\tau$  можно записать

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}dx^0. \quad (3.3)$$

Поскольку в гравитационном поле  $g_{00}$  зависит от координат, то истинное время (или собственное время) между событиями оказывается различным в различных точках пространства.

Перейдем к рассмотрению пространственных промежутков (расстояний). Пусть из точки  $M(x^\alpha)$  в некоторый момент времени  $x^{0(1)}$  (по часам в точке  $M$ ) выходит луч света, доходит до другой точки  $M'(x^\alpha + dx^\alpha)$ , отражается в ней и возвращается в точку  $M(x^\alpha)$  в момент времени  $x^{0(2)}$  (опять же по часам в точке  $M$ ). Схематически такой процесс изображен на рис. 3.1.

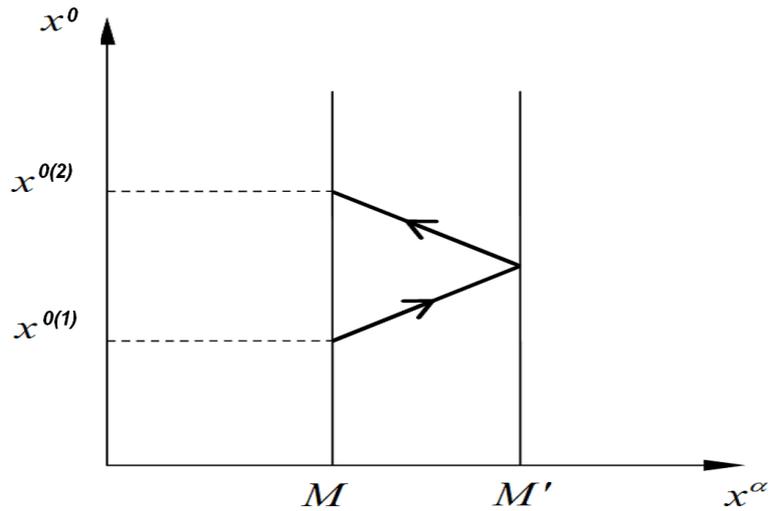


Рис. 3.1. Испускание луча света из точки  $M$  в момент времени  $x^{0(1)}$ , отражение его в точке  $M'$  и возвращение в точку  $M$  в момент времени  $x^{0(2)}$

Естественно считать, что расстояние  $d\ell$  между точками

$M$  и  $M'$  равно половине расстояния, проходимого светом за время между испусканием и возвращением луча света:

$$d\ell = \frac{1}{2}cd\tau, \quad (3.4)$$

где  $d\tau$  — истинное время между испусканием и возвращением луча света, определяемое выражением (3.3). Подставляя в (3.4) значение  $d\tau$  из (3.3), получаем

$$d\ell = \frac{1}{2}\sqrt{g_{00}}dx^0, \quad (3.5)$$

где  $dx^0$  — изменение координаты  $x^{0(1)}$  при движении луча света из точки  $M$  в точку  $M'$  и обратно. Связь этого изменения с разностью координат точек  $M(x^\alpha)$  и  $M'(x^\alpha + dx^\alpha)$  определяется тем, что интервал между событиями, связанными с распространением луча света, всегда равен нулю:

$$ds^2 = g_{00} (dx^0)^2 + 2g_{0\alpha}dx^0dx^\alpha + g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = 0. \quad (3.6)$$

Рассматривая (3.6) как квадратное уравнение на  $dx^0$ , получаем два решения:

$$\begin{aligned} dx^{0(1)} &= \frac{1}{g_{00}} \left( -g_{0\alpha}dx^\alpha + \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00}) dx^\alpha dx^\beta} \right), \\ dx^{0(2)} &= \frac{1}{g_{00}} \left( -g_{0\alpha}dx^\alpha - \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00}) dx^\alpha dx^\beta} \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Одно из них ( $dx^{0(2)}$ ) в (3.7) отвечает распространению света от точки  $M$  к  $M'$ , а второе ( $dx^{0(1)}$ ) — распространению света в обратном направлении, так как луч света выходит из точки  $M'$  в момент  $x^{0(1)} = x^0 + dx^{0(2)}$  и возвращается в точку  $M$  в момент  $x^{0(2)} = x^0 + dx^{0(1)}$ . Тогда изменение

координаты  $x^0$  от испускания луча света в точке  $M$  до его возвращения в точку  $M$  есть

$$dx^0 = x^{0(2)} - x^{0(1)} = \frac{2}{g_{00}} \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00}) dx^\alpha dx^\beta}. \quad (3.8)$$

Тогда для  $d\ell$ , в соответствии с (3.5), получаем

$$d\ell = \sqrt{\left(-g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}\right) dx^\alpha dx^\beta}. \quad (3.9)$$

Величина

$$\gamma_{\alpha\beta} \equiv -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}, \quad (3.10)$$

определяющая связь квадрата расстояния между двумя близкими точками с дифференциалами пространственных координат, является трехмерным пространственным метрическим тензором:

$$d\ell^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (3.11)$$

Отметим, что в общем случае компоненты метрического тензора  $g_{ik}$  зависят от  $x^0$ , поэтому пространственная метрика  $\gamma_{\alpha\beta}$  меняется со временем. В силу этого расстояние между точками в ОТО имеет смысл лишь в бесконечно малом — интегрирование  $d\ell$  по конечному промежутку зависит от того, по какой мировой линии между точками берется интеграл. Лишь в системах отсчета, в которых  $g_{ik}$  не зависят от времени, расстояние может быть определено в конечных областях пространства.

В общем случае величины  $g_{\alpha\beta}$ ,  $g_{0\alpha}$  и  $g_{0\beta}$  являются функциями координат и времени. Для определения расстояния между точками, расположенными на конечном расстоянии, необходимо интегрировать по конкретной мировой

линии. Если  $g_{\alpha\beta}$ ,  $g_{0\alpha}$ ,  $g_{0\beta}$  не зависят от координат, то конкретный вид мировой линии можно не учитывать (интеграл будет всегда одним и тем же).

Рассмотрим, как определить одновременность разноместных событий в ОТО. Пусть луч света выходит из точки  $M'$  в момент времени  $x^{0(1)}$ , отражается в точке  $M$  в момент  $x^0$  и возвращается в точку  $M'$  в момент времени  $x^{0(2)}$  (рис. 3.2).

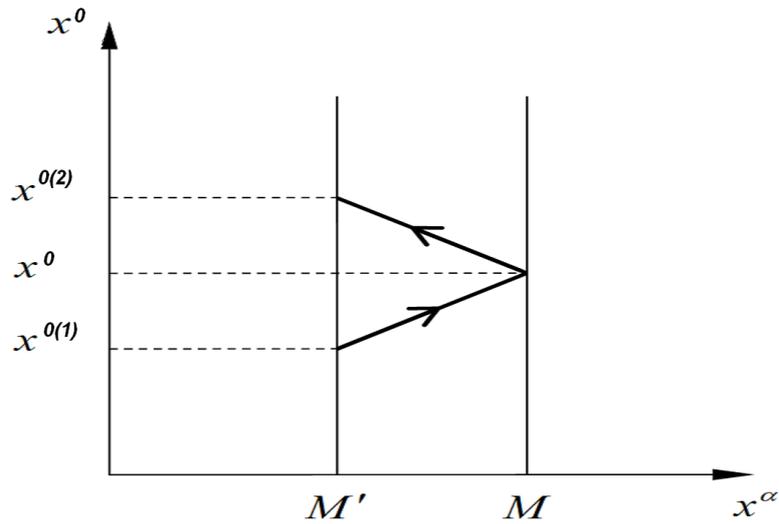


Рис. 3.2. К определению одновременности разноместных событий

Тогда одновременным с событием  $x^0$  в точке  $M$  (отражение луча света в точке  $M$ ) в точке  $M'$  естественно считать событие, происходящее в точке  $M'$  в момент времени, лежащий посередине между испусканием и приходом луча

света в этой точке, т. е. момент (см. (3.7))

$$\frac{x^{0(1)} + x^{0(2)}}{2} = x^0 - \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha. \quad (3.12)$$

С помощью такой процедуры можно синхронизировать часы вдоль любой незамкнутой линии. Вдоль замкнутой линии (а стало быть, и в какой-либо области в целом) синхронизация часов невозможна, так как интеграл по замкнутому контуру от  $\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha$  в общем случае не равен нулю. Синхронизация возможна лишь в системах отсчета, для которых все  $g_{0\alpha} = 0$ . Невозможность синхронизации часов является следствием произвольности выбора системы отсчета, а не собственно пространства-времени. В любом гравитационном поле всегда можно выбрать (бесчисленным числом способов) систему отсчета, в которой все три величины  $g_{0\alpha}$  будут тождественно равны нулю.

Здесь важно отметить, что в силу того, что истинное (собственное) время течет по-разному в различных точках пространства, промежутки собственного времени между двумя событиями в одной точке пространства и между одновременными с ними событиями в другой точке пространства не равны друг другу.

### 3.2. Движение частицы в гравитационном поле

В ОТО гравитационное поле проявляется в виде искривления пространства-времени, а движение тела в гравитационном поле есть свободное движение в искривленном пространстве-времени. Соответственно действие для материальной точки в гравитационном поле есть действие для свободной материальной точки в искривленном

пространстве-времени:

$$S = -mc \int_{P_1}^{P_2} ds, \quad (3.13)$$

где интеграл берется вдоль мировой линии частицы между двумя фиксированными точками  $P_1$  и  $P_2$ .

Условие экстремальности действия на истинной траектории

$$\delta S = -mc \delta \int_{P_1}^{P_2} ds = 0 \quad (3.14)$$

показывает, что движение частицы в гравитационном поле происходит по геодезической линии ( $\delta \int ds = 0$ ):

$$\frac{du^\ell}{ds} + \Gamma_{ik}^\ell u^i u^k = 0, \quad (3.15)$$

где  $u^k = dx^k/ds$ . Учет множителя  $mc$  в (3.13) приводит к следующему уравнению движения для частицы в гравитационном поле:

$$mc \frac{du^\ell}{ds} = -mc \Gamma_{ik}^\ell u^i u^k = 0. \quad (3.16)$$

Вводя четырехмерный импульс  $p^\ell = mc u^\ell$ , это уравнение можно представить в виде

$$\frac{dp^\ell}{ds} = -mc \Gamma_{ik}^\ell u^i u^k. \quad (3.17)$$

Величина, стоящая в правой части этого уравнения, имеет смысл 4-мерной силы, действующей на частицу со стороны поля. Эта сила

$$f^\ell \equiv -mc \Gamma_{ik}^\ell u^i u^k \quad (3.18)$$

зависит от характеристик частицы: ее массы  $m$ , скорости  $u^i$  и характеристик поля. Роль силовой характеристики поля — напряженности — играют, таким образом, величины  $\Gamma_{ik}^\ell$ . Поскольку символы Кристоффеля  $\Gamma_{ik}^\ell$  выражаются через производные от метрического тензора, компоненты метрического тензора играют роль потенциалов гравитационного поля.

Далее, в любой точке пространства можно выбрать локально-геодезическую систему координат, т. е. такую, в которой символы Кристоффеля равны нулю ( $\Gamma_{ik}^\ell = 0$ ). Это соответствует тому, что в данной точке пространства

$$\frac{dp^\ell}{ds} = 0, \quad (3.19)$$

что и отражает принцип эквивалентности — подходящим выбором неинерциальной системы отсчета можно исключить гравитационное поле в данной конкретной точке пространства.

Здесь важно напомнить, что в криволинейном пространстве-времени с помощью выбора системы координат нельзя обратить в нуль все символы Кристоффеля сразу во всем пространстве. Соответственно нельзя исключить гравитационное поле сразу во всем пространстве (или в конечной области) подходящим выбором системы отсчета.

### 3.3. Слабое гравитационное поле. Ньютоновский предел

Рассмотрим случай слабого гравитационного поля. В этом случае гравитационное поле должно описываться ньютоновской теорией (закон всемирного тяготения Ньютона), а скорости частиц, приобретаемые под действием гравитационного поля, малы: ( $v \ll c$ ).

В ньютоновской теории тяготения гравитационное поле описывается одним скалярным потенциалом  $\varphi$ . Потенциальная энергия частицы массой  $m$  в таком поле равна  $m\varphi$ . Тогда нерелятивистская функция Лагранжа  $L$  частицы в гравитационном поле (с учетом энергии покоя  $mc^2$ ) запишется в виде

$$L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} - m\varphi, \quad (3.20)$$

и для действия частицы в гравитационном поле получаем ( $t_1, t_2$  — моменты времени начала и конца движения)

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( -mc^2 + \frac{mv^2}{2} - m\varphi \right) dt. \quad (3.21)$$

Сравнивая это выражение с (3.12), видим, что роль  $ds$  в этом случае играет величина  $(c - v^2/(2c) + \varphi/c) dt$ . Тогда

$$ds^2 = \left( c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\varphi}{c} \right)^2 dt^2 \simeq c^2 \left( 1 + \frac{2\varphi}{c^2} \right) dt^2 - \left( 1 + \frac{\varphi}{c^2} \right) dr^2, \quad (3.22)$$

где учтено, что  $(vdt)^2 = dr^2$ , а последнее равенство записано с учетом слабости гравитационного поля:  $\varphi \ll c^2$ .

Вводя координаты  $x^0 = ct$ ,  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$ , видим, что метрический тензор в слабом гравитационном поле (предел ньютоновской теории гравитации) имеет вид

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2\varphi}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1 + \frac{\varphi}{c^2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1 + \frac{\varphi}{c^2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(1 + \frac{\varphi}{c^2}) \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Таким образом, слабое гравитационное поле проявляется прежде всего в диагональных компонентах метрического тензора в виде поправок порядка  $\varphi/c^2$ , где  $\varphi$  — потенциал гравитационного поля, отвечающий ньютоновской теории.

Для сферически симметричного тела массы  $M$  гравитационный потенциал вне тела равен

$$\varphi = -G\frac{M}{r}, \quad (3.24)$$

где  $r$  — расстояние до центра тела, а  $G$  — гравитационная постоянная. Тогда параметр слабости гравитационного поля примет вид  $|\varphi/c^2| = GM/rc^2$ .

В Солнечной системе даже на поверхности Солнца этот параметр мал:

$$\left|\frac{\varphi}{c^2}\right|_{Sun} = G\frac{M_{\odot}}{R_{\odot}c^2} \simeq 10^{-6}, \quad (3.25)$$

и, следовательно, гравитационные поля в рамках Солнечной системы всегда являются слабыми.

### 3.4. Постоянное гравитационное поле

Строго говоря, постоянного гравитационного поля быть не может, так как под действием гравитационного поля все приходит в движение, в результате чего меняется и само гравитационное поле.

Под *постоянным* понимают такое гравитационное поле, для которого существует система отсчета, в которой компоненты метрического тензора не зависят от времени  $x^0$ . Сама координата  $x^0$  в этом случае называется мировым временем. Примером постоянного гравитационного поля

является гравитационное поле неподвижного или вращающегося с постоянной скоростью сферически симметричного тяготеющего тела. При этом для неподвижного тела оба направления времени эквивалентны, и  $ds$  не должно меняться при замене  $x^0$  на  $-x^0$ . Это, в свою очередь, означает, что

$$g_{0\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (3.26)$$

Такое постоянное гравитационное поле называют *статическим*. В нем возможна синхронизация часов вдоль замкнутой линии и, соответственно, в конечной области пространства, а роль пространственного метрического тензора играет  $g_{\alpha\beta}$ :

$$dl^2 = -g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (3.27)$$

Для вращающегося тела противоположные направления координаты  $x^0$  неэквивалентны. Соответственно в этом случае  $g_{0\alpha} \neq 0$  и невозможна синхронизация часов вдоль замкнутого контура. Такое поле называют *стационарным* гравитационным полем.

Остановимся на физическом смысле мирового времени. Рассмотрим две близкие точки в пространстве  $M(x^\alpha)$  и  $M'(x^\alpha + dx^\alpha)$ . Пусть в точке  $M'$  происходят два события в моменты времени  $x^{0(1)}$  и  $x^{0(2)}$  соответственно. Тогда одновременные с ними события в точке  $M$  будут происходить в моменты времени:

$$x^{0(1)} - \frac{g_{0\alpha} dx^\alpha}{g_{00}} \Big|_{x^{0(1)}} \quad \text{и} \quad x^{0(2)} - \frac{g_{0\alpha} dx^\alpha}{g_{00}} \Big|_{x^{0(2)}}. \quad (3.28)$$

В силу независимости компонент метрического тензора от  $x^0$  промежуток времени между этими событиями в точке  $M$  оказывается равным промежутку времени между одно-

временными с ними событиями  $x^{0(1)}$  и  $x^{0(2)}$  в точке  $M'$ :

$$x^{0(2)} - \frac{g_{0\alpha} dx^\alpha}{g_{00}} \Big|_{x^{0(2)}} - \left( x^{0(1)} - \frac{g_{0\alpha} dx^\alpha}{g_{00}} \Big|_{x^{0(1)}} \right) = x^{0(2)} - x^{0(1)}. \quad (3.29)$$

Таким образом, промежуток мирового времени между двумя событиями не зависит от точки пространства.

Истинное время между событиями  $d\tau$  связано с координатой  $x^0$  соотношением

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} dx^0. \quad (3.30)$$

В случае, когда компоненты метрического тензора (в том числе  $g_{00}$ ) не зависят от  $x^0$ , подобная связь сохранится и для конечных промежутков времени:

$$\Delta\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} \Delta x^0. \quad (3.31)$$

При этом истинное время, конечно, зависит от точки пространства (в силу зависимости  $g_{00}$  от пространственных координат).

Для слабого гравитационного поля ( $g_{00} \simeq 1 + 2\varphi/c^2$ ) эта зависимость описывается выражением

$$\Delta\tau = \frac{1}{c} \sqrt{1 + \frac{2\varphi}{c^2}} \Delta x^0 \simeq \frac{1}{c} \left( 1 + \frac{\varphi}{c^2} \right) \Delta x^0. \quad (3.32)$$

Потенциал  $\varphi$  отрицателен и растет по абсолютной величине при приближении к тяготеющему телу. Промежуток времени между событиями тогда уменьшается вблизи тяготеющего тела. Этот эффект называется *гравитационным замедлением времени*. Непосредственной проверкой этого эффекта является сравнение показаний высокоточных часов, находящихся некоторое время на высоте (самолет, ракета), с показанием таких же часов, оставшихся на земле.

### 3.5. Распространение света в постоянном гравитационном поле. Гравитационное смещение спектральных линий

Распространение электромагнитных волн описывается волновым уравнением, которое в криволинейных координатах имеет вид

$$f_{;i}^i = 0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{-g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) = 0, \quad (3.33)$$

где  $f$  — любая из компонент электрической или магнитной напряженностей электромагнитного поля. Для волн, меняющих направление распространения (неплоские волны), можно записать

$$f(\vec{r}, t) = a(\vec{r}, t) e^{i\psi(\vec{r}, t)}, \quad (3.34)$$

где  $a(\vec{r}, t)$  — амплитуда волны, а  $\psi(\vec{r}, t)$  — эйконал. При плавном изменении параметров волны, ограничиваясь лишь членами первого порядка, получаем равенство

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_0 + \frac{\partial \psi}{\partial t} t + \frac{\partial \psi}{\partial \vec{r}} \vec{r}, \quad (3.35)$$

из которого следует смысл производных эйконала  $\psi(\vec{r}, t)$  как частоты  $\omega$  и волнового вектора  $\vec{k}$ :

$$\omega = \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \vec{k} = \frac{\partial \psi}{\partial \vec{r}}. \quad (3.36)$$

В приближении геометрической оптики, когда период  $T = 2\pi/\omega$  и длина волны  $\lambda = 2\pi/k$  малы по сравнению с масштабами изменения характеристик волны, распространение электромагнитных волн понимается как распространение лучей света и описывается уравнением для эйконала. Уравнение для эйконала получается из уравнения

(3.33) в предположении большой величины производных  $\partial\psi/\partial x^i$  и имеет вид

$$g^{ij} \frac{\partial\psi}{\partial x^i} \frac{\partial\psi}{\partial x^j} = 0. \quad (3.37)$$

Введем ковариантный четырехмерный волновой вектор

$$k_i = \frac{\partial\psi}{\partial x^i} \quad (3.38)$$

и сопряженный ему контравариантный четырехмерный волновой вектор

$$k^i = g^{ij} k_j = g^{ij} \frac{\partial\psi}{\partial x^j}. \quad (3.39)$$

Тогда уравнение (3.37) запишется в виде

$$k^i k_i = 0. \quad (3.40)$$

Таким образом, квадрат волнового 4-вектора равен нулю. Выражение (3.40) представляет собой закон дисперсии электромагнитной волны в гравитационном поле.

Производная от эйконала  $\psi$  по координате  $x^0$  является частотой колебаний  $\omega_0$ , понимаемой как число колебаний в единицу координатного времени  $x^0/c$ :

$$\omega_0 = -c \frac{\partial\psi}{\partial x^0}. \quad (3.41)$$

Истинная же (измеренная в данной точке) частота  $\omega$  понимается как число колебаний в единицу истинного времени:

$$\omega = -\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = -\frac{\partial\psi}{\partial x^0} \frac{\partial x^0}{\partial\tau} = \frac{\omega_0}{c} \frac{\partial x^0}{\partial\tau}. \quad (3.42)$$

В постоянном гравитационном поле, когда компоненты метрического тензора не зависят от  $x^0$  и с учетом связи  $\tau$  и  $x^0$  (см. (3.30)), получаем

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{g_{00}}}. \quad (3.43)$$

Поскольку уравнение для эйконала (3.37) в постоянном гравитационном поле не содержит  $x^0$  явно, то частота  $\omega_0$  остается постоянной при распространении луча света. Частота же  $\omega$ , измеренная в собственном времени, в силу зависимости  $g_{00}$  от координат будет различной в различных точках пространства.

В случае слабого гравитационного поля, описываемого потенциалом  $\varphi$ , получаем

$$\omega \simeq \omega_0 \left(1 - \frac{\varphi}{c^2}\right). \quad (3.44)$$

Так как  $\varphi < 0$ , то при приближении к тяготеющему телу измеряемая частота света (испускаемого каким-либо источником) увеличивается (свет синееет), а при удалении от тела — уменьшается (свет краснеет). Это явление проявляется в сдвиге спектральных линий химических элементов и называется *гравитационным смещением спектральных линий*.

Изменение частоты света при переходе от одной точки к другой определяется разностью гравитационных потенциалов:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \omega_0 \left(1 - \frac{\varphi_2}{c^2}\right) - \omega_0 \left(1 - \frac{\varphi_1}{c^2}\right) = \omega_0 \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2}. \quad (3.45)$$

Например, для наблюдателя на Земле свет, испущенный с поверхности Солнца, будет испытывать относительный

сдвиг (в длинах волн):

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \simeq 2.17 \cdot 10^{-6}. \quad (3.46)$$

Это малая величина, которую трудно выделить на фоне доплеровских смещений, вызванных движением частиц.

В случае компактных звезд — белых карликов — величина сдвига существенно возрастает:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \simeq 2 \cdot 10^{-4}, \quad (3.47)$$

и вполне наблюдаема.

В земных условиях изменение частоты света крайне мало:  $\Delta\omega \sim 10^{-16}$  сек.<sup>-1</sup> при изменении высоты на 1 м. Открытие в 1958 г. эффекта Месбауэра, позволившего измерять частоту света с большой точностью, дало возможность наблюдать гравитационное красное смещение в земных условиях. Впервые это было сделано Паундом и Ребка в 1959 г. В этих экспериментах относительное гравитационное смещение спектральных линий на расстоянии 26,6 м составило

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = (2,57 \pm 0,27) \cdot 10^{-15}, \quad (3.48)$$

что вполне согласуется с расчетным значением  $2,46 \cdot 10^{-15}$ . В настоящее время достигнуто совпадение теории и эксперимента с точностью до 1 %.

Отметим еще, что гравитационное изменение частоты радиоволн необходимо учитывать при работе с межпланетными космическими аппаратами.

## Глава 4

# Уравнения гравитационного поля

### 4.1. Уравнения Эйнштейна

**1. Эвристические соображения.** Уравнения гравитационного поля так же, как и многие другие фундаментальные уравнения физики, могут быть получены на основании эвристических соображений. Рассмотрим некоторые из них:

- В нерелятивистском пределе уравнения гравитационного поля должны переходить в уравнение Пуассона для скалярного потенциала гравитационного поля  $\varphi$ . Поскольку уравнение Пуассона — второго порядка, а аналогом гравитационного потенциала  $\varphi$  в ОТО служит метрический тензор  $g_{ik}$ , то искомые уравнения гравитационного поля должны быть, как минимум, уравнениями второго порядка по  $g_{ik}$ .
- Согласно базовым представлениям ОТО гравитационное поле тождественно искривлению пространства-времени, порождаемому материей. В СТО движение материи и полей описывается тензором энергии-импульса  $T^{ik}$ . Этот тензор включает в себя всю материю (вещество) и все поля, за исключением гравитационного. В плоском пространстве в декартовых координатах законы сохранения энергии и импульса материи записываются в виде

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = 0. \quad (4.1)$$

В ОТО источником кривизны пространства-времени также является тензор энергии-импульса  $T^{ik}$ , причем в силу универсальности гравитационного поля этот тензор, помимо вкладов, указанных выше, будет содержать еще и взаимодействие с гравитационным полем. Тогда естественно предположить, что в криволинейном пространстве в произвольных координатах обобщением выражения (4.1) является ковариантный закон сохранения

$$\nabla_k T^{ik} = 0. \quad (4.2)$$

- Предполагая, что уравнения (4.2) следуют из полевых уравнений, запишем последние в виде

$$F^{ik} = \kappa T^{ik}, \quad (4.3)$$

где тензор  $F^{ik}$  описывает искривление пространства-времени, а  $\kappa$  — коэффициент, который должен находиться из соответствия уравнений (4.3) ньютоновскому пределу. Правая часть уравнения (4.3) описывает материю и взаимодействующее с ней гравитационное поле, а левая — искривление пространства-времени. Из (4.2) и (4.3) следует, что тензор  $F^{ik}$  должен удовлетворять условию

$$\nabla_k F^{ik} = 0. \quad (4.4)$$

Исходя из приведенных выше соображений, получим уравнения, которым должно удовлетворять гравитационное поле.

**2. Уравнения гравитационного поля.** Найдем тензор  $F^{ik}$ . Очевидно, что его нужно строить из тензоров,

характеризующих искривленное пространство-время. Самым простым из них, удовлетворяющих условию (4.4), является метрический тензор  $g^{ik}$ , для которого, в силу условия согласования метрики со связностью,  $\nabla g^{ik} = 0$ . Однако уравнение  $g^{ik} = \kappa T^{ik}$ , которое при этом получается, не является дифференциальным. Тем не менее тензор  $g^{ik}$  должен входить в тензор  $F^{ik}$ . Найдем еще одну составляющую тензора  $F^{ik}$ . Будем исходить из тождества Бианки:

$$\nabla_l R_{qkj}^i + \nabla_j R_{qlk}^i + \nabla_k R_{qjl}^i = 0. \quad (4.5)$$

Воспользуемся свойством  $R_{qkj}^i = -R_{qjk}^i$  и свернем выражение (4.5) по индексам  $i$  и  $j$ . Получаем

$$\nabla_l R_{qk} + \nabla_i R_{qlk}^i + \nabla_k R_{ql} = 0, \quad (4.6)$$

где  $R_{ik}$  — тензор Риччи. Преобразуем второе слагаемое в этом выражении. Имеем

$$\nabla_i R_{qlk}^i = \nabla_i g^{in} R_{nqlk} = g^{in} \nabla_i R_{nqlk} = g^{in} \nabla_i R_{klqn}. \quad (4.7)$$

Тогда выражение (4.5) запишется в виде

$$\nabla_l R_{qk} + g^{in} \nabla_i R_{klqn} + \nabla_k R_{ql} = 0. \quad (4.8)$$

Свертывая обе части этого выражения сначала с  $g^{qk}$ , а затем с  $g^{il}$ , после простых преобразований получаем

$$\nabla_k G^{ik} = 0, \quad (4.9)$$

где тензор

$$G^{ik} = R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R \quad (4.10)$$

называется *тензором Эйнштейна*. Из (4.9) видно, что тензор  $G^{ik}$  удовлетворяет условию (4.4), а из (4.10) следует,

что этот тензор содержит вторые производные от метрического тензора. Учитывая все вышесказанное, в качестве искомого тензора  $F^{ik}$  выберем следующие выражения:

$$F^{ik} = G^{ik} - \Lambda g^{ik}, \quad (4.11)$$

где  $\Lambda$  — некоторая константа, называемая *космологической постоянной*. Таким образом, искомые уравнения гравитационного поля имеют вид

$$R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}R - \Lambda g^{ik} = \kappa T^{ik}. \quad (4.12)$$

Полученные уравнения (4.12) называются *уравнениями Эйнштейна*<sup>2</sup>.

**3. Различные формы записи уравнений гравитационного поля.** Уравнения Эйнштейна (4.12) записаны в контравариантной форме. Однако существуют и другие формы записи этих уравнений.

Ковариантная форма получается путем двукратной свертки уравнений (4.12) с метрическим тензором

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R - \Lambda g_{ik} = \kappa T_{ik}, \quad (4.13)$$

где  $T_{ik} = T^{jl}g_{ji}g_{lk}$  — ковариантный тензор энергии-импульса. Если произвести свертку уравнений (4.12) с метрическим тензором только один раз, то получим смешанную форму записи уравнений Эйнштейна:

$$R_k^i - \frac{1}{2}\delta_k^i R - \Lambda \delta_k^i = \kappa T_k^i. \quad (4.14)$$

---

<sup>2</sup> Распространенным является также название «уравнения Гильберта – Эйнштейна».

Свернем обе части этого уравнения по имеющимся индексам. Обозначая след тензора  $T_i^i$  буквой  $T$ :  $T_i^i = T$ , получим

$$R = -\kappa T - 4\Lambda. \quad (4.15)$$

Подставляя это выражение в (4.12), получим еще одну ковариантную форму записи уравнений:

$$R_{ik} = \kappa(T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T) - \Lambda g_{ik}. \quad (4.16)$$

#### 4. Некоторые свойства уравнений Эйнштейна:

1. Поскольку тензор Риччи  $R_{ik}$  содержит первые производные от символов Кристоффеля, а те, в свою очередь, содержат первые производные от метрического тензора, то, как следует из (4.12) или (4.15), уравнения Эйнштейна являются системой неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка относительно компонент метрического тензора. Неоднородность уравнений обусловлена тензором энергии-импульса материи, который задается, исходя из конкретной модели материальной среды.
2. Как следует из структуры тензора Риччи, уравнения Эйнштейна нелинейны как относительно компонент символов Кристоффеля, так и относительно компонент метрического тензора. Отсюда следует, что, в отличие от ньютоновской теории, в ОТО в общем случае не выполняется принцип суперпозиции гравитационного поля.
3. В силу тождеств Бианки (4.5) из уравнений Эйнштейна следуют четыре уравнения относительно тензора энергии-импульса материи:

$$\nabla_k T^{ik} = 0, \quad (4.17)$$

которые описывают движение материи. Тем самым уравнения Эйнштейна определяют не только гравитационное поле, но и поведение материи в гравитационном поле.

4. Общая ковариантность (одинаковый вид в любой системе отсчета) уравнений Эйнштейна позволяет наложить на компоненты метрического тензора  $g_{ik}$  четыре дополнительных условия путем перехода к специальным классам систем 4-мерных координат и соответствующих им систем отсчета. Эти условия называются условиями калибровки. В общем случае четыре условия калибровки запишутся в виде

$$f_j(g_{ik}, x^l) = 0, \quad (4.18)$$

где  $j = 0, 1, 2, 3$ . Эти условия задают выбор системы координат. Отметим, что данные условия, вообще говоря, не являются общековариантными (тензорными). В качестве таких дополнительных условий могут быть выбраны гармонические координатные условия де Дондера — Фока

$$\Gamma^j \equiv g_{ik}\Gamma_{ik}^j = 0, \quad (4.19)$$

которые, как легко показать, также можно переписать в виде

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}g^{ji})}{\partial x^i} = 0. \quad (4.20)$$

Систему координат, определяемую гармоническими координатными условиями, будем называть *гармонической системой координат*, а сами координаты — *гармоническими*. Гармонические координаты особенно удобны при исследовании линеаризованных уравнений гравитационного поля, поскольку в них существенно упрощается оператор Даламбера.

5. Уравнения Эйнштейна (4.12) — это тензорные уравнения второго ранга, записанные в виде равенства двух симметричных тензоров второго ранга. Следовательно, уравнения (4.12) представляют собой систему из десяти нелинейных дифференциальных уравнений относительно десяти компонент метрического тензора  $g_{ik}$ . Как отмечалось, в силу общей ковариантности уравнений Эйнштейна выбором специальной системы отсчета можно четыре компоненты тензора  $g_{ik}$  задать определенным образом. В результате среди десяти компонент метрического тензора неизвестными остаются только шесть. Что является остальными неизвестными в уравнениях Эйнштейна? Уравнения Эйнштейна содержат тензор энергии-импульса материи  $T_{ik}$ , удовлетворяющий уравнению (4.17). Однако  $T_{ik}$  также зависит от  $g_{ik}$  и, следовательно, мы не можем описать движение материи независимо от гравитационного поля. Следовательно, уравнения Эйнштейна (4.12) и уравнения движения материи (4.17) должны решаться совместно. Отметим, что поскольку уравнение (4.17) является следствием (4.12), то их добавление не увеличивает количества независимых уравнений — их число по-прежнему остается равным десяти, а неизвестных компонент метрического тензора  $g_{ik}$  с учетом калибровки шесть. Дополнительные неизвестные связаны с движением и состоянием материи. Поэтому уравнения Эйнштейна необходимо дополнить уравнениями состояния материи. Получающаяся в результате система уравнений позволяет однозначным образом описать как гравитационное поле, так и характеристики движущейся материи.

Например, в случае, когда материя представ-

ляет собой некоторую сплошную среду, ее тензор энергии-импульса можно записать в виде (см. формулу (4.52))

$$T^{ik} = (\varepsilon + p)u^i u^k - pg^{ik}. \quad (4.21)$$

Кроме шести компонент метрического тензора в выражении (4.17), неизвестными являются четыре компоненты 4-мерной скорости  $u_k$ , давление  $p$  и плотность энергии  $\varepsilon$ . С учетом того, что вектор  $u_k$  нормирован на единицу (соответственно число независимых компонент  $u_k$  сокращается до трех), число дополнительных неизвестных равняется пяти — три компоненты  $u_k$ ,  $p$  и  $\varepsilon$ . Таким образом, полное число неизвестных в рассматриваемом случае равно одиннадцати, а число независимых уравнений — десяти. Дополнительным уравнением должно быть уравнение состояния, которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$f(p, \varepsilon) = 0. \quad (4.22)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае получаем замкнутую систему из одиннадцати уравнений, позволяющую самосогласованным образом описать гравитационное поле и движение и состояние сплошной среды.

**5. Энергетические условия.** Симметричный тензор энергии-импульса материи должен удовлетворять уравнениям движения (4.2):  $\nabla_k T^{ik} = 0$ . В ОТО уравнения движения материи, создающей гравитационное поле, являются следствием уравнений Эйнштейна, поскольку ковариантная дивергенция левой части уравнений (4.12) тождественно обращается в нуль. Кроме того, установлено, что тензор

энергии-импульса всех известных классических форм материи удовлетворяет условиям

$$\tau^i \tau^j T_{ij} \geq 0, \quad (4.23)$$

$$\tau_i \tau^l T^{ij} T_{jl} \geq 0, \quad (4.24)$$

где  $\tau_i$  — произвольный времениподобный или светоподобный вектор, удовлетворяющий условию  $\tau_i \tau^i \geq 0$ . Такие векторы называются *причинными*. В частности, в качестве причинных векторов  $\tau^i$  могут использоваться вектор четырехмерной скорости  $u^i$  и четырехмерный волновой вектор  $k^i$ , которые удовлетворяют равенствам

$$u_i u^i = 1, \quad k_i k^i = 0. \quad (4.25)$$

Выражения (4.23) и (4.24) называются *условиями эргодоминантности*. Условие (4.23) иногда называется *слабым энергетическим условием*. Его физический смысл состоит в том, что с точки зрения любого причинного наблюдателя, мировая линия которого задается вектором  $\tau^i$ , *плотность энергии системы является неотрицательной величиной*. Неравенство (4.24) означает, что *относительно любого причинного наблюдателя плотность потока энергии является причинным (времениподобным или светоподобным) вектором*.

С. Хокинг и Р. Пенроуз показали, что при достаточно общих предположениях справедливы следующие неравенства:

$$u^i u^j R_{ij} \geq 0, \quad (4.26)$$

$$k^i k^j R_{ij} \geq 0. \quad (4.27)$$

Неравенство (4.26) называется *сильным энергетическим условием*, а неравенство (4.27) — *нулевым энергетическим условием*. Для причинного наблюдателя, мировая линия

которого задается векторами  $u^i$  или  $k^i$ , эти условия, кроме требования неотрицательности плотности энергии, налагают еще дополнительные требования на свойства материи.

## 4.2. Уравнения Эйнштейна и вариационный принцип

**1. Лагранжиан.** Действие для системы, состоящей из гравитационного поля и материи, можно записать в виде

$$S = \int_V L dV, \quad (4.28)$$

где  $L$  — лагранжиан, а  $dV = \sqrt{-g}d^4x$  — инвариантный элемент 4-мерного объема. Действие, в силу общего принципа относительности, должно являться инвариантом<sup>3</sup>, а значит, инвариантом должен являться лагранжиан  $L$ . Этот лагранжиан  $L$  складывается из лагранжиана гравитационного поля  $L_g$  и лагранжиана материи  $L_m$  — источника гравитационного поля:

$$L = L_g + L_m. \quad (4.29)$$

Поскольку гравитационное поле проявляется только в кривизне пространства-времени, то добавлять в лагранжиан отдельно лагранжиан взаимодействия материи и гравитационного поля нет необходимости. Это взаимодействие учитывается тем, что лагранжиан материи записывается в искривленном пространстве-времени. Таким образом,  $L_m$  — лагранжиан вещества и всех полей, за исключением гравитационного (все это обычно называют ма-

---

<sup>3</sup> Только так получают уравнения гравитационного поля в обобщенно-вариантной (тензорной) форме.

терией). Он строится, исходя из той модели материальной среды, которая используется для решения данной конкретной задачи.

Рассмотрим лагранжиан гравитационного поля  $L_g$ . Как отмечалось выше, уравнения Эйнштейна — это уравнения на компоненты метрического тензора. Значит, инвариантный лагранжиан  $L_g$  должен быть получен из непосредственно метрического тензора  $g^{ik}$ , а также построенных на основе  $g^{ik}$  тензоров, описывающих геометрию пространства-времени:  $R$ ,  $R_{ik}$ ,  $R_{ikl}^j$  и т. д. Простейшим инвариантом, построенным из  $g^{ik}$ , является величина

$$I_1 = g^{ik} g_{ik} = \delta_k^k = 4. \quad (4.30)$$

Однако исходя только из  $I_1$  при варьировании действия, мы не получим дифференциальных уравнений. Поэтому нужно учесть следующий простейший инвариант, которым является риманова кривизна  $R$ :

$$I_2 = R. \quad (4.31)$$

Поскольку  $R$  зависит не только от метрического тензора, но также и от его производных по координатам, при варьировании действия, содержащего инвариант  $I_2$ , уже получается дифференциальное уравнение. Таким образом, простейший лагранжиан гравитационного поля записывается в виде

$$L_g = \alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2, \quad (4.32)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — произвольные постоянные. Учитывая (4.31) и переобозначая константы, запишем  $L_g$  в виде

$$L_g = \alpha(R + 2\Lambda), \quad (4.33)$$

где  $\alpha = \alpha_2$ , а  $\Lambda = 2\alpha_1/\alpha_2$  — как мы увидим далее, уже знакомая нам космологическая постоянная.

**2. Метод Палатини.** Итак, мы получили, что

$$S = S_g + S_m, \quad (4.34)$$

где

$$\begin{aligned} S_g &= \int_V L_g dV, \\ S_m &= \int_V L_m dV \end{aligned} \quad (4.35)$$

представляют собой действия для гравитационного поля и материи соответственно. Выведем теперь уравнения Эйнштейна из принципа наименьшего действия  $\delta S = 0$  при условии закрепленности метрического тензора  $g^{ik}$  на границах интегрирования, т. е. заданности его в начальный и конечный моменты времени во всех точках пространства и стремлении  $g^{ik}$  к  $\eta^{ik}$  на бесконечности. Для того чтобы получить уравнения гравитационного поля, необходимо варьировать по независимым полевым переменным. Такими независимыми переменными выбираются компоненты метрического тензора  $g^{ik}$ , а все остальные величины ( $\Gamma_{ik}^j$ ,  $R_{ik}$ ,  $R$  и т. д.) считаются функциями от  $g^{ik}$ . Тогда, варьируя в действии все величины по компонентам метрического тензора, из принципа наименьшего действия мы должны получить искомые уравнения гравитационного поля.

Как показывают непосредственные вычисления, такой подход хотя и позволяет получить уравнения Эйнштейна, но требует на определенном этапе выбора конкретной системы координат. Поэтому возникает необходимость в методе, который позволял бы получить последовательно тензорный вывод уравнений Эйнштейна из вариационного принципа. Этот метод был предложен Палатини и носит

его имя. Основная идея метода Палатини: связность и метрику можно ввести независимо друг от друга и, следовательно, варьировать по ним, как по независимым переменным. Таким образом, при осуществлении варьирования в качестве независимых переменных выбираются компоненты метрического тензора  $g^{ik}$  и компоненты связности  $\Gamma_{ik}^j$ . При этом лагранжиан гравитационного поля зависит и от метрического тензора, и от связностей, а лагранжиан материи — только от метрического тензора. В результате из принципа наименьшего действия получаются две группы уравнений:

$$\frac{\delta S}{\delta g^{ik}} = \frac{\delta S_g}{\delta g^{ik}} + \frac{\delta S_m}{\delta g^{ik}} = 0, \quad (4.36)$$

$$\frac{\delta S}{\delta \Gamma_{ik}^j} = \frac{\delta S_g}{\delta \Gamma_{ik}^j} = 0. \quad (4.37)$$

При таком подходе варьирование действия по метрическому тензору (уравнения (4.36)) приводит к правильным уравнениям гравитационного поля, а варьирование по связностям (уравнения (4.37)) дает известные выражения для символов Кристоффеля.

Запишем действие для гравитационного поля в виде

$$S_g = \alpha \int_V (R_{ik}(\Gamma)g^{ik} + 2\Lambda)\sqrt{-g}d^4x, \quad (4.38)$$

где

$$R_{ik}(\Gamma) = \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^j}{\partial x^k} + \Gamma_{lj}^j \Gamma_{ik}^l - \Gamma_{lk}^j \Gamma_{ij}^l \quad (4.39)$$

есть тензор Риччи, который зависит только от бинарных произведений коэффициентов связности и их производных

по координатам. Найдем вариационную производную по метрическому тензору от выражения (4.38). Воспользуемся тем, что

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{ik}\delta g^{ik}. \quad (4.40)$$

Тогда

$$\frac{\delta S_g}{\delta g^{ik}} = \alpha\sqrt{-g}(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R - \Lambda g_{ik}). \quad (4.41)$$

В соответствии с определением вариационная производная от  $S_m$  по метрическому тензору выражается через тензор энергии-импульса следующим образом:

$$\frac{\delta S_m}{\delta g^{ik}} = \frac{1}{2c}\sqrt{-g}T_{ik}. \quad (4.42)$$

Тензор  $T_{ik}$ , определенный равенством (4.42), называется *метрическим тензором энергии-импульса*. Непосредственно из определения видно, что он всегда симметричен.

Из выражений (4.36), (4.41) и (4.42) получаем уравнения Эйнштейна (4.13):

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R - \Lambda g_{ik} = \kappa T_{ik}, \quad (4.43)$$

где  $\kappa = -1/2c\alpha$ , а  $\Lambda$  имеет смысл космологической постоянной.

Из выражений (4.37) получаем

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}g^{ik})}{\partial x^j} + \sqrt{-g}(\Gamma_{lj}^i g^{kl} + \Gamma_{lj}^k g^{il} - \Gamma_{lj}^l g^{ik}) = 0. \quad (4.44)$$

Решая эти уравнения относительно величин  $\Gamma_{ik}^j$ , получаем известные выражения для символов Кристоффеля второго рода:

$$\Gamma_{ik}^l = \frac{1}{2}g^{lj} \left( \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \right). \quad (4.45)$$

Таким образом, метод Палатини позволяет получить не только уравнения Эйнштейна, но и установить связь между коэффициентами связности и символами Кристоффеля в рамках ОТО.

### 4.3. Тензор энергии-импульса

**1. Тензор энергии-импульса для идеальной сплошной среды.** Как уже отмечалось, тензор энергии-импульса материи  $T^{ik}$  строится исходя из модели, с помощью которой описывается материя. Построим его в случае, когда материя представляет собой движущуюся однородную изотропную сплошную среду — идеальные жидкость или газ. Рассмотрим сначала плоское пространство. В этом случае тензор энергии-импульса определяется выражением, известным из СТО, и имеет следующую структуру:

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \vec{S}/c \\ \vec{S}/c & -\sigma^{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \quad (4.46)$$

где  $T^{00} = \varepsilon$  — плотность энергии,  $\vec{S}$  — вектор плотности потока энергии, а  $\sigma^{\alpha\beta}$  — тензор напряжений. При этом плотность потока энергии  $\vec{S}$  связана с плотностью импульса  $\vec{\pi}$  с помощью выражения  $\vec{S} = \vec{\pi}c^2$ .

В покоящейся ( $u^\alpha = 0, \alpha = 1, 2, 3$ ) однородной и изотропной идеальной сплошной среде потоки энергии и сдвиговые напряжения отсутствуют, и, следовательно, тензор  $T^{ik}$  является диагональным:  $T^{ii} \neq 0, T^{ik} = 0$ . Таким образом,  $T^{ik}$  будет содержать всего 4 компоненты, причем одна из них — плотность энергии  $\varepsilon$ . Три других компоненты определяются тем, что пространственные компоненты тензора энергии-импульса  $T^{\alpha\beta}$  равны взятым с обратным знаком компонентам тензора напряжений  $\sigma^{\alpha\beta}$ :  $T^{\alpha\beta} = -\sigma^{\alpha\beta}$ ,

который для идеальной сплошной среды имеет вид

$$\sigma^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}, \quad (4.47)$$

где  $p$  — давление. Таким образом, в плоском пространстве для неподвижной среды тензор энергии-импульса материи  $T^{ik}$  имеет вид

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \quad (4.48)$$

Для движущейся материи необходимо учесть скорость частиц среды, записав  $T^{ik}$  в ковариантном виде. В этом случае  $T^{ik}$  должен зависеть от вектора 4-скорости. Из условия нормировки вектора 4-скорости  $u^i u_i = 1$  для неподвижной ( $u^\alpha = 0$ ) среды получаем, что  $u^0 = 1$ . Тогда, учитывая явный вид метрического тензора плоского пространства-времени  $\eta^{ik}$ , запишем

$$\begin{aligned} T^{ik} &= \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} = \\ &= \varepsilon u^i u^k + p(u^i u^k - \eta^{ik}). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Обобщая это выражение на случай движущейся в плоском пространстве материи, получаем

$$T^{ik} = (\varepsilon + p)u^i u^k - p\eta^{ik}. \quad (4.50)$$

Такой же вид будет иметь тензор  $T^{ik}$  в кривом пространстве в *локально-псевдоевклидовой системе координат*, где в данной точке метрический тензор совпадает

с метрическим тензором плоского пространства-времени. Тогда в силу тензорного характера выражения (4.50), чтобы получить тензор  $T^{ik}$  в произвольной системе координат, мы должны заменить в нем метрический тензор плоского пространства-времени  $\eta^{ik}$  на метрический тензор кривого пространства-времени  $g^{ik}$ . Кроме того, в тензоре энергии-импульса в искривленном пространстве-времени могут, вообще говоря, появиться дополнительные члены  $\bar{T}^{ik}$ , целиком обусловленные кривизной пространства и обращающиеся в нуль при переходе к плоскому пространству-времени. В результате искомое выражение для тензора энергии-импульса сплошной среды:

$$T^{ik} = (\varepsilon + p)u^i u^k - pg^{ik} + \bar{T}^{ik}. \quad (4.51)$$

Вклад от дополнительных слагаемых  $\bar{T}^{ik}$  велик только в сильно искривленных пространствах, т. е. когда гравитационное поле достаточно велико. В случае достаточно слабых гравитационных полей этим вкладом можно пренебречь. Тогда получаем

$$T^{ik} = (\varepsilon + p)u^i u^k - pg^{ik}. \quad (4.52)$$

Опуская индексы в этом выражении, получаем

$$T_k^i = (\varepsilon + p)u^i u_k - p\delta_k^i, \quad (4.53)$$

$$T_{ik} = (\varepsilon + p)u_i u_k - pg_{ik}. \quad (4.54)$$

Вычислим след тензора энергии-импульса  $T = T_i^i = g_{ik}T^{ki} = g^{ik}T_{ki}$ . Поскольку  $u_i u^i = g_{ik}u^k u^i = g^{ik}u^k u^i = 1$ , то в случае, когда тензор энергии-импульса дается выражениями (4.52)–(4.54), получаем

$$T = \varepsilon - 3p. \quad (4.55)$$

В случае пылевидной материи  $p = 0$ ,  $\varepsilon = \rho c^2$ , где  $\rho$  — плотность массы покоя среды (сумма масс покоя частиц в единице объема). Тогда из (4.52)–(4.54) получаем

$$T^{ik} = \rho c^2 u^i u^k, \quad T_k^i = \rho c^2 u^i u_k, \quad T_{ik} = \rho c^2 u_i u_k. \quad (4.56)$$

След тензора энергии-импульса

$$T = T_i^i = \rho c^2 \quad (4.57)$$

в рассматриваемом случае равен плотности энергии  $\varepsilon$ .

Рассмотрим, какие ограничения на плотность энергии  $\varepsilon$  и давление  $p$  накладывают условия энергодоминантности. Запишем произвольный причинный вектор  $\tau_i$  в виде

$$\tau_i = a u^i + b w^i, \quad (4.58)$$

где  $a$  и  $b$  — произвольные действительные постоянные, удовлетворяющие неравенству

$$|a| \geq |b|, \quad (4.59)$$

а  $w^i$  — единичный пространственноподобный вектор, ортогональный времениподобному вектору  $u_i$ :

$$w^i w_i = -1, \quad u^i w_i = 0. \quad (4.60)$$

Подставляя вектор (4.58) в выражения (4.23) и (4.24), учитывая условия (4.60), получаем

$$\tau^i \tau^k T_{ik} = a^2 \varepsilon + b^2 p \geq 0, \quad (4.61)$$

$$\tau_i \tau^k T_{jk} T^{ji} = a^2 \varepsilon^2 + b^2 p^2 \geq 0. \quad (4.62)$$

Эти неравенства должны выполняться при любых  $a$  и  $b$ , удовлетворяющих (4.23). Из неравенства (4.61) при  $b = 0$  получаем естественное требование

$$\varepsilon \geq 0, \quad (4.63)$$

а из системы неравенств (4.61) и (4.62) находим

$$-\varepsilon \leq p \leq \varepsilon. \quad (4.64)$$

Таким образом, тензор энергии-импульса идеальной сплошной среды должен удовлетворять условиям (4.63) и (4.64).

Система уравнений Эйнштейна (4.12) с тензором энергии импульса (4.52) не является замкнутой. Ее необходимо дополнить уравнением состояния, которое, например, для адиабатических процессов будет иметь вид

$$p = p(\varepsilon). \quad (4.65)$$

Простейшее уравнение состояния задается выражением

$$p = \alpha\varepsilon. \quad (4.66)$$

При  $\alpha = 0$  имеем *уравнение состояния пылевидной материи*, или пыли:

$$p = 0. \quad (4.67)$$

Случай  $\alpha = 1/3$  соответствует уравнению состояния

$$p = \frac{1}{3}\varepsilon. \quad (4.68)$$

Этот случай описывает некогерентное излучение абсолютно черного тела — хаотический фотонный газ. Такое уравнение состояния называется *ультрарелятивистским*. Уравнение состояния, соответствующее  $\alpha = 1$ , имеет вид

$$p = \varepsilon = \rho c^2. \quad (4.69)$$

В среде с уравнением состояния (4.69) скорость звука  $v$  достигает предельного значения и становится равной скорости света

$$v = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} = c. \quad (4.70)$$

Уравнение состояния (4.69) называется *предельно жестким*.

**2. Тензор энергии-импульса скалярного и электромагнитного поля.** Рассмотрим кратко тензоры энергии-импульса скалярного и электромагнитного поля. Начнем со скалярного поля. Ковариантное действие скалярного поля  $\varphi$ , взаимодействующего с полем тяготения, имеет вид

$$S_c = \int_V L_c \sqrt{-g} d^4x, \quad (4.71)$$

где

$$L_c = \frac{1}{2} g^{ik} \partial_i \varphi \partial_k \varphi - V(\varphi) \quad (4.72)$$

есть лагранжиан скалярного поля,  $V(\varphi)$  — скалярный потенциал. Здесь символом  $\partial_i$  обозначена частная производная по координате  $x^i$ . Пользуясь определением (4.42), для тензора энергии-импульса скалярного поля получим

$$T_{ik}^c = \partial_i \varphi \partial_k \varphi - g_{ik} L_c. \quad (4.73)$$

Обратимся теперь к построению тензора энергии-импульса для электромагнитного поля. Электромагнитное поле описывается 4-мерным потенциалом  $A^i$  или тензором электромагнитного поля  $F_{ik}$ :

$$F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i, \quad (4.74)$$

компонентами которого являются напряженности электромагнитного поля. Поскольку связности симметричны, выполняется равенство

$$\nabla_i A_k - \nabla_k A_i = \partial_i A_k - \partial_k A_i,$$

и поэтому  $F_{ik}$  является тензором и в искривленном пространстве. Лагранжиан электромагнитного поля имеет вид

$$L_{em} = -\frac{1}{4}F_{ik}F_{jl}g^{ik}g^{jl}. \quad (4.75)$$

Пользуясь определением (4.42), получаем

$$T_{ik}^{em} = -F_{ij}F_{kl}g^{kl} + \frac{1}{4}F_{jl}F^{jl}g_{ik}. \quad (4.76)$$

Видим, что в искривленном пространстве тензор энергии-импульса как скалярного, так и электромагнитного полей зависит не только от напряженностей этих полей, но и от метрического тензора.

#### 4.4. Ньютоновский предел

**1. Вводные замечания.** В построенной теории осталась неопределенной постоянная  $\kappa$ . Эту константу можно найти из принципа соответствия: *более общая теория должна переходить в более частную в пределах применимости последней*, т. е. ОТО должна переходить в теорию тяготения Ньютона в случае слабых полей. Из логики построения ОТО следует, что теория Ньютона справедлива, когда кривизна пространства-времени мала. Последнее означает, что слабые гравитационные поля приводят к малым возмущениям метрики плоского пространства-времени.

**2. Линейное приближение.** Рассмотрим уравнения Эйнштейна в форме (4.16):

$$R_{ik} = \kappa(T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T) - \Lambda g_{ik}. \quad (4.77)$$

В общем случае — это нелинейные дифференциальные уравнения относительно компонент метрического тензора.

В слабых гравитационных полях нелинейные уравнения Эйнштейна могут быть линеаризованы. Для этого преобразуем метрику к виду

$$g_{ik} = \eta_{ik} + h_{ik}, \quad (4.78)$$

где  $\eta_{ik}$  — метрика плоского пространства-времени,  $h_{ik}$  — тензор, описывающий возмущение плоской метрики. Условие малости возмущения означает, что

$$|h_{ik}| \ll 1. \quad (4.79)$$

Поскольку  $g^{ik}g_{il} = \delta_l^k$ , то в линейном приближении по  $h_{ik}$  контравариантный метрический тензор имеет вид

$$g^{ik} \simeq \eta^{ik} - h^{ik}. \quad (4.80)$$

Кроме того, в линейном приближении все операции поднимания и опускания тензорных индексов производятся путем свертки с невозмущенным метрическим тензором  $\eta_{ik}$  или  $\eta^{ik}$ . В частности,

$$h_k^i = \eta^{ij}h_{jk}, h = h_i^i = \eta^{ik}h_{ik}. \quad (4.81)$$

Наконец, в силу плавности изменения гравитационного поля считаем, что возмущение  $h_{ik}$  и его производные  $h_{ik,j}$  являются величинами одного порядка малости. Символы Кристоффеля (4.45) в линейном приближении равны

$$\Gamma_{ik}^l \simeq \frac{1}{2}\eta^{lj} \left( \frac{\partial h_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial h_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial h_{ik}}{\partial x^j} \right). \quad (4.82)$$

Запишем теперь в линейном приближении тензор Риччи. Поскольку, в соответствии с (4.82), символы Кристоффеля уже являются линейными однородными формами по

$h_{ik,j}$ , в тензоре Риччи в линейном приближении можно опустить члены, содержащие бинарные произведения символов Кристоффеля. Тогда

$$R_{ik} \simeq \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^k}. \quad (4.83)$$

Подставляя выражения (4.82), после элементарных преобразований получаем

$$R_{ik} \simeq -\frac{1}{2} \eta^{jl} \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_k^l}{\partial x^i \partial x^l} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_i^j}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^k}. \quad (4.84)$$

Для дальнейших преобразований нужно определиться с выбором системы координат. Для наших целей наиболее удобна гармоническая система координат:

$$\Gamma^l = \Gamma_{ik}^l g^{ik} = 0. \quad (4.85)$$

В линейном приближении из (4.85) получаем

$$\frac{\partial h_j^i}{\partial x^i} - \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x^j} = 0. \quad (4.86)$$

Запишем теперь выражение (4.83) в виде

$$R_{ik} \simeq -\frac{1}{2} \eta^{jl} \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial h_k^l}{\partial x^l} - \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x^k} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\partial h_i^j}{\partial x^j} - \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x^i} \right). \quad (4.87)$$

В гармонической системе координат два последних слагаемых в выражении (4.87) обращаются в нуль, поэтому

тензор Риччи в линейном приближении в гармонической калибровке принимает простой вид:

$$R_{ik} \simeq -\frac{1}{2}\eta^{jl} \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^j \partial x^l}. \quad (4.88)$$

Подставляя это выражение в (4.77) и считая, что источники гравитационного поля, приводящие к малым возмущениям метрики, также малы (т. е. тензор энергии импульса  $T_{ik,j}$  и тензор возмущений метрики  $h_{ik,j}$  являются величинами одного порядка малости), получим линеаризованные уравнения Эйнштейна в гармонических координатах:

$$\eta^{jl} \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} = -2\kappa(T_{ik} - \frac{1}{2}\eta_{ik}T) + 2\Lambda\eta_{ik}. \quad (4.89)$$

В левой части полученного уравнения стоит оператор Даламбера

$$\eta^{jl} \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^l} = \frac{\partial^2}{\partial x^{02}} - \Delta. \quad (4.90)$$

В правой части уравнения (4.89) в последнем (содержащем космологическую постоянную  $\Lambda$ ) слагаемом мы пренебрегли вкладом, пропорциональным  $h_{ik}$ , который хотя и является линейным по  $h_{ik}$ , но по величине мал, по сравнению с оставленным членом. Кроме того, в силу малости самой константы  $\Lambda$  при переходе к ньютоновскому пределу последним членом в выражении (4.89) также можно пренебречь.

**3. Ньютоновский предел.** Положим  $\Lambda = 0$  и рассмотрим в системе (4.89) уравнение для компоненты  $h_{00}$ . Учитывая (4.89), получаем

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^{02}} - \Delta \right) h_{00} = -2\kappa(T_{00} - \frac{1}{2}\eta_{00}T). \quad (4.91)$$

В рассматриваемом нами приближении  $\eta_{00} = 1$ . Значит,

$$g_{00} = 1 + h_{00}. \quad (4.92)$$

С другой стороны, как установили ранее, в ньютоновском пределе

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}. \quad (4.93)$$

Сравнивая эти два выражения, получаем

$$h_{00} = \frac{2\varphi}{c^2}. \quad (4.94)$$

Кроме того, в ньютоновском пределе поле  $\varphi$  является статическим:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{02}} = 0, \quad (4.95)$$

а скорости частиц малы (движение считается медленным). Поэтому можно пренебречь всеми пространственными компонентами 4-скорости  $u^\alpha$  по сравнению с временной  $u^0$ . Другими словами, положим

$$u^\alpha = u_\alpha = 0, u^0 = u_0 = 1. \quad (4.96)$$

Далее, считая материю пылевидной средой, согласно (4.56), (4.57) и (4.96), имеем

$$T_{00} = T = \rho c^2. \quad (4.97)$$

Подставляя все в уравнение (4.91), получаем уравнение Пуассона для потенциала  $\varphi$ , отвечающее ньютоновской теории тяготения

$$\Delta \varphi = \frac{\kappa c^4}{2} \rho. \quad (4.98)$$

С другой стороны, уравнение Пуассона в ньютоновской теории имеет вид

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho. \quad (4.99)$$

Сравнивая эти уравнения, находим

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}. \quad (4.100)$$

Именно это значение константы  $\kappa$  фигурирует в уравнениях гравитационного поля.

## 4.5. Космологическая постоянная

**1. Учет космологической постоянной в ньютоновском пределе.** Рассмотрим следствия учета космологической постоянной в ньютоновском пределе. Из уравнения (4.89) с учетом  $\Lambda \neq 0$  для компоненты  $h_{00}$  получаем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^{02}} - \Delta\right) h_{00} = -2\kappa(T_{00} - \frac{1}{2}\eta_{00}T) + 2\Lambda\eta_{00}. \quad (4.101)$$

Повторяя выкладки предыдущего подраздела и подставляя найденную константу  $\kappa$ , получаем

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho - \Lambda c^2. \quad (4.102)$$

В правой части уравнения Пуассона появилось новое слагаемое, содержащее константу  $\Lambda$ . Как можно интерпретировать полученный результат?

Уравнение (4.102) линейно. Поэтому его решение  $\varphi$  можно представить как сумму двух слагаемых:  $\varphi_G$  и  $\varphi_\Lambda$ :  $\varphi = \varphi_G + \varphi_\Lambda$ , где  $\varphi_G$  — решение «стандартного» уравнения Пуассона (4.99) с источником, определяемым наличием массивных тел с плотностью  $\rho_0$ , а  $\varphi_\Lambda$  — решение уравнения Пуассона с источником, определяемым космологической постоянной  $\Lambda$ :

$$\Delta\varphi = -\Lambda c^2. \quad (4.103)$$

Другими словами, в ньютоновском пределе наличие  $\Lambda$ -члена приводит к появлению некоторого дополнительного скалярного поля  $\varphi_\Lambda$ , действующего независимо от наличия в системе массивных тел.

Каковы свойства этого поля в ньютоновском пределе? Для ответа на этот вопрос рассмотрим сферически симметричные решения уравнения (4.103):  $\varphi = \varphi_\Lambda(r)$ . Такие решения удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \varphi \right) = -\Lambda c^2. \quad (4.104)$$

Частное решение этого уравнения, содержащее  $\Lambda$ -член, имеет вид

$$\varphi_\Lambda(r) = -\frac{1}{6} \Lambda c^2 r^2. \quad (4.105)$$

Сила, действующая на пробную частицу, со стороны такого поля равна

$$\vec{F}_\Lambda = -m \vec{\nabla} \varphi_\Lambda = \frac{1}{3} \Lambda m c^2 \vec{r}. \quad (4.106)$$

При  $\Lambda > 0$  имеем силу отталкивания, при  $\Lambda < 0$  — силу притяжения. Космологические наблюдения свидетельствуют в пользу случая  $\Lambda > 0$  (Вселенная ускоренно расширяется). Кроме того, из выражения (4.106) следует, что сила тем больше, чем больше расстояния. Другими словами, сила  $\vec{F}_\Lambda$  будет существенна только на достаточно больших масштабах. Астрономические наблюдения свидетельствуют, что сила  $\vec{F}_\Lambda$  практически не проявляет себя на масштабах меньше космологических. Поэтому постоянная  $\Lambda$  и получила название *космологической*.

В настоящее время точное значение космологической постоянной неизвестно. Однако мы можем оценить верхнюю границу величины  $\Lambda$ , исходя из данных небесной ме-

ханики и, особенно, внегалактической астрономии. Согласно современным исследованиям действие  $\Lambda$ -члена проявляется на расстояниях порядка размера видимой Вселенной, т. е. на расстояниях порядка  $l_U \sim 10^{28}$  см. С другой стороны, исходя из соображений размерности, величину  $l_\Lambda \sim 1/\sqrt{\Lambda}$  можно отождествить с характерным расстоянием, на котором влияние эффектов, обусловленных  $\Lambda$ -членом, будет существенно. Исходя из того, что  $l_\Lambda \geq l_U$ , получаем верхнюю оценку величины космологической постоянной:  $\Lambda \leq 10^{-56}$  см $^{-2}$ .

Итак, в ньютоновском приближении наличие космологической постоянной связано с действием дополнительного скалярного поля. Эта идея найдет свое применение и в релятивистском случае.

**2. Вакуумная интерпретация космологической постоянной.** Возможна и другая интерпретация космологической постоянной. Предполагаем, что существует специфическая сплошная среда, отождествляемая с физическим вакуумом, уравнение состояния которой имеет вид

$$p_v = -\varepsilon_v, \quad (4.107)$$

т. е. физический вакуум представляет собой сплошную среду с постоянным отрицательным давлением, подобную растянутой однородной упругой среде. Тензор энергии-импульса такой среды равен

$$T_v^{ik} = (\varepsilon_v + p_v)u^i u^k - p_v g^{ik} = \varepsilon_v g^{ik}. \quad (4.108)$$

С другой стороны, мы можем записать уравнения Эйнштейна в виде

$$R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}R = \kappa(T^{ik} + \frac{\Lambda}{\kappa}g^{ik}). \quad (4.109)$$

Последнее слагаемое в правой части этого уравнения имеет точно такую же математическую структуру, что и выражение (4.108). Поэтому формально мы можем отождествить его с тензором энергии-импульса физического вакуума:

$$T_v^{ik} = \frac{\Lambda}{\kappa} g^{ik}. \quad (4.110)$$

Сравнивая выражения (4.108) и (4.110), используя (4.100), находим

$$\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} \varepsilon_v. \quad (4.111)$$

Таким образом, в рассматриваемом подходе космологическая постоянная объясняется наличием особой материальной среды — физического вакуума с уравнением состояния (4.107).

Из выражения (4.111) получаем, что плотность энергии вакуума постоянна и положительна:

$$\varepsilon_v = \frac{c^4 \Lambda}{8\pi G} > 0. \quad (4.112)$$

Отметим, что свойства вакуума полностью определяются космологической постоянной, которая всегда и везде остается одной и той же неизменной величиной. Отсюда следует, что никакими воздействиями невозможно изменить свойства вакуума. Вакуум — неизменяемая среда, которая воздействует на вещество и влияет на геометрию пространства-времени, но сама не подвержена никаким влияниям. В такой среде нарушается третий закон Ньютона: вакуум воздействует на тела, но сам не испытывает противодействия с их стороны. Из неизменности свойств вакуума следует еще одно его парадоксальное свойство: движение и покой относительно вакуума неразличимы.

## 4.6. Законы сохранения

**1. Законы сохранения в СТО.** Рассмотрим сначала, как получаются законы сохранения энергии и импульса в СТО, когда пространство-время считается плоским. Как уже отмечалось, в плоском пространстве-времени в декартовых координатах эти законы сохранения записываются в виде

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = 0, \quad (4.113)$$

где  $T^{ik}$  — тензор энергии-импульса, который включает вещество и все силовые поля, кроме гравитационного. Запишем эти уравнения в виде

$$\frac{\partial T^{i0}}{\partial x^0} + \frac{\partial T^{i\alpha}}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (4.114)$$

Индекс  $\alpha$  нумерует пространственные координаты. Проинтегрируем это уравнение по фиксированному трехмерному объему  $V^{(3)}$ . В силу того, что пределы интегрирования фиксированы, мы можем вынести производную по переменной  $x^0$  за знак интеграла. В результате

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \int_{V^{(3)}} T^{i0} d^3x + \int_{V^{(3)}} \frac{\partial T^{i\alpha}}{\partial x^\alpha} d^3x = 0. \quad (4.115)$$

С помощью теоремы Гаусса второй интеграл в левой части выражения (4.115) можно преобразовать в интеграл по двумерной поверхности  $S^{(2)}$ , охватывающей этот объем. В результате получаем

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \int_{V^{(3)}} T^{i0} d^3x + \oint_{S^{(2)}} T^{i\alpha} dS_\alpha^{(2)} = 0. \quad (4.116)$$

Если на границе области интегрирования  $T^{i\alpha} = 0$ , то интеграл по замкнутой поверхности обращается в нуль, и мы получаем

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \int_{V^{(3)}} T^{i0} d^3x = 0. \quad (4.117)$$

Отсюда

$$\int_{V^{(3)}} T^{i0} d^3x = const. \quad (4.118)$$

Вспомним, что  $T^{00}$  определяет плотность энергии,  $T^{0\alpha}$  — плотность импульса, которая пропорциональна плотности потока энергии, а  $T^{\beta\alpha}$  — плотность потока импульса. Таким образом, если на границе области интегрирования  $T^{i\alpha} = 0$ , то в СТО получаем законы сохранения энергии и импульса в интегральной форме. Если на границе области интегрирования нет потока энергии ( $T^{0\alpha} = 0$ ), то сохраняется энергия системы:

$$E = \int_{V^{(3)}} T^{00} d^3x = const. \quad (4.119)$$

Если же на границе области интегрирования нет потока импульса ( $T^{\beta\alpha} = 0$ ), то сохраняется импульс системы:

$$P^\alpha = \frac{1}{c} \int_{V^{(3)}} T^{\alpha 0} d^3x = const. \quad (4.120)$$

Как уже отмечалось, тензор  $T^{ik}$  есть тензор энергии-импульса материи (вещества) и силовых полей, за исключением гравитационного поля. Поскольку в СТО гравитационное поле не учитывается, то вся энергия и импульс системы описываются тензором  $T^{ik}$ , т. е. в интегральные

законы сохранения (4.119) и (4.120) не входят энергия и импульс гравитационного поля.

**2. Законы сохранения в ОТО.** Отметим сначала, что в СТО уравнения (4.113):

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = 0, \quad (4.121)$$

могут быть записаны в виде

$$\frac{1}{\sqrt{-\eta}} \frac{\partial}{\partial x^k} (T^{ik} \sqrt{-\eta}) = 0, \quad (4.122)$$

где  $\eta = \det(\eta^{ik}) = -1$  — определитель метрического тензора.

В ОТО источником гравитации является тензор энергии-импульса  $T^{ik}$ , в котором учитывается взаимодействие с гравитационным полем. Этот тензор удовлетворяет уравнениям (4.2):

$$\nabla_k T^{ik} = 0. \quad (4.123)$$

Расписывая ковариантную дивергенцию тензора энергии-импульса  $\nabla_k T^{ik}$ , получаем

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (T^{ik} \sqrt{-g}) + \Gamma_{lk}^i T^{lk} = 0. \quad (4.124)$$

Первое слагаемое в левой части этого выражения имеет структуру, аналогичную левой части выражения (4.122). Кроме этого слагаемого, имеется еще дополнительный член, содержащий  $\Gamma_{lk}^i$ . Этот дополнительный член может быть обращен в нуль в бесконечно малой области пространства-времени переходом в локально-геодезическую систему координат, однако в любой конечной области его невозможно обратить в нуль никаким выбором системы

координат. Отсюда следует, что, выполняя преобразования, аналогичные тем, которые мы совершали в плоском пространстве-времени, мы не получим интегральные законы сохранения энергии и импульса (4.120) и (4.119).

Отметим, что отсутствие интегральных законов сохранения никак не связано с искривленностью пространства-времени. Например, в ОТО имеет место закон сохранения электрического заряда. Действительно, в плоском пространстве-времени этот закон записывается в виде

$$\frac{\partial j^k}{\partial x^k} = 0, \quad (4.125)$$

где  $j^k$  — вектор плотности 4-мерного электрического тока. В искривленном пространстве-времени вместо (4.125) имеем

$$\nabla_k j^k = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (j^k \sqrt{-g}) = 0. \quad (4.126)$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial}{\partial x^k} (j^k \sqrt{-g}) = \frac{\partial (j^0 \sqrt{-g})}{\partial x^0} + \frac{\partial (j^\alpha \sqrt{-g})}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (4.127)$$

Интегрируя обе части этого уравнения по фиксированному трехмерному объему  $V^{(3)}$ , пользуясь теоремой Гаусса и тем, что поток заряда через границы отсутствует (на границе области интегрирования  $j^\alpha = 0$ ), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \int_{V^{(3)}} j^0 \sqrt{-g} d^3x = 0. \quad (4.128)$$

Отсюда следует, что сохраняется полный электрический заряд системы в искривленном пространстве-времени:

$$Q = \frac{1}{c} \int_{V^{(3)}} j^0 \sqrt{-g} d^3x = \text{const}. \quad (4.129)$$

**3. Псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля.** Вернемся теперь к интегральным законам сохранения энергии и импульса. В кривом пространстве энергия  $E$  и импульс  $P^\alpha$ , определенные с помощью выражений

$$E = \int_{V^{(3)}} T^{00} \sqrt{-g} d^3x, \quad P^\alpha = \frac{1}{c} \int_{V^{(3)}} T^{\alpha 0} \sqrt{-g} d^3x, \quad (4.130)$$

не сохраняются. Проанализируем более подробно формулы (4.130). В этих выражениях под знаком интеграла стоят компоненты тензора энергии-импульса, в котором учтены вещество, все поля, кроме гравитационного, и взаимодействие с гравитационным полем. Другими словами, в выражениях (4.130) не учтены величины, которые описывают энергию и импульс гравитационного поля. Отсюда возникает идея, что энергия и импульс не сохраняются именно потому, что в них не учтено гравитационное поле, и если это поле учесть, то полные энергия и импульс всей системы (все вещество плюс все поля, включая гравитационное) будут сохраняться.

Для нахождения интегральных законов сохранения энергии и импульса с учетом гравитационного поля введем дополнительные величины  $t^{ik}$  таким образом, чтобы дифференциальная форма этих законов записывалась в виде

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} [(T^{ik} + t^{ik}) \sqrt{-g}] = 0. \quad (4.131)$$

Данное выражение, по сути, является определением величин  $t^{ik}$ .

Покажем, что величины  $t^{ik}$  не образуют тензора. Действительно, с учетом (4.131) уравнения (4.124) могут быть

записаны в виде

$$-\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (t^{ik} \sqrt{-g}) + \Gamma_{lk}^i T^{lk} = 0. \quad (4.132)$$

Выделяя ковариантную дивергенцию от  $t^{ik}$ , перепишем это выражение в виде

$$\nabla_k t^{ik} = \Gamma_{lk}^i (T^{lk} + t^{lk}). \quad (4.133)$$

Теперь рассуждаем от противного. Предположим, что  $t^{ik}$  — тензор. Тогда в левой части равенства (4.133) стоят компоненты вектора. В правой части этого равенства стоит свертка символов Кристоффеля  $\Gamma_{lk}^i$ , которые не образуют тензора, с компонентами тензора второго ранга  $T^{lk} + t^{lk}$ . Таким образом, в правой части равенства (4.133) стоят величины, которые не образуют вектора. Полученное противоречие указывает на нетензорный характер величин  $t^{ik}$ . Однако по отношению к линейным преобразованиям, относительно которых  $\Gamma_{lk}^i$  ведут себя как тензоры, величины  $t^{ik}$  также будут преобразовываться как тензор. В силу этого  $t^{ik}$  получил название *псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля*.

Отметим, что (4.131) — не единственный и не самый общий способ определения величин  $t^{ik}$ . В более общем случае псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля определяется по формуле

$$\frac{\partial}{\partial x^k} [(T^{ik} + t^{ik})(-g)^n] = 0, \quad (4.134)$$

где  $n$  — целое или полуцелое число. Аналогичное определение можно дать и для смешанного псевдотензора

$$\frac{\partial}{\partial x^k} [(T_k^i + t_k^i)(-g)^n] = 0, \quad (4.135)$$

причем определения (4.134) и (4.135) не эквивалентны. В зависимости от выбора числа  $n$  и того, какое из определений — (4.134) или (4.135) — принималось за основу, были предложены различные способы построения псевдотензоров энергии-импульса гравитационного поля. Например, выбрав  $n = 1/2$  и взяв за основу определение (4.135), получим псевдотензор Эйнштейна, а в случае  $n = 1$  и (4.134) — псевдотензор Ландау — Лифшица. Во всех вариантах псевдотензор состоит из компонент метрического тензора и их производных.

Введение псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля позволяет получать интегральные законы сохранения вида

$$\begin{aligned}\tilde{E} &= \int_{V^{(3)}} (T^{00} + t^{00})(-g)^n d^3x = const, \\ \tilde{P}^\alpha &= \frac{1}{c} \int_{V^{(3)}} (T^{\alpha 0} + t^{\alpha 0})(-g)^n d^3x = const\end{aligned}\quad (4.136)$$

либо

$$\begin{aligned}\tilde{E} &= \int_{V^{(3)}} (T_0^0 + t_0^0)(-g)^n d^3x = const, \\ \tilde{P}^\alpha &= \frac{1}{c} \int_{V^{(3)}} (T_0^\alpha + t_0^\alpha)(-g)^n d^3x = const,\end{aligned}\quad (4.137)$$

где  $\tilde{E}$  и  $\tilde{P}$  могут пониматься как энергия и импульс системы материя плюс гравитационное поле. Однако из этих определений следует, что  $\tilde{E}$  и  $\tilde{P}$  определены неоднозначно, а зависят от того, каким способом построен псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля. Этот факт является существенным недостатком псевдотензорного подхода к законам сохранения.

## Глава 5

### Гравитационные волны

#### 5.1. Слабые гравитационные поля в отсутствие источников. Гравитационные волны

Общая теория относительности предсказывает существование гравитационных волн — свободно распространяющихся гравитационных полей, существующих во Вселенной в отсутствие источников поля.

Уравнения Эйнштейна в отсутствие источников поля ( $T_{ik} = 0$ ) сводятся к уравнениям

$$R_{ik} = 0. \quad (5.1)$$

Покажем, что эти уравнения описывают распространение слабых возмущений метрики пространства-времени в виде волн.

Рассмотрим малые возмущения метрики пространства-времени  $h_{ik}$  на фоне плоского пространства-времени  $\eta_{ik}$ :

$$g_{ik} = \eta_{ik} + h_{ik}, \quad \eta_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Для слабых гравитационных полей нужно считать малыми  $h_{ik}$  и их первые производные. Записывая тензор Риччи в линейном приближении по малым величинам, получаем

уравнения

$$\eta^{\ell m} \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^\ell \partial x^m} + \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial h_k^m}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_i^\ell}{\partial x^\ell \partial x^k} = 0, \quad (5.3)$$

где  $h = h_i^i = \eta^{ik} h_{ik}$ ,  $h_k^m = \eta^{m\ell} h_{\ell k}$ . Сложность уравнений (5.3) связана прежде всего с произвольностью системы координат. Единственным ограничением на систему координат пока является требование малости величин  $h_{ik}$  и их производных. Это условие допускает преобразование координат вида

$$x^i \rightarrow x'^i = x^i + \xi^i(x), \quad (5.4)$$

где величины  $\xi^i$  и их производные малы (того же порядка малости, что и  $h_{ik}$ ). Действительно, при таком преобразовании  $g^{ik}$  преобразуются так:

$$\begin{aligned} g'^{ik} &= \frac{\partial x'^i}{\partial x^\ell} \frac{\partial x'^k}{\partial x^m} g^{\ell m} = \left( \delta_\ell^i + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^\ell} \right) \left( \delta_m^k + \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} \right) g^{\ell m} \simeq \\ &\simeq g^{ik} + \eta^{\ell k} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^\ell} + \eta^{im} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

что соответствует следующему преобразованию  $h^{ik}$ :

$$h'^{ik} = h^{ik} - \eta^{\ell k} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^\ell} - \eta^{im} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m}. \quad (5.6)$$

Мы учли, что если компоненты ковариантного тензора  $h_{ik}$  определены равенством  $g_{ik} = \eta_{ik} + h_{ik}$ , то в наших приближениях для компонент контравариантного тензора  $h^{ik}$  мы имеем  $g^{ik} = \eta^{ik} - h^{ik}$ . Это вытекает из требования  $g^{ik} g_{kl} = \delta_\ell^i$ :

$$\begin{aligned} g^{ik} g_{kl} &= (\eta^{ik} - h^{ik}) (\eta_{kl} + h_{kl}) = \\ &= \eta^{ik} \eta_{kl} - h^{ik} \eta_{kl} + \eta^{ik} h_{kl} - h^{ik} h_{kl} = \\ &= \eta^{ik} \eta_{kl} - h^{ik} h_{kl} \simeq \eta^{ik} \eta_{kl} = \delta_\ell^i. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Произвол в выборе системы координат с точностью до преобразования (5.4), называемого *калибровочным*, позволяет наложить на величины  $h_{ik}$  *условие калибровки*, имеющее вид равенства для 4-вектора  $x^k$ . Перепишав уравнение (5.3) в виде

$$\eta^{\ell m} \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^\ell \partial x^m} - \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial h_k^m}{\partial x^m} - \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x^k} \right) - \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\partial h_i^\ell}{\partial x^\ell} - \frac{\partial h}{\partial x^i} \right) = 0, \quad (5.8)$$

видим, что в качестве такого условия удобно выбрать

$$\frac{\partial h_k^m}{\partial x^m} - \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^m} \left( h_k^m - \frac{1}{2} h \delta_k^m \right) = 0. \quad (5.9)$$

Это условие называется условием *гармонической калибровки*, а соответствующие четырехмерные координаты — уже знакомые нам гармонические координаты. Уравнения для  $h_{ik}$  в этих координатах принимают вид

$$\eta^{\ell m} \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^\ell \partial x^m} = 0. \quad (5.10)$$

С учетом того, что дифференциальный оператор в этом уравнении является оператором Даламбера:

$$\eta^{\ell m} \frac{\partial^2}{\partial x^\ell \partial x^m} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \square, \quad (5.11)$$

для  $h_{ik}$  получаем волновые уравнения

$$\square h_{ik} = 0. \quad (5.12)$$

Таким образом, слабые возмущения метрики на фоне плоского пространства-времени в отсутствие источников поля могут существовать в виде распространяющихся самоподдерживающихся волн.

## 5.2. Плоские гравитационные волны. Поляризация гравитационных волн

Рассмотрим простейшее решение волновых уравнений (5.12) в виде плоских волн

$$h_{ik} = a_{ik}e^{ik_{\ell}x^{\ell}} + b_{ik}e^{-ik_{\ell}x^{\ell}}, \quad (5.13)$$

где  $a_{ik}$  и  $b_{ik}$  — тензоры поляризации, не обращающиеся в нуль одновременно. Подставляя (5.13) в уравнение (5.12), получаем *дисперсионное уравнение для гравитационных волн*

$$k_{\ell}k^{\ell} = 0. \quad (5.14)$$

В системе координат  $x^i = (ct, \vec{r})$  (и, соответственно,  $k^i = (\omega/c, \vec{k})$ ) это дает

$$\omega = ck. \quad (5.15)$$

Таким образом, гравитационные волны имеют линейный закон дисперсии, а их скорость равна скорости света.

Рассмотрим поляризацию гравитационных волн. Реальные гравитационные волны должны описываться вещественными функциями:  $h_{ik} = h_{ik}^*$ . Отсюда для тензоров поляризации получаем

$$a_{ik}^* = b_{ik}, \quad b_{ik} = a_{ik}^*. \quad (5.16)$$

Тогда

$$h_{ik} = a_{ik}e^{ik_{\ell}x^{\ell}} + a_{ik}^*e^{-ik_{\ell}x^{\ell}}. \quad (5.17)$$

В силу симметричности тензора  $h_{ik}$  симметричным будет и тензор  $a_{ik}$ . Число независимых компонент такого тензора равно десяти. Условие калибровки дает 4 уравнения для этих 10 величин.

$$k^m a_{\ell m} - \frac{1}{2}k_{\ell}\eta^{nm}a_{mn} = 0, \quad \ell = 0, 1, 2, 3. \quad (5.18)$$

В результате независимыми остаются лишь 6 компонент тензора  $a_{ik}$ .

Далее, условия калибровки не определяют полностью систему координат. Действительно, можно совершить преобразование координат вида (5.4), но в котором величины  $\tilde{\xi}_i$  не произвольны, а удовлетворяют уравнениям

$$\eta^{im} \frac{\partial^2 \tilde{\xi}_l}{\partial x^i \partial x^m} = 0. \quad (5.19)$$

При этом уравнение (5.12) для  $h_{ik}$  и условие калибровки (5.8) не изменятся. Это позволяет наложить еще 4 условия на величины  $h_{ik}$  (а соответственно, и на  $a_{ik}$ ). Таким образом, из 6 оставшихся величин  $a_{ik}$  независимыми остаются всего 2 величины и, соответственно, всего 2 независимые поляризации гравитационных волн.

Определим, что это за поляризации. В силу изотропности пространства всегда можно выбрать одну из координатных осей (например,  $x$ ) вдоль направления распространения волны. Тогда волновой вектор  $k^i$  принимает вид  $k^i = (k^0, k, 0, 0)$ , и для  $h_{ik}$  имеем

$$h_{ik} = a_{ik} e^{i(kx^0 - kx^1)} + a_{ik}^* e^{-i(kx^0 - kx^1)}, \quad (5.20)$$

где  $k^0$  и  $k^1$  связаны дисперсионным уравнением (5.14):

$$k^0 k_0 + k^1 k_1 = 0, \quad (5.21)$$

которое, если ввести величину волнового вектора  $k^1 \equiv k$ , и с учетом того, что  $k_1 = -k^1 = -k$ ,  $k_0 = k^0$ , дает  $k^0 = k$ .

Условия калибровки (5.17) тогда запишутся в виде следующих условий на коэффициенты  $a_{ik}$ :

$$\begin{aligned} a_{22} + a_{33} &= 0, \\ 2a_{10} + a_{00} + a_{11} &= 0, \\ a_{20} + a_{21} &= 0, \\ a_{30} + a_{31} &= 0. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Как уже отмечалось, условия калибровки не определяют  $h_{ik}$  однозначно, а допускают преобразования вида (5.4), в которых величины  $\xi_i$  удовлетворяют уравнениям (5.19). Решения этих уравнений имеют вид

$$\xi_i = c_i e^{ik_p x^p} + c_i^* e^{-ik_p x^p}, \quad (5.23)$$

где  $c_i$  и  $c_i^*$  — произвольные постоянные. Это, в соответствии с (5.6), приводит к следующим изменениям  $a_{ik}$  при таких преобразованиях:

$$\tilde{a}_{ik} = a_{ik} - ik_k c_i - ik_i c_k. \quad (5.24)$$

Величины  $c_i$  можно выбрать так, чтобы

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{00} &= 0 \rightarrow c_0 = \frac{a_{00}}{2ik}, \\ \tilde{a}_{11} &= 0 \rightarrow c_1 = -\frac{a_{11}}{2ik}, \\ \tilde{a}_{20} &= 0 \rightarrow c_2 = -\frac{a_{20}}{ik}, \\ \tilde{a}_{30} &= 0 \rightarrow c_3 = -\frac{a_{30}}{ik}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Тогда тензор поляризации гравитационной волны  $a_{ik}$  принимает вид

$$a_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{23} & -a_{22} \end{pmatrix}. \quad (5.26)$$

Полученное выражение показывает, что поляризация гравитационной волны описывается поперечными по отношению к направлению распространения компонентами тензора  $a_{ik}$ , т. е. *гравитационные волны являются поперечными волнами*. Далее, тензор поляризации определяется

всего двумя независимыми величинами и, следовательно, существуют две независимые поляризации для гравитационных волн. Тензорный характер поляризации гравитационных волн приводит не к смещению масс под действием поля гравитационной волны, а к деформации их распределения. Это проиллюстрировано на рис. 5.1, где изображена деформация первоначально распределенных по кольцу масс под действием поля гравитационной волны.

Если для электромагнитных волн, излучаемых системой зарядов, разложение излучаемого поля на больших расстояниях начинается с дипольных членов, то для гравитационного излучения системы масс — с квадрупольных членов. Соответственно излучаемая мощность при заданной величине квадрупольного момента пропорциональна шестой степени частоты, что требует большой величины квадрупольного момента, чтобы интенсивность гравитационных волн достигала измеримой величины. Кроме того, энергия гравитационной волны обратно пропорциональна пятой степени скорости света и прямо пропорциональна гравитационной постоянной, которая чрезвычайно мала. С этим связаны трудности наблюдения гравитационных волн.

По аналогии с квантом колебаний электромагнитного поля — фотоном — можно ввести квант колебаний гравитационного поля — гравитон, обладающий энергией, импульсом и моментом импульса. При этом проекция момента импульса на направление импульса (спиральность волны) для гравитационной волны оказывается равной 2, в то время как для электромагнитной волны она равна 1. В квантовом случае этому соответствует спин частицы — для фотона он равен 1, а для гравитона оказывается равным 2. Отметим также, что в рамках ОТО гравитон является безмассовой частицей.

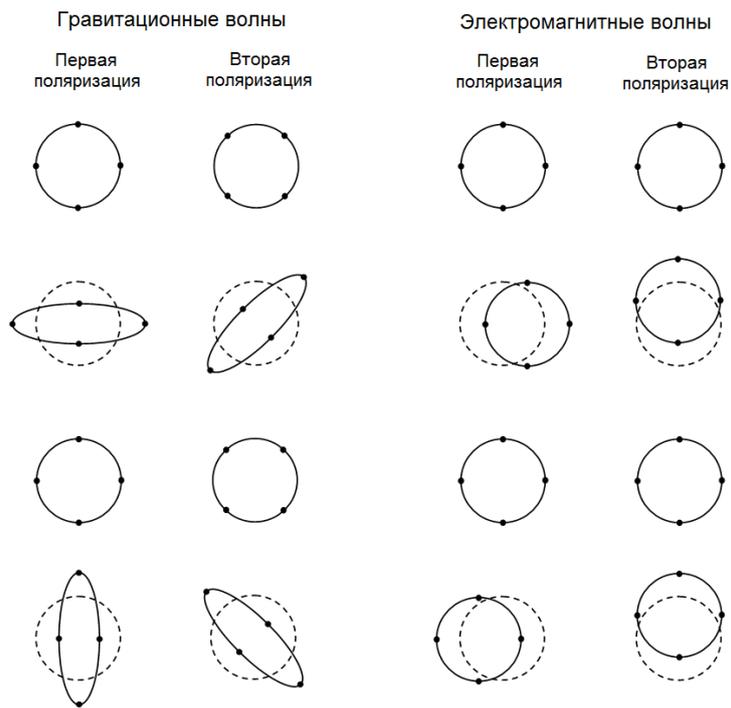


Рис. 5.1. Деформация кольца с распределенными по нему массами под действием поля гравитационной волны последовательно через четверть периода для двух независимых поляризаций. Для сравнения справа показано смещение распределенных по кольцу электрических зарядов под действием поля электромагнитной волны для двух независимых поляризаций поперечных электромагнитных волн

### 5.3. Поиски гравитационных волн

Гравитационные волны большой интенсивности могут создать лишь источники с сильными и быстро меняющимися гравитационными полями. Такие ситуации возникают в различных удаленных астрофизических объектах: при взрывах сверхновых, взрывных процессах в ядрах галактик и др. Именно такие гравитационные волны и можно пытаться обнаружить. Однако оценки интенсивности приходящих к нам гравитационных волн и частоты возникновения различных астрофизических катаклизмов в той области Вселенной, из которой гравитационные волны достаточной интенсивности могут достигнуть Земли, указывают на требуемую высокую точность экспериментальной аппаратуры.

Уже в 60-х гг. XX в. начались реальные попытки создания детекторов гравитационных волн и проводились первые опыты по их обнаружению. Начало этим работам положил Джозеф Вебер из Мэрилендского университета в США. Его детектор представлял собой алюминиевый цилиндр массой 1,2 т и длиной 1,5 м. Гравитационная волна возбуждает собственные акустические колебания цилиндра, которые и должны были регистрироваться. Чтобы исключить локальные причины колебания цилиндра и регистрировать только колебания, вызванные гравитационной волной, приходящей, например, из центра нашей Галактики и охватывающей всю Землю сразу, в Чикаго (на расстоянии примерно 1000 км от Мэриленда) был расположен аналогичный детектор и регистрировались только одновременные срабатывания. Путем множества ухищрений за несколько лет удалось довести чувствительность установки до фантастической величины — она регистрировала относительную деформацию цилиндров порядка  $10^{-16}$ , что при данных размерах цилиндров отвечает амплиту-

де смещений порядка  $10^{-14}$  см (напомним, что размеры атомов порядка  $10^{-8}$  см, а атомных ядер —  $10^{-13}$  см). В 1968—1972 гг. Вебер провел ряд наблюдений, обнаружил небольшое число одновременных срабатываний детекторов и сообщил об обнаружении гравитационных волн. Однако невысокая статистическая значимость результатов и, главное, оценки интенсивности гравитационных волн заставляют критически относиться к утверждению об их обнаружении. Современные оценки показывают, что чувствительность детекторов Вебера на два порядка ниже, чем необходимо для регистрации гравитационных волн, которых можно ожидать от процессов в центре нашей Галактики.

За прошедшие годы предпринимались усилия на грани возможностей современной экспериментальной техники по совершенствованию детекторов веберовского типа. Все это пока не привело к явному обнаружению гравитационных волн от астрофизических объектов. С другой стороны, развитие наблюдательной астрофизики за это время позволило найти косвенные указания на существование гравитационных волн. Так в 1974 г. была обнаружена звездная система PSR 1913+16, состоящая из двух нейтронных звезд, одна из которых — пульсар. Наблюдения показали сокращение орбитального периода, соответствующее потерям энергии на излучение гравитационных волн. На этой системе были с большой точностью проверены и другие эффекты ОТО. За эти работы в 1993 г. Дж. Тейлор и Р. Халс получили Нобелевскую премию. Новое косвенное указание на существование гравитационных волн было получено в 2012 г. на обнаруженной годом раньше в 3 тыс. световых лет от Земли системе из двух белых карликов, расположенных чрезвычайно близко друг к другу (расстояние между ними в 3 раза меньше расстоя-

ния от Земли до Луны) и имеющих период обращения всего 13 мин. Эффект замедления вращения (как считается, за счет излучения гравитационных волн) настолько силен, что легко регистрируется — порядка 6 сек. за первый год наблюдений.

Другое направление поиска гравитационных волн связано с попытками рассматривать в качестве детектора гравитационных волн не алюминиевые цилиндры, а всю Землю или Солнце, т. е. пытаться зарегистрировать колебания этих тел, вызванные гравитационными волнами. Несколько попыток позволили получить первые положительные результаты, но недостаточная статистика этих наблюдений не позволяет считать их достоверными.

Реальных успехов ожидают от строительства гравитационных антенн нового поколения. Советскими учеными М. Е. Герценштейном и В. И. Пустовойтом еще в 1962 г. впервые предлагалось использовать в качестве детектора гравитационных волн оптический интерферометр Майкельсона. Сейчас такие интерферометры уже построены и ведется их отладка. Это американский проект LIGO, итало-французский проект VIRGO (Пизанская долина), немецко-английский проект GEO-600 (Ганновер), японский проект TAMA-300 (Токио). Имеется целая сеть твердотельных криогенных детекторов: в Европе, США, Японии, Австралии. Разрабатывается совместный проект NASA и ESA (Европейское космическое агентство) по созданию космического лазерного интерферометра LISA с длиной плеча в несколько миллионов километров.

В последние годы выдвинулось новое направление — поиск первичных или реликтовых гравитационных волн. По современным представлениям они возникли на самых ранних стадиях эволюции Вселенной (примерно через  $10^{-35}$  сек. после Большого взрыва, породившего Вселенную). По

мере расширения Вселенной интенсивность их падала и к настоящему моменту, безусловно, слишком мала, чтобы надеяться построить детектор, способный их зарегистрировать. Кроме того, все, что происходило в течение примерно 400 тыс. лет после Большого взрыва (сравните с  $10^{-35}$  сек.), скрыто от нас. Дело в том, что мы получаем информацию, как правило, по наблюдениям электромагнитных волн. Вселенная же до этого времени представляла собой плазму, непрозрачную для электромагнитного излучения. Именно на этой стадии по мере расширения и остывания Вселенной произошла рекомбинация плазмы, и Вселенная в большей степени стала состоять из нейтральных атомов и, следовательно, стала прозрачной для электромагнитных волн. Оставшаяся часть электромагнитного излучения по мере дальнейшего расширения Вселенной остывала и сохранилась до нашего времени. Это реликтовое электромагнитное излучение, открытое в 1965 г. Гравитационный же аналог реликтового электромагнитного излучения — реликтовые гравитационные волны — непосредственно наблюдать в настоящее время невозможно.

Однако оказывается, если реликтовые гравитационные волны существуют, то это должно проявляться в некоторых тонких особенностях поляризации реликтового электромагнитного излучения. Была проделана большая работа с использованием самых последних достижений измерительной техники, и в марте 2014 г. появились сообщения о наблюдении реликтовых гравитационных волн. В начале 2015 г. было окончательно признано, что вывод об обнаружении реликтовых гравитационных волн ошибочен.

## Глава 6

### Центрально-симметричное гравитационное поле

#### 6.1. Решение Шварцшильда

Чрезвычайно сложные уравнения гравитационного поля в некоторых случаях могут быть решены точно. Это, конечно, должны быть конфигурации с высокой степенью симметрии, когда возможно значительное уменьшение числа переменных и, следовательно, существенное упрощение уравнений. Первое точное решение уравнений гравитационного поля, найденное Карлом Шварцшильдом, описывает центрально-симметричный случай. Именно это решение чаще всего используется при рассмотрении различных, особенно астрофизических, задач.

Центрально-симметричное гравитационное поле создается центральным распределением масс. Причем такое распределение масс может находиться в движении, не нарушающем центральную симметрию.

Определим структуру метрического тензора в центрально-симметричном гравитационном поле. Такое поле одинаково в точках, находящихся на одинаковом расстоянии от центра. В обычном евклидовом пространстве это расстояние равно длине радиус-вектора, если поместить начало координат в центр симметрии. При наличии гравитационного поля пространство искривляется, и уже нет величины, которая равна расстоянию до центра и, умноженная на  $2\pi$ , дает длину окружности с

таким радиусом. Пользуясь тем, что имеется произвол в выборе систем координат, выберем некоторую координату  $r$ , характеризующую расстояние точки до центра, и угловые переменные  $\theta$  и  $\varphi$ , задающие направление к данной точке. Моменты времени будем нумеровать координатой  $t$  (координатное время). Тогда наиболее общим центрально-симметричным выражением для квадрата длины в таком 4-мерном пространстве будет выражение

$$ds^2 = h(r, t)dr^2 + k(r, t)(\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2) + \ell(r, t)dt^2 + a(r, t)drdt, \quad (6.1)$$

где  $h(r, t)$ ,  $k(r, t)$ ,  $\ell(r, t)$  и  $a(r, t)$  — произвольные функции  $r$  и  $t$ .

Введенные координаты определены с точностью до преобразований, выражающих  $r$  и  $t$  через новые  $r'$  и  $t'$ :

$$r = f_1(r', t'), \quad (6.2)$$

$$t = f_2(r', t'), \quad (6.3)$$

где  $f_1$  и  $f_2$  — произвольные функции. Кроме того, мы всегда можем совершить преобразование, затрагивающее только время:

$$t = f_3(t'), \quad (6.4)$$

где  $f_3$  — также произвольная функция.

Неоднозначность в выборе координат может быть устранена путем наложения на координаты дополнительных условий (т. е. фактически переходом к рассмотрению только специального класса систем координат). Мы будем работать в системах координат, для которых координаты  $r'$  и  $t'$  удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} a(r', t') &= 0, \\ k(r', t') &= -r'^2. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Для  $ds^2$  в таких координатах (штрихи у координат далее опускаем):

$$ds^2 = h(r, t)dr^2 - r^2(\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2) + \ell(r, t)dt^2. \quad (6.6)$$

Мы перешли к координатам, в которых длина окружности равна  $2\pi r$ , где  $r$  — координата, определяющая расстояние точки от центра поля (но не равная этому расстоянию). Отметим, что еще остается произвол в выборе временной координаты — она определена с точностью до преобразования (6.4).

Введем вместо неизвестных функций  $h(r, t)$  и  $\ell(r, t)$  новые функции  $\lambda(r, t)$  и  $\nu(r, t)$  с помощью равенств:

$$h(r, t) = -e^{\lambda(r, t)}, \quad \ell(r, t) = c^2 e^{\nu(r, t)}. \quad (6.7)$$

Тогда  $ds^2$  запишется в виде

$$ds^2 = c^2 e^{\nu(r, t)} dt^2 + r^2(\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2) - e^{\lambda(r, t)} dr^2. \quad (6.8)$$

Вводя координату  $x^0 \equiv ct$  и «сферические координаты»  $(r, \theta, \varphi)$ , для метрического тензора в центрально-симметричном гравитационном поле  $g_{ik}$  получаем

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} e^\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (6.9)$$

Входящие сюда неизвестные функции  $\nu(r, t)$  и  $\lambda(r, t)$  должны находиться из требования, чтобы компоненты метрического тензора (6.9) являлись решениями уравнений Эйнштейна.

С помощью тензора (6.9) нетрудно получить выражения для символов Кристоффеля. Для ненулевых компонент получаем:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^0 &= \dot{\nu}, & \Gamma_{11}^0 &= \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu}, & \Gamma_{10}^0 &= \frac{\nu'}{2}, \\
\Gamma_{00}^1 &= \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda}, & \Gamma_{11}^1 &= \frac{\lambda'}{2}, & \Gamma_{01}^1 &= \frac{\dot{\lambda}}{2}, \\
& & \Gamma_{22}^1 &= -r e^{-\lambda}, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \\
& & \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \theta e^{-\lambda}, & \Gamma_{23}^3 &= \operatorname{ctg} \theta. \\
& & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, & &
\end{aligned}
\tag{6.10}$$

Используя эти выражения, можно найти тензор кривизны  $R_i^k$ , скалярную кривизну  $R$  и записать уравнения Эйнштейна. Из 10 уравнений только пять не обращаются в тождество:

$$\begin{aligned}
-e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} &= \frac{8\pi G}{c^4} T_0^0, \\
-e^{-\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{r} &= \frac{8\pi G}{c^4} T_0^1, \\
-e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} &= \frac{8\pi G}{c^4} T_1^1, \\
-\frac{1}{2} e^{-\lambda} \left( \nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu' \lambda'}{2} \right) + \\
+\frac{1}{2} e^{-\nu} \left( \ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda} \dot{\nu}}{2} \right) &= \frac{8\pi G}{c^4} T_2^2 = \frac{8\pi G}{c^4} T_3^3.
\end{aligned}
\tag{6.11}$$

Здесь штрихом обозначены производные по  $r$ , а точкой — производные по  $ct$ .

В общем случае проинтегрировать эти уравнения не удается. В 1916 г. Карл Шварцшильд нашел решение этих уравнений для центрально-симметричного гравитационного поля в пустоте, т. е. вне создающих его масс. Для

этого случая  $T_i^k = 0$  уравнения (6.11) принимают вид

$$\begin{aligned}
 e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} &= 0, \\
 \dot{\lambda} &= 0, \\
 e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} &= 0, \\
 \nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu' \lambda'}{2} &= 0. \tag{6.12}
 \end{aligned}$$

Легко показать, что последнее уравнение вытекает из первого и третьего уравнений, а функция  $\lambda(r, t)$  не зависит от времени:

$$\lambda(r, t) = \lambda(r). \tag{6.13}$$

Вычитая третье уравнение из первого, находим

$$\lambda' + \nu' = 0, \tag{6.14}$$

т. е. сумма функций  $\lambda(r) + \nu(r, t)$  является функцией только времени  $t$ :

$$\lambda(r) + \nu(r, t) = F(t). \tag{6.15}$$

Воспользуемся еще оставшейся неопределенностью в выборе временной координаты. Она определена с точностью до преобразования  $t = f(t')$ , где  $f(t')$  — произвольная функция только времени. Выражение (6.8) для  $ds^2$  показывает, что выбор функции  $f(t)$  равносильно добавлению к  $\nu(r, t)$  произвольной функции времени. Таким образом, подходящим выбором временной координаты мы всегда можем добиться того, чтобы в новых координатах выполнялось равенство

$$\lambda(r) + \nu(r, t) = 0. \tag{6.16}$$

Теперь система координат полностью определена.

Из уравнения (6.16) следует, что функция  $\nu(r, t)$  также не зависит от времени:  $\nu(r, t) = \nu(r)$ . Таким образом, центрально-симметричное поле в пустоте оказывается постоянным (компоненты метрического тензора не зависят от  $x^0$ ). Более того, в этом случае  $g^{0\alpha} = 0$ , и такое поле является статическим. Уравнения (6.12) тогда в выбранной системе координат сводятся к одному уравнению:

$$\lambda'e^{-\lambda} - \frac{e^{-\lambda}}{r} + \frac{1}{r} = 0. \quad (6.17)$$

Переписав это уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial r}(re^{-\lambda}) = 1, \quad (6.18)$$

получаем

$$e^{-\lambda} = 1 + \frac{c_1}{r}, \quad (6.19)$$

где  $c_1$  — постоянная интегрирования. На бесконечности ( $r \rightarrow \infty$ ), где гравитационное поле спадает, метрика становится галилеевой, отвечая плоскому пространству-времени ( $e^{-\lambda} = 1$ ).

Для слабого гравитационного поля компоненты метрического тензора должны соответствовать их значениям в слабом гравитационном поле (3.23). В частности, компонента  $g_{00}$  должна равняться  $g_{00} = 1 + 2\varphi/c^2$ , где  $\varphi$  — ньютоновский потенциал слабого гравитационного поля.

Для сферически-симметричной массы  $M$  потенциал гравитационного поля вне самой массы в ньютоновской теории тяготения равен  $\varphi = -G\frac{M}{r}$ , где  $G$  — гравитационная постоянная. Поскольку  $e^{-\lambda}$  и есть компонента метрического тензора  $g_{00}$  (см.(6.9)), то для того, чтобы на больших расстояниях, когда гравитационное поле становится

слабым, выражение (6.19) соответствовало ньютоновской теории тяготения, константа  $c_1$  должна быть равна

$$c_1 = -\frac{2GM}{c^2}. \quad (6.20)$$

Величина  $2GM/c^2$  имеет размерность длины и называется *гравитационным радиусом*  $r_g$  массы  $M$ :

$$r_g \equiv \frac{2GM}{c^2}. \quad (6.21)$$

Тогда для  $e^{-\lambda}$  получаем

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{r_g}{r}. \quad (6.22)$$

Данное выражение и определяет неизвестную функцию  $\lambda(r)$ , давая решение поставленной задачи. Соответствующий метрический тензор, отвечающий этому решению, имеет вид

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{r_g}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (6.23)$$

Это и есть решение Шварцшильда для центрально-симметричного гравитационного поля в пустоте.

В соответствии с (6.23) для  $ds^2$  можно записать:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (6.24)$$

Выражение (6.24) записано в рассматриваемой нами четырехмерной системе координат. Эта система такова, что на

больших расстояниях от тяготеющей массы гравитационное поле в ней описывается ньютоновской теорией тяготения. Это означает, что поле имеет такой же вид, как слабое гравитационное поле удаленной массы для наблюдателя, неподвижного относительно нее. Поэтому систему отсчета, отвечающую такой четырехмерной системе координат, называют системой бесконечно удаленного наблюдателя.

Решение (6.23) приводит к ряду важных следствий:

1. Гравитационное поле определяется только полной массой  $M$  тяготеющего тела.
2. Метрика пространства-времени не совпадает с метрикой плоского пространства-времени, т. е. пространство-время искривлено.
3. Расстояние между точками в пространстве определяется выражением (определяющим метрику трехмерного пространства):

$$d\ell^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (6.25)$$

Отсюда следует, что расстояние между точками  $r_1$  и  $r_2$  вдоль линии, проходящей через центр поля,

$$\ell_{r_1, r_2} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}} \geq r_2 - r_1 \quad (6.26)$$

больше разности координат этих точек  $r_2 - r_1$ . При удалении от центра данное расстояние все более точно совпадает с разностью координат точек. Для бесконечно удаленного наблюдателя координата  $r$  является координатой, изменение которой дает изменение расстояния от центра поля вдоль прямой, проходящей через центр.

4. Промежуток истинного времени  $d\tau$  по неподвижным часам в нашей системе отсчета связан с изменением координаты  $t$  соотношением

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} dt \leq dt \quad (6.27)$$

и оказывается меньше соответствующего изменения координаты  $dt$ . Лишь на больших расстояниях ( $r \gg r_g$ ) эти величины практически совпадают. Таким образом, бесконечно удаленный наблюдатель с помощью координаты  $t$  измеряет фактически истинное время. Это означает, что система отсчета, в которой было получено решение Шварцшильда, — это система бесконечно удаленного наблюдателя.

5. Отклонения компонент метрического тензора (метрики пространства-времени) от значений, отвечающих плоскому пространству-времени, определяются параметром  $r_g/r$ . На больших расстояниях ( $r \gg r_g$ ) метрику пространства-времени можно записать в виде метрики плоского пространства-времени  $ds_0^2$  с малыми поправками. С точностью до первых исчезающих поправок имеем

$$ds^2 = ds_0^2 - \frac{r_g}{r}(c^2 dt^2 + dr^2), \quad (6.28)$$

т. е. поправки к временной и пространственной координатам оказываются одного порядка, а именно порядка  $(r_g/r)$ .

## 6.2. Движение частиц в центрально-симметричном гравитационном поле. Смещение перигелия орбит планет

Движение частицы в гравитационном поле описывается уравнением геодезических (3.16). В центрально-симметричном поле движение происходит в плоскости, проходящей через центр поля. Выберем в качестве такой плоскости плоскость  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Для ненулевых символов Кристоффеля в выбранной нами системе отсчета получаем (см.(6.10)):

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^1 &= -e^{-2\lambda}\lambda', & \Gamma_{10}^0 &= -\frac{\lambda'}{2}, \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{\lambda'}{2}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -re^{-\lambda}, & \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{33}^1 &= -re^{-\lambda}.\end{aligned}\quad (6.29)$$

Уравнения геодезических в этом случае сводятся к системе трех уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 ct}{ds^2} - \lambda' \frac{dct}{ds} \frac{dr}{ds} &= 0, \\ \frac{d^2 r}{ds^2} - \frac{\lambda'}{2} \left( \frac{dct}{ds} \right)^2 + \frac{\lambda'}{2} \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 - re^{-\lambda} \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 &= 0, \\ \frac{d^2 \varphi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} &= 0,\end{aligned}\quad (6.30)$$

Умножая первое уравнение на  $e^{-\lambda}$ , можно записать:

$$\frac{d}{ds} \left( e^{-\lambda} \frac{dct}{ds} \right) = 0. \quad (6.31)$$

Это означает, что при движении в центрально-симметричном гравитационном поле сохраняется величина

$$e^{-\lambda} \frac{dct}{ds} \equiv a = const. \quad (6.32)$$

Умножая последнее уравнение в (6.30) на  $r^2$ , получаем

$$\frac{d}{ds} \left( r^2 \frac{d\varphi}{ds} \right) = 0, \quad (6.33)$$

т. е. второй сохраняющейся величиной является

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} \equiv b = \text{const}. \quad (6.34)$$

Четырехмерная скорость частицы  $u^i = dx^i/ds$  является единичным вектором, касательным к траектории частицы. Условие единичности этого вектора  $g_{ik}u^i u^k = 1$  в нашем случае можно записать в виде

$$e^{-\lambda} \left( \frac{d(ct)}{ds} \right)^2 - e^{-\lambda} \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 - r^2 \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 1. \quad (6.35)$$

Рассматривая это равенство как уравнение, вместе с уравнениями (6.30) получаем систему четырех уравнений для трех функций  $t(s)$ ,  $r(s)$  и  $\varphi(s)$ . Можно показать, что второе из уравнений (6.30) является следствием первого и третьего уравнений (6.30) и уравнения (6.35). Тогда, заменяя первое и третье уравнения из (6.30) на вытекающие из них уравнения (6.32) и (6.34), вместе с (6.35) получаем систему трех уравнений для  $t(s)$ ,  $r(s)$  и  $\varphi(s)$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 &= \left( -1 - \frac{b^2}{r^2} + a^2 e^\lambda \right) e^{-\lambda}, \\ e^{-\lambda} \frac{dct}{ds} &= a, \\ r^2 \frac{d\varphi}{ds} &= b, \end{aligned} \quad (6.36)$$

где  $a$  и  $b$  — некоторые константы. Из последнего уравнения следует, что для  $b = 0$  угловая координата  $\varphi$  не меняется, что соответствует радиальному движению.

Обсудим сначала нерадиальное движение, т. е. случай  $b \neq 0$ . Тогда из (6.36) легко получить уравнение для траектории частицы  $r = r(\varphi)$ :

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{b^2} \left[ a^2 - e^{-\lambda} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) \right]. \quad (6.37)$$

С учетом найденного нами решения  $e^{-\lambda} = 1 - r_g/r$  это уравнение переписывается в виде

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{b^2} \left[ a^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) \right]. \quad (6.38)$$

Вводя новую переменную  $\sigma \equiv r^{-1}$  и дифференцируя получившееся уравнение по  $\varphi$ , находим

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} = \frac{r_g}{2b^2} - \sigma + \frac{3r_g}{2}\sigma^2. \quad (6.39)$$

Первое слагаемое в правой части этого уравнения описывает действие гравитационного поля на частицу, совершающую нерадиальное движение, в ньютоновской теории тяготения. Последнее же слагаемое, имеющее порядок  $r_g/r$ , описывает эффекты ОТО.

Вводя обозначения

$$\frac{r_g}{2b^2} \equiv \frac{1}{p}, \quad \frac{3r_g}{2} \equiv \alpha, \quad (6.40)$$

можно переписать уравнение (6.39) в виде

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} = \frac{1}{p} - \sigma + \alpha\sigma^2. \quad (6.41)$$

В слабом гравитационном поле, когда эффекты ОТО невелики, можно пренебречь членом  $\alpha\sigma^2$  и получить уравнение

$$\frac{d^2\sigma_0}{d\varphi^2} = \frac{1}{p} - \sigma_0. \quad (6.42)$$

Его общее решение имеет вид

$$\sigma_0(\varphi) = \frac{1}{p} + c_1 \cos \varphi + c_2 \sin \varphi. \quad (6.43)$$

Поворачивая систему координат на угол  $\Delta = \arctg\left(-\frac{c_2}{c_1}\right)$ , получаем

$$\sigma_0(\varphi) = \frac{1}{p} (1 + e \cos \varphi), \quad (6.44)$$

где обозначено  $e \equiv p\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ . Вспоминая, что за  $\sigma(\varphi)$  у нас была обозначена величина  $1/r(\varphi)$ , получаем

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}. \quad (6.45)$$

Это уравнение эллипса в полярных координатах (рис. 6.1). Мы воспроизвели хорошо известный результат: в ньютоновской теории тяготения тело в центрально-симметричном поле совершает периодическое движение с периодом  $\Delta\varphi = 2\pi$  по эллиптической орбите.

Перейдем к рассмотрению эффектов ОТО. Траектория частицы в общем случае описывается сложным нелинейным уравнением (6.41). Имея в виду эффекты, связанные с движением планет, например, в Солнечной системе, где гравитационное поле мало даже на поверхности Солнца, найдем малые поправки к ньютоновской теории, вызванные эффектами ОТО.

Предполагая, что одним из главных эффектов ОТО будет нарушение строгой периодичности движения частиц,

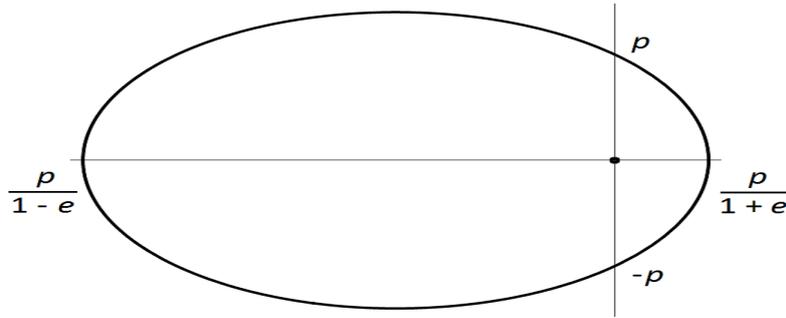


Рис. 6.1. Траектория частицы в ньютоновой теории тяготения

будем искать решение общего уравнения (6.41) в виде разложения:

$$\sigma(\varphi) = a_0 + a_1 \cos(1 + \xi)\varphi + a_2 \cos 2(1 + \xi)\varphi + \dots, \quad (6.46)$$

где  $a_n$  и  $\xi$  — неизвестные величины. Ньютоновской теории отвечает случай  $\xi = 0$ ,  $a_n = 0$  при  $n \neq 0$ . Таким образом, при малых эффектах ОТО величины  $\xi$  и  $a_n$  при  $n \neq 0$  малы. Подставляя решение вида (6.46) в уравнение (6.41) и приравнивая коэффициенты при линейно независимых функциях  $\cos n(1 + \xi)\varphi$ , получаем систему уравнений для величин  $a_n$  и  $\xi$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{p} - a_0 + \alpha \left( a_0^2 + \frac{a_1^2}{r^2} + \dots \right), \\ -a_1(1 + \xi)^2 &= -a_1 + \alpha 2a_0a_1, \\ -a_2 4(1 + \xi)^2 &= -a_2 + \frac{a_1^2}{r} + \alpha 2a_0a_2 + \dots, \\ &\dots \end{aligned} \quad (6.47)$$

В силу малости величины  $\xi$  для нахождения главной поправки, связанной с эффектами ОТО, достаточно огра-

ничиться линейным приближением по  $\xi$ . Тогда уравнения (6.47) принимают вид

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{p} - a_0 + \alpha \left( a_0^2 + \frac{a_1^2}{r^2} + \dots \right), \\ -a_1 \xi &= \alpha a_0 a_1, \\ -3a_2 - 8a_2 \xi &= \frac{a_1^2}{r} + \alpha 2a_0 a_2, \\ &\dots \end{aligned} \quad (6.48)$$

Величина  $\alpha$  в этих уравнениях отвечает за эффекты ОТО и в нашем случае должна быть мала. Поскольку  $\sigma \equiv 1/r$ , безразмерным параметром является  $\alpha/r$ . В нулевом приближении по этому параметру из (6.48) получаем  $a_0^{(0)} = 1/p$ ,  $a_n^{(0)} = 0$  при  $n \geq 2$ . Величина же  $a_1^{(0)}$  остается произвольной. Сравнивая получившийся результат  $\sigma^{(0)}(\varphi) = 1/p + a_1^{(0)} \cos \varphi$  с (6.46), видим, что в нулевом приближении  $a_1^{(0)} = e/p$ .

В первом приближении по параметру  $\alpha/r$  из (6.48) следует, что

$$\xi = -\alpha a_0^{(0)} \simeq -\alpha \frac{1}{p}. \quad (6.49)$$

Кроме того, из (6.48) вытекает, что все величины  $a_n$  получают малые, линейные по  $\alpha$  добавки  $\delta_1 a_n$ :  $a_n^{(1)} = a_n^{(0)} + \delta_1 a_n$ . Тогда решение можно записать в виде

$$r(\varphi) \simeq \frac{1}{a_0^{(1)} + a_1^{(1)} \cos \left(1 - \frac{\alpha}{p}\right) \varphi + a_2^{(1)} \cos 2 \left(1 - \frac{\alpha}{p}\right) \varphi + \dots}. \quad (6.50)$$

Это означает, что главный эффект ОТО при нерадиальном движении частицы в центрально-симметричном гравитационном поле заключается в том, что движение перестает быть периодическим. Угловое расстояние между

точками на траектории частицы, расположенными, например, на минимальном расстоянии от центра, равно теперь не  $2\pi$ , а соответствует такому изменению угла  $\varphi$ , при котором аргумент косинуса в выражении (6.50) меняется на  $2\pi$ :

$$\left(1 - \frac{\alpha}{p}\right) \Delta\varphi = 2\pi. \quad (6.51)$$

Отсюда при условии малости поправки, пропорциональной  $\alpha$ , находим

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{1 - \frac{\alpha}{p}} \simeq 2\pi \left(1 + \frac{\alpha}{p}\right) \equiv 2\pi + \delta\varphi. \quad (6.52)$$

Таким образом, эффекты ОТО приводят к тому, что для того, чтобы снова оказаться на минимальном расстоянии от центра, частице необходимо совершить добавочный к  $2\pi$  поворот на угол  $\delta\varphi$ :

$$\delta\varphi = \frac{2\pi\alpha}{p} = \frac{6\pi GM}{c^2 p}. \quad (6.53)$$

В результате такого дополнительного поворота траектория частицы становится незамкнутой. В рассматриваемом нами случае слабого поля дополнительное смещение траектории мало. Фактически траектория представляет собой эллипс, отвечающий ньютоновской теории тяготения, который за каждый оборот доворачивается на небольшой угол (рис. 6.2).

Для движения планет вокруг Солнца точки на траектории, расположенные на минимальном расстоянии от Солнца, называются перигелием. Рассмотренный нами эффект известен как смещение перигелия планет за счет эффектов ОТО. В частности, для орбиты ближайшей к Солнцу планеты Меркурий  $p = 55,3 \cdot 10^{11}$  см. Тогда с учетом того, что

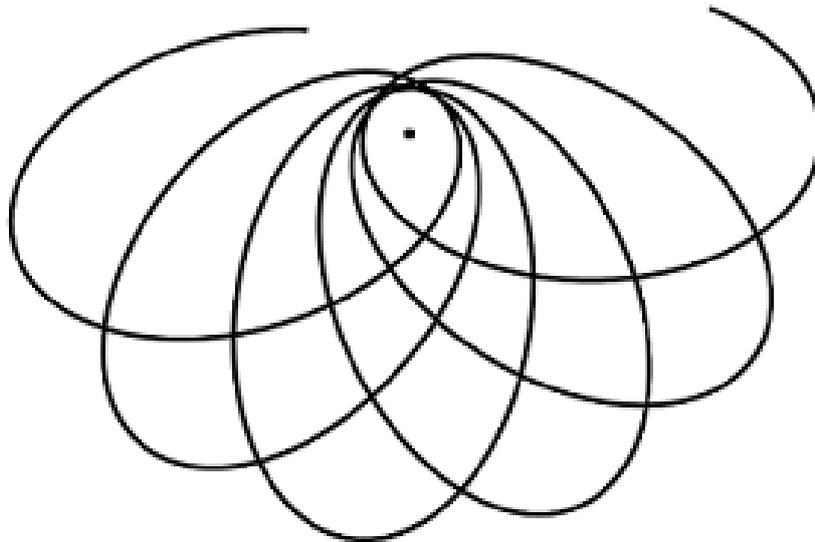


Рис. 6.2. Траектория частицы в центрально-симметричном гравитационном поле с учетом эффектов ОТО

для Солнца  $GM/c^2 = 1,475 \cdot 10^5$  см, смещение перигелия (в угловых секундах) равно:

$$\delta\varphi = 0,1038''. \quad (6.54)$$

Обычно рассматривается смещение перигелия не за один оборот, а за столетие. Для Меркурия эта величина составляет

$$\delta\varphi \text{ за столетие} = 43,03''. \quad (6.55)$$

Наблюдения показывают, что смещение перигелия Меркурия составляет порядка 500 угловых секунд в столетие. Прежде всего оно обусловлено влиянием других

планет. В 1859 г. Леверье, тщательно вычисляя влияние других планет, показал, что таким образом можно почти полностью объяснить наблюдаемое смещение перигелия Меркурия. Необъясненной остается лишь небольшая часть, как раз примерно равная рассчитанной выше величине (6.55). Ниже приведены наблюдаемые дополнительные смещения перигелия планет в Солнечной системе в сравнении с предсказаниями ОТО.

Объект	ОТО	Наблюдения
Меркурий	43,03''	43,11'' ± 0,45''
Венера	8,6''	8,4'' ± 4,8''
Земля	3,8''	5,0'' ± 1,2''
Икарус*	10,3''	9,8'' ± 0,8''

\* Примечание: Икарус — астероид с сильно вытянутой орбитой, вращающийся вокруг Солнца.

Большие неточности наблюдаемых величин обусловлены малым эксцентриситетом орбит планет.

Рассмотренный эффект явился первым наблюдаемым подтверждением ОТО.

### 6.3. Распространение лучей света в центрально-симметричном гравитационном поле. Гравитационное отклонение лучей света

Распространение лучей света в гравитационном поле происходит по геодезическим линиям при условии, что для света  $ds = 0$ . Для центрально-симметричного гравитационного поля эти уравнения имеют вид (6.30). Входящие

в эти уравнения константы  $a$  и  $b$  при условии  $ds = 0$  обращаются в бесконечность (по крайней мере, для нерадиального движения, когда  $b$  тождественно не равно нулю). При этом их отношение, пропорциональное  $dct/d\varphi$ , является конечной величиной.

Таким образом, для нерадиального движения луча света уравнения (6.30) сводятся к системе:

$$\begin{cases} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \varphi} \right)^2 = -\frac{1}{r^2} \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right) + \frac{a^2}{b^2} \\ \frac{a}{b} = \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right) \frac{1}{r^2} \frac{dct}{d\varphi} \end{cases}. \quad (6.56)$$

Здесь мы отбросили в правой части первого уравнения слагаемое  $b^{-2}$ , так как для нерадиально распространяющегося света ( $d\varphi \neq 0$ ,  $ds = 0$ ) параметр  $b$  равен бесконечности. Для рассматриваемого движения величина  $(a/b)$  является константой, имеющей размерность обратной длины. Обозначим ее как  $R^{-1}$ . Тогда уравнение для траектории луча света  $r = r(\varphi)$  принимает вид

$$\left( \frac{\partial r}{\partial \varphi} \right)^2 = \frac{r^4}{R^2} - r^2 \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right). \quad (6.57)$$

Вводя новую переменную  $\xi = 1/r$ , это уравнение можно переписать в виде

$$\left( \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \right)^2 = \frac{1}{R^2} - \xi^2 + r_g \xi^3. \quad (6.58)$$

Влияние гравитационного поля на распространение светового луча заключено здесь в слагаемом, содержащем  $r_g$ .

Считая гравитационное поле слабым (это соответствует малости параметра  $r_g/r \ll 1$ ), рассмотрим сначала рас-

пространение луча света в отсутствие гравитационного поля. В этом случае уравнение (6.58) сводится к уравнению

$$\frac{\partial \xi}{\partial \varphi} = \sqrt{\frac{1}{R^2} - \xi^2}, \quad (6.59)$$

решение которого может быть записано в виде

$$\xi = \frac{1}{R} \cos(\varphi + \varphi_0) \quad \text{или} \quad r \cos(\varphi + \varphi_0) = R, \quad (6.60)$$

где  $\varphi_0$  — постоянная интегрирования. Это решение соответствует движению луча света вдоль прямой, проходящей на расстоянии  $R$  от центра поля. Для случая, когда постоянная интегрирования  $\varphi_0$  выбрана равной  $\pi/2$  (решение при этом имеет вид  $r \sin \varphi = R$ ), траектория луча света изображена на рис. 6.3.

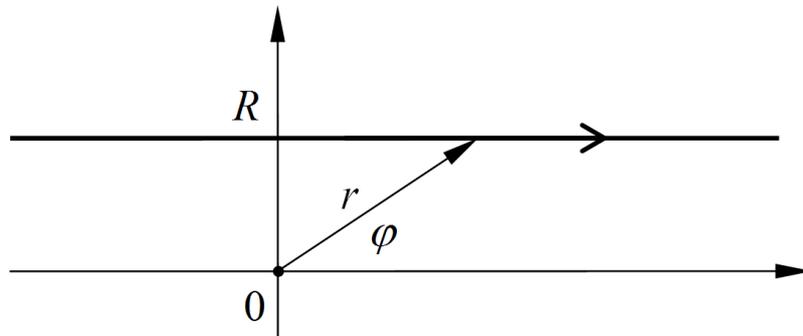


Рис. 6.3. Движение луча света вблизи тяготеющего тела в пренебрежении эффектами ОТО

Функция  $\xi = \xi(\varphi)$  имеет два нуля (в начале траектории и в ее конце), угловое расстояние между которыми

равно  $\Delta\varphi = \pi$ . Посередине между этими точками  $\xi(\varphi)$  достигает максимума, равного  $R^{-1}$ . Предполагая, что эффект от действия гравитационного поля сведется к отклонению луча света при прохождении вблизи тяготеющего тела, найдем изменение углового расстояния между нулями функции  $\xi(\varphi)$  при наличии гравитационного поля. Для этого рассмотрим угловое расстояние от точки максимума функции  $\xi(\varphi)$  до ее нуля. Максимум функции  $\xi(\varphi)$  определяется, как обычно, условием  $(d\xi/d\varphi) = 0$ . Согласно (6.58) величина этого максимума  $\xi_m$  удовлетворяет уравнению

$$0 = \frac{1}{R^2} - \xi_m^2 + r_g \xi_m^3. \quad (6.61)$$

Вычитая данное уравнение из (6.58), находим

$$d\varphi = \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi_m^2 - \xi^2) - r_g(\xi_m^3 - \xi^3)}}. \quad (6.62)$$

Интегрируя это выражение в пределах от  $\xi = 0$  до  $\xi_m$  и умножая результат на 2, получаем полное изменение углового расстояния  $\Delta\varphi$  при движении луча света мимо тяготеющего тела:

$$\Delta\varphi = 2 \int_0^{\xi_m} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi_m^2 - \xi^2) - r_g(\xi_m^3 - \xi^3)}}. \quad (6.63)$$

Даже на поверхности Солнца гравитационное поле слабо в том смысле, что параметр  $r_g/r$  мал. Следовательно, второе слагаемое под квадратным корнем в подынтегральном выражении (6.62) много меньше первого везде в пределах интегрирования. Тогда интеграл может быть вычислен приближенно путем разложения подынтегрального выражения в ряд. Ограничиваясь первыми поправками,

получаем

$$\Delta\varphi \simeq 2 \int_0^{\xi_m} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi_m^2 - \xi^2}} \left( 1 + \frac{r_g}{2} \frac{\xi_m^3 - \xi^3}{\xi_m^2 - \xi^2} \right) = J_1 + \frac{r_g}{2} J_2. \quad (6.64)$$

Вычисляя получившиеся интегралы  $J_1$  и  $J_2$ :

$$\begin{aligned} J_1 &= 2 \int_0^{\xi_m} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi_m^2 - \xi^2}} = \pi, \\ J_2 &= 2 \int_0^{\xi_m} \frac{(\xi_m^3 - \xi^3) d\xi}{(\xi_m^2 - \xi^2) \sqrt{\xi_m^2 - \xi^2}} = 4\xi_m, \end{aligned} \quad (6.65)$$

находим

$$\Delta\varphi = \pi + 2r_g\xi_m \equiv \pi + \delta\varphi. \quad (6.66)$$

Таким образом, луч света в гравитационном поле тяготеющего тела действительно отклоняется так, что далее он распространяется, приближаясь к новой асимптоте, расположенной под углом  $\delta\varphi = 2r_g\xi_m$  к первоначальному направлению (рис. 6.4).

Минимальное расстояние луча света от центра поля  $R_m = 1/\xi_m$  определяется уравнением (6.61) и в слабом поле мало отличается от прицельного расстояния  $R$ , с которым луч света движется на бесконечности. Для луча света, идущего вблизи диска Солнца, подставляя в качестве  $R_m$  радиус Солнца  $R_\odot = 6,96 \cdot 10^{10}$  см, получаем

$$\delta\varphi = \frac{2r_{g\odot}}{R_\odot} \simeq 1,75''. \quad (6.67)$$

Отклонение лучей света наблюдается во время солнечных затмений, поскольку этот эффект позволяет увидеть

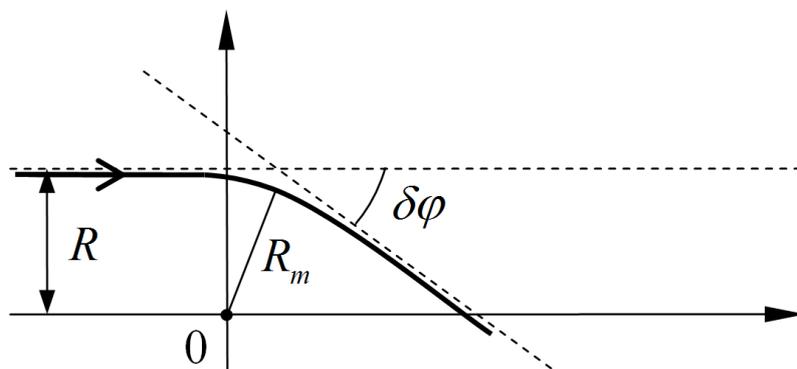


Рис. 6.4. Движение луча света вблизи тяготеющего тела с учетом эффектов ОТО

звезды, находящиеся за диском Солнца. Впервые наблюдения такого рода были проведены Артуром Эддингтоном в 1919 г. Результаты его наблюдений подтвердили выводы ОТО<sup>4</sup>.

<sup>4</sup> Первоначально подобные наблюдения собирались провести во время затмения 1912 г., однако пасмурная погода не позволила провести наблюдения. Надежды возлагались на солнечное затмение 1914 г. на территории России. Была организована немецкая экспедиция в Крым. Однако начавшаяся Первая мировая война не позволила выполнить наблюдения — экспедиция была интернирована с территории России. Пришлось дожидаться следующего солнечного затмения. Отметим, что в 1914 г. ОТО еще не была создана полностью и, соответственно, не было предсказано правильное значение величины отклонения лучей света. Экспедиция намеревалась проверить не результат ОТО, а значение отклонения луча света, к которому приводит ньютоновская теория тяготения. Это значение в 2 раза меньше результата ОТО. Таким образом, экспедиция 1914 г. могла бы обнаружить прямое несоответствие ньютоновской теории тяготения наблюдениям.

Мы рассмотрели три классических эффекта ОТО, наблюдения которых подтвердили ее справедливость. Позднее были рассчитаны и обнаружены в наблюдениях некоторые новые эффекты ОТО, такие, например, как запаздывание радиосигналов, проходящих вблизи Солнца (эффект Шапиро, 1962). В частности, ежегодно наблюдается затмение Солнцем одного из радиопульсаров. Это дает возможность проверять и отклонение сигнала в поле Солнца, и замедление времени движения сигнала. Современные методики, сочетающие активную и пассивную локацию, позволяют измерить этот эффект и подтвердить результаты ОТО с точностью до тысячных долей процента.

На сегодняшний день развитие техники привело к тому, что чрезвычайно слабые эффекты ОТО в гравитационном поле Земли необходимо учитывать в различных технических устройствах (спутниковая система навигации и позиционирования GPS, расчет траекторий космических аппаратов и спутников, учет запаздывания радиосигналов при радиосвязи с удаленными космическими аппаратами).

Все рассмотренные нами эффекты наблюдаются в слабом поле. Соответственно и справедливость ОТО эти наблюдения подтверждают лишь в достаточно слабом гравитационном поле. Особенно интересные и принципиально важные для ОТО эффекты возникают в сильных гравитационных полях. Некоторые из них будут рассмотрены позднее.

#### 6.4. Радиальное движение частиц и света в центрально-симметричном гравитационном поле. Черные дыры

Для радиального движения ( $d\varphi = 0$ ) от уравнений для геодезических в центрально-симметричном гравитационном поле (6.30) остаются два уравнения для функций  $t(s)$  и  $r(s)$ :

$$\begin{cases} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - a^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \\ \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \frac{dct}{ds} = a \end{cases}, \quad (6.68)$$

которые сводятся к одному уравнению для функции  $r(t)$ :

$$\left(\frac{dr}{dct}\right)^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^2 \left(1 - \frac{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}{a^2}\right), \quad (6.69)$$

где  $a = \text{const}$  — постоянная движения, определяемая начальными условиями.

Рассмотрим частицу, начинающую радиально падать на центр из некоторой точки  $r_0$  с нулевой начальной скоростью:

$$\left.\frac{dr}{dct}\right|_{r=r_0} = 0. \quad (6.70)$$

Тогда из (6.69) для  $r = r_0$  получаем

$$0 = \left(1 - \frac{r_g}{r_0}\right)^2 \left(1 - \frac{1 - \frac{r_g}{r_0}}{a^2}\right), \quad (6.71)$$

откуда находим

$$a^2 = 1 - \frac{r_g}{r_0}. \quad (6.72)$$

В результате уравнение (6.69) для рассматриваемого нами случая запишется в виде

$$\frac{dr}{dct} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{1 - \frac{1 - \frac{r_g}{r}}{1 - \frac{r_g}{r_0}}}. \quad (6.73)$$

Из этого уравнения следует прежде всего, что по мере приближения к гравитационному радиусу координатная скорость тела замедляется и стремится к нулю:

$$\frac{dr}{dt} \xrightarrow{r \rightarrow r_g} 0.$$

Время  $\Delta t(r_0, r)$ , за которое тело дойдет из начальной точки  $r_0$  до некоторой точки  $r$ , определяется выражением

$$\Delta t(r_0, r) = \int_{r_0}^r \frac{dr}{c \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{1 - \frac{1 - r_g/r}{1 - r_g/r_0}}}. \quad (6.74)$$

При  $r \rightarrow r_g$  в этом выражении интеграл расходится, и  $\Delta t \rightarrow \infty$ . Таким образом, по часам бесконечно далекого наблюдателя тело может достигнуть гравитационного радиуса лишь за бесконечно большой промежуток времени.

Движение луча света описывается теми же уравнениями геодезических (6.36) с дополнительным условием, что для света  $ds = 0$ . Уравнения (6.68) тогда сводятся к уравнению

$$\frac{dr}{dct} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right). \quad (6.75)$$

Отсюда для времени  $\Delta t$  движения луча света из начальной точки  $r_0$  до некоторой точки  $r$  получаем

$$\Delta t(r_0, r) = \frac{1}{c} \int_{r_0}^r \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}} = \frac{r_0 - r}{c} + \frac{r_g}{c} \ln \frac{r_0 - r_g}{r - r_g}. \quad (6.76)$$

Знак модуля у  $dr$  поставлен потому, что при выборе направления движения луча света, когда  $r_0 < r$ ,  $dr$  будет отрицательной величиной. Это время  $\Delta t(r_0, r)$  стремится к бесконечности при  $r \rightarrow r_g$ . Следовательно, для бесконечно удаленного наблюдателя даже свет может достигнуть гравитационного радиуса лишь за бесконечное время. Таким образом, для центрально-симметричного распределения массы, занимающего шар с радиусом, меньшим  $r_g$  (так, чтобы сфера радиуса  $r_g$  находилась в пустоте и можно было бы воспользоваться решением Шварцшильда в окрестности  $r_g$ ), для удаленного наблюдателя в пространстве будет существовать полностью недоступная для него область со сферической границей радиуса  $r_g$ . С его точки зрения, даже свету для достижения этой границы требуется бесконечное время. Соответственно никакие сигналы из этой области не могут быть приняты далеким наблюдателем — даже с границы этой области световой сигнал может достигнуть далекого наблюдателя лишь за бесконечное время.

Такая область в пространстве называется *черной дырой*. Граница этой области — сфера радиуса  $r_g$ , отделяющая полностью недоступную для далекого наблюдателя область пространства, называется горизонтом событий.

До сих пор, говоря о времени достижения телом какой-либо точки, мы имели в виду координатное время в метрике Шварцшильда. При исследовании вопроса о том, когда далекий наблюдатель увидит достижение телом некоторой точки  $r$ , надо учитывать, что световой сигнал с информацией о приходе тела в точку  $r$  должен дойти до отдаленного наблюдателя. В результате видимое время достижения телом точки  $r$  увеличивается. Найдем закон, по которому удаленный наблюдатель увидит приход тела в точку  $r$  при приближении этой точки к гравитационному радиусу.

Тело, радиально падающее на центр поля и находящееся в момент времени  $t$  в точке  $r$ , далекий наблюдатель увидит в момент времени  $t^* = t + \delta t$ , где  $\delta t$  — время, необходимое свету, чтобы дойти от точки  $r$  до наблюдателя. Для наблюдателя, находящегося в точке  $r_0$ , из которой тело стало падать с нулевой начальной скоростью, это время определяется формулой (6.76).

Пусть тело находится в точке  $r_1$  вблизи  $r_g$  и движется (продолжает падение) до точки  $r$ , также находящейся вблизи  $r_g$ . Видимое время движения тела из  $r_1$  в  $r$  равно

$$\Delta t^* = \Delta t + \Delta \delta t, \quad (6.77)$$

где  $\Delta t$  — координатное время движения тела в системе отсчета удаленного наблюдателя:

$$\Delta t = \int_{r_0}^r \frac{dr}{c(1 - \frac{r_g}{r})\sqrt{1 - \frac{1-r_g/r}{1-r_g/r_0}}} \simeq \frac{r_g}{c} \ln \frac{r_1 - r_g}{r - r_g}. \quad (6.78)$$

Время  $\Delta \delta t$  — это промежуток времени, за который сигналы о выходе тела из точки  $r_1$  и приходе его в точку  $r$  дойдут до удаленного наблюдателя, находящегося в точке  $r_0$ . Эти времена определяются формулой (6.76), а их разность  $\Delta \delta t$  равна

$$\begin{aligned} \Delta \delta t &= \frac{r_0 - r}{c} + \frac{r_g}{c} \ln \frac{r_0 - r_g}{r - r_g} - \\ &- \left( \frac{r_0 - r_1}{c} + \frac{r_g}{c} \ln \frac{r_0 - r_g}{r_1 - r_g} \right) \simeq \frac{r_g}{c} \ln \frac{r_1 - r_g}{r - r_g}. \end{aligned} \quad (6.79)$$

Складываем  $\Delta t$  и  $\Delta \delta t$ :

$$\Delta t^* = \frac{2r_g}{c} \ln \frac{r_1 - r_g}{r - r_g}. \quad (6.80)$$

Тогда закон видимого приближения падающей частицы к гравитационному радиусу на малых расстояниях от горизонта событий принимает вид

$$r(\Delta t^*) = r_g + (r_1 - r_g) e^{-\frac{c\Delta t^*}{2r_g}}. \quad (6.81)$$

Таким образом, вдали от гравитационного радиуса свободно падающее тело движется в соответствии с законами классической механики и теории тяготения Ньютона. По мере приближения к гравитационному радиусу видимая скорость движения тела уменьшается, а значение координаты экспоненциально приближается к  $r_g$ .

Интенсивность  $I$  падающего источника света будет меняться следующим образом:

$$I \sim \left( e^{-\frac{c\Delta t^*}{2r_g}} \right)^4 = e^{-\frac{2c\Delta t^*}{r_g}}, \quad (6.82)$$

а частота  $\omega$  — стремиться к нулю:

$$\omega \sim e^{-\frac{c\Delta t^*}{2r_g}}. \quad (6.83)$$

Для Солнца  $\frac{c}{r_g} \sim 10^5$  сек.<sup>-1</sup> Тогда для черной дыры с массой Солнца за время  $10^{-6}$  сек. координата изменится в 3 раза, т. е. вблизи гравитационного радиуса все изменения происходят очень быстро. Хотя время достижения гравитационного радиуса бесконечно, в достаточно близкой окрестности гравитационного радиуса отличие значения координаты  $r$  от  $r_g$  быстро перестает быть значимым.

Обсудим теперь, можно ли попасть под горизонт событий и что при этом увидит гипотетический наблюдатель.

Рассмотрим наблюдателя, связанного с падающим телом. Его часы измеряют собственное время:

$$\Delta T = \frac{1}{c} \int ds. \quad (6.84)$$

Так как  $ds$  не зависит от системы отсчета, рассчитаем  $ds$  в метрике Шварцшильда. Для радиального движения ( $d\theta = 0, d\varphi = 0$ ) получаем (см.(6.73)):

$$ds = \sqrt{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{r_g}{r}}{\left(\frac{dr}{dct}\right)^2} - \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}}} dr. \quad (6.85)$$

Подставляя сюда  $dr/dct$  из (6.73), находим

$$ds = \sqrt{\frac{r_0}{r_g}} \sqrt{\frac{r}{r_0 - r}} dr. \quad (6.86)$$

Собственное время движения (падения) частицы от точки  $r_0$  до произвольной точки  $r$  тогда будет равно

$$\Delta T = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{r_0}{r_g}} \int_{r_0}^r dr \sqrt{\frac{r}{r_0 - r}}. \quad (6.87)$$

Интеграл в этом выражении конечен при любом значении  $r$ . Таким образом, по часам, связанным с падающим телом, время достижения гравитационного радиуса конечно. Конечным оказывается и время достижения центра поля.

В системе отсчета Шварцшильда внешний наблюдатель никогда не увидит область за гравитационным радиусом (горизонтом событий). В этом смысле обсуждаемая система отсчета неполна — она не описывает области пространства под гравитационным радиусом. В то же время наблюдатель, движущийся вместе со свободно падающим телом, за конечное время достигает гравитационного радиуса и, продолжая дальше двигаться, за конечное же время достигнет центра поля. Другое дело, что, перейдя через гравитационный радиус, этот наблюдатель уже не сможет передать какие-либо сигналы (т. е. информацию)

во внешний мир, поскольку любые посланные им сигналы не смогут уйти за пределы горизонта событий.

Приведенный пример показывает, что область за горизонтом событий существует, в эту область можно попасть и исследовать в ней, например, движение частиц и света. Для описания этой области пространства необходимо выбрать иную систему отсчета. Наш пример показывает, что такой системой отсчета может служить система отсчета, связанная со свободно падающим на центр поля веществом, — так называемая *сопутствующая система отсчета*. Эта деформируемая система отсчета, в отличие от координат удаленного наблюдателя, описывает пространство-время как снаружи, так и внутри сферы Шварцшильда.

Переход от системы отсчета удаленного наблюдателя (системы отсчета Шварцшильда) с координатами  $(t, r, \theta, \varphi)$  к сопутствующей системе отсчета с координатами  $(\tau, R, \theta, \varphi)$  описывается выражениями:

$$c\tau = ct + \int_{r_0}^r dr \frac{\sqrt{\frac{r_g}{r}}}{1 - \frac{r_g}{r}}, \quad (6.88)$$

$$R = ct + \int_{r_0}^r dr \frac{1}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{\frac{r_g}{r}}}. \quad (6.89)$$

Находя с помощью этих соотношений  $c dt$ ,  $dr$  и учитывая, что шварцшильдовская координата  $r$  выражается через новые координаты соотношением

$$r = \left( \frac{3}{2} \frac{R - c\tau}{r_g} \right)^{2/3} r_g, \quad (6.90)$$

для метрики пространства-времени в новой системе отсчета получаем

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - \frac{dR^2}{\left(\frac{3}{2} \frac{R-c\tau}{r_g}\right)^{2/3}} - \left(\frac{3}{2} \frac{R-c\tau}{r_g}\right)^{4/3} r_g^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (6.91)$$

Полученная метрика уже не имеет особенности при  $r = r_g$ , однако особенность при  $r = 0$  никуда не исчезает.

Рассмотрим часы, неподвижные в новой системе отсчета. Для них  $dR = d\theta = d\varphi = 0$ . Тогда

$$ds^2 = c^2 d\tau^2. \quad (6.92)$$

Таким образом, координата  $\tau$  является собственным временем в нашей системе отсчета (т. е. она показывает время, отсчитываемое часами, неподвижными относительно нашей системы отсчета).

Движение точки  $R = const, \theta = const, \varphi = const$ , неподвижной относительно нашей системы отсчета, удовлетворяет уравнениям для геодезической. Таким образом, введенная нами новая система отсчета действительно является сопутствующей. В такой системе отсчета точка с координатой  $R$  достигает гравитационного радиуса за время  $\tau_g$ , определяемое условием  $r(R\tau_g) = r_g$ . Подставляя сюда выражение (6.90) для  $r$ , получаем вполне конечное время:

$$\tau_g = \frac{R - \frac{2}{3}r_g}{c}. \quad (6.93)$$

Конечным оказывается и время достижения центральной сингулярности  $\tau_0$ , определяемое условием  $r(R\tau_0) = 0$ :

$$\tau_0 = \frac{R}{c}. \quad (6.94)$$

Рассмотрим распространение радиальных ( $d\theta = 0$ ,  $d\varphi = 0$ ) световых сигналов в сопутствующей системе отсчета. Для света  $ds = 0$  и с помощью (6.91) получаем

$$\frac{dc\tau}{dR} = \pm \frac{1}{\left(\frac{3}{2} \frac{R-c\tau}{r_g}\right)^{1/3}} = \pm \sqrt{\frac{r_g}{r}}. \quad (6.95)$$

Знаки « $\pm$ » здесь соответствуют лучам света, распространяющимся в противоположных направлениях. Соотношение (6.95) определяет границы световых конусов с вершинами в рассматриваемой точке и направленных вдоль и против оси  $\tau$ . Нижний из этих конусов включает события, предшествующие рассматриваемому событию (т. е. нахождению тела в точке  $R$  в момент  $\tau$ ). Верхний конус соответствует событиям, происходящим после рассматриваемого нами события. Отметим, что поскольку скорость света является предельно возможной скоростью движения, то мировые линии движущихся тел всегда находятся внутри световых конусов, переходя из нижнего конуса в верхний, и никогда не могут выйти из них.

На диаграмме  $(c\tau, R)$  (рис. 6.5) точкам с фиксированным значением координаты  $r$  соответствуют наклонные прямые линии, идущие под углом  $45^\circ$ .

Угол раствора световых конусов равен  $90^\circ$  для событий, расположенных на поверхности сферы с  $r = r_g$ . Это означает, что если в такой точке двигаться от центра, то координата  $r$  не растёт, а остается равной  $r_g$ . Если же координата исходной точки отвечает условию  $r < r_g$ , то раствор светового конуса будет меньше, чем  $90^\circ$ , и его правая граница, отвечающая скорости, направленной от центра, пересекает линии с уменьшающимися значениями координаты  $r$ . Рассматриваемое тело при всех попытках двигаться от центра станет двигаться только к центру и

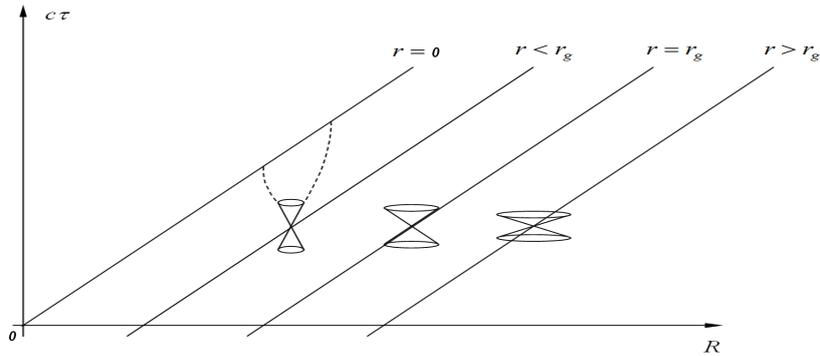


Рис. 6.5. Световые конусы на диаграмме  $(ct, R)$  для событий, происходящих на различном расстоянии от центра поля

за конечное время достигнет его. Движение, при котором правая граница светового конуса пересекает линии, отвечающие увеличивающимся значениям  $r$  (тело удаляется от центра), возможно только для  $r > r_g$ .

Таким образом, при  $r < r_g$  любое движение происходит с уменьшением координаты  $r$  — в этой области тело всегда движется к центру поля и за конечное время достигает его. Вернувшись к решению Шварцшильда (6.23), видим, что коэффициенты при  $dr^2$  и  $c^2 dt^2$  в данной области меняют знаки. Координата  $r$  в указанной области фактически играет роль времени, и невозможность движения с ростом  $r$  отвечает невозможности движения в прошлое в обычных условиях.

Таким образом, уравнения гравитационного поля приводят к выводу, что если размеры тела меньше его гравитационного радиуса, то существует черная дыра: область с  $r < r_g$ , из которой ничто, даже свет, не может выйти наружу.

## 6.5. Гравитационный коллапс

Может ли тело быть сжато до размеров гравитационного радиуса? Первоначально считалось, что в действительности это невозможно, и предпринимались попытки найти физические аргументы в пользу данной версии. (Например, выдвигалось соображение, что частицы, образующие такое сжатое тело, должны будут двигаться со сверхсветовыми скоростями. Такого рода работу опубликовал в 1939 г. и сам Эйнштейн.) Однако в том же 1939 г. Оппенгеймер и Снайдер показали, что если тело имеет достаточно большую массу, то оно не только может, но и неизбежно сожмется до размеров с радиусом, меньшим  $r_g$  (а затем за конечное время сожмется в точку).

В природе такая ситуация должна возникать в процессе эволюции массивных звезд. Звезды в простейшем случае представляют собой плазменные шары, равновесие которых поддерживается за счет того, что силы тяготения, стремящиеся сжать вещество звезды, уравновешиваются давлением, обусловленным высокой температурой плазмы, образующей звезды. В свою очередь, высокая температура вещества звезды вызвана термоядерными реакциями, идущими в недрах звезды. Простейшая из таких реакций — это реакция синтеза гелия из водорода. С течением времени весь водород превращается в гелий, и огромное энерговыделение в недрах звезды, обеспечивающее высокую температуру, прекращается. После этого звезда остывает и, соответственно, сжимается под действием сил тяготения<sup>5</sup>. Далее вступают в силу термоядерные реакции

---

<sup>5</sup> Мы не останавливаемся здесь на детальной картине эволюции звезд, на том, какие именно циклы термоядерных реакций и этапы сложного процесса эволюции проходит тот или иной тип звезд. Подробнее с этим вопросом можно ознакомиться по книгам, посвященным эволюции звезд. Нас интересует лишь сам факт полного

синтеза более сложных элементов. Но и этот процесс со временем заканчивается, и звезда продолжает остывать и сжиматься.

По мере остывания и роста плотности вступают в силу квантовые законы, определяющие поведение частиц в таких условиях. Прежде всего это скажется на легких частицах — электронах. В соответствии со статистикой Ферми — Дирака для частиц с полуцелым спином при достаточно низкой температуре электроны будут занимать уровни энергии с нижнего до некоторого верхнего энергетического уровня, называемого уровнем Ферми, величина которого определяется плотностью электронов. Электронная система в этой ситуации представляет собой вырожденный квантовый электронный газ, подобный электронному газу в металлах. Электронам на верхнем занятом уровне (уровне Ферми) отвечают довольно большие энергии и скорости, растущие с ростом плотности (т. е. по мере сжатия звезды).

Большие скорости движения электронов обеспечивают высокое давление в таком электронном газе. По мере сжатия звезды давление квантового вырожденного электронного газа растет и может остановить сжатие звезды. Образуется очень плотная звезда, которая дальше может только остывать. Такие звезды действительно обнаружены — это *белые карлики*. Плотность вещества в них в сотни миллионов раз больше плотности воды. Белые карлики лишены источников энергии и по мере излучения оставшейся тепловой энергии остывают и темнеют, превращаясь в темные карлики.

Однако в 1931 г. С. Чандрасекар показал, что такой сценарий эволюции возможен только для звезд с массой, 

---

выгорания термоядерного горючего и неизбежное дальнейшее остывание и сжатие звезды.

меньшей 1,44 массы Солнца (*предел Чандрасекара*). Для звезд большей массы давление квантового электронного газа в звезде не способно противостоять силам тяготения. Начинается процесс слияния электронов с протонами с образованием нейтронов (нейтронизация звезды). Звезда продолжает сжиматься, а плотность нейтронов в ней растет. Нейтроны, как и электроны, подчиняются статистике Ферми — Дирака. С ростом плотности квантовые законы вступают в силу для нейтронов, и давление квантового вырожденного нейтронного газа в конце концов может остановить гравитационное сжатие звезды. Образуется так называемая *нейтронная звезда*<sup>6</sup>.

Нейтронные звезды были обнаружены в 1967 г. по наблюдению периодического радиоизлучения, возникающего в магнитном поле у вращающейся нейтронной звезды (пульсара). Физика нейтронных звезд и процессов, происходящих с их участием, чрезвычайно сложна и интересна. Однако в конце концов и эти лишенные источников энергии звезды обречены на остывание и превращение в холодную звезду, равновесное состояние которой обеспечивается балансом сил тяготения и давления вырожденного нейтронного газа.

В конце 30-х гг. XX в. Р. Оппенгеймер и Г. Волков показали, что при достаточно большой массе звезды (больше так называемого *предела Оппенгеймера — Волкова*, равного примерно 2,5—3,0 масс Солнца) давление нейтронного газа не сможет противостоять силам гравитационного сжатия. В этом случае звезда продолжит сжиматься. За конечное время ее радиус станет меньше гравитационно-

---

<sup>6</sup> В действительности процесс образования нейтронных звезд чрезвычайно сложен и до конца не изучен. Для нас же важен лишь факт возможности возникновения нейтронных звезд как этапа эволюции массивных звезд.

го, причем сжатие на этом не остановится. Данный процесс называется гравитационным коллапсом. В результате гравитационного коллапса для далекого наблюдателя возникнет *черная дыра* — область пространства с радиусом, равным гравитационному радиусу, из которой ничто, даже свет, не в состоянии выйти наружу<sup>7</sup>. Граница этой области называется, как уже отмечалось, *горизонтом событий*.

Черная дыра проявляется лишь благодаря своему гравитационному полю, определяемому полной массой  $M$  сколлапсировавшего вещества. Тщательные исследования показали, что вся информация о других характеристиках коллапсирующих звезд при этом пропадает: черные дыры, образовавшиеся из различных звезд равной массы, неотличимы друг от друга и обладают только сферически симметричным гравитационным полем тела с массой  $M$  и, соответственно, гравитационным радиусом  $r_g = 2GM/c^2$ .

---

<sup>7</sup>Гипотеза о существовании «черных звезд» с настолько сильным гравитационным полем, что оно способно удержать даже свет, была высказана еще в 1784 г. английским священником, естествоиспытателем и геологом Джоном Митчеллом. Он исходил из совершенно неверных на сегодняшний взгляд представлений. Рассматривая свет как частицы с массой  $m_c$  и скоростью  $c$  и пользуясь ньютоновской теорией тяготения и классической механикой, он просто вычислил радиус шарообразного тела, скорость вылета с поверхности которого (вторая космическая скорость) равна скорости света. Любопытно отметить, что получающееся значение в точности совпадает с гравитационным радиусом  $r_g$ , следующим из современных представлений. Действительно, приравнивая кинетическую энергию световой частицы к ее энергии в гравитационном поле тяготеющего тела с массой  $M$ :

$$\frac{m_c c^2}{2} = G \frac{M m_c}{r_g},$$

получаем

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}.$$

Это утверждение часто формулируют в следующем виде: «черные дыры не имеют волос». Еще одним параметром, характеризующим черную дыру, мог бы быть полный электрический заряд сколлапсировавшего вещества  $Q$ , который должен был бы сохраниться в силу закона сохранения заряда. Однако астрофизические объекты в большинстве своем электронейтральны, так как любой макроскопический электрический заряд почти мгновенно компенсируется за счет окружающего вещества.

Если коллапсирующая звезда вращается, то в процессе образования черной дыры будет сохраняться момент импульса. Вращающиеся черные дыры описываются так называемым решением Керра и обладают рядом удивительных свойств. Гравитационное поле керровской черной дыры обладает дополнительной вихревой компонентой, вовлекающей тела во вращательное движение вокруг черной дыры. В результате две физически различные поверхности, совпадающие для шварцшильдовской черной дыры: горизонт событий (т. е. поверхность, из-под которой никакие сигналы не могут уйти к далекому наблюдателю) и поверхность *статического предела* (т. е. поверхность, отделяющая область пространства, где тело не может находиться в состоянии покоя) оказываются разделенными. Горизонт событий по-прежнему представляет собой сферу радиуса  $r_g$ . Предел статичности устанавливает поверхность, которая совпадает со сферой гравитационного радиуса только на полюсах по оси вращения. В других же точках эта поверхность удаляется от центра поля тем дальше, чем больше скорость точки на поверхности. Данная поверхность представляет собой сплюснутый эллипсоид вращения, касающийся горизонта событий на полюсах и максимально удаленный от горизонта событий на экваторе (рис. 6.6).

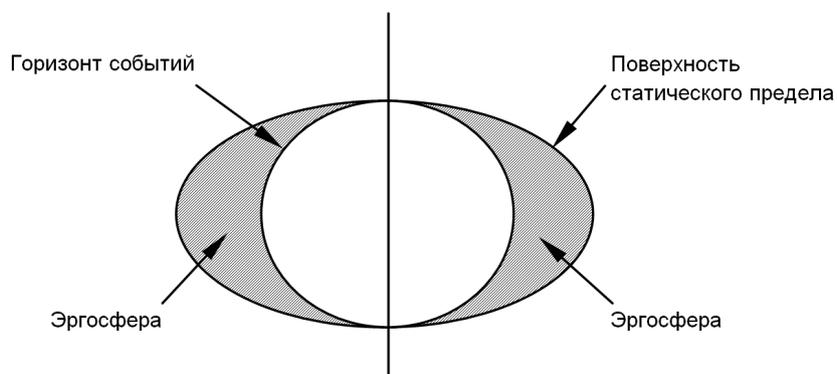


Рис. 6.6. Горизонт событий, поверхность статического предела и эргосфера черной дыры

Область между горизонтом событий и поверхностью статического предела называется эргосферой. В этой области тело не может находиться в состоянии покоя, но может при определенных условиях уйти из этой области на бесконечность.

При падении частиц на черную дыру энергия выделяется в виде гравитационных волн. Энерговыделение при этом может достигать 6 % от  $mc^2$ . Напомним, что энерговыделение при ядерном взрыве составляет десятые доли процента от  $mc^2$ . Еще большее энерговыделение возможно в процессах с вращающимися черными дырами. В частности, частица, попавшая в эргосферу, может распасться на две части, одна из которых поглотится черной дырой, а вторая уйдет на бесконечность, унося энергию, значительно превышающую первоначальную. Дополнительная энергия будет при этом получена за счет уменьшения энергии вращения черной дыры.

Как обнаружить черную дыру, возникающую в процессе эволюции звезд? Такая черная дыра представляет собой непрозрачный сферический объект с радиусом не более десятка километров, проявляющийся лишь посредством своего сферически-симметричного гравитационного поля. Вблизи нашей Солнечной системы такого объекта нет, а обнаружить удаленный неизлучающий объект столь малых размеров практически невозможно. Поиск «звездных» черных дыр связан с регистрацией различных эффектов, возникающих при падении вещества на черную дыру. Из астрономических наблюдений известно, что большинство звезд входит в двойные и кратные системы. Среди таких систем есть спектрально двойные звезды, у которых видимым является только один компонент, особенности движения которого свидетельствуют о наличии второго компонента. Оба компонента вращаются вокруг общего центра тяжести, в результате чего спектр видимого компонента периодически сдвигается то в красную, то в синюю стороны в зависимости от того, от нас или к нам движется звезда в данный момент. Если оценки массы невидимого компонента дают значения, превышающие 5 масс Солнца, то с большой вероятностью можно рассматривать его в качестве кандидата в черные дыры. Подтвердить тот факт, что невидимый компонент двойной системы действительно является черной дырой, может обнаружение рентгеновского излучения, возникающего при падении вещества видимого компонента на черную дыру. Именно с наблюдением рентгеновского излучения от спектрально двойных звезд с достаточно массивным невидимым компонентом и были связаны первые попытки обнаружения черных дыр. Основная трудность здесь заключается в том, что рентгеновское излучение поглощается атмосферой. Первоначально рентгеновские датчики помещали на высотные ра-

кеты, но последовательные работы по обнаружению черных дыр начались только с запуском рентгеновских телескопов на орбиту Земли. Наиболее существенные первые результаты принес знаменитый американский спутник «Ухуру» с рентгеновским телескопом на борту, запущенный в 1970 г. с космодрома в Кении. К 1973 г. накопленные результаты позволили с большой вероятностью утверждать, что рентгеновский источник в созвездии Лебедя, так называемый источник Лебедь X-1, является черной дырой. Этот источник рентгеновского излучения — визуально невидимый спутник звезды — так называемого голубого сверхгиганта MDE226868. Орбитальный период системы равен 5,6 дней. Рентгеновское излучение рождается в очень малой области вблизи центра невидимого компонента. Следовательно, размеры источника малы. Оценки массы невидимого компонента дают значение порядка 20 масс Солнца. Это говорит о том, что объект не может быть нейтронной звездой.

С момента открытия объекта Лебедь X-1 прошло много лет. Обнаружено довольно большое число новых рентгеновских источников, которые также с большой вероятностью можно отнести к черным дырам.

Вероятность обнаружения черных дыр нельзя считать стопроцентной, так как по мере усовершенствования техники и методики наблюдений развиваются и различные модели, иначе интерпретирующие результаты наблюдений. Все эти работы породили новые направления исследований: рентгеновскую астрономию, физику плотных (нейтронных) звезд, физику черных дыр, физику нейтронных звезд и черных дыр в двойных звездных системах и др.

Черные дыры позволяют решить давнюю проблему наблюдаемого огромного энерговыделения в квазарах и ядрах галактик, превышающего энерговыделение, которое

могут дать все известные реакции (вплоть до термоядерных). По современным представлениям в квазарах и ядрах многих галактик (включая нашу) находятся сверхмассивные черные дыры. Падение вещества на такую черную дыру и обеспечивает огромное энерговыделение. Наблюдательные данные последних десятилетий подтверждают эту гипотезу. Например, в центре нашей Галактики — Млечном Пути — предполагается наличие черной дыры массой около 4 млн солнечных масс.

Другое направление исследований связано с первичными черными дырами. Это гипотетический тип черной дыры, которая образуется не за счет гравитационного коллапса звезды, а в сверхплотной материи на начальных стадиях эволюции Вселенной. Вследствие квантового испарения черных дыр (см. гл. 7) до настоящего момента могли просуществовать только первичные черные дыры с массой более  $10^{15}$  г. Микроскопические черные дыры также могут, гипотетически, возникать в высокоэнергичных процессах с элементарными частицами. Их масса может быть порядка  $10^{-5}$  г. Для формирования таких черных дыр необходимо сосредоточить массу или энергию в области, не превышающей размеров соответствующего горизонта событий. Последнее, гипотетически, возможно при высокоэнергичных столкновениях элементарных частиц.

## Глава 7

### Физика черных дыр

В последнее время получен ряд новых теоретических результатов, которые помогают более подробно понять, что такое черная дыра, как можно наблюдать этот объект во Вселенной, к каким следствиям для развития Вселенной приводит существование этого объекта как напрямую, так и через непрямые следствия.

#### 7.1. Классификация черных дыр

Свойства черных дыр описываются рядом параметров: массой, угловым моментом, зарядом. Оказалось, что этим величинам можно сопоставить термодинамические характеристики и методом аналогии развить термодинамику черных дыр. Выводы о тепловых свойствах черных дыр основаны на поведении их макроскопических параметров и сформулированы в виде четырех законов термодинамики черных дыр, аналогичных соответствующим классическим законам термодинамики.

В соответствии с классическими результатами моделирования процесса гравитационного сжатия в рамках ОТО коллапсирующее тело с массой, превышающей предел Оппенгеймера – Волкова, становится черной дырой в стационарном состоянии<sup>8</sup> [3]. Далее, множество решений, описы-

---

<sup>8</sup> В 90-е гг. XX в. в ряде работ, например в [1, 2], и ссылках к ним было показано, что существует множество начальных данных, при которых итогом гравитационного коллапса может стать и «голая сингулярность».

вающее стационарную аксиально-симметричную черную дыру, пустое вне горизонта, распадается на отдельные семейства, каждое из которых зависит только от двух параметров: массы  $M$  и углового момента  $J$  [4, 5].

Рассмотрим вращающуюся черную дыру. Для описания этого объекта Рой Керр предложил следующую аксиально-симметричную метрику, которая называется *метрикой Керра*<sup>9</sup>:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g r}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \frac{w}{\rho^2} \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{2r_g r a}{\rho^2} \sin^2 \theta d\phi dt, \quad (7.1)$$

где  $(t, r, \theta, \phi)$  — сферические координаты, а

$$\begin{aligned} r_g &= 2MG, \\ \Delta &= r^2 - r_g r + a^2, \\ \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \\ w &= (r^2 + a^2)\rho^2 + 2r_g r a^2 \sin^2 \theta, \\ J &= Ma. \end{aligned}$$

Метрика Керра содержит два параметра:  $M$  и  $a$ . Параметр  $M$  имеет смысл массы черной дыры, а параметр  $a$  определяет ее момент импульса. При  $a = 0$  метрика Керра переходит в метрику Швацшильда.

Метрика Керра может быть обобщена на случай вращающейся черной дыры, имеющей заряд  $Q$ . В этом случае метрика по-прежнему имеет вид (7.1), а параметры  $\Delta$  и  $w$  равны

$$\begin{aligned} \Delta &= r^2 - r_g r + a^2 + Q^2, \\ w &= (r^2 + a^2 + Q^2)\rho^2 + r_g r a^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

---

<sup>9</sup> Здесь принята система единиц, в которой  $c = 1$ .

Такая метрика называется *метрикой Керра — Ньюмена*. При  $a = 0$  эта метрика переходит в метрику заряженной статической черной дыры, которая называется *метрикой Рейснера — Нордстрема*.

Особый интерес вызывают такие величины, как *площадь горизонта событий* черной дыры  $A$  и ее *поверхностная гравитация*  $\kappa$ <sup>10</sup>.  $A$  и  $\kappa$  аналогичны энтропии и термодинамической температуре соответственно. Продолжая эту аналогию, можно сформулировать законы термодинамики черных дыр, сходные с законами классической термодинамики (конечно, с учетом пределов данной аналогии, которые мы будем каждый раз оговаривать отдельно).

## 7.2. Законы термодинамики черных дыр

Напомним формулировку *нулевого начала термодинамики*: для любой термодинамической системы существует состояние термодинамического равновесия, которого она (при фиксированных внешних условиях) с течением времени самопроизвольно достигает. Далее, состояние термодинамического равновесия — это такое состояние, при котором макроскопические параметры системы не изменяются с течением времени и в системе отсутствуют потоки любого типа. Достигнутое состояние термодинамического равновесия характеризуется макроскопическим параметром, который в дальнейшем будем называть термодинамической температурой. Значение термодинамической температуры одинаково для всех точек равновесной системы. Аналогично был сформулирован *0-й закон термодинамики*.

---

<sup>10</sup> Поверхностной гравитацией тела называется ускорение свободного падения на поверхности данного тела. Она зависит от массы тела и его радиуса как  $\kappa = M/r^2$ .

*ки черных дыр.* Он гласит, что в результате коллапса формируется стационарная черная дыра. Сформировавшуюся черную дыру характеризует ее поверхностная гравитация  $\kappa$ , постоянная по всему горизонту черной дыры<sup>11</sup>.

Формулировка *первого начала термодинамики*: бесконечно малое изменение внутренней энергии  $dE$  происходит за счет того, что система поглощает количество тепла  $\delta Q$ , совершает работу  $\delta W$  и, если число частиц в системе  $N$  не фиксировано, за счет изменения его на величину  $dN$ :

$$dE = \delta Q - \delta W + \mu dN = T \delta S - p dv + \mu dN. \quad (7.2)$$

Аналогичный ему *1-й закон термодинамики черных дыр* формулируется в виде соотношения для изменения массы  $\delta M$  черной дыры: любые два соседних стационарных осе-симметричных решения с материей в виде идеальной жидкости, с круговым током и центральной черной дырой связаны следующим соотношением:

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A + \Omega_H \delta J_H + \int \Omega \delta dJ + \int \bar{\mu} \delta dN + \int \bar{\theta} \delta dS. \quad (7.3)$$

Очевидно, что член  $\kappa/(8\pi)$  здесь аналогичен термодинамической температуре так же, как  $A$  аналогично энтропии. Следует подчеркнуть, что  $\kappa/(8\pi)$  и  $A$  отличны от самих температуры и энтропии черной дыры.

Вывод формулы (7.3) изложен в [3], однако позднее Дон Пейдж предложил несколько другой вид этого выражения [7]:

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A + \Omega \delta J + \Phi \delta Q, \quad (7.4)$$

---

<sup>11</sup> Доказательство этого утверждения достаточно громоздко, желающие могут его найти в [5, 6].

благодаря которому аналогия формулы для массы с (7.2) еще более очевидна. Здесь  $\Omega$  — угловая скорость, а  $\Phi$  — полевой потенциал.

Существуют несколько формулировок для второго начала термодинамики. Однако кажется нецелесообразным проводить аналогию для *2-го закона термодинамики черных дыр* с формулировками второго начала термодинамики в случае неравновесных процессов, так как сейчас мы не рассматриваем нестационарные черные дыры. Поэтому ограничимся формулировкой Клаузиуса для второго начала термодинамики: для любой равновесной (квазиравновесной) термодинамической системы существует однозначная функция термодинамического состояния  $S = S(\theta, x, N)$ , называемая энтропией, такая, что ее полный дифференциал  $dS$  связан с изменением количества теплоты  $\delta Q$  соотношением

$$dS = \frac{\delta Q}{\theta}. \quad (7.5)$$

Начнем с наиболее очевидной аналогии: площадь поверхности горизонта событий черной дыры  $A$  не может уменьшаться со временем, т. е.  $\delta A \geq 0$ . Если две черные дыры соединяются, площадь конечного горизонта событий будет больше, чем сумма исходных горизонтов, т. е.  $A_3 > A_1 + A_2$ . Это выражение устанавливает аналогию между площадью горизонта событий и энтропией. При этом в термодинамике можно передавать энтропию от одной системы к другой. При этом общая энтропия не должна уменьшаться. Однако нельзя передать площадь от одной черной дыры к другой, поскольку черная дыра не может раздвоиться [8, 6, 9]. Таким образом, 2-й закон термодинамики черных дыр требует, чтобы площадь горизонта каждой черной дыры в отдельности не уменьшалась. Этот закон но-

сит также название *теоремы площадей Хокинга* [10], а ее обобщенная формулировка будет обсуждаться далее.

Для третьего начала термодинамики также существует несколько формулировок. Они отображают разные подходы к одному и тому же вопросу. Однако *3-й закон термодинамики черных дыр* аналогичен именно тепловой теореме Нернста (1906): всякий термодинамический процесс, протекающий при фиксированной температуре  $\theta$ , сколь угодно близкой к нулю,  $\theta < \theta_0 \rightarrow 0$ , не должен сопровождаться изменением энтропии  $S$ , т. е. изотерма  $\theta = 0$  должна совпадать с предельной адиабатой  $S = 0$ . Следствием тепловой теоремы Нернста является факт недостижимости абсолютного нуля температур посредством конечного числа операций. Поэтому *3-й закон термодинамики черных дыр* гласит, что никаким способом, при любой степени идеализации, невозможно уменьшить  $\kappa$  до нуля посредством конечного числа операций. Этот закон отличается от других тем, что не имеет (по крайней мере, на данный момент) строгого математического обоснования. Однако существуют веские причины полагать именно так. Например, если попробовать уменьшить значение  $\kappa$  керровской черной дыры до нуля, бросая частицы с целью увеличить угловой момент, то окажется, что уменьшение  $\kappa$ , приходящееся на каждую отдельную частицу, брошенную в черную дыру, становится все меньше и меньше, в то время как масса и угловой момент стремятся к критическому соотношению  $J/M^2 = 0,998$ , для которого  $\kappa = 0$ . Пока существуют идеальные процессы аккреции, для которых  $J/M^2 \rightarrow 1$  с добавлением конечной величины массы покая [11, 12], они требуют возможности делить материю на сколь угодно мелкие частицы и бесконечное время. Другой довод, позволяющий убедиться в справедливости 3-го закона, состоит в том, что если можно уменьшить до нуля  $\kappa$

с помощью конечной последовательности операций, то появится «голая сингулярность» (т. е. сингулярность, не закрытая горизонтом). Если бы это произошло, предположение об асимптотической предсказуемости (на котором основываются многие результаты теории черных дыр, включая закон неуменьшения  $A$ ) будет нарушено. Заметим, что формулировка 3-го закона термодинамики черных дыр, аналогичная формулировке Планка для третьего начала термодинамики, отсутствует.

### 7.3. Испарение черных дыр

Поскольку четыре закона термодинамики черных дыр аналогичны четырем началам классической термодинамики (если постулировать соответствие между температурой  $T$  и поверхностной гравитацией черной дыры  $\kappa$ ; между энтропией  $S$  и площадью черной дыры  $A$ ; принять, что  $T = \epsilon\kappa$  и  $S = \eta A$ ; положить  $8\pi\epsilon\kappa = 1$ ), то из члена  $\kappa\delta A(8\pi)$  в выражении для 1-го закона термодинамики черных дыр (7.4) можно непосредственной заменой получить член  $T\delta S$  из выражения (7.2) для первого начала термодинамики [7].

Чтобы 1-й закон термодинамики черных дыр был эквивалентен первому закону термодинамики, логично предположить, что черная дыра имеет температуру  $T$ , соответствующую ненулевой величине поверхностной гравитации  $\kappa$ . Долгое время считалось, что эффективная температура черной дыры равна абсолютному нулю [3]. Одним из способов убедиться в этом считался такой аргумент: черная дыра не может находиться в равновесии с излучением абсолютно черного тела ненулевой температуры, потому что частицы должны всегда пересекать горизонт событий черной дыры извне, но никакое излучение не может быть испущено из черной дыры. Если длина волны излу-

чения слишком велика по отношению к низкой температуре черной дыры, темп поглощения излучения будет очень низким, однако настоящее равновесие станет возможным, только если не будет никакого излучения извне. Другим аргументом в пользу того, что эффективная температура черной дыры равна нулю, было соображение о том, что эффективная температура любой материи после преобразования красного смещения,  $\bar{\theta}$ , вращающейся вокруг черной дыры, должна стремиться к нулю по мере приближения к горизонту. Тот факт, что эффективная температура черной дыры равна нулю, означает, что, в принципе, можно увеличить энтропию черной дыры так, чтобы в ней самой не произошло никаких изменений. В этом смысле черная дыра нарушает второй закон термодинамики. Кроме того, считалось, что аналогично эффективной температуре  $\bar{\theta}$  эффективный химический потенциал  $\bar{\mu}$  стремится к нулю на горизонте, что означает, что, в принципе, можно также присоединять к черной дыре частицы, не изменяя ее. В результате получалось, что черная дыра нарушает закон сохранения барионного заряда.

Впервые возможность существования излучения, идущего от черной дыры, предсказал Зельдович [13, 14]. Он обратил внимание на то, что вращающаяся черная дыра будет усиливать падающие волны определенных частот, и, таким образом, должен существовать эффект, аналогичный квантовому эффекту спонтанного излучения энергии и углового момента. Позднее Мизнер [15] и Старобинский [16] подтвердили факт усиления черными дырами Керра скалярных волн в режиме *суперрадиации* (т. е. в случае, когда скорость волнового фронта ниже скорости волны), а Бекенштейн [17] показал, что подобное усиление должно иметь место для всех видов волн с положительной плотностью энергии.

Еще до того, как были сформулированы четыре закона термодинамики черных дыр, Бекенштейн предположил [18, 19, 20, 21], что черная дыра обладает энтропией  $S$ , выражающейся через площадь ее горизонта  $A$  с помощью численного коэффициента  $\eta$ . Ему не удалось определить величину  $\eta$  точно, но, исходя из остальных аргументов, он предположил, что она равна  $(\ln 2)/(8\pi)$  (в планковских единицах измерения, когда  $\hbar = c = G = k = 4\pi\epsilon_0 = 1$ ). Из этого следовало, что  $\epsilon = 1/(\ln 2)$ , а  $T = \kappa/(\ln 2)$ . Однако, как уже говорилось выше, эффективная температура черной дыры считалась равной нулю. Поскольку 0-й закон термодинамики черных дыр запрещает величине  $\kappa$  принимать нулевое значение, то предположение Бекенштейна оказывалось несостоятельным при любой конечной величине  $\eta$ .

С помощью метода аналогий Хокинг сделал вывод, что черные дыры не являются «абсолютно черными», а, напротив, испускают излучение [22, 23], и предположил, что излучение черной дыры имеет тепловой спектр. Это сделало состоятельной идею Бекенштейна о том, что конечная величина энтропии черной дыры пропорциональна ее площади, но не оценку Бекенштейна для значения  $\eta$ . Хокинг пришел к выводу, что температура черной дыры  $T = \kappa/(2\pi)$ , так что  $\epsilon = 1/(2\pi)$ , а следовательно,  $\eta = 1/4$ . Таким образом, получается известная формула Бекенштейна — Хокинга для энтропии черной дыры:

$$S_{bh} = S_{BH} = \frac{1}{4} A, \quad (7.6)$$

где индекс  $bh$  означает *black hole*, а индекс  $BH$  — Bekenstein — Hawking.

Как уже указывалось выше, первое предсказание существования излучения от черной дыры сделал еще Зель-

дович [13, 14]. Доводом в пользу этого спонтанного излучения было то, что в квантовой механике усиление волн — это вынужденное излучение квантов, так что при отсутствии приходящих квантов можно получить спонтанное излучение. Используя отношение коэффициентов Эйнштейна для спонтанного и вынужденного излучения, можно получить значение частоты спонтанного излучения из коэффициента усиления, по крайней мере когда вероятность спонтанного излучения много меньше единицы<sup>12</sup>.

Для метрики Керра, в которую добавлен еще и заряд (аналогично переходу от метрики Керра к метрике Рейснера — Нордстрема, в этом случае она является максимально общим случаем асимптотически плоской стационарной черной дыры в теории Эйнштейна — Максвелла), можно получить точные выражения для площади поверхности горизонта  $A$ , поверхностной гравитации  $\kappa$ , угловой скорости  $\Omega$  и электростатического потенциала  $\Phi$  черной дыры в терминах макроскопических сохраняющихся величин  $M$ , углового момента  $J \equiv Ma \equiv M^2 a_*$  и заряда  $Q \equiv MQ_*$  черной дыры, используя значение  $r_+$  радиальной координаты  $r$  на горизонте событий в качестве осевого параметра [7]:

$$\begin{aligned}
 r_+ &= M + (M^2 - a^2 - Q^2)^{1/2} = M[1 + (1 - a_*^2 - Q_*^2)^{1/2}], \\
 A &= 4\pi(r_+^2 + a^2) = 4\pi M^2[2 - Q_*^2 + 2(1 - a_*^2 - Q_*^2)^{1/2}], \\
 \kappa &= 4\pi \frac{r_+ - M}{A} = \frac{1}{2}M^{-1}[1 + (1 - \frac{1}{2}Q_*^2)(1 - a_*^2 - Q_*^2)^{-1/2}]^{-1}, \\
 \Omega &= 4\pi \frac{a}{A} = a_* M^{-1}[2 - Q_*^2 + 2(1 - a_*^2 - Q_*^2)^{1/2}]^{-1}, \\
 \Phi &= 4\pi \frac{Qr_+}{A} = \frac{Q_* (1 + (1 - a_*^2 - Q_*^2)^{1/2})}{2 - Q_*^2 + 2(1 - a_*^2 - Q_*^2)^{1/2}}.
 \end{aligned}
 \tag{7.7}$$

---

<sup>12</sup> Подробнее об эффекте суперрадиации см. в работе [24].

Здесь  $a_* = a/M = J/M^2$  и  $Q_* = Q/M$  — безразмерные угловой момент и заряд, выраженные в геометрических величинах ( $G = c = k = 4\pi\epsilon_0 = 1$ , но  $\hbar \neq 1$ , так что масса, время, длина и заряд имеют одинаковую размерность, угловой момент имеет размерность массы или квадрата длины). Для невращающейся незаряженной стационарной черной дыры  $a_* = Q_* = 0$ , так что  $r_+ = 2M$ ,  $A = 16\pi M^2$ ,  $\kappa = M/r_+^2 = 1/(4M)$ ,  $\Omega = 0$  и  $\Phi = 0$ . Расчеты Хокинга для излучения черной дыры в свободных полях дают ожидаемое число частиц  $j$ -го вида с зарядом  $q_j$ , излученных в волновой моде, характеризующейся частотой или энергией  $\omega$ , сферической гармоникой  $l$ , аксиальным квантовым числом или угловым моментом  $m$  и поляризацией или кручением  $p$ :

$$N_{j\omega lmp} = \Gamma_{j\omega lmp} [\exp[2\pi\kappa^{-1}(\omega - m\Omega - q_j\Phi)] \mp 1]^{-1}. \quad (7.8)$$

Здесь знак « $-$ » соответствует бозонам, знак « $+$ » — фермионам, а  $\Gamma_{j\omega lmp}$  — вероятность поглощения приходящей волны выбранной моды. Таким образом,  $0 \leq \Gamma_{j\omega lmp} \leq 1$  для фермионов,  $\Gamma_{j\omega lmp} \leq 1$  для бозонов, причем для них  $\Gamma_{j\omega lmp}$  может быть отрицательно.

Тем не менее  $\Gamma_{j\omega lmp}$  неотрицательна, так как тепловой коэффициент также отрицателен для бозонных мод суперрадиации.  $N_{j\omega lmp}$  не расходится, несмотря на расходимость коэффициента для бозонов, когда  $(\omega - m\Omega - q_j\Phi \rightarrow 0)$ , поскольку  $\Gamma_{j\omega lmp}$  также стремится к нулю линейно с  $(\omega - m\Omega - q_j\Phi)$ , и, таким образом,  $N_{j\omega lmp}$  остается конечной величиной. Тогда можно соединить  $\Gamma_{j\omega lmp} \leq 1$  с уравнением (7.8) и получить двойное неравенство

$$\mp N_{j\omega lmp} \leq \Gamma_{j\omega lmp} \leq 1. \quad (7.9)$$

Без учета обратного влияния метрики на гравитацию матрица рассеяния является произведением матриц тепловой плотности для каждого вида частиц с их частотой,

угловым моментом и зарядом. Эти матрицы являются диагональными:

$$P_n = N^n(1 \pm N)^{-n \mp 1}, \quad (7.10)$$

где для краткости опущены индексы, характеризующие ожидаемое число частиц в моде  $N_{j\omega l m p}$ . Здесь  $n$  может быть любым неотрицательным целым числом для бозонов (верхний знак), но оно обязано быть равно 0 или 1 для фермионов (нижний знак). Энтропия фон Неймана для каждой моды имеет вид

$$\delta S_{rad} = - \sum_n P_n \ln P_n = (N \pm 1) \ln (1 \pm N) - N \ln N. \quad (7.11)$$

Поскольку ожидаемые потери энергии, углового момента и заряда черной дыры на излучение  $N$  частиц равны  $N\omega$ ,  $Nm$  и  $Nq_j$  соответственно, изменение в состоянии энтропии черной дыры можно записать следующим образом:

$$\delta S_{bh} = -N [2\pi\kappa^{-1}(\omega - m\Omega - q_j\Phi)] = -N \ln \left( \frac{\Gamma \pm N}{N} \right), \quad (7.12)$$

где индексы, обозначающие (характеризующие) моду, опущены не только в  $N_{j\omega l m p}$ , но и в  $\Gamma_{j\omega l m p}$ . Общее ожидаемое изменение энтропии в окрестностях черной дыры из излучения частиц данного типа выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta S_{rad} + \delta S_{bh} = \\ &= \pm \ln (1 \pm N) + N \ln \left( 1 + \frac{1 - \Gamma}{\Gamma \pm N} \right) \geq \pm \ln (1 \pm N) \geq 0, \end{aligned} \quad (7.13)$$

где правое неравенство в отсутствии излучения ( $N = 0$ ) становится равенством. Таким образом, излучение Хокинга, исходящее из черной дыры в пустое пространство, подчиняется 2-му закону термодинамики, т. е. все виды излучаемых частиц дают вклад в энтропию. Это происходит потому, что излучение черной дыры с  $T_{\text{bh}} > 0$  в пустое пространство с  $T = 0$  является неравновесным процессом.

Поскольку ожидаемое число частиц  $N \equiv N_{j\omega lmp}$  зависит не только от коэффициента Планка, но также и от фактора  $\Gamma_{j\omega lmp}$ , эффективная температура  $T_{j\omega lmp}$  получается разной для разных видов излучаемых частиц и может быть определена с помощью коэффициента Больцмана:

$$\frac{P_1}{P_0} \equiv e^{-\omega/T_{j\omega lmp}}. \quad (7.14)$$

Поскольку  $P_1/P_0 = N/(1 \pm N)$ ,

$$T_{j\omega lmp} = \omega / \ln \left( \frac{1 \pm N_{j\omega lmp}}{N_{j\omega lmp}} \right). \quad (7.15)$$

Когда  $m\Omega + q_j\Phi = 0$  (в случае метрики Шварцшильда, при этом коэффициент Планка становится равным  $1/(e^{2\pi\omega/\kappa} \mp 1)$ ) и когда  $\Gamma_{j\omega lmp} = 1$ , т. е. падающая волна полностью поглощается черной дырой,  $T_{j\omega lmp} = T_{\text{bh}} = \kappa/(2\pi)$ . Последняя величина получила название *температура черной дыры*. В более общем случае эффективная температура  $T_{j\omega lmp}$  зависит от типа испускаемых частиц. Имея среднее число частиц  $N_{j\omega lmp}$  и их энтропию  $S_{j\omega lmp}$ , можно для получения общего закона изменения энергии, углового момента, заряда и энтропии

просуммировать все типы частиц:

$$\frac{dE_{rad}}{dt} = -\frac{dM}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j,l,m,p} \int \omega N_{j\omega lmp} d\omega, \quad (7.16)$$

$$\frac{dJ_{rad}}{dt} = -\frac{dJ}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j,l,m,p} \int m N_{j\omega lmp} d\omega, \quad (7.17)$$

$$\frac{dQ_{rad}}{dt} = -\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j,l,m,p} \int q_j N_{j\omega lmp} d\omega, \quad (7.18)$$

$$\frac{dS_{rad}}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j,l,m,p} \int S_{j\omega lmp} d\omega. \quad (7.19)$$

Здесь  $M$ ,  $J$  и  $Q$  (без индексов) обозначают энергию, угловой момент и заряд черной дыры. Таким образом, энтропия черной дыры меняется со скоростью

$$\frac{dS_{bh}}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j,l,m,p} \int [2\pi\kappa^{-1}(\omega - m\Omega - q_j\Phi)] N_{j\omega lmp} d\omega. \quad (7.20)$$

Используя (7.8) (как и при выводе (7.3)), можно показать, что общая энтропия  $S = S_{bh} + S_{rad}$  (черной дыры и излучения) изменяется со скоростью

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j,l,m,p} \int d\omega [\pm \ln(1 \pm N_{j\omega lmp}) + \\ + N_{j\omega lmp} \ln \left( 1 + \frac{1 - \Gamma_{j\omega lmp}}{\Gamma_{j\omega lmp} \pm N_{j\omega lmp}} \right)]. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Заметим, что масса исходящих частиц много меньше массы самого излучающего объекта. Соответственно скорость

потери массы (испарения) обратно пропорциональна квадрату массы:

$$-\frac{dM}{dt} = 4 \cdot 10^{-5} \left( \frac{m_{Pl}}{M} \right)^2 \frac{m_{Pl}}{t_{Pl}} f, \quad (7.22)$$

где  $f$  — функция, описывающая количество степеней свободы частиц со спинами 1/2, 1 и 2 соответственно [24]:

$$f = 1,023n_{1/2} + 0,420n_1 + 0,048n_2.$$

Для излучения  $n_s$  видов дважды поляризованных безмассовых частиц со спином  $s$  шварцшильдовой черной дырой (невращающейся и незаряженной) в пустое пространство, численные расчеты [25, 26, 27] дают результат

$$\frac{dE_{rad}}{dt} = 10^{-5} M^{-2} (8,1830n_{1/2} + 3,3638n_1 + 0,3836n_2), \quad (7.23)$$

$$\frac{dS_{rad}}{dt} = 10^{-3} M^{-1} (3,3710n_{1/2} + 1,2684n_1 + 0,1300n_2), \quad (7.24)$$

$$\frac{dS_{bh}}{dt} = -10^{-3} M^{-1} (2,0566n_{1/2} + 0,8454n_1 + 0,0964n_2). \quad (7.25)$$

Как следует из выражения (7.23), скорость испарения черной дыры обратно пропорциональна квадрату ее массы, т. е. для массивных черных дыр (астрономических масс) потеря массы за счет излучения пренебрежимо мала, однако для черных дыр малой массы (первичные черные дыры планковских масс) эффекты, связанные с испарением, становятся существенными. Проинтегрировав выражение для скорости испарения черной дыры, получим явную

зависимость ее массы от времени. Таким образом, можно удостовериться, что за время существования нашей Вселенной, т. е. приблизительно 13—17 млрд лет, черные дыры с массой  $10^{15}$  г и меньше должны были испариться полностью.

#### 7.4. Информационный парадокс

По мере того, как масса черной дыры уменьшается, также уменьшается и площадь горизонта событий, нарушая, таким образом, 2-й закон термодинамики черных дыр, в соответствии с которым площадь  $A$  не может уменьшаться. Это вызвано отрицательным потоком энергии, т. е. потоком, направленным внутрь черной дыры через горизонт, который уравнивает положительный поток энергии, излученной на бесконечность. Этот отрицательный поток можно представить следующим образом. Вне горизонта событий существует пара виртуальных частиц: одна — с отрицательной энергией, другая — с положительной. Отрицательная частица может туннелировать (квантово-механический эффект) сквозь горизонт внутрь черной дыры. В этой области частица существует как реальная. Другая частица пары, имея положительную энергию, уйдет на бесконечность, где станет частью теплового излучения. Вероятность для частицы с отрицательной энергией туннелировать сквозь горизонт определяется величиной поверхностной гравитации  $\kappa$ .

Бекенштейном предложена обобщенная формулировка 2-го закона: энтропия и некоторая обобщенная величина  $A$  никогда не уменьшаются [18, 19, 20, 21]. Без испарения эта обобщенная формулировка будет нарушена, например, в случае, когда черная дыра погружена в излучение с температурой меньшей, чем у черной дыры. С другой стороны,

если принять, что черная дыра излучает частицы с постоянной скоростью, отождествление  $\kappa/2\pi$  с температурой и  $A/4$  с энтропией произойдет и обобщенная формулировка будет корректна. Впервые Бекенштейн сделал предположение, что общая энтропия черной дыры и окружающего пространства не уменьшается, когда предложил идею, что черная дыра имеет конечную энтропию, пропорциональную площади поверхности ее горизонта.

Итак, за некоторыми исключениями все доказательства обобщенного 2-го закона имеют два общих ключевых допущения.

Первое из них заключается в том, что черная дыра считается квазистационарной и очень медленно меняющей свое состояние в процессе взаимодействия с окружающей средой. Выдвинутое предположение [28], что 2-й закон также выполняется (при использовании формулы Бекенштейна – Хокинга для энтропии черной дыры  $A/4$ ) даже для быстрых изменений черной дыры, не было доказано строго. Даже чтобы точно сформулировать это предположение, потребуется строго определить понятие энтропии окружающего пространства, что весьма затруднительно в квантовой теории поля.

Согласно второму допущению выполняется квазиклассическое приближение, т. е. черная дыра описывается квазиклассической метрикой, которая реагирует только на некоторое усредненное или ожидаемое значение квантового тензора энергии-импульса. Это позволяет энтропии черной дыры быть равной величине  $A/4$ , где  $A$  — площадь ее классического горизонта. Данное приближение также подразумевает, что излучение от черной дыры в основном тепловое, с пренебрежимо малыми корреляциями между частицами, излученными раньше и позже, так что можно использовать энтропию фон Неймана  $S_{rad} = -Sp(\rho \ln \rho)$  в

качестве энтропии излучения и все же получить, что эта энтропия в сумме с  $A/4$  продолжает увеличиваться в случае черной дыры.

Если информация в самом деле теряется в черной дыре, как предположил Хокинг [29], и если в излучении Хокинга действительно присутствуют незначительные корреляции между излучением, испущенным раньше и позже, тогда корректно регуляризованная величина  $A/4 - Sp(\rho \ln \rho)$  не будет убывать. Но если это предположение о потере информации было неверно, очень может быть, что информация не теряется навсегда в черной дыре, а возвращается в виде излучения.

Еще до открытия возможности испарения черной дыры Бекенштейн [20, 21] понимал, что 2-й закон может быть нарушен, если объект, обладающий энтропией, будет значительно приближен к черной дыре, а затем брошен в нее с такой малой энергией, что увеличение энтропии черной дыры не будет уравнивать потерю энтропии объекта. Чтобы избежать этого нарушения, Бекенштейн предположил, что существует предел того, насколько близко к черной дыре может быть приближен объект с фиксированной энтропией и локальной энергией. Это привело его к выводу [30], что энтропия  $S$  системы с энергией  $E$  и линейным размером  $R$  ограничена следующим образом:

$$S \leq S_B(E, R) \equiv 2\pi ER. \quad (7.26)$$

При развитии этого предположения [31]—[41] основная сложность заключалась в том, как дать точные определения для системы и величин  $S$ ,  $E$  и  $R$ , чтобы избежать дальнейших противоречий.

Считаем необходимым обратить внимание читателя, что в работе [42] Хокинг отказался от предположения о том, что информация полностью исчезает в черной ды-

ре. Во-первых, из-за предположения об унитарности квантовой гравитации информация не должна исчезать при формировании и испарении черной дыры. Во-вторых, изучен вопрос, каким образом информацию можно извлечь из черной дыры. Для этого рассмотрено, как излучение может «туннелировать» из черной дыры во внешний мир. По мнению Хокинга, предположение, что это излучение может вынести информацию наружу из черной дыры, необоснованно. Для иллюстрации он сравнивает информацию о предмете, который упал в черную дыру, со сожженной энциклопедией: вся информация, содержащаяся в ней, осталась в пепле и дыме и никуда оттуда не делась, но прочесть некогда написанное на страницах этой энциклопедии, мягко говоря, затруднительно. Так же и информация о предмете, упавшем в черную дыру, не пропадает, но дешифровать ее не представляется возможным. Это значит, что из излучения, испущенного черной дырой, нельзя вновь собрать предмет, который был ею поглощен. Однако сам тот факт, что информация сохраняется, важен при рассмотрении макроскопических процессов с участием виртуальных черных дыр. Хокинг также пишет, что, поскольку информация сохраняется, сделанное им вначале предположение, что черная дыра может быть местом, где от нашей Вселенной ответвляется другая вселенная, неверно.

## Глава 8

### Космология

Космология — это наука о строении и эволюции Вселенной как целого, которая изучает физическую реальность на самых больших пространственных и временных масштабах ее существования. Определяющую роль на таких масштабах играет гравитация. Поэтому современная космология, кроме наблюдательных фактов, базируется еще на ОТО как теории тяготения.

Первые применения ОТО к описанию Вселенной были выполнены Альбертом Эйнштейном и советским ученым Александром Фридманом. Именно последний на основе ОТО получил в 1922 г. уравнения, описывающие эволюцию Вселенной и исследовал их решения. Его работы вместе с гипотезой Георгия Гамова о горячей Вселенной долгие годы служили теоретическим базисом космологии. Наблюдательной основой космологии являлись прежде всего открытый Эдвином Хабблом в 1929 г. закон разбегания галактик<sup>13</sup> и обнаруженное в 1965 г. реликтовое излучение<sup>14</sup>.

---

<sup>13</sup> Закон Хаббла (закон всеобщего разбегания галактик) — эмпирический закон, связывающий скорость удаления галактик  $v$  и расстояние до них  $l$  линейным образом:  $v = Hl$ , где  $H$  — коэффициент пропорциональности, называемый *постоянной Хаббла*.

<sup>14</sup> Реликтовое излучение — космическое микроволновое фоновое излучение (*cosmic microwave background radiation*) — космическое электромагнитное излучение с высокой степенью изотропности и со спектром, характерным для абсолютно черного тела с температурой примерно 2,725 К. Реликтовое излучение равномерно заполняет Вселенную и сохранилось с начальных этапов ее существования. Экспериментально его наличие было подтверждено в 1965 г.

Последние годы ознаменовались существенно новым этапом космологических исследований, который вызван совершенствованием наблюдательной техники и методов наблюдений, что позволило обнаружить новые свойства и закономерности, присущие Вселенной. Теоретические исследования, в свою очередь, привели к новым представлениям о развитии Вселенной, особенно на ранних этапах ее существования. Именно эта совокупность наблюдений и теоретических исследований позволила говорить о таких субстанциях, как «темная материя» и «темная энергия». Можно сказать, что мы являемся в настоящее время свидетелями становления новой науки о Вселенной.

В этой главе мы остановимся сначала на основных наблюдательных фактах, лежащих в основе космологии. Затем сформулируем основанную на ОТО теорию нестационарной Вселенной. Далее мы приведем недавние наблюдательные факты о строении и эволюции Вселенной и опишем теоретические представления, лежащие в основе современной космологии.

## 8.1. Наблюдательные основы космологии

В основе современной космологии лежит ряд наблюдательных фактов, определяющих ее структуру и развитие. Это расширение Вселенной, ускорение расширения, реликтовое излучение и его анизотропия, крупномасштабная структура Вселенной, распространенность легких химических элементов, гравитационное линзирование. Остановимся на них подробнее.

**1. Реликтовое излучение.** В середине 60-х гг. XX в. наши представления о Вселенной претерпели решительные изменения в связи с открытием реликтового излучения. Это открытие подтвердило идею о горячей ранней

Вселенной, высказанную Г. Гамовым в 40-х гг. XX в., которая легла в основу теории Большого взрыва. Измерение температуры реликтового излучения, выполненное космическим аппаратом COBE<sup>15</sup>, дает значение 2,725 К [43]. Реликтовое излучение обладает большой изотропией, т. е. после учета поправок за счет движения наблюдателя (вращение Земли вокруг Солнца, вращение Солнца вокруг центра Галактики и движение самой Галактики) его температура, измеренная в различных участках неба с высокой степенью точности, одинакова. Из теории следует, что небольшая анизотропия все-таки должна существовать, так как вещество распределено равномерно только в масштабах порядка 1 млрд световых лет. Неоднородности, связанные с образованием скоплений и сверхскоплений галактик, не могли не отразиться на реликтовом излучении. Данные Реликт-1, COBE и WMAP<sup>16</sup> показали наличие такой анизотропии [44].

**2. Ускоренное расширение Вселенной.** На основании проведенных в конце 1990-х гг. наблюдений сверхновых звезд типа Ia был сделан вывод, что *расширение Вселенной ускоряется со временем*. Затем эти наблюдения были подкреплены другими источниками: измерениями реликтового излучения, гравитационного линзирования, оценками из теории нуклеосинтеза. По закону Хаббла, расстояния до других галактик определяются измерением их красного смещения. Существует и другой способ определения расстояния — по сверхновым типа Ia<sup>17</sup>. Бы-

---

<sup>15</sup> Первые результаты были получены советским аппаратом «Реликт».

<sup>16</sup> WMAP — Wilkinson Microwave Anisotropy Probe; COBE — Cosmic Background Explorer.

<sup>17</sup> Для определения расстояния в астрономии применяются «стандартные свечи», т. е. объекты, светимость которых известна. Лучшим типом стандартной свечи для космологических наблюдений яв-

ло обнаружено, что в удаленных галактиках, расстояние до которых было определено по закону Хаббла, сверхновые типа Ia имеют яркость ниже той, которая им полагается. Иными словами, расстояние до этих галактик, вычисленное по методу стандартных свеч, оказывается больше расстояния, вычисленного на основании ранее установленного значения параметра Хаббла. Таким образом, Вселенная не просто расширяется, а расширяется с ускорением. Это открытие в 2011 г. было отмечено Нобелевской премией по физике. Ранее существовавшие космологические модели предполагали, что расширение Вселенной замедляется. Они исходили из предположения, что основную часть массы Вселенной составляет материя — как видимая, так и невидимая (темная материя). На основании новых данных, свидетельствующих об ускорении расширения, астрономы предположили существование неизвестного вида энергии с отрицательным давлением. Эта энергия распределена во Вселенной, что и приводит к гравитационному отталкиванию. Такую энергию назвали *темной энергией*. Существует несколько вариантов объяснения сущности темной энергии: темная энергия есть космологическая константа (т. е. постулируется ненулевая энергия вакуума); темная энергия есть некая квинтэссенция — динамическое поле, энергетическая плотность которого может меняться в пространстве и времени. Окончательный выбор между двумя вариантами требует высоко-

---

ляются сверхновые звезды типа Ia. Они обладают очень высокой яркостью и вспыхивают только тогда, когда масса белого карлика достигает предела Чандрасекара, значение которого известно с высокой точностью. Следовательно, все вспыхивающие сверхновые типа Ia, находящиеся на одинаковом расстоянии, должны иметь почти одинаковую наблюдаемую яркость. Сравнивая наблюдаемую яркость сверхновых в разных галактиках, можно определить расстояния до этих галактик.

точных измерений скорости расширения Вселенной, чтобы понять, как эта скорость изменяется со временем.

**3. Темная материя.** Еще одним наблюдательным фактом, определяющим развитие современной космологии, является проблема скрытой массы — предположительно ненаблюдаемого и взаимодействующего только посредством гравитации вещества. К этой идее привел ряд астрономических наблюдений. Дифференциальные скорости вращения галактик (т. е. зависимость скорости вращения галактических объектов от расстояния до центра галактики) определяются распределением массы в данной галактике и для сферического объема с радиусом  $r$ , в котором заключена масса  $M(r)$ , задаются соотношением [45]

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}, \quad (8.1)$$

т. е. за пределами объема  $M(r)$ , в котором сосредоточена основная масса галактики, скорость вращения  $v(r) \approx r^{-1/2}$ . Однако при удалении от наблюдаемого оптического диска галактики отдельные звезды не показывают такой зависимости для скорости. Для многих спиральных галактик скорость  $v(r)$  остается почти постоянной на весьма значительном удалении от центра (20—25 кпк), при том что плотность наблюдаемой материи быстро убывает к их периферии (рис. 8.1). Таким образом, для объяснения наблюдаемых значений наиболее естественным будет допустить существование ненаблюдаемой (не светящейся) материи, простирающейся на расстояния, превышающие в десятки раз видимые границы галактик, и с массой, на порядок выше совокупной массы наблюдаемой светящейся материи галактики. Другое объяснение состоит в модификации закона Ньютона на галактических масштабах, которое предсказывает ряд современных расширенных теорий гравитации.

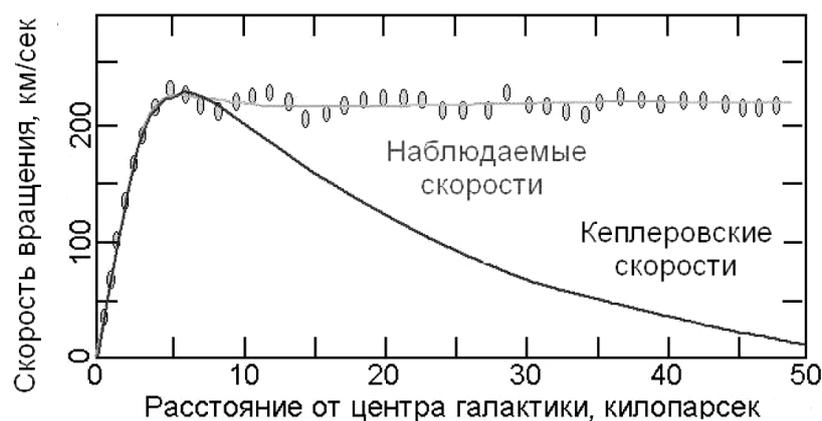


Рис. 8.1. Кривые дифференциального вращения галактик: отклонение от кеплеровского закона вращения объясняется, предположительно, наличием скрытой массы

В 1937 г. Фриц Цвикки опубликовал работу [46], в которой получил парадоксальный результат: наблюдаемая масса скопления галактик (полученная по суммарным светимостям галактик и их красному смещению) оказалась значительно ниже массы скопления, рассчитанной исходя из собственных скоростей членов скопления (полученных по дисперсии красного смещения) в соответствии с теоремой о вириале: суммарная наблюдаемая масса скопления оказалась в 500 раз ниже расчетной. Такая масса недостаточна, чтобы удерживать составляющие скопления галактики от «разлетания». С развитием рентгеновской астрономии в скоплениях галактик было обнаружено рентгеновское излучение горячего (разогретого до температур порядка  $10^6$  К) газа, заполняющего межгалактическую среду, этот газ составляет часть скрытой массы таких скоп-

лений. Однако суммарная наблюдаемая масса такого газа недостаточна ни для удержания галактик, ни для удержания самого газа в скоплениях. Таким образом, большой набор наблюдательных данных указывает не только на наличие во Вселенной темной материи, но также и на то, что она преобладает над обычной материей (рис. 8.2).

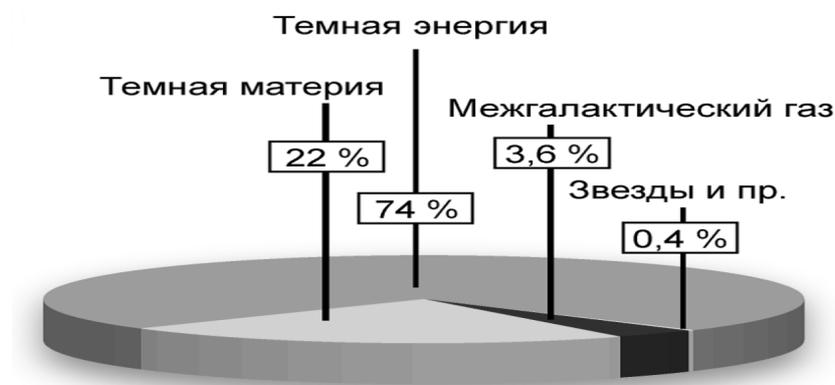


Рис. 8.2. Распределение типов материи во Вселенной

По результатам экспериментов WMAP, SDSS, 2dFGRS<sup>18</sup> с высокой точностью определены основные космологические параметры. Комбинация данных этих экспериментов хорошо объясняется простой моделью геометрически плоской Вселенной Фридмана — Робертсона — Уокера с космологической постоянной, где постоянная Хаббла имеет значение  $H_0 = 70,2 \pm 0,4 \text{ км/с/Мпк}$ , возраст Вселенной оценивается в  $13,76 \pm 0,11 \times 10^9$  лет,

<sup>18</sup> SDSS — Sloan Digital Sky Survey; 2dFGRS — Two-degree-Field Galaxy Redshift Survey.

кривизна пространства-времени лежит в интервале  $[-0,0133, 0,0084]$  [44]. Считается, что барионная материя, заполняющая Вселенную, является «пылевой» ( $p = 0$ ). Такая модель носит название  $\Lambda$ CDM<sup>19</sup>.

#### **4. Крупномасштабная структура Вселенной.**

Другим наблюдательным фактом, лежащим в фундаменте современной космологии, являются данные о крупномасштабной структуре Вселенной (рис. 8.3). Речь идет о сверхскоплениях галактик. Вселенная однородна и изотропна на очень больших масштабах. Переход от неравномерного распределения вещества к однородному происходит начиная с масштаба примерно 200 Мпк (в работах некоторых авторов до 1000 Мпк). В меньших масштабах Вселенная обладает значительной неоднородностью. Согласно данным обзоров (таких, как SDSS и 2MASS<sup>20</sup>) распределение объектов во Вселенной имеет ячеистую структуру, определяющими элементами которой являются большие пустоты и обрамляющие их «стенки» из галактик (скопления и сверхскопления). Эта структура обладает самоподобием на большом интервале масштабов.

#### **5. Распространенность химических элементов.**

Следующий наблюдательный факт — распространенность легких химических элементов в космосе. Теория Большого взрыва предсказывает, что в период от 1 сек. до 200 сек. от начала расширения Вселенной она представляла собой один сверхбольшой термоядерный реактор. Вещество имело температуру в несколько миллиардов градусов. В этот период родились самые легкие элементы: гелий и литий, а также их изотопы. Более тяжелые элементы, такие, например, как железо, были произведены значительно позже в звездах и выброшены в космическое пространство

---

<sup>19</sup> CDM — Cold Dark Matter (холодная темная материя).

<sup>20</sup> 2MASS — Two Micron All Sky Survey.

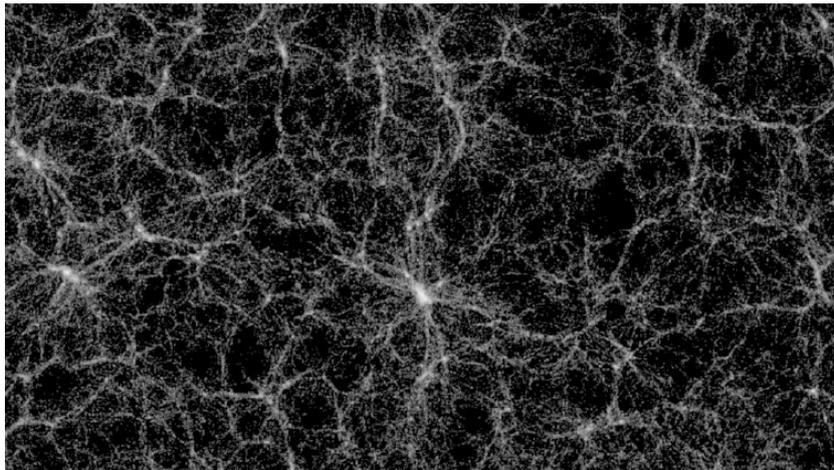
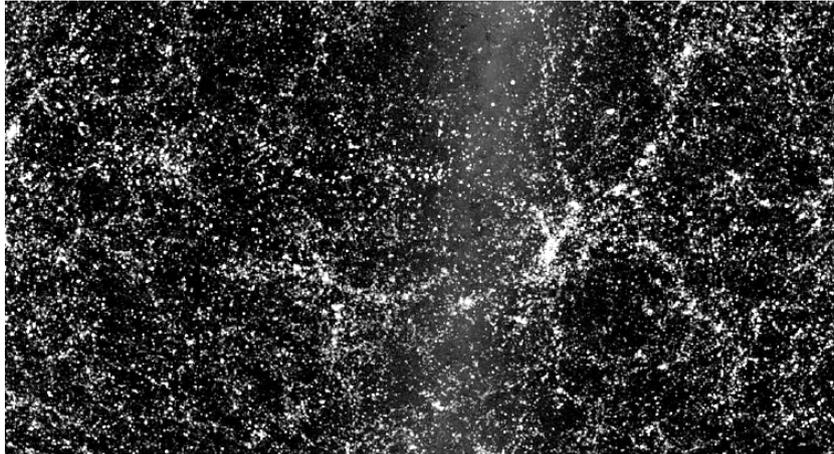


Рис. 8.3. Крупномасштабная структура Вселенной. Многие галактики связаны гравитационными силами и образуют скопления, которые могут объединяться в сверхскопления, которые, в свою очередь, формируют структуры еще больших масштабов: *вверху* — данные обзора 2MASS; *внизу* — результат моделирования из работы [47]

при взрывах сверхновых звезд и звездным ветром. Предсказание теории Большого взрыва относительно выхода легких элементов находится в прекрасном соответствии с наблюдаемыми значениями. В 2011 г. были открыты газовые облака на  $z \sim 3$ , состоящие лишь из водорода и его изотопов, что подтверждает выводы стандартной космологической модели относительно первичного нуклеосинтеза [48].

Следует также отметить, что, соединяя идеи ядерной физики и космологии, можно сделать некоторые нетривиальные выводы об элементарных частицах. В частности, из теории нуклеосинтеза получается ограничение на общее число различных типов нейтрино; идея этого ограничения принадлежит В. Шварцману. Сейчас известны три типа нейтрино: электронное нейтрино  $\nu_e$ , мюонное нейтрино  $\nu_\mu$  и  $\tau$ -нейтрино  $\nu_\tau$ . Обилие легких элементов зависит от числа нейтрино, следовательно, на основании наблюдаемого обилия можно сделать вывод, что число типов безмассовых нейтрино во Вселенной  $N_\nu \approx 3,04$ . Измерения числа типов нейтрино, проведенные специалистами современной физики ускорителей, показывают, что число нейтрино есть  $N_\nu = 2,98 \pm 0,05$  [49].

**6. Гравитационное линзирование.** Следующий космологический тест лежит на стыке внегалактической астрономии и космологии. Речь идет о явлении гравитационного линзирования [50]. Хотя большую часть выводов, полученных от исследования гравитационных линз, астрономы используют для изучения галактик, влияние этих исследований на космологию очень велико. Изучение гравитационного линзирования позволят судить о наличии и распределении скрытой массы нашей Вселенной, дает возможность измерения основных глобальных параметров, определяющих ее геометрию и пр. Этот феномен возни-

кает только в том случае, когда угловое расстояние между небесными объектами не превышает так называемого конуса Эйнштейна (для внегалактических линз составляет примерно 1 сек. дуги, для галактических микролинз порядка  $10^{-3}$  сек. дуги). Общий список линз на данный момент составляет более сотни объектов [51] для линзирования и более пятисот для микролинзирования [52].

Одним из косвенных методов оценки массы галактик является гравитационное линзирование ими фоновых (расположенных на линии наблюдения за ними) объектов (рис. 8.4).

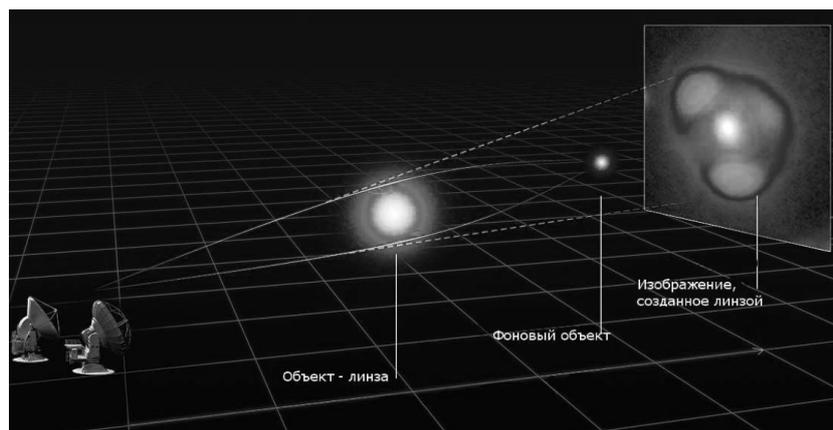


Рис. 8.4. Схема эффекта гравитационного линзирования

В данном случае эффект гравитационного линзирования может проявляться в виде искажения изображения фонового объекта либо появлении его многократных мнимых изображений. Решение обратной задачи, т. е. расчет гравитационного поля, необходимого для получения та-

ких изображений, позволяет оценить массу гравитационной линзы — галактики или скопления галактик (рис. 8.5). Расчетные значения масс галактик значительно превосходят наблюдаемые.

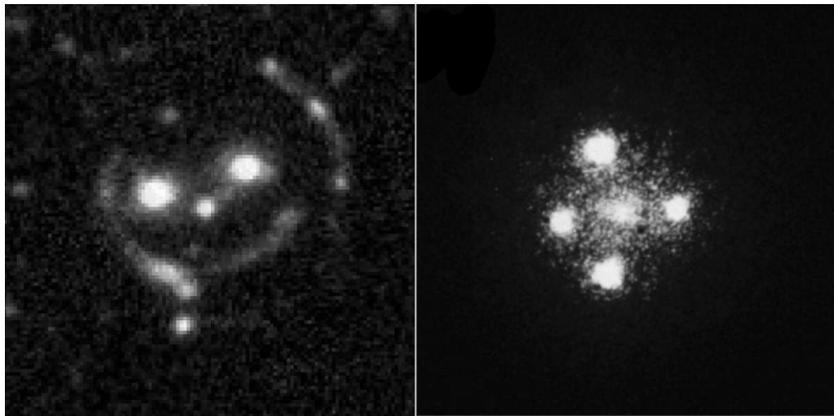


Рис. 8.5. Две гравитационные линзы: *слева* — «Чеширский кот»[53]; *справа* — «крест Эйнштейна»[54]. Глаза кота — это две гигантские эллиптические галактики. Они ответственны за основную часть линзирования. Галактики находятся на красных смещениях 0,426 и 0,432 примерно в 15 Мпк друг от друга. Левый контур головы кота связан с линзированием галактики, находящейся на  $z = 0,97$ . Улыбка кота и правый контур — это результат линзирования более далекого источника, который имеет красное смещение не менее 1,4. Линзы существенно усилили оба источника. Тот, который ближе к нам, усилен примерно в 15 раз, а более далекий — в 45 раз. Масса линз (она сосредоточена всего в 11 угловых секундах) составляет 33 тыс. млрд солнечных масс

## 8.2. Метрика Фрийдмана — Робертсона — Уокера

**1. Структура и состав Вселенной.** Релятивистская космология изучает Вселенную как целое, т. е. рассматривает ее как самый большой физический объект. Резюмируем кратко некоторые свойства наблюдаемой Вселенной (Метагалактики):

1. Радиус наблюдаемой части Вселенной  $L_U \sim 10^{28}$  см.
2. На масштабах  $L \sim 10^{27}$  см (т. е. на порядок меньших  $L_U$ ) Вселенная в среднем однородна и изотропна. Однородность установлена с помощью различных методов с точностью примерно 20–30 %. Изотропность установлена с точностью  $\sim 10^{-3}$  %.
3. Средняя плотность различных типов материи во Вселенной:
  - барионное вещество (атомы, ядра, адроны, мезоны и т. д.)  $\rho_B \sim (3 \pm 2)10^{-31}$  г/см<sup>3</sup>;
  - излучение (фотоны и нейтрино)  $\rho_S \sim 6 \cdot 10^{-34}$  г/см<sup>3</sup>;
  - темная материя  $\rho_D \sim (3 \pm 2) \cdot 10^{-30}$  г/см<sup>3</sup>;
  - темная энергия  $\rho_V \sim (7,5 \pm 0,5) \cdot 10^{-30}$  г/см<sup>3</sup>.

Как видим, основной вклад (порядка 75 %) в среднюю плотность всей материи во Вселенной вносит темная энергия. Примечательно также, что темного вещества во Вселенной примерно в 4–5 раз больше, чем видимого.

4. Вселенная нестационарна и расширяется по закону Хаббла:

$$v = Hl, \quad (8.2)$$

где  $v$  — относительная скорость двух точек во Вселенной,  $l$  — относительное расстояние между этими двумя точками,  $H$  — параметр («постоянная») Хаббла. Факт ускоренного расширения Вселенной не отменяет закона Хаббла, если его понимать как зависимость от расстояния в данный конкретный момент времени, т. е. если учесть, что далекие объекты мы наблюдаем в прошлом. Изменение скорости расширения приводит к тому, что со временем изменяется значение постоянной Хаббла. Универсальность же закона Хаббла состоит в том, что он одинаково справедлив для наблюдателя, расположенного в любой точке и проводящего измерения в любом направлении.

**2. Метрика.** Установим структуру метрики пространства-времени однородной изотропной Вселенной. Запишем метрику пространства-времени в виде

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{ik}(x)dx^i dx^k = \\ &= g_{00}(x)(dx^0)^2 + 2g_{0\alpha}(x)dx^0 dx^\alpha + g_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta, \end{aligned} \quad (8.3)$$

где  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ .

Три компоненты метрического тензора  $g_{0\alpha}$  являются компонентами трехмерного вектора, которые задают некоторое выделенное направление в пространстве. Но в силу изотропности в пространстве нет выделенных направлений, и поэтому

$$g_{0\alpha}(x) = 0. \quad (8.4)$$

Кроме того, в силу однородности пространства  $g_{00}(x)$  не зависит от пространственных координат  $x^\alpha$ , а зависит

только от времени  $x^0$ :  $g_{00} = g_{00}(x^0)$ . Поэтому можно выбрать такие координаты, в которых

$$g_{00}(x^0) = 1. \quad (8.5)$$

Это соответствует переходу в свободно падающую вместе с веществом систему отсчета, которая называется *сопутствующей системой отсчета*. В результате метрика (8.2) сводится к виду

$$ds^2 = (dx^0)^2 - dl^2, \quad (8.6)$$

где

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta \quad (8.7)$$

определяет пространственную метрику, а  $\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta}$  — метрический тензор трехмерного пространства. Рассмотрим  $dl^2$  подробнее.

**3. Метрика трехмерного пространства.** Вспомним результат из римановой геометрии: однородные изотропные пространства являются пространствами постоянной кривизны:

$$\mathfrak{R} = \gamma^{\alpha\beta} \mathfrak{R}_{\alpha\beta} = const, \quad (8.8)$$

где  $\mathfrak{R}$  — риманова кривизна трехмерного пространства,  $\mathfrak{R}_{\alpha\beta}$  — тензор кривизны трехмерного пространства. При этом в зависимости от знака  $\mathfrak{R}$  возможны три качественно различных случая: 1)  $\mathfrak{R} = 0$  — *пространство нулевой кривизны*, или *плоское пространство*; 2)  $\mathfrak{R} < 0$  — *пространство отрицательной постоянной кривизны*, или *открытое пространство*; 3)  $\mathfrak{R} > 0$  — *пространство положительной постоянной кривизны*, или *замкнутое пространство*. Объем плоского и открытого пространства равен бесконечности, а объем замкнутого пространства конечен.

Построим метрику  $dl^2$ , описывающую все три случая. В силу однородности и изотропности пространства любая его точка является центром симметрии. Поэтому вид

метрики не должен зависеть от выбора начала отсчета. В плоском пространстве в сферической системе координат

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (8.9)$$

где

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (8.10)$$

В искривленном пространстве, в силу его изотропности, угловая часть метрики  $d\Omega^2$  должна оставаться той же самой, что и в плоском, а кривизна проявляется в изменении радиальных расстояний и может быть учтена путем введения множителя  $f^2(r)$  перед  $dr^2$ . В результате

$$dl^2 = f^2(r) dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (8.11)$$

Отсюда, учитывая (8.7) и (8.10), находим компоненты трехмерного метрического тензора  $\gamma_{\alpha\beta}$ :

$$\gamma_{rr} = f^2(r), \quad \gamma_{\theta\theta} = r^2, \quad \gamma_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta \quad (8.12)$$

и его определитель

$$\gamma = \det|\gamma_{\alpha\beta}| = f^2(r) r^4 \sin^2 \theta. \quad (8.13)$$

Вычислим теперь скалярную кривизну трехмерного пространства. Для этого считаем символы Кристоффеля и тензор Риччи. В силу диагональности метрического тензора символы Кристоффеля могут быть вычислены по следующим формулам ( $\Gamma_{\beta\alpha}^\sigma = \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma$ ,  $\alpha \neq \beta$ ):

$$\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \gamma_{\alpha\alpha}}{\partial x^\alpha}, \quad \Gamma_{\beta\beta}^\alpha = -\frac{1}{2} \frac{1}{\gamma_{\alpha\alpha}} \frac{\partial \ln \gamma_{\beta\beta}}{\partial x^\alpha}, \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \gamma_{\alpha\alpha}}{\partial x^\beta}. \quad (8.14)$$

Отсюда получаем ненулевые символы Кристоффеля:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\theta r}^{\theta} &= \Gamma_{\varphi r}^{\varphi} = \frac{1}{r}, & \Gamma_{\varphi\theta}^{\varphi} &= \Gamma_{\theta\varphi}^{\varphi} = \operatorname{ctg} \theta, \\ \Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial r}, & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -\frac{r}{f^2}, \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -\frac{r \sin^2 \theta}{f^2}, & \Gamma_{\varphi\varphi}^{\theta} &= -\sin \theta \cos \theta.\end{aligned}\quad (8.15)$$

Тензор Риччи удобно вычислять по формуле (2.207), которая в данном случае запишется в виде

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 \sqrt{|\ln |\gamma|}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} \frac{\partial \sqrt{|\ln |\gamma|}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma_{\alpha\sigma}^{\nu} \Gamma_{\beta\nu}^{\sigma}. \quad (8.16)$$

Легко убедиться, что отличны от нуля только диагональные компоненты тензора Риччи. В силу изотропности пространства вклады в скалярную кривизну от всех компонент тензора Риччи будут одинаковыми:

$$R = \gamma^{rr} R_{rr} + \gamma^{\theta\theta} R_{\theta\theta} + \gamma^{\varphi\varphi} R_{\varphi\varphi} = 3\gamma^{\theta\theta} R_{\theta\theta}. \quad (8.17)$$

Поскольку

$$R_{\theta\theta} = \frac{1}{2r} \frac{d}{dr} [r^2(1 - f^{-2})], \quad \gamma^{\theta\theta} = \frac{1}{\gamma_{\theta\theta}} = \frac{1}{r^2}, \quad (8.18)$$

получаем

$$R = \frac{3}{2r^3} \frac{d}{dr} [r^2(1 - f^{-2})] = \operatorname{const}. \quad (8.19)$$

Отсюда

$$r^2(1 - f^{-2}) = Kr^4 + C, \quad (8.20)$$

где

$$K = \frac{R}{6}, \quad (8.21)$$

$C$  — произвольная постоянная. В плоском пространстве  $K = 0$ , а метрика должна иметь вид (8.9), т. е.  $f^2(r) = 1$ . Но тогда  $r^2(1 - f^2(r)) = 0$ , откуда следует, что  $C = 0$ , и для  $f^2(r)$  получаем

$$f^2 = \frac{1}{1 - k\rho^2}, \quad (8.22)$$

где

$$\rho = |K|^{1/2}r, \quad (8.23)$$

$$k = \begin{cases} 1, & K > 0; \\ 0, & K = 0; \\ -1, & K < 0. \end{cases} \quad (8.24)$$

Тогда

$$dl^2 = a^2 \left( \frac{d\rho^2}{1 - k\rho^2} + \rho^2 d\Omega^2 \right), \quad (8.25)$$

где

$$a = \frac{1}{\sqrt{|K|}}. \quad (8.26)$$

Введем новую переменную  $\chi$  такую, что

$$\rho = \begin{cases} \sin \chi, & k = 1; \\ \chi, & k = 0; \\ \text{sh } \chi, & k = -1. \end{cases} \quad (8.27)$$

Тогда

$$d\rho = \begin{cases} \cos \chi d\chi, & k = 1; \\ d\chi, & k = 0; \\ \text{ch } \chi d\chi, & k = -1, \end{cases} \quad (8.28)$$

$$d\chi^2 = \frac{d\rho^2}{1 - k\rho^2}. \quad (8.29)$$

Отсюда

$$dl^2 = a^2(d\chi^2 + \Sigma^2(\chi)d\Omega^2), \quad (8.30)$$

где

$$\Sigma^2(\chi) = \begin{cases} \sin^2 \chi, & k = 1; \\ \chi^2, & k = 0; \\ \text{sh}^2 \chi, & k = -1. \end{cases} \quad (8.31)$$

Выражения (8.30)—(8.29) задают искомую метрику трехмерного пространства. Величина  $a$  называется *масштабным фактором*. При фиксированных углах ( $\theta = \text{const}, \varphi = \text{const}$ ) масштабный фактор определяет, во сколько раз расстояние между двумя бесконечно близкими точками пространства  $dl$  отличается от соответствующего дифференциала  $d\chi$  введенных пространственных координат  $\chi$ :  $dl = ad\chi$ . В процессе эволюции Вселенной масштабный фактор  $a$  будет изменяться с течением времени.

#### 4. Метрика Фридмана — Робертсона — Уокера.

Рассмотрим теперь метрику пространства-времени (8.6). Положим  $x = ct$  и будем считать, что в расширяющейся вселенной  $a = a(t)$ . Тогда

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t)(d\chi^2 + \Sigma^2(\chi)d\Omega^2). \quad (8.32)$$

Введенное таким образом время  $t$  будем называть космологическим временем. Наряду с космологическим временем введем конформное время  $\eta$ :

$$\pm ct = a(\eta)d\eta. \quad (8.33)$$

В результате выражение для  $ds^2$  запишется в виде

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - d\chi^2 - \Sigma^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)). \quad (8.34)$$

Полученная метрика называется метрикой Фридмана — Робертсона — Уокера.

Метрический тензор для метрики Фридмана — Робертсона — Уокера, согласно (8.34), имеет вид

$$g_{ik} = \text{diag} (a^2(\eta), -a^2(\eta), -a^2(\eta)\Sigma^2(\chi), -a^2(\eta)\Sigma^2(\chi) \sin^2 \theta), \quad (8.35)$$

или, в развернутом виде,

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2\Sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2\Sigma^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (8.36)$$

Определитель этого метрического тензора

$$g = \det g_{ik} = -a^8(\eta)\Sigma^4(\chi)\sin^2\theta < 0. \quad (8.37)$$

Таким образом, задача определения метрики пространства-времени эволюционирующей Вселенной в целом сводится к нахождению одной неизвестной функции — масштабного фактора  $a(\eta)$ .

### 8.3. Модели расширяющейся Вселенной

**1. Уравнения Фридмана.** Метрика пространства-времени, а значит, и введенный выше масштабный фактор (функция  $a(\eta)$ ) должны удовлетворять уравнениям Эйнштейна

$$R_k^i - \frac{1}{2}\delta_k^i R = \kappa T_k^i + \Lambda\delta_k^i. \quad (8.38)$$

Обозначим  $\eta = x^0, \chi = x^1, \theta = x^2, \varphi = x^3$ . Символы Кристоффеля и тензор Риччи в силу диагональности метрического тензора могут быть вычислены по формулам, аналогичным (8.14) и (8.16) ( $i \neq k$ ):

$$\Gamma_{ii}^i = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln |g_{ii}|}{\partial x^i}, \quad \Gamma_{kk}^i = -\frac{1}{2} \frac{1}{g_{ii}} \frac{\partial \ln |g_{kk}|}{\partial x^i}, \quad \Gamma_{ik}^i = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln |g_{ii}|}{\partial x^k}, \quad (8.39)$$

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial x^j} - \frac{\partial^2 \sqrt{|\ln |g||}}{\partial x^i \partial x^k} + \Gamma_{ik}^j \frac{\partial \sqrt{|\ln |g||}}{\partial x^j} - \Gamma_{il}^j \Gamma_{kj}^l, \quad (8.40)$$

$$R_k^i = g^{il} R_{lk}. \quad (8.41)$$

Отсюда получаем, что ненулевые символы Кристоффеля и компоненты тензора Риччи равны

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma_{11}^0 &= \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma_{22}^0 &= \frac{\dot{a}}{a} \Sigma^2(\chi), \\ \Gamma_{33}^0 &= \frac{\dot{a}}{a} \Sigma^2(\chi) \sin^2 \theta, & \Gamma_{0\beta}^\alpha &= \Gamma_{\beta 0}^\alpha = \frac{\dot{a}}{a} \delta_\beta^\alpha, \end{aligned} \quad (8.42)$$

$$R_0^0 = \frac{3}{a^4} (a'^2 - aa''), \quad (8.43)$$

$$R_\beta^\alpha = -\frac{1}{a^4} (2ka^2 + a'^2 + aa'') \delta_\beta^\alpha. \quad (8.44)$$

Для скалярной кривизны тогда получаем

$$R = R_0^0 + R_\alpha^\alpha = -\frac{6}{a^3} (ka^2 + a''). \quad (8.45)$$

Подставляя (8.43)–(8.45) в уравнения Эйнштейна (8.38), получаем

$$\frac{3}{a^4} (ka^2 + a'^2) = \kappa T_0^0 + \Lambda, \quad (8.46)$$

$$\frac{1}{a^4} (ka^2 + 2aa'' - a'^2) \delta_\beta^\alpha = \kappa T_\beta^\alpha + \Lambda \delta_\beta^\alpha. \quad (8.47)$$

Тензор энергии-импульса материи запишем в приближении сплошной среды

$$T_k^i = (\varepsilon + p) u^i u_k - p \delta_k^i. \quad (8.48)$$

В сопутствующей системе отсчета, где  $u^\alpha = 0$  и  $u^0 u_0 = 1$ , получаем

$$T_0^0 = \varepsilon, \quad T_\beta^\alpha = -p\delta_\beta^\alpha. \quad (8.49)$$

Уравнения Эйнштейна сводятся к виду

$$\frac{a'^2}{a^2} = \frac{\kappa}{3}a^2(\varepsilon + \varepsilon_v) - \kappa, \quad (8.50)$$

$$\frac{1}{a^4}(ka^2 + 2aa'' - a'^2) = -\kappa(p + p_v), \quad (8.51)$$

где

$$\varepsilon_v = \kappa\Lambda, \quad p_v = -\varepsilon_v \quad (8.52)$$

есть вклады в плотность энергии и давление, обусловленные космологической постоянной. Величины  $\varepsilon_v$  и  $p_v$ , как мы обсуждали выше, могут трактоваться как плотность энергии и давление, обусловленные наличием особой среды — физического вакуума. Прибавляя и вычитая в левой части уравнения (8.51) величину  $\frac{a'^2}{a^2}$ , пользуясь (8.50) и обозначая

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon + \varepsilon_v, \quad \tilde{p} = p + p_v, \quad (8.53)$$

получим

$$\left(\frac{a'}{a}\right)' = -\frac{\kappa}{6}a^2(\tilde{\varepsilon} + 3\tilde{p}). \quad (8.54)$$

Дифференцируя уравнение (8.50) и пользуясь (8.54), получим

$$-3(\tilde{\varepsilon} + \tilde{p})\frac{a'}{a} = \dot{\tilde{\varepsilon}}. \quad (8.55)$$

Эти уравнения должны быть дополнены уравнением состояния, которое в адиабатическом случае имеет вид

$$p = p(\varepsilon). \quad (8.56)$$

Вместе уравнения (8.50), (8.55) и (8.56) образуют замкнутую систему, которая называется *уравнениями Фрийдмана*:

$$\begin{cases} a'^2 a^2 = \frac{\kappa}{3} a^2 \tilde{\varepsilon} - k, \\ -3(\tilde{\varepsilon} + \tilde{p}) \frac{a'}{a} = \dot{\tilde{\varepsilon}}, \\ p = p(\varepsilon). \end{cases} \quad (8.57)$$

Отметим, что первоначально эти уравнения были получены без учета космологической постоянной. Начнем анализ уравнений Фрийдмана именно с этого случая.

**2. Модели без космологической постоянной.** Рассмотрим случай, когда  $\Lambda = 0$  и, следовательно,  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$ ,  $\tilde{p} = p$ ,

$$\begin{cases} a'^2 a^2 = \frac{\kappa}{3} a^2 \varepsilon - k, \\ -3(\varepsilon + p) \frac{a'}{a} = \dot{\varepsilon}, \\ p = p(\varepsilon). \end{cases} \quad (8.58)$$

Отметим, что второе уравнение системы (8.58) можно получить исходя из первого начала термодинамики для идеальной жидкости при постоянной энтропии:

$$dE = -pdV, \quad (8.59)$$

где  $E$  — внутренняя энергия системы. Тогда

$$d\varepsilon = d\left(\frac{E}{V}\right) = -(\varepsilon + p)d \ln V. \quad (8.60)$$

Подставляя сюда

$$d \ln V = 3d \ln a, \quad (8.61)$$

получаем второе уравнение системы (8.58).

Вселенная в своем развитии проходит несколько этапов, описываемых различными уравнениями состояния. В настоящий момент состояние Вселенной наиболее адекватно описывается с помощью пылевидной модели с уравнением состояния

$$\varepsilon = \rho c^2, \quad p = 0. \quad (8.62)$$

Для такого уравнения состояния второе уравнение системы (8.58) принимает вид

$$-3 \frac{a'}{a} = \frac{\rho'}{\rho}. \quad (8.63)$$

Это уравнение легко решается, и мы получаем

$$\rho = \frac{M}{a^3}, \quad \varepsilon = \frac{M^2}{a^3}, \quad (8.64)$$

где  $M$  — произвольная постоянная. Подставляя (8.64) в первое уравнение системы (8.58), получим

$$a' = \pm \sqrt{a_0 a - k a^2}, \quad (8.65)$$

где

$$a_0 = \frac{\kappa M c^2}{3}. \quad (8.66)$$

Рассмотрим решения этого уравнения, отвечающие начальным условиям

$$\eta = 0, \quad t = 0, \quad a(0) = 0. \quad (8.67)$$

Эти условия предполагают бесконечную кривизну трехмерного пространства в начальный момент времени.

В зависимости от значения  $k$  возможны три различных случая:

1.  $k = 0$  — модель плоской Вселенной. В этом случае

$$a(\eta) = \frac{a_0}{4}\eta^2, \quad t = \frac{a_0}{12c}\eta^3. \quad (8.68)$$

Тогда

$$a(t) \sim t^{2/3}, \quad (8.69)$$

и, согласно (8.64), получаем

$$\rho \sim \varepsilon \sim \frac{1}{t^2}. \quad (8.70)$$

Видим, что при  $t \rightarrow 0$  плотность  $\rho \rightarrow \infty$ . Наоборот, при  $t \rightarrow \infty$  плотность  $\rho \rightarrow 0$ .

2.  $k = -1$  — модель открытой Вселенной. В этом случае

$$a(\eta) = \frac{a_0}{2}(\operatorname{ch} \eta - 1), \quad t = \frac{a_0}{2c}(\operatorname{sh} \eta - \eta), \quad (8.71)$$

$$\rho \sim \varepsilon \sim \frac{1}{(\operatorname{ch} \eta - 1)^3}. \quad (8.72)$$

3.  $k = 1$  — модель замкнутой Вселенной. В этом случае

$$a(\eta) = \frac{a_0}{2}(1 - \cos \eta), \quad t = \frac{a_0}{2c}(\eta - \sin \eta), \quad (8.73)$$

$$\rho \sim \varepsilon \sim \frac{1}{(1 - \cos \eta)^3}. \quad (8.74)$$

Отметим, что при малых временах  $t \rightarrow 0$  в моделях открытой и замкнутой Вселенной так же, как и в модели открытой Вселенной,  $a(t) \sim t^{2/3}$ .

До того, как Вселенная стала пылевидной, материя в ней находилась в более плотном состоянии и была заполнена веществом (в основном — ядрами водорода и гелия) и излучением, которые находились в равновесии друг

с другом при огромных температурах. По мере расширения Вселенной происходило уменьшение температуры. При температуре  $T \sim 3000$  К излучение отделилось от вещества. Образовались первые атомы — водорода и гелия, а Вселенная стала прозрачной для излучения. В процессе дальнейшего расширения Вселенной вещество и излучение эволюционировали практически независимо. Температура излучения при этом падала. Сейчас это излучение, называемое *реликтовым излучением*, можно наблюдать при температурах  $T \sim 2,725$  К<sup>21</sup>. Реликтовое излучение было предсказано в 1946 г. Г. Гамовым, затем в 1964 г. в работе А. Дорошкевича и И. Новикова [55] была теоретически показана возможность его обнаружения в сантиметровом диапазоне, и, наконец, экспериментально реликтовое излучение было обнаружено в 1965 г. А. Пензиасом и Р. Вильсоном. В 1978 г. за открытие реликтового излучения А. Пензиасу и Р. Вильсону была присуждена Нобелевская премия.

На еще более ранних стадиях эволюции Вселенной плотность излучения преобладала над плотностью вещества. Уравнение состояния в эпоху преобладания излучения над веществом было ультрарелятивистским:

$$p = \frac{1}{3}\varepsilon = \frac{1}{3}\rho c^2. \quad (8.75)$$

Для такого уравнения состояния второе уравнение системы (8.58) принимает вид

$$-4\frac{a'}{a} = \frac{\rho'}{\rho}. \quad (8.76)$$

---

<sup>21</sup> В настоящее время температура реликтового излучения считается равной  $2,7548 \pm 0,00057$  К.

Решая это уравнение, находим

$$\rho = \frac{M}{a^4}, \quad \varepsilon = \frac{M^2}{a^4}. \quad (8.77)$$

В отличие от случая пылевидной Вселенной, в модели Вселенной, заполненной излучением, плотности спадают обратно пропорционально четвертой степени масштабного фактора.

Как и раньше, рассмотрим случаи, соответствующие различным значениям  $k$ :

1.  $k = 0$  — модель плоской Вселенной. В этом случае

$$a(\eta) = \frac{a_0}{4}\eta, \quad t = \frac{a_0}{2c}\eta^2. \quad (8.78)$$

Тогда

$$a(t) \sim t^{1/2}, \quad (8.79)$$

и, согласно (8.76), получаем

$$\rho \sim \varepsilon \sim \frac{1}{t^2}. \quad (8.80)$$

2.  $k = -1$  — модель открытой Вселенной. В этом случае

$$a(\eta) = a_0 \operatorname{sh} \eta, \quad t = \frac{a_0}{c}(\operatorname{ch} \eta - 1), \quad (8.81)$$

$$\rho \sim \varepsilon \sim \frac{1}{\operatorname{sh}^4 \eta}. \quad (8.82)$$

3.  $k = 1$  — модель замкнутой Вселенной. В этом случае

$$a(\eta) = a_0 \sin \eta, \quad t = \frac{a_0}{c}(1 - \cos \eta), \quad (8.83)$$

$$\rho \sim \varepsilon \sim \frac{1}{\cos^2 \eta}. \quad (8.84)$$

На рис. 8.6 схематически показана зависимость масштабного фактора от времени для рассмотренных выше моделей и различных сценариев эволюции Вселенной.

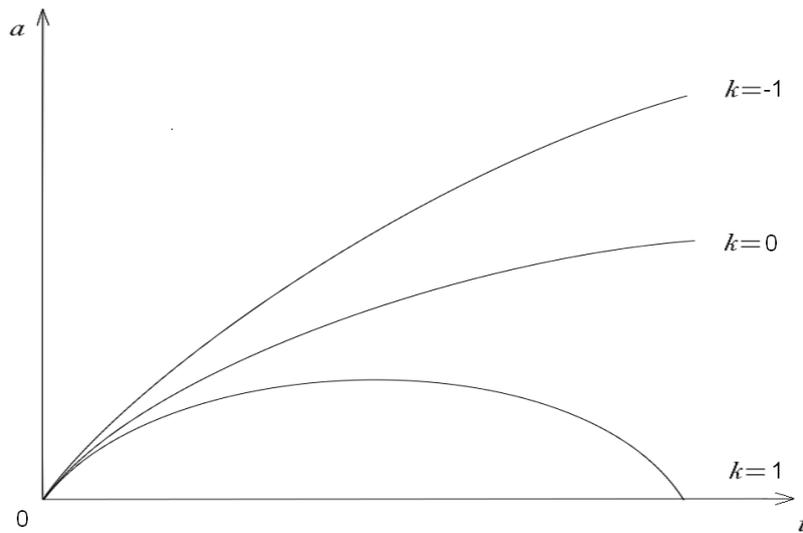


Рис. 8.6. Зависимость масштабного фактора от времени

Общим свойством всех полученных решений является наличие в нулевой момент времени особой точки — космологической сингулярности:  $t \rightarrow 0$ ; массовая плотность и плотность энергии стремятся к бесконечности:  $\rho \sim \varepsilon \rightarrow \infty$ . Расширение в плоской и открытой космологических моделях происходит неограниченно, причем, когда  $t \rightarrow \infty$ , плотность  $\rho \rightarrow 0$ . Наоборот, в закрытых моделях масштабный фактор сначала увеличивается от  $a = 0$  при  $\eta = t = 0$  до максимального значения  $a_0$ , которое достигается при  $\eta = \pi$  для пылевидного уравнения состояния и при  $\eta = \pi/2$

для ультрарелятивистского уравнения состояния. Затем Вселенная снова сжимается до нового сингулярного состояния.

**3. Закон Хаббла. Критическая плотность.** Из пространственной части метрики Фрийдмана — Робертсона — Уокера можно также получить закон Хаббла. Для этого достаточно рассмотреть только радиальную часть метрики ( $\theta = const, \varphi = const$ ):

$$dl^2 = a^2 d\chi^2. \quad (8.85)$$

Отсюда легко можно найти относительную скорость разбегания галактик  $v$  (закон Хаббла):

$$v = \frac{dl}{dt} = \frac{da}{dt} \chi = \frac{\dot{a}}{a} l = Hl, \quad (8.86)$$

где параметр Хаббла  $H$ , характеризующий скорость разбегания вещества во Вселенной, задается формулой

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{c}{a^2} \frac{da}{d\eta}. \quad (8.87)$$

Как видно, параметр Хаббла является функцией времени и имеет размерность, обратную времени. Он может быть измерен по красному смещению спектральных линий, которое возникает благодаря увеличению длины волны фотона вследствие расширения Вселенной. Современные методы измерения параметра Хаббла позволяют определить его значение на данном этапе расширения:

$$H_0 \simeq 73 \text{ км/сек.} \cdot \text{Мпк.} \quad (8.88)$$

Зная параметр Хаббла, можно оценить возраст Вселенной  $t_U$ :

$$t_U \sim \frac{1}{H_0} \approx 1,4 \cdot 10^{10} \text{ лет.} \quad (8.89)$$

Введем также понятие космологического горизонта современной Вселенной. Предположим, что в момент Большого взрыва из всех точек пространства испущены световые сигналы. Найдем расстояние  $l_U(t)$ , на которое сигнал удалится за время  $t$ . Из метрики (8.34) следует, что светоподобные геодезические  $ds^2 = 0$  удовлетворяют уравнению

$$dl = a|d\chi|. \quad (8.90)$$

Отсюда

$$l_H(t) = a(t)\chi(t) = ca(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (8.91)$$

Величина  $l_U(t)$  характеризует размер причинно связанной области на момент времени  $t$ : наблюдатель в момент  $t$  не может знать, что происходит за пределами сферы радиуса  $l_U(t)$ . Эта сфера называется космологическим горизонтом, а  $l_U(t)$  — размером космологического горизонта в момент времени  $t$ . Таким образом,  $l_U(t)$  является размером наблюдаемой части Вселенной — области, доступной нашему изучению, даже если сама Вселенная бесконечна. Очевидно, что в расширяющейся Вселенной  $l_U(t)$  увеличивается со временем. В настоящий момент

$$l_U(t) \sim \frac{c}{H_0} \approx 4,3 \cdot 10^3 \text{ Мпк} \sim 10^{28} \text{ см}. \quad (8.92)$$

Через параметр Хаббла можно выразить плотность вещества во Вселенной. Из первого уравнения системы (8.58) и определения параметра Хаббла получаем

$$\rho = \frac{3}{8\pi G} \left( \frac{k}{a^2} + H^2 \right) \quad (8.93)$$

или

$$\frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho - H^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho - \rho_c). \quad (8.94)$$

Из этого выражения видно, что пространственная кривизна  $k/a^2$  изменяет свой знак в зависимости от того, больше или меньше плотность  $\rho$  критической плотности

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (8.95)$$

На современном этапе  $H = H_0$ , что дает  $\rho_c \sim 10^{-29}$  г/см<sup>3</sup>.

При  $\rho > \rho_c$  получаем, что Вселенная замкнута ( $k = 1$ ), если же  $\rho < \rho_c$  — Вселенная открыта ( $k = -1$ ), в случае  $\rho = \rho_c$  — Вселенная плоская ( $k = 0$ ).

Согласно современным представлениям с точностью лучшей, чем 2 %, Вселенная является плоской ( $k = 0$ ), причем, как уже отмечалось, видимая (барионная) материя составляет около 5 % от всей материи, еще около 20 % приходится на темную (невидимую) материю, а оставшиеся примерно 75 % занимает так называемая темная энергия. Последнее обстоятельство диктует необходимость учесть темную энергию в космологических моделях. Наиболее простой и естественный способ сделать это заключается в том, чтобы отождествить действие темной энергии с космологической постоянной и учесть ее в уравнениях Фридмана.

**4. Учет космологической постоянной.** Случай, когда  $\Lambda \neq 0$ , может быть проанализирован аналогично случаю, когда  $\Lambda = 0$ . Мы ограничимся лишь наиболее интересной ситуацией, когда Вселенная плоская ( $k = 0$ ).

Космологическая постоянная  $\Lambda$  (т. е. физический вакуум) играет определяющую роль в уравнениях Фридмана на достаточно поздних этапах эволюции Вселенной, когда вещество сильно разряжено, и, следовательно, его влиянием можно пренебречь. На ранних этапах эволюции Вселенной также доминирует физический вакуум — материя, имеющая уравнение состояния  $p = -\varepsilon$ , что соответствует

тензору энергии-импульса (4.110). Во всех указанных случаях система уравнений (8.57) сводится к одному уравнению:

$$\frac{a'^2}{a^2} = \frac{\Lambda}{3} a^2. \quad (8.96)$$

Считая  $\Lambda > 0$  и пользуясь выражением (8.33), получаем

$$a = a_c \exp\left(c\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\right), \quad (8.97)$$

где  $a_c$  — постоянная интегрирования.

Как видим, за счет космологической постоянной на ранних и поздних этапах развития Вселенная экспоненциально расширяется. Кроме того, в рассматриваемой модели отсутствует начальная сингулярность в момент времени  $t = 0$ .

#### 8.4. Теоретические основы современной космологии

Современные космологические представления охватывают почти весь период эволюции Вселенной, сочетая в себе подходы астрономии, космологии и физики элементарных частиц. Опишем основные этапы развития Вселенной в соответствии с наиболее общепризнанными на начало XXI в. теориями.

**1. Рождение Вселенной.** Теория Большого взрыва — теория рождения Вселенной из некоторого сингулярного состояния (или, как иногда говорят, из «пространственно-временной пены»). Согласно этой теории во время рождения Вселенной температура и плотность вещества достигали планковских значений<sup>22</sup>. Детали проте-

---

<sup>22</sup> Планковская температура составляет  $T_{Pl} = 1,3 \times 10^{32}$  К.

кания этой стадии теория не раскрывает в связи с отсутствием корректного формализма для описания столь плотных и горячих состояний вещества<sup>23</sup>. Время существования этой стадии составляет несколько планковских времен  $t_{Pl} \approx 10^{-43}$  сек. К окончанию этой стадии родилось классическое пространство-время. Начиная с этого момента, Вселенная стала расширяться, а температура и плотность вещества понижались.

**2. Эпоха инфляции.** Если не вносить в простую картину расширения по инерции никаких изменений, то оно оказывается слишком медленным и не может объяснить наблюдаемой картины Вселенной [49]. Размер Вселенной оказывается слишком мал, а пространство недостаточно плоским. Наиболее популярное решение этой проблемы дает теория инфляции. Приблизительно через  $10^{-42}$  сек. после рождения классического пространства-времени во Вселенной наступила инфляционная стадия. Она характеризуется сильным отрицательным давлением (его иногда называют состоянием «фальшивого» вакуума), при котором вещество становится не источником притяжения, а источником отталкивания. Во время этой стадии объем Вселенной увеличивается на много порядков (в некоторых моделях даже на порядки порядков), в результате чего вся современная Вселенная оказывается в одной причинно-связанной области, уравниваются кинетическая энергия расширения Вселенной и ее потенциальная энергия. Благодаря резкому увеличению объема, эту стадию иногда называют стадией разбухания.

---

<sup>23</sup> В таком веществе из-за сверхмалых размеров и сверхбольших плотностей и энергий существенны одновременно квантовые эффекты и эффекты ОТО, соответственно требуется квантовая теория гравитации. Существует много теорий, претендующих на эту роль. Подробнее эти теории, как и вопрос о начальной сингулярности, будут обсуждены в подразделе 9.4 и гл. 10.

Из-за действия сил отталкивания Вселенная «разгоняется» и приобретает большую кинетическую энергию, которую в дальнейшем мы наблюдаем в виде хаббловского расширения по инерции. Описанное выше поведение Вселенной на стадии инфляции определяет некоторое скалярное поле с уравнением состояния<sup>24</sup>  $p = \omega\rho$ , где  $\omega < 0$ . Это поле нелинейно, оно взаимодействует само с собой, и потенциальная энергия взаимодействия в зависимости от величины поля представляет собой сложную функцию. Фальшивый вакуум обладает большой плотностью потенциальной энергии, по современным оценкам она составляет  $10^{98}$  эрг/см<sup>3</sup>. На рис. 8.7 показана зависимость энергии скалярного поля  $V(\phi)$  от величины поля. У поля, показанного на рис. 8.7, существует три вакуумных состояния. Значение  $\phi = 0$  соответствует состоянию фальшивого вакуума, два других состояния называются состояниями истинного вакуума  $\phi = \pm\phi_0$ .

Подробнее с теорией инфляции можно ознакомиться в работах [56, 57, 58]. При  $p = -\rho$  расширение является экспоненциальным, за 70 хаббловских времен  $t = 70 H^{-1}$  Вселенная станет плоской с необходимой степенью точности. Очевидно, что при этом решается и проблема горизонта, так как причинно-связанная область, существующая в момент рождения Вселенной и имеющая размер  $l \approx m_{Pl} \approx 10^{-33}$  см, за время инфляции достигнет величины  $10^{-3}$  см. В дальнейшем эта область расширится до размеров сегодняшнего горизонта.

На стадии инфляции из вакуумных квантовых флуктуаций скалярного поля рождаются возмущения плотности,

---

<sup>24</sup> При достаточно медленной эволюции системы имеет смысл говорить об уравнении состояния, тогда оно будет приближенно выполняться в течение некоторого промежутка времени, иначе система не описывается уравнением состояния.

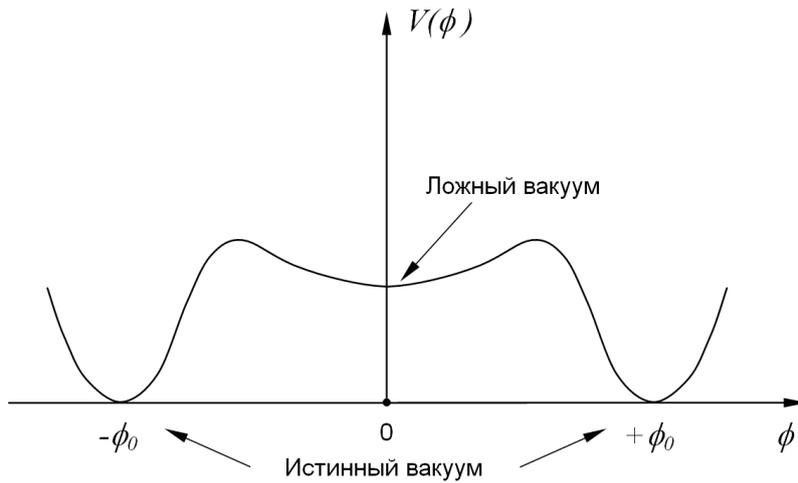


Рис. 8.7. Потенциальная энергия скалярного поля

а из квантовых флуктуаций метрики — гравитационные волны. Вакуумные квантовые флуктуации, которые обычно проявляются только в микроскопических масштабах, в экспоненциально расширяющейся Вселенной быстро увеличивают свою длину и амплитуду и становятся космологически значимыми. Поэтому можно сказать, что скопления галактик и сами галактики являются макроскопическими проявлениями квантовых флуктуаций. Неоднородности, существовавшие до экспоненциальной стадии, за время инфляции сильно разглаживаются, и видимая часть Вселенной становится в высокой степени однородной (при подходящих параметрах модели).

Уравнение состояния вещества с отрицательным давлением неустойчиво. Оно должно смениться неотрицательным давлением. Поэтому инфляционная фаза развития

Вселенной довольно быстро кончается, ее окончание происходит из-за распада состояния фальшивого вакуума. При этом вся запасенная в нем потенциальная энергия выделяется в виде рождения частиц и их кинетической (тепловой) энергии. Образуется горячая плазма, состоящая из элементарных частиц с температурой  $10^{16}$  ГэВ. Другими словами, с окончанием эпохи инфляции рождается обычная материя. Об этом моменте говорят как о начале радиационно-доминированной эпохи в эволюции Вселенной, поскольку большая часть энергии в это время приходится на излучение. После окончания периода экспоненциального расширения, которое имело место во времена, близкие к планковским,  $t \approx 10^{-36}$  сек., режим расширения становится степенным, и мы возвращаемся к стандартному сценарию, подробно описанному, например, в книгах Я. Зельдовича и И. Новикова [59] и С. Вайнберга [60].

**3. Появление избытка вещества.** Барийонная асимметрия Вселенной — факт наличия во Вселенной в подавляющем количестве вещества в форме барионов (протонов и нейтронов) и практически полного отсутствия антивещества — антибарионов. Для решения проблемы барионного избытка необходим факт нестационарности Вселенной (расширения), различие во взаимодействиях частиц и античастиц (установлено экспериментально) и несохранение барионного числа (предсказывается квантовой теорией поля). При наличии этих трех составляющих первичная плазма независимо от начальных условий при  $T > 1$  ГэВ придет в состояние с небольшим избытком барионов над антибарионами  $(N_B - N_{\bar{B}})/(N_B + N_{\bar{B}}) = 10^{-9} \dots 10^{-10}$ . После аннигиляции почти всех барионов и антибарионов этот избыток приведет к возникновению Вселенной с полной доминантностью барионов [61]. Эта стадия называется *эпохой горячего бариосинтеза*. Барийонный заряд материи на-

шей Вселенной может также генерироваться, когда температура плазмы падает до 10 ТэВ — на стадии холодного бариогенеза. Между этими двумя эпохами лежит так называемая «пустыня взаимодействий». Этот термин означает, что ничего интересного с точки зрения современной физики в эту эпоху расширения Вселенной не происходит. В настоящее время барионная асимметрия Вселенной является (хоть и косвенным) единственным «экспериментальным» доказательством несохранения барионов. Никаких других данных, указывающих на несохранение барионного числа, на данный момент не получено.

**4. Электрослабый фазовый переход.** Чуть ниже по шкале энергий, спустя приблизительно  $10^{-10}$  сек. после рождения Вселенной, происходит электрослабый фазовый переход. До этого момента электромагнитные взаимодействия и слабые взаимодействия с участием нейтрино являются единым электрослабым взаимодействием [62]. В эту эпоху слабые и электромагнитные взаимодействия, бывшие до этого момента времени едиными взаимодействиями, расщепляются на обычные электромагнитные взаимодействия, основным квантом которых является фотон, и слабые взаимодействия с участием нейтрино, основным квантом которых являются  $W^\pm$ - и  $Z^0$ -бозоны. После того как происходит фазовый переход, бозоны становятся массивными (срабатывает некоторый механизм динамического рождения массы<sup>25</sup>), и слабое взаимодействие становится короткодействующим. Электромагнитное взаимодействие, переносимое безмассовым фотоном, остается дальнедействующим.

---

<sup>25</sup> Наиболее популярным в литературе является механизм Хиггса. Частица, ответственная в нем за генерацию массы других частиц, была открыта в период с июля 2012 г. по март 2013 г. на Большом адронном коллайдере (БАК).

**5. Бариогенез.** В свободном состоянии в обычных условиях кварки и глюоны не могут существовать как свободные частицы. Это явление называется невылетанием кварков, или *конфайнментом*. В ранней Вселенной температура была достаточно высока для того, чтобы кварки не образовывали протонов и нейтронов, а были квазисвободными. В результате расширения Вселенной температура падает, кварки начинают соединяться, образуя протоны и нейтроны. Это происходит при температуре  $T \approx 10^{11}$  К.

**6. Эпоха нуклеосинтеза.** После образования протонов и нейтронов наступает эпоха нуклеосинтеза. Она занимает интервал от 1 сек. до приблизительно 100 сек. В этот период синтезируются легкие ядра с атомным весом ( $A < 5$ ), более тяжелые ядра синтезируются позже в звездах. Выход ядер с различным атомным весом сильно зависит от нескольких физических параметров: отношения числа первичных нейтронов к числу первичных протонов, от плотности Вселенной и скорости ее расширения. Согласно современным вычислениям в промежутке времени от 1 сек. до 100 сек. большая часть свободных нейтронов (за исключением тех, что успевали распасться) связывалась в дейтерий за счет реакции



порождая фотоны. Дейтерий, в свою очередь, захватывал барионы первичной плазмы, в результате чего рождались изотоп гелия  ${}^3\text{He}$  и тритий. С захватом еще одного нейтрона образовывался другой изотоп гелия  ${}^4\text{He}$ , в котором практически все нераспавшиеся нейтроны заканчивали свой путь. Предсказание количества водорода H (75 %) и гелия  ${}^4\text{He}$  (25 %), а также остальных легких элементов, достаточно хорошо согласующееся с наблюдениями, является основным результатом теории нуклеосинтеза.

Стадия нуклеосинтеза является заключительной стадией, которая относится к ранней Вселенной<sup>26</sup>.

**7. Эпоха доминирования темной материи.** Расширение Вселенной продолжается, и оно по-разному отражается на различных типах материи. Плотность вещества падает обратно пропорционально кубу масштабного фактора, а плотность излучения снижается еще быстрее. В итоге доминирующей формой материи во Вселенной становится вещество, большую часть которого составляет темная материя. Природа скрытой массы до сих пор является неизвестной [45, 64]. В космологии различают два вида скрытой массы: горячая темная материя (HDM) и холодная темная материя (CDM). Основное их различие заключается в том, что в космологических моделях с горячей темной материей получают иные пекулярные скорости галактик<sup>27</sup>, чем в моделях с холодной темной материей<sup>28</sup>. Различаются они также по минимальной массе объектов, которые первыми образуются во Вселенной. В качестве HDM-материи чаще всего говорят о массивном нейтрино<sup>29</sup>, хотя роль такой материи могут играть и другие частицы. В качестве носителя CDM чаще всего называют аксионы — гипотетические частицы, сохраняющие CP-инвариантность в ядерных взаимодействиях. Также в

---

<sup>26</sup> Такая классификация ранней Вселенной была предложена в книге С. Вайнберга «Первые три минуты» [63].

<sup>27</sup> Пекулярная скорость галактики — это скорость относительно космической системы отсчета, описывающей расширяющееся пространство Вселенной в метрике Фридмана — Робертсона — Уокера. Наличие пекулярной скорости сказывается в отклонении движения галактик от закона Хаббла. Пекулярная скорость также определяется как скорость относительно микроволнового фона реликтового излучения Вселенной.

<sup>28</sup> Речь идет о предсказании аномалий в скоростях галактик в скоплениях, обсуждавшихся в подразделе 8.1.

<sup>29</sup> Подробнее с этой темой можно ознакомиться в работе [65].

качестве кандидатов на роль CDM часто рассматривают стабильные суперпартнеры<sup>30</sup> обычных элементарных частиц, такие, например, как нейтралино [66]. Эпоха доминирования скрытого вещества наступает примерно при температуре  $T \approx 10^5$  К. С этого момента рост возмущений плотности вещества становится достаточно быстрым, чтобы привести к образованию гравитационно-связанных систем. Движущей силой этого процесса является так называемая гравитационная джинсовская неустойчивость, приводящая к коллапсу отдельных объемов вещества.

**8. Эпоха рекомбинации водорода.** Вслед за эпохой доминирования скрытой массы наступает эпоха рекомбинации водорода. До рекомбинации во Вселенной существует горячая плазма, состоящая из темной материи, протонов, электронов, фотонов, некоторого количества легких ядер. С понижением температуры протоны и электроны объединяются (рекомбинируют), и образуется водород — один из самых распространенных элементов во Вселенной. В плазме электромагнитное излучение не распространяется свободно, фотоны сталкиваются с электронами и протонами, рассеиваются, меняют направление движения и частоту. После рекомбинации количество заряженных частиц резко уменьшается, и вещество становится прозрачным для излучения. Иногда этот момент времени называют эпохой последнего рассеяния, или поверхностью последнего рассеяния. Температура этой эпохи известна очень хорошо из лабораторной физики и приходится на интервал 3000—4500 К. Фотоны, рассеянные последний раз, доходят до наблюдателя, практически не взаимодействуя с веществом по дороге. Эти фотоны и образуют реликтовое излучение. Оно обладает спектром абсолютно

---

<sup>30</sup> Термин «суперпартнеры» возникает в рамках теории струн. Подробнее о нем можно прочитать в подразделе 9.4.

черного тела и по мере расширения понижает свою температуру. Как уже неоднократно отмечалось, к настоящему времени оно имеет температуру приблизительно 2,725 К. Разница между этой температурой и температурой рекомбинации (3000 К) обусловлена тем, что с эпохи последнего рассеяния размер Вселенной увеличился примерно в 1000 раз. Естественно, что все неравномерности распределения температуры по поверхности последнего рассеяния остаются в виде угловой неравномерности распределения температуры реликтового излучения по небу. Наблюдая эти неравномерности, или анизотропию, космологи делают выводы о спектре первичных возмущений, об основных параметрах Вселенной и о физике в области сверхвысоких энергий.

#### **9. Образование крупномасштабной структуры.**

Итак, Вселенная остывает, и доминирующими становятся гравитационные силы. В это время под влиянием гравитационного взаимодействия формируется привычная, наблюдаемая нами Вселенная. Условно эта эпоха приходится на период, когда красное смещение  $z \propto 10$ , т. е. когда температура реликтовых фотонов падает до 300 К, или примерно 13–17 млрд лет назад. Согласно теории, разработанной Я. Б. Зельдовичем и его учениками, на ранних стадиях жизни Вселенной из нейтрального вещества выделяются неоднородности с массой около  $10^{15}$  солнечных масс, которые начинают сжиматься. Причем это сжатие происходит несимметрично. При этом образуются плоские объекты, которые за свою форму получили название блинов. Их вещество, остывая, фрагментируется на более мелкие сгустки. Так образуются галактики, а затем звезды. Из блинов во Вселенной формируется ячеистая структура с размерами ячеек около 50–100 Мпк и толщиной стенок 3–4 Мпк. В узлах ячеек располагаются большие скопле-

ния галактик. Пересечения блинов образуют сверхскопления в виде нитей. Все эти образования были обнаружены в 80-е гг. XX в. в результате изучения пространственного распределения галактик.

**10. Наша эра.** В конце 1998 г. обнаружено ускоренное расширение Вселенной. Физическая причина, приводящая к расширению, — «темная энергия» (связанная с  $\Lambda$ -членом). Природа ее на данный момент неизвестна. В настоящее время простейшей (и поэтому самой проработанной) из предложенных космологических моделей является модель с холодной темной материей и космологической постоянной ( $\Lambda$ -CDM). В ней темная материя дает вклад в кривые вращения галактик и их пекулярные скорости, а  $\Lambda$ -член приводит к ускоренному расширению Вселенной. Эта модель, давая хорошее количественное согласие с наблюдательными данными, не объясняет физическую природу темной материи и темной энергии. Другая проблема этой модели состоит в невозможности объяснить, почему величина космологической постоянной так мала (в предположении, что она представляет собой так называемую энергию вакуума). В ранней Вселенной  $\Lambda$ -член обеспечивал инфляцию. Величина его была значительно больше, и он являлся не новой фундаментальной мировой константой, а генерировался в результате некоторых процессов, происходящих в ранней Вселенной. Современный  $\Lambda$ -член может также иметь «динамическое» происхождение, он может быть результатом неких физических процессов, которые мы пока не понимаем. Но он может быть также новой фундаментальной константой. Все эти нерешенные вопросы приводят к необходимости построения последовательной динамической теории темной энергии (см., напр., обзор [67]).

Сейчас можно только сказать, что плотность обычного

вещества во Вселенной убывает как куб масштабного фактора, а плотность вещества, ассоциированного с  $\Lambda$ -членом, остается постоянной в ходе расширения (точнее, меняется значительно медленнее, чем куб масштабного фактора). Это значит, что, возможно, близка эпоха (по космологическим меркам) доминирования этого нового вида материи, новая эпоха экспоненциального расширения. Конкретный прогноз судьбы Вселенной можно дать только в рамках конкретной космологической модели (подробнее об этом в подразделе 9.4).

Таковы основные эпохи развития нашей Вселенной, которые изучает космология. Идеи и факты, обсуждающиеся в этой главе, в подробностях изложены в [49, 59, 60, 63].

## **8.5. Нерешенные проблемы современной космологии**

Космологическая модель, описанная в настоящей главе, прошла длительную проверку на согласие с наблюдениями. К настоящему времени эта модель подтверждена предсказанным ею и обнаруженным в многочисленных экспериментах реликтовым электромагнитным фоном, данными по обилию легких элементов во Вселенной, наблюдениями по расширению галактик и многими другими бесспорными фактами. Однако было бы ошибкой считать, что рассмотренная выше космологическая модель в состоянии полностью объяснить все имеющиеся к настоящему времени экспериментальные данные. Ниже мы обсудим проблемы, не решенные в рамках современных теоретических подходов, а иногда ими же и поставленные. При обсуждении мы будем учитывать только экспериментально подтвержденные теории, так или иначе признанные в научном сообществе на сегодняшний день. Многие расши-

ренные теории, которые еще находятся на стадии экспериментальной проверки, дают те или иные ответы на поставленные вопросы. (Подробнее о таких теориях будет рассказано в гл. 10.)

**1. Темная материя и темная энергия.** Каковы свойства темной материи и темной энергии? Что такое темная материя и темная энергия с точки зрения физики микромира? Каковы перспективы изучения темной материи и темной энергии в земных условиях?

Что является причиной наблюдаемого ускоренного расширения Вселенной? Является ли темная энергия космологической константой или же она является динамическим полем, получившем название «квинтэссенция»? Ответ на последний вопрос требует точного определения уравнения состояния темной энергии.

Что такое темная материя? Связана ли она с суперсимметрией, массивными нейтрино или, возможно, топологическими дефектами пространства-времени? Является ли она иной формой материи или это следствие неадекватности классической теории гравитации?

**2. Проблема малости космологической постоянной.** Одно из наиболее простых объяснений природы космологической постоянной — то, что она представляет собой гравитационную энергию вакуума. Согласно ОТО любая плотность энергии создает гравитационное поле, которое изменяет геометрию пространства-времени. Согласно предсказаниям квантовой теории физический вакуум должен обладать ненулевой энергией. В силу перенормировки вероятности процессов не зависят от этой энергии, но при попытке совместить ОТО и квантовую теорию появляется очень интересная деталь: нулевая энергия вакуума может быть обнаружена в силу ее влияния на метрику пространства-времени. При анализе уравнений ОТО

с учетом квантовых зависимостей при некоторых естественных предположениях получается теоретическое значение космологической постоянной. Оно оказывается порядка  $|\rho_{vac}| \approx 10^{106} \text{ г/см}^3$  (в терминах плотности энергии). Из астрономических наблюдений мы знаем, что в настоящее время  $\Lambda$  чрезвычайно мала,  $|\rho_\Lambda| < 10^{-29} \text{ г/см}^3$ , т. е. *более чем на 130 порядков (!)* отличается от предсказываемого значения. Вероятность того, что за счет некоторого механизма происходит случайная компенсация различных вкладов в  $\rho_{vac}$  с точностью почти 130 порядков, исчезающе мала. Естественный механизм, который мог бы привести к сокращению космологической постоянной с такой степенью точности, в настоящее время неизвестен, и его поиски представляют сейчас одну из наиболее увлекательных задач как в космологии, так и в физике элементарных частиц. В связи с этим возникает и другой вопрос: почему предсказанная энергия квантового вакуума мало влияет на расширение Вселенной? Ответ на этот вопрос также неизвестен.

Существуют и другие интерпретации космологической постоянной [68, 69]. Согласно геометрическому подходу космологическая постоянная является константой, которая описывает некоторую принципиально неустранимую кривизну пространства-времени. Динамический подход утверждает, что космологическая постоянная эффективно учитывает вклад неких полей, или, возможно, вещества. В таком подходе  $\Lambda$  только кажется постоянной, слабо меняясь во времени и пространстве.

**3. Проблема начальной сингулярности.** Для описания Вселенной в теории Большого взрыва на временах, меньших планковского времени ( $t < t_{Pl}$ ), употребляется термин «сингулярность» зачастую без конкретизации его смысла. Для описания подобных состояний вещества

необходимо использовать понятия квантовой гравитации, так как огромные плотности оказываются сосредоточены в очень малых областях пространства, вследствие чего перестают работать законы ОТО и квантовой механики. Законченной и самосогласованной квантовой теории гравитации на данный момент не существует (см. подраздел 9.4 и гл. 10), равно как нет ни одного эксперимента, демонстрирующего квантовый характер гравитационного поля на сверхмалых масштабах. Поэтому четкого представления о том, что происходило на самом первом этапе существования Вселенной, не существует. Также остаются без ответа вопросы: каково происхождение материи, энергии и пространства-времени, сформировавших Вселенную? Что было до Большого взрыва (если этот вопрос вообще уместен)?

**4. Проблема начальных условий.** Модель космической инфляции вполне успешна, но не является единственно возможным сценарием в космологии. Аргументы против теории инфляции сводятся к тому, что решения, предлагаемые инфляционной моделью, являются лишь переформулировкой изначальных вопросов. Несмотря на то, что инфляция приводит к наблюдаемой Вселенной в достаточно широком диапазоне начальных условий, ничто не мешало условиям в ранней Вселенной быть такими, чтобы итоговое состояние после инфляции отличалось от наблюдаемой картины. Все эти сложности носят название «проблемы начальных значений», или «тонкой настройки Вселенной». Изменение значения фундаментальных констант (даже в пределах порядка) или исключение одного из внутренних квантовых чисел ведет к невозможности существования атомов, звезд и галактик [70]. Многие параметры, такие как масса протона и гравитационная постоянная, не могут быть определены теоретически, их полу-

чают лишь экспериментально. Современная физика стремится построить максимально общую теорию, т. е. крайне желательно, чтобы в ней нашли свое объяснение величины большинства (а лучше всех) фундаментальных физических констант. В связи с этим возникают вопросы: все ли константы независимы друг от друга? Какие закономерности устанавливают связь между значениями постоянных и фиксируют их величины? Какие постоянные являются наиболее фундаментальными? Случайны ли наблюдаемые нами значения фундаментальных констант или существуют какие-то неизвестные нам законы, делающие одни значения более вероятными, чем другие?

**5. Судьба Вселенной.** Современные космологические теории предполагают два основных сценария дальнейшей эволюции Вселенной. В зависимости от средней плотности и свойств материи и энергии во Вселенной она может продолжать вечное расширение или может гравитационно замедляться и перейти к сжатию, в конце концов придя обратно к сингулярности («Большое сжатие»). Если же Вселенная будет продолжать расширяться, остается открытым вопрос о конечной стадии расширения. Будет ли оно вечно продолжаться, приводя к медленному остыванию Вселенной (для этого сценария в англоязычной литературе используется термин Big Freeze — Большое замерзание) и тепловой смерти? Другие идеи о судьбе Вселенной включают теории «Большого разрыва»<sup>31</sup>. Расширение в этом сценарии будет ускоряться, что приведет к постоянному приближению к нам космологического горизонта видимости<sup>32</sup>, разрыву сверхскоплений и скоплений галактик, затем самих галактик и так, постепенно, всех свя-

---

<sup>31</sup> Big Rip [71].

<sup>32</sup> Граница области Вселенной, свет от которой успел дойти к нам с момента рождения Вселенной.

занных систем. Существуют также космологические сценарии, прогнозирующие, что космологическое сжатие, которое возникнет в будущем, не приведет к сингулярности, а вновь сменится расширением при некотором конечном значении масштабного фактора — сценарий «отскока». Двигается ли Вселенная по направлению к Большому замерзанию, Большому разрыву, Большому сжатию или Большому отскоку? Является ли наша Вселенная частью бесконечно повторяющейся циклической модели с отскоками в конце как стадии расширения, так и стадии сжатия? Данные, имеющиеся в настоящее время, позволяют считать более вероятным то, что материи и энергии недостаточно, чтобы вызвать сжатие, т. е. расширение Вселенной будет продолжаться. Более того, есть указания [72] на то, что весьма вероятна фантомная природа темной энергии (отношение ее давления к плотности меньше минус единицы). Следовательно, на сегодняшний день сценарий Большого разрыва является наиболее обоснованным.

**6. Заключительные замечания.** Впечатляющие успехи космологии поставили неожиданные и фундаментальные вопросы. Сегодня мы не знаем, что представляет собой основная часть материи во Вселенной, не знаем, какие явления и процессы происходили во Вселенной на самых ранних этапах ее эволюции, не знаем, что ждет Вселенную на поздних этапах ее существования. Ответы на многие из сформулированных выше вопросов будут найдены в обозримом будущем — в течение ближайших нескольких десятков лет, а может быть и раньше. В настоящее время происходит кардинальное изменение взглядов на природу, и главные открытия здесь еще впереди.

## Глава 9

### Наблюдательный статус ОТО

#### 9.1. Параметризованный постньютоновский формализм

Одним из направлений экспериментальной проверки ОТО является прямое наблюдение предсказываемых ею эффектов. В частности, особый интерес представляет сравнение результатов ОТО с наблюдаемыми в рамках Солнечной системы отклонениями от следствий ньютоновской теории тяготения [73]. Именно эта идея лежит в основе трех классических экспериментов, впервые подтвердивших правоту теории Эйнштейна: гравитационного красного смещения спектральных линий, отклонения лучей света и смещения перигелия Меркурия. Казалось бы, можно со все возрастающей точностью просто продолжать измерения, и только в случае расхождения между предсказаниями ОТО и экспериментальными данными обратиться к другим теориям. Однако практически с момента создания ОТО параллельно разрабатывались альтернативные ей теории гравитации. В слабых гравитационных полях предсказания этих теорий совпадали с предсказаниями ОТО, но расходились с выводами ОТО для сильных полей. В результате возникла необходимость в проведении независимых экспериментов с минимальным количеством априорных предположений о природе гравитации. Для сравнения различных теорий и оценки значимости экспериментов были разработаны специальные методы. Краткое описание этих методов приведено в данной

главе, которая в значительной степени следует подробной монографии К. Уилла [73].

**1. Формализм Дикке, метрические теории.** Необходимость в таких методах возникла у Р. Дикке при разработке и анализе ряда высокоточных экспериментов. Результаты этих экспериментов только упрочили веру в справедливость ОТО. Дикке предложил собственный подход к анализу экспериментов, сравнения и отбора конкурирующих теорий гравитации [74]. В основе подхода Дикке лежат два постулата о виде математического формализма, который следует использовать для исследования гравитации:

1. Пространство-время рассматривается как четырехмерное многообразие, каждая точка которого соответствует некоему физическому событию, при этом данное многообразие априори не имеет ни метрики, ни аффинных связей;
2. Теория гравитации представляется в виде, не зависящем от конкретного выбора координат, т. е. полевые уравнения и математические величины записываются в ковариантной форме.

Подход Дикке налагает на возможные модели гравитации следующие ограничения:

1. Гравитация должна быть связана с одним или несколькими тензорными полями, т. е. скалярами, векторами и тензорами различных рангов;
2. Уравнения поля, описывающие поведение гравитации, должны получаться путем вариации лагранжиана модели на основании принципа наименьшего действия.

Этот подход позволяет исследовать природу пространства-времени и гравитации на фундаментальном уровне, поскольку не делает почти никаких допущений [73]. Таким образом, в рамках метода Дикке разрешаются вопросы о том, на все ли тела гравитация действует одинаково, вызывая одно и то же ускорение; является ли локальная изотропность неотъемлемым свойством пространства; связаны ли с гравитацией какие-либо поля и какого вида, если связаны (скалярные, векторные, тензорные, аффинные. . .).

На основании результатов серии экспериментов Дикке приходит к следующим выводам относительно природы гравитации:

1. Гравитация, по крайней мере частично, связана с симметричным тензорным полем — метрикой;
2. Влияние гравитации на материю и поля описывается выражением  $\nabla_k T^{ik} = 0$ , где  $T^{ik}$  — тензор энергии-импульса, всей материи и негравитационных полей, а  $\nabla_k$  — оператор ковариантной производной.

Теории гравитации, удовлетворяющие этим условиям, называются *метрическими*.

**2. Формализм Эддингтона – Робертсона – Шиффа.** Постулаты метрических теорий допускают существование далекодействующих полей тяготения, однако требуют, чтобы материя и поля не зависели от них [75]. Таким образом, метрика оказывается единственным проявлением гравитации, входящим в уравнения движения, а остальные поля могут создаваться материей и совместно с ней генерировать метрику, но не способны непосредственно с ней взаимодействовать. Материя реагирует только на метрику, так что метрика и уравнения движения материи являются первичными, и одна метрическая теория отличается

от другой только тем, как материя и, возможно, другие поля создают метрику.

Параметризованный постньютоновский (ППН) формализм продолжает формализм Дикке [73]. Он использует в качестве начальных постулатов выводы Дикке о свойствах гравитации и для всех видов метрических теорий рассматривает медленное движение в постньютоновском пределе слабого поля, описывая его с помощью девяти параметров. Каждая метрическая теория характеризуется своим набором значений для этих ППН-параметров. Данное приближение является достаточно точным для экспериментов в Солнечной системе, но оно неприменимо для обсуждения гравитационного излучения, когда не выполняется предположение медленного движения, или для описания систем компактных объектов, вроде двойных пульсаров, где не выполняется предположение слабости полей, а также в космологии, где делаются совершенно иные предположения [75].

Еще одно предположение ППН-формализма состоит в том, что идеальная невязкая жидкость в ньютоновском пределе подчиняется стандартным уравнениям гидродинамики. Из этих положений определяются как ньютоновский потенциал, так и тензор энергии-импульса рассматриваемой жидкости. В конечном итоге записывают постньютоновскую метрику как разложение в ряды, выраженное с помощью таких величин, как ньютоновский потенциал, квадрат скорости жидкости, отношение давления к плотности и т. д., и десяти параметров, называемых постньютоновскими. Обобщенная постньютоновская метрика должна быть записана таким образом, чтобы удовлетворять следующим принципам:

1. Все отклонения метрики от плоского пространства только ньютоновского и постньютоновского поряд-

ка; пост-постньютоновские и более высокого порядка отклонения не учитываются;

2. На больших расстояниях материи, создающей поле, метрика становится плоской;
3. В метрику входят только масса покоя, энергия, давление и скорость вещества, но не входят градиенты этих величин;
4. Координаты выбраны таким образом, чтобы метрические коэффициенты были безразмерными.

Используя все эти предположения, можно параметризовать не только метрику, но и тензор энергии-импульса, выразив его через ньютоновский потенциал, плотность, квадрат скорости вещества, давление и т. д. Все расчеты, приведенные в [76], применимы только к массивным телам.

В ППН-подходе присутствуют два постулата из подхода Дикке:

1. Существует метрика с сигнатурой  $-2$ , которая определяет единицы измерения длины и времени в тензорном виде:

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j; \quad (9.1)$$

2. Вещество с давлением реагирует на воздействие гравитации таким образом, что ковариантная дивергенция полного тензора энергии-импульса материи и негравитационных полей равна нулю:

$$\nabla_k T^{ik} = 0. \quad (9.2)$$

Заметим, что оба эти постулата получены из предположения, что везде существуют локальные лоренцевы системы отсчета, в которых все законы СТО представимы в обычном для них виде. Таким образом, гравитационные модели, удовлетворяющие этим двум постулатам, и называются метрическими.

Сравнение метрических теорий гравитации друг с другом и с результатами экспериментов становится особенно простым, если рассматривать постньютоновский предел (первый порядок разложения) медленного движения. Он достаточно точен и согласуется с данными наблюдений в Солнечной системе. Наиболее простым видом постньютоновского предела является рассмотрение движения планет как пробных тел по геодезическим при условии, что метрика в Солнечной системе описывает Солнце как сферический невращающийся объект. Это изначальный вариант ППН-формализма Эддингтона — Робертсона — Шиффа [77, 78, 79]. В этом подходе метрика, описывающая Солнечную систему, имеет вид [73]

$$ds^2 = \left[ 1 - 2 \frac{M_{\odot}}{r} + 2\beta \left( \frac{M_{\odot}}{r} \right)^2 \right] dt^2 - \left[ 1 + 2\gamma \frac{M_{\odot}}{r} \right] (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (9.3)$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  — радиальная координата,  $M_{\odot}$  — масса Солнца в геометрических единицах (в единицах длины),  $\beta$  и  $\gamma$  — константы метрических теорий. Например, в ОТО  $\beta = \gamma = 1$ , в теории Бранса — Дикке  $\beta = 1$ ,  $\gamma = (\omega + 1)/(\omega + 2)$ , где  $\omega$  — константа связи Бранса — Дикке.

Шифф [79], Нордтведт [80] и Байерлейн [81] показали, что формализм Эддингтона — Робертсона — Шиффа

слишком идеализирован. Каждый из них вносил изменения таким образом, чтобы охватить интересующие их новые эффекты. Шифф добавил метрический член, связанный со смещением инерциальных систем отсчета. Байерлейн попытался создать формализм заново, рассматривая ППН-предел Чандрасекара для потоков в ОТО и используя произвольные параметры в качестве коэффициентов при некоторых членах. Нордтведт также начал с нуля, взяв ППН-предел Эйнштейна — Инфельда — Хоффмана для точечных частиц в ОТО, и добавил с произвольными коэффициентами (новыми параметрами) несколько членов, которые отсутствовали в ОТО, но могли присутствовать в других теориях. Однако ни одна из этих новых версий не удовлетворяла необходимым требованиям: подход Шиффа оказался слишком узким, версия Байерлейна не включала в себя весьма простые члены, которые отсутствуют в ОТО, но могут появиться в других метрических теориях, а Нордтведт рассматривал планеты как совокупность невзаимодействующих точечных частиц, движущихся в сглаженных гравитационных полях друг друга (модель самосогласованного поля), а подобная картина слишком далека от реальности.

Учитывая все эти недостатки, Уилл и Торн объединили преимущества подходов Нордтведта и Байерлейна и сформулировали собственную версию — так называемый ППН-формализм для идеальной жидкости, который применим для любой метрической теории.

**3. Ньютоновский предел.** Тяготение в Солнечной системе является достаточно слабым, и ньютоновская теория объясняет почти все эффекты, кроме наиболее тонких. С точностью до  $10^{-5}$  свет распространяется по прямой с постоянной скоростью, а пробные частицы движутся

в соответствии с уравнением

$$\mathbf{a} = -\nabla U, \quad (9.4)$$

где  $\mathbf{a}$  — ускорение тела<sup>33</sup>,  $U$  — ньютоновский потенциал тяготения, создаваемый материей с плотностью массы покоя  $\rho$  и определяемый выражением (далее в этом подразделе мы работаем в системе единиц, где  $G = 1$ )

$$\nabla^2 U = -4\pi\rho. \quad (9.5)$$

Стоит заметить, что традиционно в ППН ньютоновский потенциал  $U$  является положительной величиной  $U \approx M/r$  [82].

Идеальная жидкость подчиняется обычным уравнениям гидродинамики:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (9.6)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \nabla U - \nabla p, \quad (9.7)$$

где  $\mathbf{v}$  и  $\rho$  — скорость и плотность массы покоя элемента жидкости соответственно;  $p$  — полное давление (материи и излучения) на этот элемент;  $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v}\nabla$  — полная производная по времени.

В общем случае уравнение геодезических имеет вид

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} = 0, \quad (9.8)$$

где

$$d\tau = ds = \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j} \quad (9.9)$$

---

<sup>33</sup> Здесь и далее в данной главе полужирным шрифтом обозначены векторы в трехмерном пространстве.

для пространственноподобных интервалов ( $g_{ij}dx^i dx^j > 0$ ),  
и

$$d\tau = \sqrt{-g_{ij}dx^i dx^j} \quad (9.10)$$

для времениподобных интервалов ( $g_{ij}dx^i dx^j < 0$ ). Величины  $u^i = dx^i/d\tau$  образуют вектор 4-скорости.

Поскольку с точки зрения метрической теории гравитации ньютоновскую физику можно считать приближением первого порядка, для пробного тела, покоящегося во внешнем статическом поле тяготения, уравнение (9.8) дает ускорение тела  $a^\alpha = d^2x^\alpha/dt^2$  в статической системе координат  $(t, \mathbf{x})$  в виде

$$a^\alpha = -\Gamma_{00}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{00,\beta}. \quad (9.11)$$

Вдали от материи метрика должна отвечать геометрии Минковского. В присутствии очень слабого поля тяготения из (9.11) можно получить уравнение ньютоновского тяготения (9.4), только если

$$g^{\alpha\beta} \approx \delta^{\alpha\beta}, \quad g_{00} \approx -1 + 2U. \quad (9.12)$$

Легко показать, что в этом приближении и при тензоре энергии-импульса, имеющем вид [75]:

$$\begin{aligned} T^{00} &= \rho, \\ T^{0\alpha} &= \rho v^\alpha, \\ T^{\alpha\beta} &= \rho v^\alpha v^\beta + p \delta^{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (9.13)$$

а уравнения Эйлера (9.6) и (9.7) эквивалентны уравнению

$$T^i{}_{;j} \approx T^i{}_j + \Gamma_{00}^j T^{00} = 0. \quad (9.14)$$

Здесь указаны только члены низшего порядка по  $v^2 \sim U \sim p/\rho$ .

**4. Постньютоновская система координат.** Для корректного обсуждения постньютоновского предела необходимо точно определить систему координат. Представим себе однородную Вселенную, в которой находится изолированная постньютоновская система тел [75]. Выберем систему координат так, чтобы ее внешние области, удаленные от изолированной материи, находились в свободном падении по отношению к окружающей их космологической структуре и покоились в системе отсчета, в которой Вселенная изотропна (система покоя Вселенной). Тогда в этих внешних областях метрика эволюционирует согласно выражению

$$ds^2 = - dt^2 + \left(\frac{a(t)}{a_0}\right)^2 \frac{\delta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}{\left(1 - \frac{kr^2}{4a_0^2}\right)^2} + h_{ij} dx^i dx^j, \quad (9.15)$$

где первые два члена представляют собой линейный элемент метрики Фрийдмана — Робертсона — Уокера, соответствующий однородной изотропной космологической модели, а третий — возмущение, обусловленное локальной материей. Здесь  $r$  — расстояние от локальной материи до точки поля,  $a$  — космологический масштабный фактор,  $k = 0, \pm 1$  — параметр кривизны. При данном радиусе  $r_0$  в фиксированный момент времени  $t_0$ , когда  $a(t_0) = a_0$ , можно перейти к системе координат

$$t' = t, \quad x^{\alpha'} = x^\alpha \left(1 - \frac{kr_0^2}{4a_0^2}\right)^{-1}, \quad (9.16)$$

в которой

$$ds^2 = (\eta_{ij} + h'_{ij}) dx^{i'} dx^{j'}. \quad (9.17)$$

Это можно сделать при значениях  $r_0$ , достаточно больших для того, чтобы  $\eta_{ij}$  была асимптотикой  $g_{ij}$ , т. е. при

$$h_{ij} \sim M/r_0 \ll 1, \quad (9.18)$$

где  $M$  — масса изолированной материи. В то же самое время значения  $r_0$  должны быть такими, чтобы отклонение космологической метрики от  $\eta_{ij}$  для  $r \ll r_0$  было малым, а именно: менее постньютоновского члена порядка  $(M/r)^2$ , входящего в  $h_{ij}$ . Оптимизирующее эти ограничения выражение для  $r_0$  запишется в виде

$$(M/r_0)^2 \gtrsim (r_0/a_0)^2 \Rightarrow M \ll r_0 \lesssim \sqrt{Ma_0}. \quad (9.19)$$

Поскольку для Солнечной системы  $r_0 \leq 10^3$  а. е.<sup>34</sup>, то максимальные отклонения от  $\eta_{ij}$  имеют порядок  $(r_0/a_0)^2 \sim 10^{-24}$ . Эти отклонения гораздо меньше ожидаемых постньютоновских отклонений  $(M/r)^2 \gtrsim 10^{-16}$ , которые могут сказаться на экспериментах в Солнечной системе. Таким образом, с точностью порядка  $10^{-24}$  метрика пространства-времени в интересующих нас случаях может считаться асимптотически эквивалентной метрике Минковского во внешних областях на расстояниях порядка  $10^3$  а. е.  $\approx 1,5 \cdot 10^{11}$  км, с отклонениями порядка  $M/r$  и  $(M/r)^2$  от нее во внутренних областях. При этом не учитывается изменение значения масштабного фактора  $a(t)$  со временем, так как их временной масштаб несоизмерим с динамическим масштабом для Солнечной системы (это изменение можно считать адиабатическим). Сконструированную таким образом систему координат назовем локальной кваздекартовой [75].

**5. Постньютоновские потенциалы.** Материю, составляющую Солнечную систему, можно рассматривать

---

<sup>34</sup> 1 а. е.  $\approx 1,5 \cdot 10^8$  км.

как идеальную жидкость [76]. Постньютоновский предел для идеальной жидкости в любой метрической теории гравитации лучше всего вычисляется формальным решением уравнений поля и представлением метрики в виде последовательности постньютоновских функционалов материальных переменных с коэффициентами, зависящими от типов связи локальной материи и космологического окружения, а также от других постоянных. Эволюция материальных переменных и, следовательно, функционалы метрики определяются уравнениями движения  $T_{;j}^{ij} = 0$ , где тензор энергии-импульса и постньютоновская метрика имеют порядок, согласующийся с ППН-приближением. Эволюция коэффициентов связи определяется решениями соответствующей космологической модели. Таким образом, наиболее общую постньютоновскую метрику можно найти, просто записав члены метрики, состоящие из возможных постньютоновских функционалов материальных переменных, каждый из которых умножен на произвольный коэффициент (возможно, зависящий от характера связи с космологическим окружением и других констант), и добавив эти члены к метрике Минковского для получения физической метрики. К сожалению, количество таких функционалов бесконечно велико, так что для развития формализма необходимо наложить некоторые ограничения на подлежащие рассмотрению члены, руководствуясь как субъективными соображениями, так и особенностями известных теорий тяготения [75], а именно:

1. Метрические функции должны быть ньютоновского и постньютоновского порядка; члены пост-постньютоновского и высших порядков не рассматриваются;
2. Метрические функции должны стремиться к нулю, когда расстояние  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  между точкой поля  $\mathbf{x}$  и ти-

пичной точкой внутри материи  $\mathbf{x}'$  становится большим. Это гарантирует, что в квазидекартовой системе координат асимптотической метрикой будет метрика Минковского;

3. Константы подбираются так, чтобы метрика была безразмерной;
4. В выбранной квазидекартовой системе начало координат как в пространстве, так и во времени является совершенно произвольным, так что метрика не должна содержать его в явном виде. Это требование гарантируется использованием функционалов, в которые точка наблюдения поля  $\mathbf{x}$  всегда входит в комбинации  $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$  (где  $\mathbf{x}'$  — точка, связанная с распределением материи), и представлением всех зависимостей от времени в неявном виде через вариации материальных переменных и возможных коэффициентов космологической связи;
5. Поправки к метрике  $h_{00}$ ,  $h_{0\alpha}$  и  $h_{\alpha\beta}$  при пространственных вращениях преобразуются как трехмерные скаляры, векторы и тензоры соответственно и, следовательно, должны быть сконструированы из соответствующих величин. Среди переменных, связанных с распределением материи, примерами являются: скаляры  $\rho$ ,  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ ,  $v'^2$ ,  $\mathbf{v}'(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  и др., векторы  $v'_\alpha$ ,  $(x - x')_\alpha$  и тензоры  $(x - x')_\alpha(x - x')_\beta$ ,  $v_\alpha v_\beta$  и др. Для переменных, зависящих от структуры уравнений теории поля и условий связи с космологическим окружением, имеются только два типа величин в системе покоя Вселенной: скалярные космологические коэффициенты связи, т. е. численные коэффициенты, и тензор  $\delta_{\alpha\beta}$ . В системе покоя изотропной Вселенной

никакие векторы или анизотропные тензоры не могут быть сконструированы. Если же Вселенная предполагается слегка анизотропной, такие члены возможны [83];

6. Функционалы метрики должны порождаться массой покоя, энергией, давлением и скоростью, но не их градиентами. Это ограничение является субъективным, и его можно легко снять, как только для этого появится причина. На данный момент таких причин нет;
7. Функционалы должны быть «простыми». Это ограничение является крайне субъективным.

Имея в виду указанные ограничения, запишем члены, которые могут появиться в постньютоновской теории:

1. В компонентах метрического тензора  $g_{\alpha\beta}$  учтем вклады до второго порядка малости. Из условия 5 следует, что при вращениях  $g_{\alpha\beta}$  должно вести себя как трехмерный тензор, так что единственные члены, которые могут появиться, это  $U\delta_{\alpha\beta}$  и

$$U_{\alpha\beta} = \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t)(x - x')_\alpha(x - x')_\beta}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x'. \quad (9.20)$$

Член  $U_{\alpha\beta}$  более удобно выразить через так называемый суперпотенциал

$$\chi(\mathbf{x}, t) = - \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x', \quad (9.21)$$

$$\chi_{,\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}U + U_{\alpha\beta}, \quad \nabla^2\chi = -2U. \quad (9.22)$$

Теперь необходимо рассматривать только члены  $U\delta_{\alpha\beta}$ ,  $\chi_{,\alpha\beta}$ .

2. В компонентах метрического тензора  $g_{0\alpha}$  учтем вклады до третьего порядка малости. Эти компоненты метрики при вращении должны преобразовываться как трехмерные векторы

$$V_\alpha = \int \frac{\rho' v_\alpha}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x', \quad (9.23)$$

$$W_\alpha = \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t)(x - x')_\alpha \mathbf{v}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3 x'. \quad (9.24)$$

3. В компоненте метрического тензора  $g_{00}$  учтем вклады до четвертого порядка малости. Эта компонента при вращении должна вести себя как скаляр. Единственные члены, которые следует в этом случае рассмотреть, это

$$U = \int \frac{\rho'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x', \quad (9.25)$$

$U^2$ ,  $U_{\alpha\beta}$  и

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \int \frac{\rho' v'^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x', \\ \Phi_2 &= \int \frac{\rho' U'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x', \\ \Phi_3 &= \int \frac{\rho' \Pi'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x', \\ \Phi_4 &= \int \frac{p'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x', \end{aligned} \quad (9.26)$$

а также

$$\Phi_W = \int \rho' \rho'' \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \left( \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}''}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}''|} - \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}''}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''|} \right) d^3 x' d^3 x'', \quad (9.27)$$

и, наконец,

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int \frac{\rho'[v'(\mathbf{x} - \mathbf{x}')]^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x' \\ \mathcal{B} &= \int \frac{\rho'(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{d\mathbf{v}'}{dt} d^3x'.\end{aligned}\quad (9.28)$$

Ограничение 7 на функционалы метрики было использовано, чтобы ликвидировать другие возможные громоздкие метрические функционалы, например,

$$V_\alpha V_\beta U^{-1}, \quad \Phi_1 \Phi_3 U^{-2}, \quad U_{\alpha\beta} U_{\alpha\beta}, \quad (9.29)$$

$$\nabla_\chi \nabla U, \quad \nabla \int \frac{\rho' \nabla' \chi'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \dots \quad (9.30)$$

Если один из этих членов появится в постньютоновской метрике какой-либо теории гравитации, использованный формализм можно соответственно модифицировать.

Существует значительное число простых и полезных соотношений, которым удовлетворяют функционалы, включенные в метрику:

$$\begin{aligned}\nabla^2 V_\alpha &= -4\pi\rho v_\alpha, \\ V_{\nu,\nu} &= -U_{,0}, \\ \nabla^2 \Phi_1 &= -4\pi\rho v^2, \\ \nabla^2 \Phi_2 &= -4\pi\rho U, \\ \nabla^2 \Phi_3 &= -4\pi\rho \Pi, \\ \nabla^2 \Phi_4 &= -4\pi\rho, \\ \nabla^2 (\Phi_W + 2U^2 - 3\Phi_2) &= 2\chi_{,\alpha\beta} U_{,\alpha\beta}, \\ \chi_{,00} &= \mathcal{A} + \mathcal{B} - \Phi_1.\end{aligned}\quad (9.31)$$

Большинство из этих соотношений выводится повторным использованием приближенной формулы, полученной из уравнения непрерывности (9.6):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho(\mathbf{x}', t) f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3 x' = \int \rho(\mathbf{x}', t) \mathbf{v}' \nabla' f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3 x', \quad (9.32)$$

где  $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  — произвольная непрерывная функция.

Применив все перечисленные выше соотношения, можно получить стандартную постньютоновскую калибровку для метрики:

$$\begin{aligned} g_{00} = & 1 + 2U - 2\beta U^2 + 2\xi \Phi_W + \\ & + (2\gamma + 2 + \alpha_3 + \varsigma_1 - 2\xi) \Phi_1 + \\ & + 2(3\gamma - 2\beta + 1 + \varsigma_2 + \xi) \Phi_2 + 2(1 + \varsigma_3) \Phi_3 + \\ & + 2(3\gamma + 3\varsigma_4 - 2\xi) \Phi_4 - (\varsigma_1 - 2\xi) \mathcal{A} - \\ & - (\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) w^2 U^2 - \alpha_2 w^\mu w^\nu U_{\mu\nu} - \\ & - (2\alpha_3 - \alpha_1) w^\nu V_\nu, \end{aligned} \quad (9.33)$$

$$\begin{aligned} g_{0\nu} = & -\frac{1}{2} (4\gamma + 3 + \alpha_1 - \alpha_2 + \varsigma_1 - 2\xi) V_\nu - \\ & - \frac{1}{2} (1 + \alpha_2 - \varsigma_1 + 2\xi) W_\nu - \\ & - \frac{1}{2} (\alpha_1 - 2\alpha_2) w^\nu U - \alpha_2 w^\mu U_{\mu\nu} = 0, \end{aligned} \quad (9.34)$$

$$g_{\mu\nu} = (-1 + 2\gamma U) \delta_{\mu\nu}, \quad (9.35)$$

где  $w^\nu$  — компоненты скорости системы отсчета, движущейся относительно системы отсчета, в которой сформулирована ППН-метрика (ППН-системы отсчета). В формулах (9.33) величины  $w^\nu$  являются величинами первого порядка малости.

При наличии электромагнитных полей уравнения движения, кроме уравнения движения материи (9.2) и уравнения движения пробных тел (уравнения геодезической) (9.8), должны содержать уравнения Максвелла

$$F_{;j}^{ij} = -4\pi J^i, \quad (9.36)$$

где

$$F_{ij} = A_{j;i} - A_{i;j} \quad (9.37)$$

есть тензор электромагнитного поля,  $A_i$  — вектор 4-потенциал электромагнитного поля,  $J^i$  — 4-вектор плотности тока.

Заметим, что ППН-параметрами являются коэффициенты, использованные в калибровке метрики (9.33). Для разных моделей гравитации значения этих коэффициентов различаются. Важность ППН-параметров состоит в том, что их вычисление является первым шагом в апробации *любой* новой теории гравитации. Поскольку значения ППН-параметров могут быть получены из эксперимента, то они являются объективным критерием корректности теории. С подробностями расчетов в рамках ППН-формализма можно ознакомиться в работе [75]. В следующем подразделе мы кратко остановимся на применении этого формализма к ОТО.

**6. Постньютоновский предел ОТО.** В ОТО гравитационное поле полностью описывается метрическим тензором  $g_{ij}$ , который удовлетворяет уравнению Эйнштейна

$$R_{ik} = \kappa(T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T) - \Lambda g_{ik}, \quad (9.38)$$

где  $T = T_{ij}g^{ij}$ . Полагая  $g_{ik} = \eta_{ij} + h_{ij}$ ,  $|h_{ij}| \ll 1$ , запишем  $R_{00}$  с точностью до квадратичных по  $h_{ij}$  членов и их производных, а  $R_{0\alpha}$  и  $R_{\alpha\beta}$  — с точностью до линейных членов.

В результате получаем

$$R_{00} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} - \frac{1}{2}(h_{\alpha\alpha,00} - 2h_{\alpha 0,\alpha 0}) + \\ + \frac{1}{2}h_{00,\alpha}(h_{\alpha\beta,\beta} - \frac{1}{2}h_{\beta\beta,\alpha}) - \frac{1}{4}|\nabla h_{00}|^2 + \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}h_{00,\alpha\beta}; \quad (9.39)$$

$$R_{0\alpha} = -\frac{1}{2}(\nabla^2 h_{0\alpha} - h_{\beta 0,\alpha\beta} + h_{\beta\beta,0\alpha} - h_{\beta\alpha,0\beta}); \quad (9.40)$$

$$R_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(\nabla^2 h_{\alpha\beta} - h_{00,\alpha\beta} + h_{\nu\nu,\alpha\beta} - h_{\nu\alpha,\nu\beta} - h_{\nu\beta,\nu\alpha}). \quad (9.41)$$

Выберем систему единиц измерения, в которой гравитационная постоянная и скорость света принимаются равными единице:  $G = c = 1$ . В рамках ППН-формализма разложим  $h_{00}$  до членов второго порядка малости. В требуемом порядке

$$R_{00} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}; \quad T_{00} = -T = \rho; \quad g_{00} = 1; \quad (9.42)$$

в результате чего получаем

$$\nabla^2 h_{00} = -8\pi\rho; \quad h_{00} = 2U. \quad (9.43)$$

Компоненты тензора  $h_{\alpha\beta}$  также разложим до членов второго порядка малости. Введем три условия калибровки ( $\alpha = 1, 2, 3$ ):

$$h_{\alpha;i}^i - \frac{1}{2}h_{i;\alpha}^i = 0; \quad h_j^i = \eta^{ik}h_{kj}. \quad (9.44)$$

Тогда из выражения (9.41) получаем

$$\nabla^2 h_{\alpha\beta} = -8\pi\rho\delta_{\alpha\beta}; \quad h_{\alpha\beta} = 2U\delta_{\alpha\beta}. \quad (9.45)$$

Компоненты  $h_{0\alpha}$  разложим до членов третьего порядка малости. Если ввести еще одно (четвертое) условие калибровки

$$h_{0;i}^i - \frac{1}{2}h_{i;0}^i = -\frac{1}{2}h_{00;0}, \quad (9.46)$$

то из (9.40) имеем

$$\nabla^2 h_{0\alpha} + U_{,0\alpha} = -8\pi\rho v_\alpha. \quad (9.47)$$

Отсюда, используя выражения (9.21)–(9.22), находим

$$h_{0\alpha} = -4V_\alpha + \frac{1}{2}\chi_{,0\alpha} = -\frac{7}{2}V_\alpha + \frac{1}{2}W_\alpha. \quad (9.48)$$

Легко проверить, что полученные решения для  $h_{00}$   $h_{0\alpha}$   $h_{\alpha\beta}$  до требуемого порядка малости удовлетворяют условиям калибровки (9.44) и (9.46).

Для нахождения ППН-параметров компоненты  $h_{0\alpha}$  должны быть оценены с точностью до четвертого порядка малости. При выбранной калибровке правильное значение величины  $R_{00}$  получается, если везде, где это необходимо, с нужной степенью точности учитываются решения низшего порядка для  $h_{ij}$ . В результате

$$R_{00} = -\frac{1}{2}\nabla^2(h_{00} + 2U^2 - 8\Phi_2). \quad (9.49)$$

В необходимом порядке также получаем

$$T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T = \frac{1}{2}\rho \left[ 1 + \left( v^2 - U + \frac{1}{2}\Pi + \frac{3p}{2\rho} \right) \right]. \quad (9.50)$$

Тогда одним из решений уравнений Эйнштейна (9.1) с принятой степенью точности будет

$$h_{00} = 2U - 2U^2 + 4\Phi_1 + 4\Phi_2 + 2\Phi_3 + 6\Phi_4. \quad (9.51)$$

В результате компоненты метрического тензора имеют вид

$$g_{00} = 2U - 2U^2 + 4\Phi_1 + 4\Phi_2 + 2\Phi_3 + 6\Phi_4, \quad (9.52)$$

$$g_{0\mu} = -\frac{7}{2}V_\mu + \frac{1}{2}W_\mu, \quad (9.53)$$

$$g_{\mu\nu} = (-1 + 2U) \delta_{\mu\nu}. \quad (9.54)$$

Сравнивая эти выражения с (9.33)–(9.35), находим ППН-параметры ОТО.

Значения ППН-параметров ОТО и их физический смысл приведены в табл. 9.1

Т а б л и ц а 9.1  
Значения ППН-параметров для ОТО

ППН-параметр	Физический смысл в ОТО	Значение в ОТО	Экспериментальное значение	Эффекты
$\gamma$	Кривизна пространства, создаваемая единицей массы покоя	1	$1 + 2,3 \times 10^{-5}$	Задержка, отклонение света
$\beta$	Степень нелинейности закона суперпозиции для гравитации	1	$1 + 1,1 \times 10^{-4}$	Эффект Нордтведта, смещение перигелия
$\xi$	Наличие эффектов привилегированного положения	0	$1 \times 10^{-3}$	Приливы Земли
$\alpha_1$	Наличие эффектов привилегированной системы отчета	0	$1 \times 10^{-4}$	Круговая поляризация
$\alpha_2$		0	$4 \times 10^{-7}$	Прецессия оси
$\alpha_3$		0	$4 \times 10^{-20}$	Самоускорение
$\zeta_1$		0	$2 \times 10^{-2}$	—
$\zeta_2$	Нарушение закона сохранения полного импульса	0	$4 \times 10^{-5}$	Ускорение двойного пульсара
$\zeta_3$		0	$1 \times 10^{-8}$	3-й закон Ньютона
$\zeta_4$		0	$6 \times 10^{-3}$	—

Таким образом, ОТО является внутренне согласованной теорией и не предсказывает каких-либо эффектов, связанных с наличием привилегированного положения, привилегированной системой отсчета или нарушением закона сохранения полного импульса.

## 9.2. Современные подтверждения ОТО

В подразделе 8.1 мы описали основные космологические подтверждения ОТО<sup>35</sup>. Напомним: речь идет об эффекте гравитационного линзирования и крупномасштабной структуре Вселенной. Данный подраздел посвящен астрономическим наблюдениям эффектов ОТО. Подробнее эти вопросы разобраны в обзорной статье [84]. Мы будем стремиться ограничиться изложением лишь сути, следуя [84].

**1. Наблюдения пульсаров.** Хорошую возможность проверки ОТО в режиме сильного поля дают двойные пульсары и пульсары в двойных системах. Несмотря на то, что компонент двойной системы движется, строго говоря, в слабом поле своего компаньона, сильными оказываются эффекты собственного поля. В 2003 г. была открыта первая двойная система PSR J0737-3039, оба компонента которой — пульсары [85]. Система PSR J0737-3039 подобна другой — PSR B1913+16, открытой в 1974 г. Тейлором и Халсом [86]<sup>36</sup>. Компоненты системы отделены друг от друга расстоянием около 800 тыс. км, скорость движения по орбите составляет приблизительно 300 км/сек., орбитальный период составляет 2,4 ч.

Необычайная близость компонент системы и малый ор-

---

<sup>35</sup> Именно ОТО, а не теории горячей Вселенной.

<sup>36</sup> Получившим за свое исследование Нобелевскую премию по физике 1993 г.

битальный период, а также тот факт, что мы видим систему практически с ребра — все это позволяет исследовать проявления релятивистских эффектов с высочайшей точностью. Опубликовано множество исследований, свидетельствующих о полном соответствии наблюдаемых эффектов с теорией [87, 88, 89, 90]:

- Наблюдается предсказываемая ОТО потеря энергии системой за счет излучения гравитационных волн. Это является сильным косвенным подтверждением существования гравитационных волн. Из-за потери энергии на их излучение размер орбиты системы сокращается на 7 мм в сутки, что находится в полном соответствии с ОТО. Компоненты системы столкнутся приблизительно через 80 млн лет, вероятно, образовав черную дыру.
- Периастр системы<sup>37</sup> смещается на  $17^\circ$  каждый год, что в 140 000 раз больше релятивистского смещения перигелия орбиты Меркурия.
- При сближении компонентов наблюдается увеличение их собственного периода вращения на 0,38 мкс за счет замедления хода времени в сильном гравитационном поле.
- Когда сигнал от одного из пульсаров проходит в непосредственной близости от другого пульсара, сильное искривление пространства-времени и замедление хода времени вызывает задержку прохождения сигнала до 90 мс<sup>38</sup>.

---

<sup>37</sup> Точка орбиты пульсаров, в которой они находятся на наименьшем расстоянии друг от друга, по аналогии с перигелием.

<sup>38</sup> Эффект Шапиро.

- Вращение двух компонент совместно приводит к смещению оси, вокруг которой они вращаются. Как следствие, оси вращения пульсаров испытывают медленную прецессию, которая была обнаружена наблюдениями.

Наблюдения миллисекундных пульсаров позволяют оценить ППН-параметр  $\alpha_3$ , отвечающий за сохранение импульса и существование выделенной системы отсчета:  $|\alpha_3| < 2 \cdot 10^{-20}$  [91].

**2. Спутниковые эксперименты.** Наилучшим образом ОТО исследована в режиме слабого гравитационного поля с помощью спутниковых экспериментов в Солнечной системе. Спутниковые эксперименты позволяют существенно компенсировать негравитационные шумы, достичь сильных перепадов гравитационного потенциала и больших ускорений, что недостижимо в земных условиях.

Среди спутниковых экспериментов, подтверждающих предсказания ОТО, в первую очередь следует назвать эксперименты по лазерной дальнометрии Луны. С помощью этих экспериментов измеряется следующая комбинация ППН-параметров:  $\eta = 4\beta - \gamma - 3$ , равную нулю в ОТО. По последним год  $\eta = (4, 0 \pm 4, 3) \times 10^{-4}$ . Эксперимент продолжается, данные накапливаются, что позволяет делать все более точные оценки.

Сильный принцип эквивалентности утверждает, что результаты любого локального эксперимента не зависят от того, где и когда этот эксперимент проводится. Именно он применим к самогравитирующим объектам. Принцип требует, чтобы гравитационная постоянная была одинакова всегда и везде во Вселенной. Из данных лазерной дальнометрии можно дать следующее ограничение на относительное изменение во времени гравитационной постоянной:  $\dot{G}/G \leq 10^{-20} \text{сек.}^{-1}$  [92].

В 1997 г. к Сатурну была запущена миссия Кассини — Гюйгенс (Cassini – Huygens), успешно работающая по сей день. Аппарат состоит из двух основных элементов: станции Кассини (Cassini orbiter) и спускаемого зонда Гюйгенс (Huygens probe), предназначенного для посадки на Титан и успешно совершившего высадку в 2005 г. Станция Cassini в данный момент является искусственным спутником Сатурна. Эксперимент, проведенный с использованием микроволновой системы связи, установленной на станции Cassini, позволил определить ППН-параметр  $\gamma - 1 = (2,1 \pm 2,3) \times 10^{-5}$ . Этот результат является лучшей на сегодняшний день проверкой ОТО в спутниковых экспериментах.

Другими замечательным спутниковыми экспериментами являются спутники Gravity Probe A и Gravity Probe B, специально сконструированные для проверки ОТО. Эксперименты призваны обнаружить три эффекта, предсказываемые ОТО: замедление времени в гравитационном поле, геодезическую прецессию<sup>39</sup> и прецессию за счет увлечения инерциальной системы координат вблизи вращающегося массивного тела (спиновый эффект Лензе – Тирринга<sup>40</sup>). Соответствие эффекта замедления времени предсказаниям ОТО требует проверки локальной пространственной инвариантности. Точность, с которой выполняется локальная пространственная инвариантность, может быть рассчитана следующим образом:

$$\Delta \frac{\nu}{\nu} = (1 + \mu) \frac{U}{c^2}, \quad (9.55)$$

здесь  $U$  — локальный гравитационный потенциал, отклонение описывается параметром  $\mu$ . Данные Gravity Probe A

<sup>39</sup> Эффект известен как «эффект де Ситтера».

<sup>40</sup> Эффект Лензе – Тирринга — прецессия спинового и орбитального моментов пробной частицы вблизи вращающегося тела.

позволили дать оценку  $\mu < 2 \times 10^{-4}$ , данные эксперимента [93] улучшили эту оценку до  $\mu < 2,1 \times 10^{-5}$ . Также этот эффект постоянно подтверждается данными GPS.

По данным спутника Gravity Probe B уже удалось подтвердить эффект де Ситтера с точностью более 1 %. Однако из-за неучтенных ранее эффектов считывания показаний, пока не полностью исключенных из полученных данных, точность измерений на данный момент ограничена 0,1', что не позволяет уверенно выделить явление увлечения инерциальной системы отсчета. Эксперимент продолжается в данный момент.

Орбитальный эффект Лензе — Тирринга приводит к повороту эллиптической орбиты частицы в гравитационном поле вращающегося тела. Данный эффект прибавляется к стандартной общерелятивистской прецессии перигелия, которая не зависит от вращения центрального тела. Орбитальная прецессия Лензе — Тирринга была впервые измерена для спутников LAGEOS и LAGEOS II, полученные значения находятся в полном соответствии с ОТО.

**3. Наземные эксперименты.** Принцип эквивалентности Эйнштейна является одним из основных постулатов ОТО. С экспериментальной точки зрения, он включает в себя следующие проверяемые утверждения:

1. Универсальность свободного падения: свободно падающие тела испытывают в одном и том же гравитационном поле одинаковые ускорения;
2. Локальная лоренц-инвариантность: темп хода часов не зависит от скорости движения часов;
3. Локальная пространственная инвариантность: темп хода часов не зависит от положения часов в пространстве-времени.

В настоящее время наиболее точный результат принадлежит наземным лабораториям: проверка УСП [94] показала разницу гравитационной и инертной масс не более  $\Delta[m_G/m_I] = (0,6 \pm 3,1) \times 10^{-15}$ .

Проверка локальной лоренц-инвариантности предполагает прежде всего проверку постоянства и изотропии скорости света. Эксперименты, в которых ищется временная зависимость квадрупольного расщепления зеемановских уровней, ограничивают вариации скорости света величиной  $\Delta c/c < 10^{-22}$  [95].

Другое направление исследований ОТО — проверка закона обратных квадратов на малых расстояниях. Многие расширенные теории, такие, например, как теория струн и модели «мира на бране» (см. гл. 10), предполагают модификацию гравитации на субмиллиметровых масштабах. Энергия взаимодействия между двумя точечными массами может быть записана в следующем виде:

$$V(r) = -\frac{G_\infty m_1 m_2}{r} [1 + \alpha e^{-r/\lambda}]. \quad (9.56)$$

Здесь  $r$  — расстояние между массами,  $G_\infty$  — величина гравитационного взаимодействия при  $r \rightarrow \infty$  (ньютоновская гравитационная постоянная),  $\alpha$  и  $\lambda$  — сила и эффективный радиус нового взаимодействия соответственно. Данное выражение приводит к следующей эффективной гравитационной постоянной:

$$G(r) = G_\infty [1 + \alpha(1 + r/\lambda)e^{-r/\lambda}]. \quad (9.57)$$

Таким образом, сила гравитационного взаимодействия начинает зависеть от  $r$ . Существуют следующие наблюдательные ограничения на параметр  $\alpha$ :

- в области  $10^{-2}$  м  $\leq \lambda \leq 1$  м лабораторные эксперименты ограничивают  $\alpha$  величиной в  $10^{-4}$ ;

- в области  $10 \text{ м} \leq \lambda \leq 10^3 \text{ м}$  гравиметрические эксперименты показывают, что  $\alpha \leq 10^{-3}$ ;
- в области  $10^8 \text{ м} \leq \lambda \leq 10^{10} \text{ м}$  требование непротиворечия астрономическим данным обуславливает  $\alpha \leq 10^{-2}$ .

**4. Черные дыры.** Существование черных дыр — одно из наиболее впечатляющих предсказаний ОТО. Несмотря на принципиальные трудности в наблюдении черных дыр, существует множество кандидатов в черные дыры. Такое название дано, так как обилие косвенных данных практически исключает все другие типы объектов, хотя и не доказывает полностью, что наблюдаемые объекты являются именно черными дырами. Главным образом, кандидаты в черные дыры выявляются по ограничению на соотношение масса-радиус и отсутствию признаков твердой поверхности [96]. На данный момент известны кандидаты в черные дыры:

- сверхмассивные черные дыры (с массами более 100 000 солнечных масс): более 70 объектов (активные ядра галактик, квазары);
- черные дыры промежуточных масс (от 100 до 100 000 солнечных масс) — около десятка объектов (также в основном ядра галактик);
- черные дыры звездных масс (менее 100 солнечных масс) — более 20 объектов (в двойных системах);

### 9.3. Нерешенные проблемы

В предыдущем подразделе показано блестящее согласие ОТО со многими наблюдательными данными. Однако

существует ряд явлений, требующих дополнительного исследования. Наблюдаемые аномалии относятся в основном к масштабам, на которых ОТО исследована достаточно плохо — начиная от галактических масштабов и более.

**1. Космологические проблемы.** Кратко перечислим проблемы ОТО в применении к космологии:

- Темная материя и темная энергия — каковы причины ускоренного расширения Вселенной и аномального вращения вещества на периферии галактик? Что составляет скрытую массу скоплений галактик?
- Проблема начальной сингулярности — что происходило во Вселенной на временах  $t < t_{Pl}$ ?
- Каково будущее нашей Вселенной и конечное состояние ее эволюции?

**2. Аномалия «Пионеров».** Эффект был обнаружен в движении космических аппаратов «Пионер-10» и «Пионер-11», первыми достигших внешних пределов Солнечной системы (преодолевших орбиту Плутона). Оба космических аппарата замедляются под влиянием гравитационного притяжения Солнца, однако точное вычисление величины их ускорения демонстрирует наличие дополнительной очень слабой силы неустановленной природы. Вызываемое этой силой аномальное ускорение составляет порядка  $|a_P| = (8,74 \pm 1,33) \cdot 10^{-10} \text{ м/сек.}^2$  [84]. Попытки дать объяснение этому эффекту пока не увенчались успехом. Часто данную проблему объединяют с аномалией сближения: есть основания полагать, что у «Пионеров» эффект появился после маневра в гравитационном поле Сатурна.

**3. Аномалия сближения.** Несколько космических аппаратов (NEAR, Rosetta, Galileo) приобрели лишнюю скорость в результате гравитационных маневров возле

Земли. Таким образом, наблюдаемая энергия спутников, совершающих гравитационный маневр, отличается от предсказываемых теорией значений. Причины этого явления также не выяснены.

**4. Черные дыры.** Если черные дыры могут непрерывно испаряться, что происходит с информацией, хранящейся в них (квантовая механика не предусматривает уничтожение информации)? Или излучение в какой-то момент остановится, когда от черной дыры мало что останется? Есть ли какой-либо другой способ исследования их внутренней структуры, если такая структура вообще существует?

**5. Принцип космической цензуры и причинность.** В некоторых решениях ОТО возникают сингулярности, не закрытые горизонтом событий — *голые сингулярности*. Гипотеза «космической цензуры» Роджера Пенроуза утверждает, что такие объекты недопустимы во Вселенной, однако она не имеет аналитического доказательства. Если мы не хотим отказываться от причинности, то необходимо также исключить замкнутые времениподобные кривые, которые возникают в некоторых решениях уравнений ОТО (и которые предполагают возможность путешествия во времени в обратном направлении). Невозможность таких траекторий известна как «гипотеза защиты хронологии» Стивена Хокинга, которая также требует аналитического доказательства.

**6. Неперенормируемость ОТО и другие теоретические проблемы.** Одним из наиболее исследуемых направлений в современной физике является поиск единой теории, т. е. теории, в рамках единого формализма описывающей все физические взаимодействия. На сегодняшний день одно из самых больших препятствий на данном пути — отсутствие квантового описания гравитационного

взаимодействия. Простейшим подходом было бы каноническое квантование ОТО, как было сделано с электродинамикой. Однако это, оказывается, невозможно. Основной трудностью на пути объединения ОТО и квантовой механики является тот факт, что квантовая механика определена на фоне плоского фоновое пространство-времени, тогда как в ОТО пространство-время является динамической структурой теории. Попытка непосредственно проквантовать ОТО не приводит к положительным результатам — теория оказывается неперенормируемой, т. е. не выполняется фундаментальное требование к современным теориям поля. Можно ли объединить квантовую механику и общую теорию относительности в единую самосогласованную теорию, или построение квантовой теории гравитации необходимо начинать с нуля? Возможно, гравитация естественным образом возникнет в рамках некоторой единой теории (например, теории струн)? Является ли пространство-время на фундаментальном уровне непрерывным или дискретным? Ответ на эти вопросы принципиален для будущего гравитационной теории.

Почему гравитация является такой слабой силой? Она становится большой только в планковском масштабе, для частиц с энергией порядка  $10^{19}$  ГэВ, что гораздо больше электрослабого масштаба. Этот вопрос носит название «проблемы иерархии».

#### 9.4. Необходимость расширения ОТО

В современной гравитационной физике сложилась интересная ситуация. С одной стороны, мы видим практически полный экспериментальный успех ОТО: в масштабах Солнечной системы нас сегодня устраивает точность, с которой ОТО описывает наблюдаемые явления, а наблюда-

емые аномалии могут найти объяснение в негравитационных эффектах.

С другой стороны, физика высоких энергий в XX в. имела огромный экспериментальный успех, постулировав квантовую теорию поля как наиболее общую форму динамики полей и элементарных частиц, основанную на стандартной модели  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ . Эта теория описывает все взаимодействия, исключая гравитационное. Таким образом, для обеспечения логической целостности физики нужна квантовая теория гравитации, объединяющая квантовую теорию поля с общей теорией относительности в общую квантовую теорию пространства-времени.

Отметим, что ОТО и квантовая теория поля несовместимы на фундаментальном уровне, хотя обе успешно описывают мир — каждая на своих масштабах. Также ОТО не удовлетворяет многим общим теоретическим требованиям: она неперенормируема, не объясняет физические причины ряда явлений (хотя и описывает их количественно). Вследствие неперенормируемости ОТО не может в своем изначальном виде служить отправной точкой для построения квантовой теории гравитации, необходимой для описания момента рождения Вселенной, ряда явлений в черных дырах, и, самое главное, необходимой для построения единой теории всех взаимодействий.

При этом на данный момент нет ни одного доказательства того, что гравитация носит квантовый характер на сверхмалых масштабах. Более того, нет доказательства того, что на сверхмалых масштабах она носит характер взаимодействия, а не какого-то другого явления [97].

Все сказанное свидетельствует о необходимости расширения ОТО или построения принципиально новой теории, изначально сочетающей в себе ОТО и квантовую физику, которая объясняла бы наблюдаемые аномалии.

## Глава 10

### Расширенные теории гравитации

Расширенными, или альтернативными, теориями гравитации принято называть такие теории, которые существенно модифицируют ОТО (или существуют как альтернатива ей). Предсказания этих теорий должны отвечать результатам наблюдений и совпадать с соответствующими предсказаниями ОТО. Для простоты мы будем называть все теории такого рода расширенными.

История расширенных теорий гравитации началась практически одновременно с ОТО. Почти за сто лет появились десятки различных моделей. В данной главе мы расскажем о тех, что до сих пор устояли перед экспериментальными проверками или еще не были им подвергнуты. Расширенная теория гравитации должна:

- быть полной и самосогласованной;
- находиться в соответствии с астрономическими, галактическими и космологическими наблюдениями;
- согласовываться с квантовым формализмом;
- быть «естественной», т. е. содержать минимальное количество произвольных параметров (даже таких, как размерность пространства-времени).

На данный момент не существует ни одной теории, которая полностью удовлетворяла бы всем вышеперечисленным требованиям. Таким образом, описываемые в данной

главе расширения ОТО следует рассматривать скорее как некоторые «первые шаги» на пути к законченной теории гравитации.

ОТО построена на ряде принципов: относительности, эквивалентности, общей ковариантности, причинности, а также на том постулате, что пространство-время искривлено, а его кривизна локально определяется распределением источников. Многие теории гравитации строятся путем отказа от того или иного основополагающего принципа (при этом, как правило, он эффективно выполняется на некотором интервале масштабов). Другие теории, такие как, например, теория струн или петлевая квантовая гравитация, строятся полностью «с нуля», на некотором новом наборе оснований. Рассмотреть все имеющиеся подходы в рамках одной книги не представляется возможным, поэтому мы обозначим лишь основные направления в данной области.

## 10.1. Теория Бранса — Дикке

Теория гравитации Бранса — Дикке [74, 98, 99, 100] является одним из первых и наиболее известных обобщений ОТО [101]. Действие в этой модели записывается следующим образом:

$$S_{BD} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \phi R - \frac{\omega}{\phi} g^{ij} \nabla_i \phi \nabla_j \phi - V(\phi) \right] + S^{(m)}, \quad (10.1)$$

$$S^{(m)} = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}^{(m)}, \quad (10.2)$$

где  $S^{(m)}$  — действие для обычного вещества, а  $\omega$  — безразмерный параметр Бранса — Дикке. Множитель  $\phi$  в зна-

менателе кинетического члена в действии (10.1) описывает скалярное поле и выбран таким образом, чтобы величина  $\omega$  была безразмерной. Вещество не взаимодействует с полем  $\phi$  непосредственно, т. е. плотность лагранжиана  $\mathcal{L}^{(m)}$  не зависит от  $\phi$ . Такое взаимодействие называют *минимальным*. Однако поле  $\phi$  взаимодействует со скаляром Риччи. Гравитация описывается как метрическим тензором  $g_{ij}$ , так и скаляром Бранса – Дикке  $\phi$ , который ограничивает степени свободы теории. Как обычно, в случае скалярных полей потенциал  $V(\phi)$  генерирует космологическую постоянную и может быть сведен к массовому члену.

Изначально теория Бранса – Дикке создавалась с целью реализации принципа Маха. Сейчас интерес к ней и другим скалярно-тензорным теориям обусловлен тем, что эти модели могут рассматриваться в качестве низкоэнергетического предела теории суперструн. Вариация действия (10.1) по  $g^{ij}$  с учетом хорошо известных соотношений [102]:

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{ij} \delta g^{ij}, \quad (10.3)$$

$$\delta(\sqrt{-g} R) = \sqrt{-g} \left( R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R \right) \delta g^{ij} \equiv \sqrt{-g} G_{ij} \delta g^{ij} \quad (10.4)$$

дает уравнения поля следующего вида:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \frac{8\pi}{\phi} T_{ij}^{(m)} + \frac{\omega}{\phi^2} \left( \nabla_i \phi \nabla_j \phi - \frac{1}{2} g_{ij} \nabla^k \phi \nabla_k \phi \right) + \\ &+ \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi) - \frac{V}{2\phi} g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (10.5)$$

$$T_{ij}^{(m)} \equiv \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{ij}} (\sqrt{-g} \mathcal{L}^{(m)}), \quad (10.6)$$

где  $\square = \nabla^k \nabla_k$  — дифференциальный оператор

д'Аламбера, а  $T_{ij}^{(m)}$  — тензор энергии-импульса обычного вещества. Варьируя действие по  $\phi$ , получаем

$$\frac{2\omega}{\phi} \square\phi + R - \frac{\omega}{\phi^2} \nabla^k \phi \nabla_k \phi - \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (10.7)$$

Возьмем след уравнения (10.5)

$$R = \frac{-8\pi}{\phi} T^{(m)} + \frac{\omega}{\phi^2} \nabla^k \phi \nabla_k \phi + \frac{3\square\phi}{\phi} + \frac{2V}{\phi}, \quad (10.8)$$

учтем уравнение (10.7), чтобы исключить  $R$ , и получим выражение

$$\square\phi = \frac{1}{2\omega + 3} \left( 8\pi T^{(m)} + \phi \frac{dV}{d\phi} - 2V \right). \quad (10.9)$$

Согласно этому уравнению скаляр  $\phi$  создается материей, для которой след  $T^{(m)} \neq 0$ . Тем не менее скаляр не взаимодействует с  $\mathcal{L}^{(m)}$  напрямую — только через метрический тензор  $g_{ij}$  (10.5). Член, пропорциональный  $\phi dV/d\phi - 2V$  в правой части уравнения (10.9), становится равным нулю, если потенциал имеет вид  $V(\phi) = m^2 \phi^2/2$  (похожий на уравнение Клейна – Гордона в физике элементарных частиц). Действие (10.1) и уравнения (10.5) предполагают, что поле  $\phi$  отождествляется с гравитационной постоянной через эффективное обратное гравитационное взаимодействие

$$G_{eff}(\phi) = \frac{1}{\phi} \quad (10.10)$$

и является функцией положения в пространстве-времени. Чтобы обеспечить положительный знак для гравитационного взаимодействия, в рассмотрение включаются только

значения  $\phi > 0$ , соответствующие гравитационному притяжению. Параметр теории Бранса — Дикке  $\omega$  безразмерный. Его значение порядка единицы могло бы быть естественным, однако такие значения исключены по результатам экспериментов в Солнечной системе [103, 104].

**1. Кротовые норы Бранса — Дикке.** Помимо черных дыр нередко рассматриваются и такие экзотические объекты, как кротовые норы (также «кротовины», или «червоточины») — гипотетические топологические особенности пространства-времени, в каждый момент времени представляющие собой «туннели» в пространстве. Иными словами, кротовой норой называют компактный объект, который, в отличие от черной дыры, является проходным и способен связывать две точки нашей Вселенной (или даже две точки, находящиеся в разных вселенных) напоподобие моста. Исследование кротовых нор в теории Бранса — Дикке и было начато Агнесс и Ла Камерой [105]. Покажем, как можно рассматривать новый объект в различных моделях, чтобы выявить их различия.

Так как теорема Биркгофа, утверждающая, что в вакууме существует единственное сферически-симметричное решение уравнений Эйнштейна, не выполняется в присутствии скалярного поля, то в теории Бранса — Дикке возможно несколько статических сферически-симметричных решений. Сам Бранс предложил четыре класса таких решений [106]. Однако только два из них являются независимыми: первое и четвертое. Кроме того, скалярное поле в теории Бранса — Дикке на достаточно больших расстояниях с точностью до порядка  $1/r$  должно иметь вид [107]:

$$\phi = \phi_0 \left( 1 + \frac{1}{\omega + 2} \frac{M}{r} \right), \quad (10.11)$$

где  $M$  — асимптотическая масса кротовой норы на бесконечности. Однако для решения 4-го класса это соотно-

шение не выполняется. Поэтому рассмотрению подлежат только кротовые норы 1-го класса, и в дальнейшем речь будет идти только о них.

Метрика обсуждаемого решения имеет вид

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= - \left( \frac{1 - 1/x}{1 + 1/x} \right)^{2l} dt^2 + \\
 &+ \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^4 \left( \frac{1 - 1/x}{1 + 1/x} \right)^n (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2), \\
 \phi &= \phi_0 \left( \frac{1 - 1/x}{1 + 1/x} \right)^p, \\
 x &= \rho/B, \quad l = 1/\lambda, \quad n = (\lambda - C - 1)/\lambda, \quad p = C/\lambda,
 \end{aligned} \tag{10.12}$$

где  $\rho$  — радиальная изотропическая координата, связанная со шварцшильдовской радиальной координатой  $r$  соотношением

$$r = \rho \left( 1 + \frac{r_g}{4\rho} \right)^2, \tag{10.13}$$

$\lambda$ ,  $B$ ,  $C$  — постоянные величины, выражающиеся через  $\phi_0$  и  $\omega$  следующим образом [106]:

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\omega + 3}{2\omega + 4}}, \tag{10.14}$$

$$B = \frac{M}{2\phi_0} \sqrt{\frac{2\omega + 4}{2\omega + 3}}, \tag{10.15}$$

$$C = - \frac{1}{\omega + 2}. \tag{10.16}$$

Легко заметить, что при  $\omega \rightarrow \pm \infty$  метрика Бранса — Дикке асимптотически переходит в метрику Шварцшильда:

$$ds^2 = \left( \frac{1 - \frac{r_g}{4\rho}}{1 + \frac{r_g}{4\rho}} \right)^2 dt^2 - \left( 1 - \frac{r_g}{4\rho} \right)^4 (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2).$$

Случай  $\omega \rightarrow +\infty$  описывает черные дыры, а в случае  $\omega \rightarrow -\infty$  становится возможным существование кротовых нор. Тогда, соответственно,  $\lambda \rightarrow 1$ ,  $C \rightarrow 0$ , а  $B \rightarrow M/2$ .

При особом наборе параметров теория Бранса — Дикке сводится к ОТО и также предсказывает гравитационное линзирование и прецессию перигелия планет, вращающихся вокруг Солнца. Поэтому теория Бранса — Дикке не может быть опровергнута экспериментами, не противоречащими ОТО. Однако точные формулы в теории Бранса — Дикке зависят от значения константы связи  $\omega$ . Это означает, что нижнее ограничение на величину  $|\omega|$  может быть получено из наблюдений. В обсуждаемой модели необходимо, чтобы параметр  $\omega$  принимал такие значения, при которых нарушается нулевое энергетическое условие. Тогда уравнения (10.5, 10.9) могут быть переписаны в виде

$$G_{ij} = \frac{8\pi}{\phi} [T_{ij} + (T_\phi)_{ij}], \quad (10.17)$$

где  $G_{ij}$  — тензор Эйнштейна, а  $(T_\phi)_{ij}$  — тензор энергии-импульса скалярного поля. Отсюда уравнение Эйнштейна для компоненты  $G_{00}$  примет вид

$$G_{00} = \frac{(1 - \gamma)(1 + 2\gamma)}{1 + \gamma} \frac{\eta^2}{\rho^4(R)} \left[ 1 - \frac{2\eta}{\rho(R)} \right]^{2(\sqrt{2/(1+\gamma)} - 1)}, \quad (10.18)$$

где  $\gamma = \frac{\omega + 1}{\omega + 2}$  — постньютоновский параметр. Агнесс и Ла Камера рассматривали случай  $\gamma > 1$  [105] и получили, что  $G_{00} < 0$ , а  $\omega < -2$ , т. е. при таком значении параметра Бранса — Дикке обсуждаемая кротовая нора проходима. Таким образом, роль экзотической материи в теории Бранса — Дикке может выполнять скалярное поле  $\phi$ . На основании результатов эксперимента Кассини — Гюйгенс по измерению значений постньютоновских параметров, в частности, параметра  $\gamma$  [103], легко показать, что  $|\omega| > 9000$ . Поэтому мы будем рассматривать только такие значения параметра Бранса — Дикке [108].

Найдем энергию  $\tilde{E}$ , угловой момент  $\tilde{L}$  и угловую скорость  $\Omega$  частиц, движущихся в гравитационном поле кротовой норы Бранса — Дикке. Будем считать, что большинство частиц движется в экваториальной плоскости  $\theta = \pi/2$ , т. е. аккреционный диск — тонкий. Уравнения геодезических имеют вид [109]:

$$\begin{aligned}\frac{dt}{d\tau} &= \frac{\tilde{E}g_{\varphi\varphi} + \tilde{L}g_{t\varphi}}{g_{t\varphi}^2 - g_{tt}g_{\varphi\varphi}}, \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= -\frac{\tilde{E}g_{t\varphi} + \tilde{L}g_{tt}}{g_{t\varphi}^2 - g_{tt}g_{\varphi\varphi}}, \\ g_{\rho\rho} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 &= -1 + \frac{\tilde{E}^2g_{\varphi\varphi} + 2\tilde{E}\tilde{L}g_{t\varphi} + \tilde{L}^2g_{tt}}{g_{t\varphi}^2 - g_{tt}g_{\varphi\varphi}}.\end{aligned}\tag{10.19}$$

Из последнего уравнения системы (10.19) следует, что эффективный потенциал  $V_{eff}$  [109] имеет вид

$$V_{eff}(\rho) = -1 + \frac{\tilde{E}^2g_{\varphi\varphi} + 2\tilde{E}\tilde{L}g_{t\varphi} + \tilde{L}^2g_{tt}}{g_{t\varphi}^2 - g_{tt}g_{\varphi\varphi}}.\tag{10.20}$$

Устойчивые круговые орбиты можно найти из условий  $V_{eff}(\rho) = 0$  и  $V_{eff,\rho} = 0$ . Тогда энергия, угловой момент

и угловая скорость частиц описываются выражениями

$$\begin{aligned}
\tilde{E} &= - \frac{g_{tt} + g_{t\varphi}\Omega}{\sqrt{-g_{tt} - 2g_{t\varphi}\Omega - g_{\varphi\varphi}\Omega^2}}, \\
\tilde{L} &= \frac{g_{t\varphi} + g_{\varphi\varphi}\Omega}{\sqrt{-g_{tt} - 2g_{t\varphi}\Omega - g_{\varphi\varphi}\Omega^2}}, \\
\Omega &= \frac{d\varphi}{dt} = \frac{-g_{t\varphi,r} + \sqrt{(g_{t\varphi,r})^2 - g_{tt,r}g_{\varphi\varphi,r}}}{g_{\varphi\varphi,r}}.
\end{aligned} \tag{10.21}$$

Подставляя компоненты метрики (10.12) в (10.21), получим окончательные выражения, описывающие движение частиц по кеплеровским орбитам, находящимся в экваториальной плоскости аккреционного диска:

$$\begin{aligned}
\tilde{E} &= \left(\frac{x-\lambda}{x+\lambda}\right)^l \sqrt{\frac{x^2 + \lambda^2 - 2x(C+1)}{x^2 + \lambda^2 - 2x(C+2)}}, \\
\tilde{L} &= \sqrt{\frac{2}{x}} B \frac{x^2 - \lambda^2}{\sqrt{x^2 + \lambda^2 - 2x(C+2)}} \left(\frac{x+\lambda}{x-\lambda}\right)^{l+p}, \\
\Omega &= \frac{x}{B} \frac{1}{x^2 - \lambda^2} \sqrt{\frac{2x}{x^2 + \lambda^2 - 2x(C+1)}} \left(\frac{x-\lambda}{x+\lambda}\right)^{p+2l}.
\end{aligned} \tag{10.22}$$

Решая систему уравнений (10.22) численно, можно найти значение потока энергии, излучаемой с поверхности диска при аккреции на кротовую нору Бранса — Дикке. Значения для  $\Omega$ ,  $\tilde{L}$ ,  $\tilde{E}$  и  $F(r)$  в сравнении с соответствующими величинами для кротовой норы в ОТО и черной дыры Шварцшильда приведены на графиках (рис. 10.1—10.4).

Важной характеристикой кротовой норы является размер ее горловины. Поверхностью горловины называется

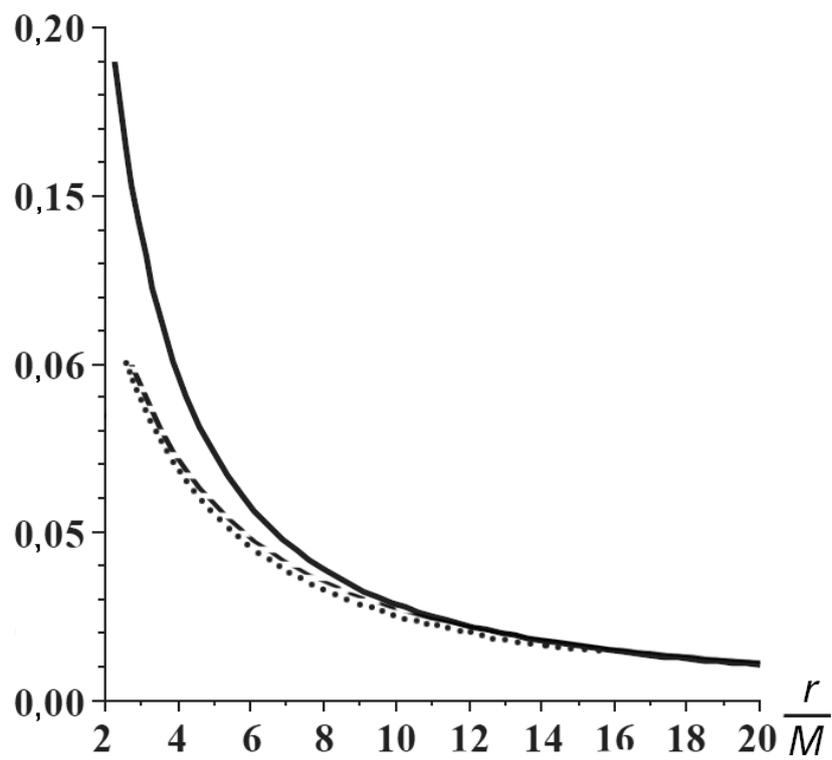


Рис. 10.1. Угловые скорости частиц ( $\times 10^{-4}$  рад/сек.) аккреционного диска при аккреции: на кротовую нору в сферически-симметричной модели ОТО (сплошная линия); на черную дыру Шварцшильда (штрихованная линия); на кротовую нору в теории Бранса — Дикке (пунктирная линия)

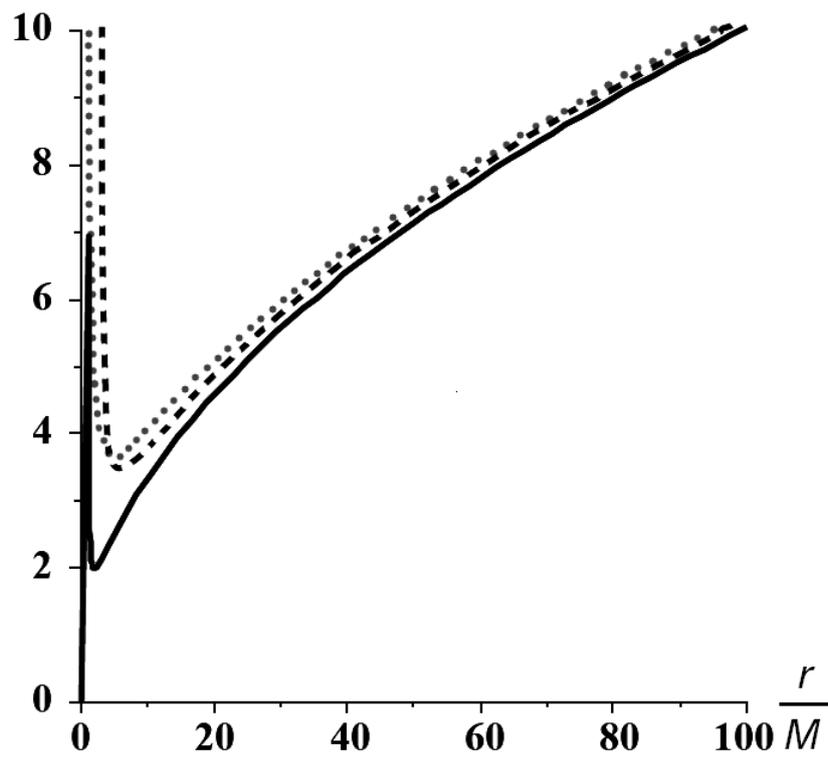


Рис. 10.2. Моменты импульсов частиц ( $\times 10^4$  см<sup>2</sup>/сек.) на единицу массы аккреционного диска при аккреции: на кротовую нору в сферически-симметричной модели ОТО (сплошная линия); на черную дыру Шварцшильда (штрихованная линия); на кротовую нору в теории Бранса — Дикке (пунктирная линия)

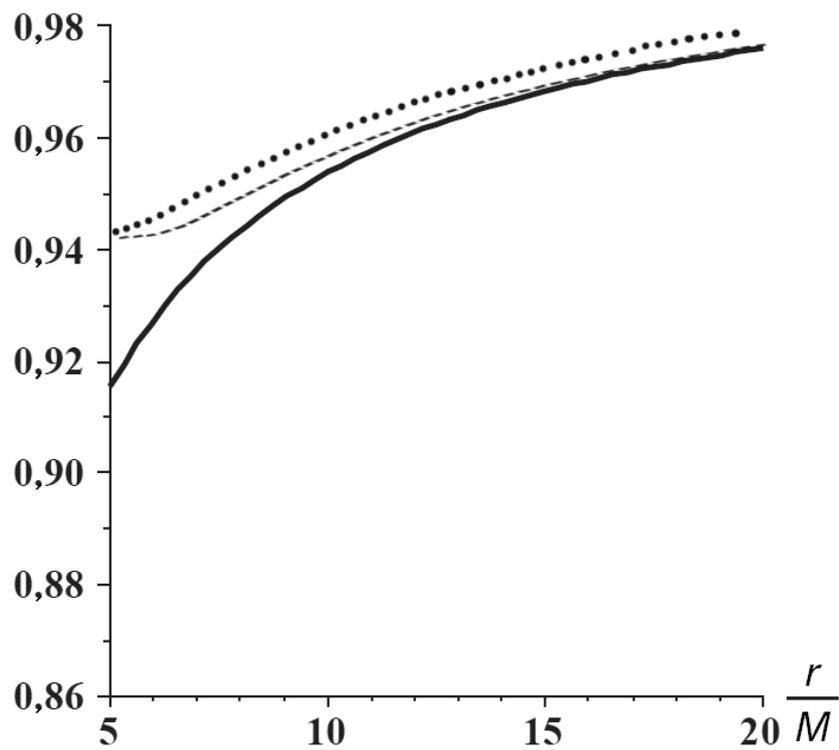


Рис. 10.3. Энергии частиц ( $\text{см}^2/\text{сек.}^2$ ) на единицу массы аккреционного диска при аккреции: на кротовую нору в сферически-симметричной модели ОТО (сплошная линия); на черную дыру Шварцшильда (штрихованная линия); на кротовую нору в теории Бранса — Дикке (пунктирная линия)

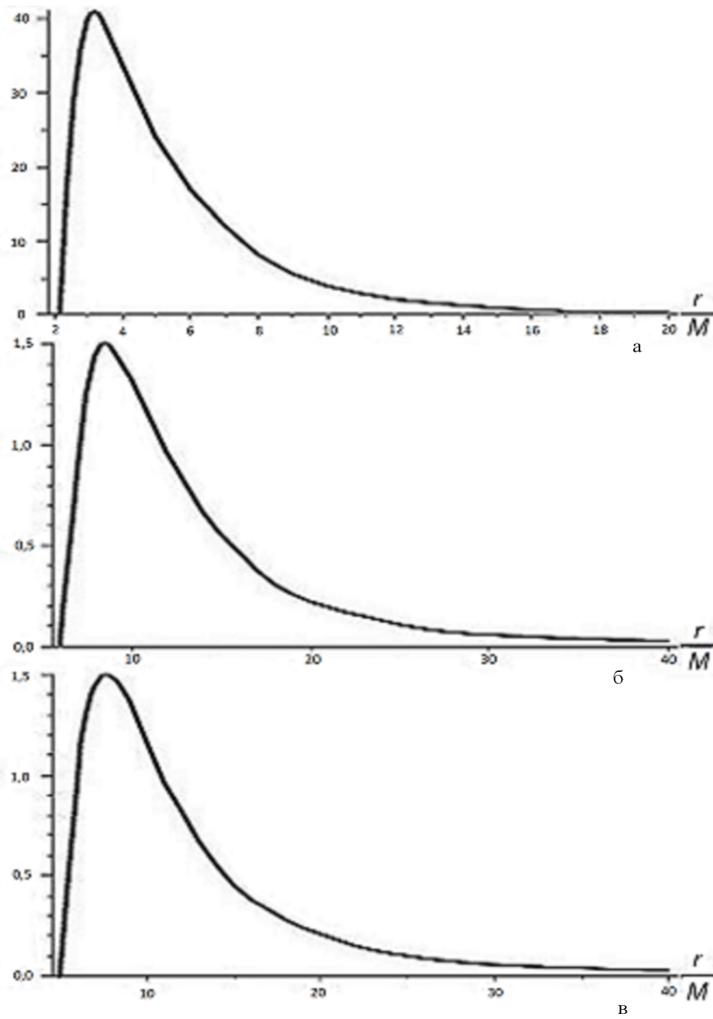


Рис. 10.4. Поток энергии ( $\times 10^{23}$  эрг/см<sup>2</sup>/сек.) аккреционного диска при аккреции: а — на кротовую нору в сферически-симметричной модели ОТО; б — на черную дыру Шварцшильда; в — на кротовую нору в теории Бранса — Дикке

многообразии с минимально возможной площадью, окружающее вход в другую вселенную. В данном случае квадрат радиуса горловины есть наименьшее возможное значение метрического коэффициента при  $d\theta^2$ , т. е.

$$\left. \frac{\partial}{\partial \rho} (g_{\theta\theta}) \right|_{\rho=\rho_0} = 0. \quad (10.23)$$

Радиальная изотропическая координата  $\rho$  в точке горловины определяется по следующей формуле:

$$\rho_0 = \frac{\sqrt{2}B}{2} \left( \frac{2|\omega + 1| \pm \sqrt{-8 - 6\omega}}{\sqrt{(2\omega + 3)(\omega + 2)}} \right). \quad (10.24)$$

Радиус горловины кротовой норы в произвольных координатах дается выражением

$$r_0 = \frac{\sqrt{2}B}{2} F_1(\omega) F_2(\omega)^2 F_3(\omega) \left( 1 + \frac{1}{\omega+2} \sqrt{\frac{2(\omega+2)}{2\omega+3}} - \sqrt{\frac{2(\omega+2)}{2\omega+3}} \right), \quad (10.25)$$

где

$$F_1(\omega) = \left( \frac{2|\omega + 1| \pm (\omega + 2) \sqrt{\frac{-8 - 6\omega}{(\omega + 2)^2}}}{\sqrt{(2\omega + 3)(\omega + 2)}} \right), \quad (10.26)$$

$$F_2(\omega) = \left( 1 + \frac{\sqrt{2}(\omega + 2) \sqrt{\frac{2\omega + 3}{\omega + 2}}}{2(\omega + 1) \pm (\omega + 2) \sqrt{-\frac{8 + 6\omega}{(\omega + 2)^2}}} \right), \quad (10.27)$$

$$F_3(\omega) = \left( \begin{array}{c} 1 - \frac{\sqrt{2}(\omega + 2)\sqrt{\frac{2\omega + 3}{\omega + 2}}}{2(\omega + 1) \pm (\omega + 2)\sqrt{-\frac{8 + 6\omega}{(\omega + 2)^2}}} \\ 1 + \frac{\sqrt{2}(\omega + 2)\sqrt{\frac{2\omega + 3}{\omega + 2}}}{2(\omega + 1) \pm (\omega + 2)\sqrt{-\frac{8 + 6\omega}{(\omega + 2)^2}}} \end{array} \right). \quad (10.28)$$

При рассматриваемом спектре значений  $\omega$  радиус горловины с высокой точностью равен  $r_0 = 2M$  (рис. 10.5), т. е. совпадает с размерами горизонта событий черной дыры Шварцшильда соответствующей массы. Вблизи  $\omega = -2$ , как и следовало ожидать, значение радиуса горловины расходится.

В работе Шацкого [110] подробно рассмотрено явление прохождения света через горловину кротовой норы. Найдем максимальный прицельный параметр  $h_{max}$ , при котором можно увидеть звезды другой Вселенной. В случае большого числа звезд яркость проходящего через горловину света будет однородной, а при малом числе можно увидеть отдельные источники. Максимальный прицельный параметр определяется через глобальный минимум, который следует искать на всей области определения кротовой норы следующим образом:

$$h_{max}^2 = \min \left( -\frac{g_{\theta\theta}}{g_{tt}} \right). \quad (10.29)$$

Для кротовой норы Бранса — Дикке почти на всей области определения  $h_{max} = 3\sqrt{3} \approx 5,18M$  (рис. 10.6), как и дол-

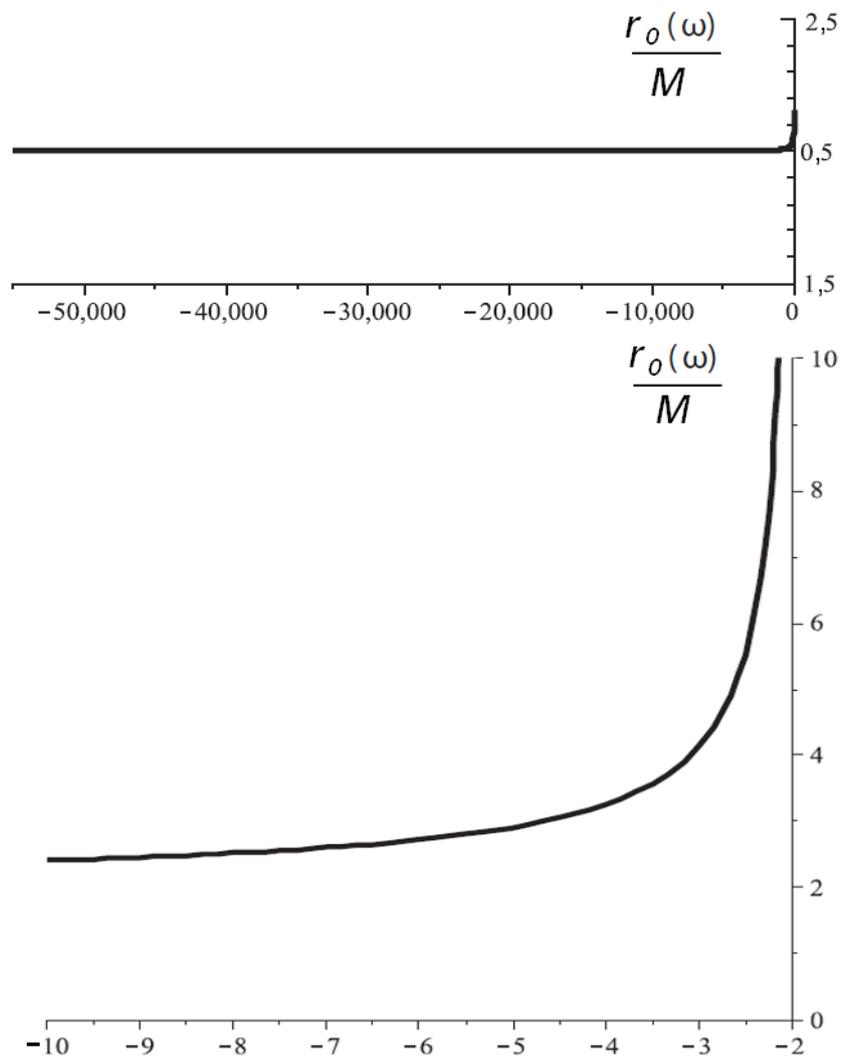


Рис. 10.5. Радиус горловины кротовой норы в расчете на единицу массы в зависимости от параметра  $\omega$  в теории Бранса — Дикке

жно быть для квазишварцшильдовского компактного объекта, т. е. в случае  $\omega \rightarrow -\infty$ . Особенность появляется только вблизи  $\omega = -2$ . Это позволяет отличить кротовую нору Бранса — Дикке, например, от магнитной кротовой норы, для которой  $h_{max} = 4M$ .

Чтобы найти последнюю устойчивую орбиту, представим эффективный потенциал в виде

$$V_{eff} \equiv -1 + \frac{f}{g}, \quad (10.30)$$

где  $f$  — некоторая непрерывная функция. Из условия круговой орбиты

$$V_{eff} = 0 \quad (10.31)$$

следует, что  $f = g$ . Далее, из условия существования последней устойчивой круговой орбиты

$$V_{eff,r} = 0 \quad (10.32)$$

получаем, что

$$f_{,r}g - fg_{,r} = 0. \quad (10.33)$$

На основании перечисленных условий

$$V_{eff,rr} = 0. \quad (10.34)$$

Отсюда следует важное соотношение [109]:

$$\begin{aligned} 0 &= (g_{t\varphi}^2 - g_{tt}g_{\varphi\varphi}) V_{eff,\rho\rho} = \\ &= \tilde{E}^2 g_{\varphi\varphi,\rho\rho} + 2\tilde{E}\tilde{L}g_{t\varphi,\rho\rho} + \tilde{L}^2 g_{tt,\rho} - (g_{t\varphi}^2 - g_{tt}g_{\varphi\varphi})_{,\rho\rho}. \end{aligned} \quad (10.35)$$

Тогда внутренняя граница аккреционного диска  $r_{ms}$ , которую можно найти, численно решая уравнение (10.35), равна  $r_{ms} \approx 5M$ .

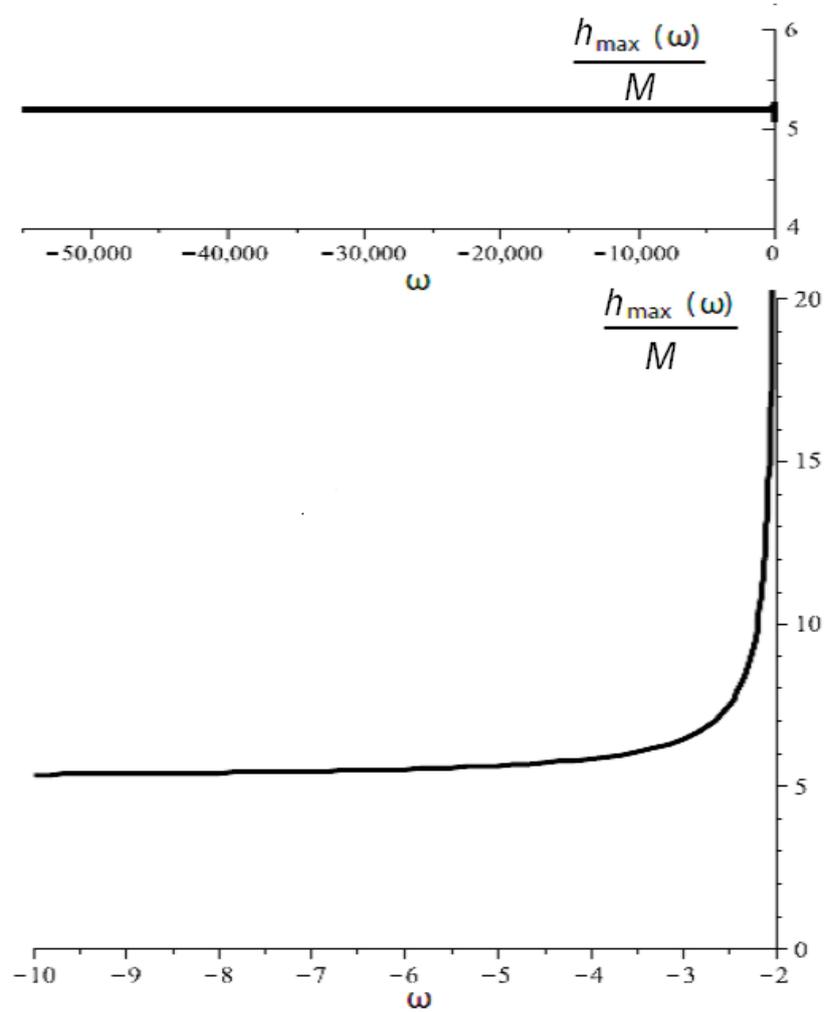


Рис. 10.6. Максимальный прицельный параметр кротовой норы в расчете на единицу массы в зависимости от параметра  $\omega$  в теории Бранса — Дикке

## 10.2. Модифицированная ньютоновская динамика

Как известно из астрофизики, динамика движения галактик и скоплений галактик, равно как и расширение Вселенной в целом, не согласуется с суммарной массой материи, доступной для астрономических наблюдений, и законами тяготения, известными нам [111] (проблема темной материи).

Был предпринят ряд попыток создать такую теорию гравитации, которая позволила бы обойтись без темной материи и темной энергии. Наиболее жизнеспособной из них оказалась модифицированная ньютоновская динамика (МОНД), предложенная Милгромом в 1983 г. [112, 113, 114]. Основная идея МОНД состоит в том, чтобы связать ньютоновское гравитационное ускорение  $g_N$  с истинным гравитационным ускорением  $g$  и таким образом решить проблему недостающей массы и нарушения ньютоновской динамики в галактиках. В основе подобной попытки исправления несоответствия кривых вращения с помощью гравитационной модели лежит тот факт, что галактики намного больше, чем Солнечная система (в которой закон Ньютона проверен с высокой точностью). Легко представить, что на каких-то достаточно больших масштабах, например порядка 1 кпк, имеет место переход от обычной динамики, применимой к сравнимо малым системам, к более общей теории, которая работает на масштабах галактик и таким образом объясняет проблему темной материи.

Сначала Милгром обратил внимание, что галактики объединяет не только размер, но и ускорение. Обычное центробежное ускорение звезды в галактике — порядка  $10^{-10}$  м/сек.<sup>2</sup>, что почти на 11 порядков меньше, чем на поверхности Земли. Это ускорение появляется на самых разных масштабах, которые не должны в общем случае

быть связаны друг с другом [111]. Милгром рассматривал величину  $a_0 \simeq 10^{-10}$  м/сек.<sup>2</sup> в качестве новой универсальной константы, которая должна была играть роль, аналогичную скорости света  $c$  и постоянной Планка  $h$ . При этом для больших ускорений  $g \gg a_0$  выполняется обычная ньютоновская механика, т. е.  $g = g_N$ , где  $g_N$  — величина ньютоновского ускорения. Иными словами, если положить  $a_0 \rightarrow 0$ , это должно приводить к обычному закону тяготения, аналогично тому, как из квантовой механики получается классическая при  $h \rightarrow 0$ . С другой стороны, если положить  $a_0 \rightarrow \infty$ , или, что равнозначно,  $g \ll a_0$ , модификация принимает вид

$$g = \sqrt{g_N a_0}, \quad (10.36)$$

где  $g = |\vec{g}|$  — величина истинного гравитационного ускорения  $\vec{g}$ , а  $g_N = |\vec{g}_N|$  — величина ньютоновского ускорения  $\vec{g}_N$ , рассчитанного из распределения видимого вещества. Для пробной частицы, совершающей круговое движение вокруг точечной массы  $M$ , равновесие между радиальной компонентой силы тяготения и центростремительным ускорением требует выполнения соотношения  $V_c^2/r = g_N = GM/r^2$ , где  $V_c$  — круговая скорость. В пределе малой величины ускорения это выражение имеет вид

$$\frac{V_c^2}{r} = \sqrt{\frac{GM a_0}{r^2}}. \quad (10.37)$$

Члены, включающие в себя радиус  $r$ , сокращаются, что приводит к соотношению

$$V_c^4(r) = M_f^4 = GM a_0 \equiv V_f^4. \quad (10.38)$$

Таким образом, круговая скорость больше не зависит от радиуса, приближаясь к постоянной  $V_f$ , которая опре-

деляется только массой центрального тела и значениями фундаментальных постоянных. Уравнение, приведенное выше, эквивалентно наблюдаемому соотношению Тулли — Фишера: светимость галактики изменяется пропорционально четвертой степени ее скорости вращения.

Чтобы сгладить переход между двумя случаями —  $g \gg a_0$  и  $g \ll a_0$ , — закон Милгрота записывается следующим образом:

$$\mu \left( \frac{g}{a_0} \right) \vec{g} = \vec{g}_N, \quad (10.39)$$

где  $\mu$  — интерполяционная функция

$$\mu(x) \rightarrow 1 \text{ при } x \gg 1, \quad \mu(x) \rightarrow x \text{ при } x \ll 1. \quad (10.40)$$

При такой записи сходство между законом Милгрота и законом Кулона в диэлектрической среде очевидно. Действительно, в диэлектрической среде величина электрического поля  $E$  точечного заряда  $Q$ , расположенного на расстоянии  $r$ , подчиняется следующему соотношению:

$$\mu(E)E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (10.41)$$

Относительная диэлектрическая проницаемость среды  $\mu$  может зависеть от  $E$ . В случае гравитационного поля точечной массы  $M$  интерполяционная функция Милгрота играет роль «гравитационной проницаемости». Поскольку ее величина меньше единицы, истинное гравитационное поле оказывается сильнее, чем ньютоновское (в отличие от случая электрического поля в диэлектрической среде, для которой  $\mu > 1$ ). Эта аналогия широко использовалась в развитии теории [115], где закон Милгрота следует из существования «гравитационно-поляризованной» среды.

Разумеется, в результате инверсии выражения (10.39) закон Милгрма можно переписать в виде

$$\vec{g} = \nu \left( \frac{g_N}{a_0} \right) \vec{g}_N, \quad (10.42)$$

где функция  $\nu(y)$  должна обладать следующими свойствами:

$$\nu(y) \rightarrow 1 \text{ при } y \gg 1, \quad \nu(y) \rightarrow y^{-1/2} \text{ при } y \ll 1. \quad (10.43)$$

С помощью этой модели действительно можно обойти вопрос о существовании темной материи, но все остальные проблемы, в первую очередь связанные с темной энергией, она не решает, поэтому в настоящий момент данный подход не очень распространен.

### 10.3. Гравитационные теории $f(R)$

Один из способов расширения ОТО — включение в действие метрической поправки, которая зависит только от метрического тензора, тензоров Римана и Риччи и скаляра Риччи и не содержит дополнительных скалярных (векторных, тензорных) полей. Выражение для лагранжиана в этом случае становится значительно сложнее, соответствующие уравнения поля имеют более высокий порядок с одной стороны и допускают гораздо большее разнообразие решений — с другой [101]. Для простоты начнем наше обсуждение с квадратичных поправок к действию ОТО, которые приводят к интересным следствиям в космологии.

Прежде всего напомним, что переход к ньютоновскому пределу приводит к приближению слабого поля. Тогда метрику можно представить в виде суммы плоской

составляющей (метрика Минковского)  $\eta_{ij}$  и малого возмущения  $h_{ij}$ . Линеаризованная модель описывает распространение симметричного тензора  $h_{ij}$  на фоне плоского пространства-времени. Таким образом, метрика принимает вид

$$g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij}, \quad |h_{ij}| \ll 1. \quad (10.44)$$

Если слагаемое  $h_{ij}$  мало, можно пренебречь возмущениями более высоких порядков. В частности, допустимы операции поднятия и опускания индексов с помощью  $\eta_{ij}$  и  $\eta^{ij}$ , поскольку поправки оказываются более высоких порядков. Тогда

$$g^{ij} = \eta^{ij} - h^{ij}, \quad h^{ij} = \eta^{il}\eta^{jk}h_{lk}. \quad (10.45)$$

Требуется найти уравнения движения, которым подчиняется возмущение  $h_{ij}$ , путем разложения уравнений Эйнштейна до первого порядка. Подставляя метрику (10.44) в тензор Эйнштейна, получим

$$G_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_k \partial_j h_i^k + \partial_k \partial_i h_j^k - \partial_k \partial_j h - h_{ij} - \eta_{ij} \partial_l \partial_k h^{lk} + \eta_{ij} h), \quad (10.46)$$

где  $h = \eta^{ij} h_{ij} = h_i^i$ .

В соответствии с условиями приближения слабого поля энергия и момент также должны быть малы. Поэтому ведущий порядок ненулевых компонент тензора энергии-импульса  $T_{ij}$  совпадает с порядком самого возмущения. Тогда закон сохранения принимает вид  $\partial^i T_{ij} = 0$ . Обсудим сначала простейший случай.

**1. Случай  $f(R) = R + \alpha R^2$ .** Квадратичные поправки по  $R$  были введены в связи с попытками перенормировки ОТО и создания простого ее расширения. Этот подход

особенно важен в космологии, поскольку допускает возможность существования самосогласованной инфляционной модели. Остановимся на этом примере подробнее перед тем, как перейти к обсуждению общего случая метрической  $f(R)$ -гравитации.

Рассмотрим вариационные уравнения поля для лагранжиана:

$$\mathcal{L} = R + \alpha R^2 + 2\kappa L^{(m)}. \quad (10.47)$$

В отсутствие материи, т. е. в так называемом вакуумном случае,

$$\int d^4x \sqrt{-g} G_{ij} \delta g^{ij} + \alpha \delta \int d^4x \sqrt{-g} R^2 = 0. \quad (10.48)$$

Варьируя член  $R\sqrt{-g}$ , получим тензор Эйнштейна. Из второго члена в правой части выражения (10.48) следуют соотношения

$$\begin{aligned} & \delta \int d^4x \sqrt{-g} R^2 = \\ & = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g_{ij} \delta g^{ij} R^2 + 2 \int d^4x \sqrt{-g} R \delta R, \quad (10.49) \\ & \int d^4x \sqrt{-g} R \delta R = \int d^4x \sqrt{-g} R (\delta g^{ij} R_{ij} + g^{ij} \delta R_{ij}). \end{aligned} \quad (10.50)$$

Учитывая, что

$$g^{ij} \delta R_{ij} = \nabla_i \nabla_j h^{ij} - \square h, \quad (10.51)$$

$$h^{ij} \equiv -\delta g^{ij}, \quad h \equiv -g_{ij} \delta g^{ij}, \quad (10.52)$$

получаем

$$\int d^4x \sqrt{-g} R g^{ij} \delta R_{ij} = \int d^4x \sqrt{-g} R (\nabla_i \nabla_j h^{ij} - \square h). \quad (10.53)$$

Дважды интегрируем по частям, в результате чего операторы  $\nabla_i \nabla_j$  и  $\square$ , действующие соответственно на  $h^{ij}$  и  $h$  в выражении (10.53), применяются к  $R$ :

$$\int d^4x \sqrt{-g} R g^{ij} \delta R_{ij} = \int d^4x \sqrt{-g} (h^{ij} \nabla_i \nabla_j R - h \square R). \quad (10.54)$$

Используя (10.52), получаем

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{-g} R g^{ij} \delta R_{ij} &= \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} (-\delta g^{ij} \nabla_i \nabla_j R + g_{ij} \square R \delta g^{ij}). \end{aligned} \quad (10.55)$$

Подставив (10.55) в (10.50), получим

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{-g} R \delta R &= \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} (R \delta g^{ij} R_{ij} - \delta g^{ij} \nabla_i \nabla_j R + g_{ij} \square R \delta g^{ij}), \end{aligned} \quad (10.56)$$

после чего выражение (10.49) принимает вид

$$\begin{aligned} \delta \int d^4x \sqrt{-g} R^2 &= \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g_{ij} \delta g^{ij} R^2 + \\ &+ 2 \int d^4x \sqrt{-g} (R \delta g^{ij} R_{ij} - \delta g^{ij} \nabla_i \nabla_j R + g_{ij} \square R \delta g^{ij}) = \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left( 2R R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R^2 \right) \delta g^{ij} + \\ &+ 2 \int d^4x \sqrt{-g} (g_{ij} \square R \delta g^{ij} - \nabla_i \nabla_j R) \delta g^{ij}. \end{aligned} \quad (10.57)$$

Подставив полученное выражение в (10.48) и учтя материальную часть лагранжиана  $L^{(m)}$ , из которой получается тензор энергии-импульса  $T_{ij}^{(m)}$ , получим уравнения поля четвертого порядка по компонентам метрики:

$$G_{ij} + \alpha \left[ 2R \left( R_{ij} - \frac{1}{4} g_{ij} R \right) + \right. \\ \left. + 2 \left( g_{ij} \square R \delta^{ij} - \nabla_i \nabla_j R \right) \right] = \kappa T_{ij}^{(m)}. \quad (10.58)$$

След уравнения (10.58) равен

$$\square R - \frac{1}{6\alpha} (R + \kappa T^{(m)}) = 0, \quad (10.59)$$

откуда следует, что  $\alpha$  должно быть положительным. Можно определить угловую частоту  $\omega$ , соответствующую массе  $m$  таким образом, что

$$\frac{1}{6\alpha} = \omega^2 = m^2. \quad (10.60)$$

Согласно этому определению (10.59) принимает вид

$$\square R - m^2 (R + \kappa T^{(m)}) = 0. \quad (10.61)$$

Легко заметить, что выражение (10.61) является эффективным уравнением Клейна – Гордона для степени свободы эффективного скалярного поля  $R$ , иногда называемой скаляроном.

**2. Общий случай гравитационной модели  $f(R)$ .** Теперь обсудим общий вид (аналитической) функции  $f(R)$  в рамках метрического формализма, который описывает плотность лагранжиана  $\sqrt{-g} \mathcal{L} = \sqrt{-g} f(R) R$ , подчиняющуюся вариационному принципу  $\delta \int d^4x \sqrt{-g} f(R) = 0$ .

Тогда

$$\begin{aligned}
& \delta \int d^4x \sqrt{-g} f(R) = \\
& = \delta \int d^4x [\delta(\sqrt{-g} f(R)) + \sqrt{-g} \delta(f(R))] = \\
& = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ f'(R) R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} f(R) \right] \delta g^{ij} + \\
& + \int d^4x \sqrt{-g} f'(R) g^{ij} \delta R_{ij},
\end{aligned} \tag{10.62}$$

где штрих обозначает дифференцирование по  $R$ . Теперь вычислим эти интегралы в локально инерциальной системе отсчета. Используя соотношения

$$g^{ij} \delta R_{ij} = g^{ij} \partial_k (\delta G_{ij}^k) - g^{ik} \partial_k (\delta G_{ij}^j) \equiv \partial_k W^k, \tag{10.63}$$

$$W^k \equiv g^{ij} \delta G_{ij}^k - g^{ik} (\delta G_{ij}^j), \tag{10.64}$$

можно переписать второй интеграл в (10.62) в виде

$$\int d^4x \sqrt{-g} f'(R) g^{ij} \delta R_{ij} = \int d^4x \sqrt{-g} f'(R) \partial_k W^k. \tag{10.65}$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned}
\int d^4x \sqrt{-g} f'(R) g^{ij} \delta R_{ij} &= \int d^4x \frac{\partial}{\partial x^k} [\sqrt{-g} f'(R) W^k] - \\
&- \int d^4x \partial_k [\sqrt{-g} f'(R)] W^k.
\end{aligned} \tag{10.66}$$

Первое подынтегральное выражение является полной производной. Поэтому, если считать, что все поля исчезают на бесконечности, его можно отбросить. Тогда

$$\int d^4x \sqrt{-g} f'(R) g^{ij} \delta R_{ij} = - \int d^4x \partial_k [\sqrt{-g} f'(R)] W^k. \tag{10.67}$$

Теперь вычислим величину  $W^k$ , которая входит в выражение (10.67). Тогда

$$\begin{aligned}\delta G_{ij}^k &= \delta \left[ \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) \right] = \\ &= \frac{1}{2} g^{kl} [\partial_i (\delta g_{lj}) + \partial_j (\delta g_{il}) - \partial_l (\delta g_{ij})],\end{aligned}\quad (10.68)$$

поскольку в выбранной инерциальной системе отсчета

$$\partial_l g_{ij} = \nabla_l g_{ij} = 0. \quad (10.69)$$

Аналогично

$$\delta G_{ij}^j = \frac{1}{2} g^{jl} \partial_i (\delta g_{jl}). \quad (10.70)$$

Совмещая (10.69) и (10.70), получим

$$\begin{aligned}g^{ij} \delta G_{ij}^k &= \frac{1}{2} g^{ij} [-\partial_i (g_{lj} \delta g^{lk}) - \partial_j (g_{il} \delta g^{kl}) - g^{kl} \partial_l (\delta g_{ij})] = \\ &= \frac{1}{2} \partial^k (g_{ij} \delta g^{ij}) - \partial^i (g_{li} \delta g^{jl}),\end{aligned}\quad (10.71)$$

$$g^{ik} \delta G_{ij}^j = -\frac{1}{2} \partial^k (g_{jl} \delta g^{jl}), \quad (10.72)$$

откуда сразу же следует, что

$$W^k = \partial^k (g_{ij} \delta g^{ij}) - \partial^i (g_{ij} \delta g^{ki}). \quad (10.73)$$

Используя это уравнение, можно записать

$$\begin{aligned}\int d^4x \sqrt{-g} f'(R) g^{ij} \delta R_{ij} &= \\ &= \int d^4x \partial_k [\sqrt{-g} f'(R)] [\partial^i (g_{ij} \delta g^{ki}) - \partial^k (g_{ij} \delta g^{ij})].\end{aligned}\quad (10.74)$$

Тогда вариация действия равна

$$\begin{aligned}
\delta \int d^4x \sqrt{-g} f(R) &= \\
&= \int d^4x \sqrt{-g} \left[ f'(R) R_{ij} - \frac{1}{2} f(R) g_{ij} \right] \delta g^{ij} + \\
&+ \int d^4x \left[ g_{ij} \partial^k \partial_k (\sqrt{-g} f'(R)) - g_{ki} \partial^i \partial^k (\sqrt{-g} f'(R)) \right] \delta g^{ij}.
\end{aligned} \tag{10.75}$$

Согласно принципу наименьшего действия вариация (10.3) должна быть равна нулю. Тогда соответствующие вакуумные уравнения поля четвертого порядка имеют вид

$$f'(R) R_{ij} - \frac{f(R)}{2} g_{ij} = \nabla_i \nabla_j f'(R) - g_{ij} \square f'(R). \tag{10.76}$$

Данные уравнения можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
f'(R) R_{ij} - \frac{f'(R)}{2} g_{ij} R + \frac{f'(R)}{2} g_{ij} R - \frac{f(R)}{2} g_{ij} &= \\
= \nabla_i \nabla_j f'(R) - g_{ij} \square f'(R).
\end{aligned} \tag{10.77}$$

Тогда тензор Эйнштейна равен

$$G_{ij} = \frac{1}{f'(R)} \left[ \nabla_i \nabla_j f'(R) - g_{ij} \square f'(R) + g_{ij} \frac{f(R) - f'(R)R}{2} \right]. \tag{10.78}$$

Правую часть выражения (10.78) можно рассматривать в качестве эффективного тензора энергии-импульса  $T_{ij}^{(curv)}$ , который является источником эффективных уравнений Эйнштейна. Хоть эта интерпретация и неоднозначна в

принципе, поскольку уравнения поля описывают отличную от ОТО теорию и восприятие их в качестве эффективных уравнений Эйнштейна может показаться искусственным, этот подход оказывается очень полезен на практике.

**3. Связь метрической гравитационной модели  $f(R)$  и скалярно-тензорной гравитации.** Если в модели  $f(R)$  ввести скаляр  $\phi = R$ , действие

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S^{(m)} \quad (10.79)$$

может быть переписано в виде [116]–[120]:

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [\psi(\phi)R - V(\phi)] + S^{(m)}, \quad (10.80)$$

$$\psi = f'(\phi), \quad V(\phi) = \phi f'(\phi) - f(\phi), \quad (10.81)$$

где  $f''(R) \neq 0$ . Разумеется, (10.80) совпадает с (10.79) при  $\phi = R$ . Проварьируем (10.80) по  $\phi$ :

$$R \frac{d\psi}{d\phi} - \frac{dV}{d\phi} = (R - \phi)f''(R) = 0. \quad (10.82)$$

Если  $\phi = R$ , то  $f''(R) \neq 0$ . Тогда действие (10.80) можно записать в виде, подобном действию Бранса – Дикке:

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \psi R - \frac{\omega}{\psi} \nabla^i \psi \nabla_i \psi - U(\psi) \right] + S^{(m)}, \quad (10.83)$$

где  $\psi$  — поле Бранса – Дикке,  $\omega$  — параметр Бранса – Дикке, а потенциал  $U(\psi) = V[\phi(\psi)]$ . Выражение (10.80) следует из выражения (10.83) при  $\omega = 0$ . Тогда, выполняя вариацию действия (10.83) и полагая  $\omega = 0$ , получаем

следующие уравнения поля:

$$G_{ij} = \frac{\kappa}{\psi} T_{ij}^{(m)} - \frac{1}{2\psi} U(\psi) g_{ij} + \frac{1}{\psi} (\nabla_i \nabla_j \psi - g_{ij} \square \psi), \quad (10.84)$$

$$3\square\psi + 2U(\psi) - \psi \frac{dU}{d\psi} = \kappa T^{(m)}. \quad (10.85)$$

Эта аналогия позволяет произвести расчет ППН-параметров  $\beta$  и  $\gamma$  для  $f(R)$ -теорий [121].

#### 10.4. Скалярно-тензорные теории

Расширенные модели гравитации обсуждаемого типа характеризуются двумя чертами. Во-первых, геометрическая часть может быть связана со скалярным полем не только в виде кинетического и потенциального членов, но и более сложным образом (такая связь называется *неминимальной*). Во-вторых, могут появиться производные компонент метрики более высокого порядка, чем второй. В первом случае модель гравитации называют скалярно-тензорной, а во втором — теорией с поправками высших порядков по кривизне. Сочетание неминимальной связи и членов высших порядков также можно выразить с помощью эффективного лагранжиана, получив таким образом скалярно-тензорную теорию высших порядков.

Общий вид действия для скалярно-тензорных теорий высших порядков в четырехмерном случае записывается следующим образом:

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ F(R, \square R, \square^2 R, \dots, \square^k R, \phi) - \frac{\epsilon}{2} g^{ij} \phi_{;i} \phi_{;j} + 2\kappa \mathcal{L}^{(m)} \right], \quad (10.86)$$

где  $F$  — функция инвариантов кривизны и скалярного поля  $\phi$ . Член  $\mathcal{L}^{(m)}$ , как и ранее, определяет вклад обычной материи;  $\epsilon$  — константа теории. Она принимает значения  $\epsilon = \pm 1, 0$  и таким образом определяет природу и динамику скалярного поля, которое может быть обычным, фантомным или лишенным динамики соответственно [122, 123, 124]. В метрическом приближении уравнения поля получаются путем варьирования по  $g_{\mu\nu}$ :

$$\begin{aligned}
G^{ij} = & \frac{1}{\mathfrak{G}} \left[ \kappa T^{ij} + \frac{1}{2} g^{ij} (F - \mathfrak{G}R) + (g^{il} g^{jk} - g^{ij} g^{lk}) \mathfrak{G}_{;lk} + \right. \\
& + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\alpha} (g^{ij} g^{lk} + g^{il} g^{jk}) (\square^{\beta-\alpha})_{;k} \left( \square^{\alpha-\beta} \frac{\partial F}{\partial \square^{\alpha} R} \right)_{;l} - \\
& \left. - g^{ij} g^{lk} \left( (\square^{\beta-1} R)_{;k} \square^{\alpha-\beta} \frac{\partial F}{\partial \square^{\alpha} R} \right)_{;l} \right], \tag{10.87}
\end{aligned}$$

где  $G^{ij}$  — тензор Эйнштейна, а

$$\mathfrak{G} \equiv \sum_{\alpha=0}^N \square^{\alpha} \left( \frac{\partial F}{\partial \square^{\alpha} R} \right). \tag{10.88}$$

Дифференциальные уравнения (10.87) имеют порядок  $(2N + 4)$ . Тензор энергии-импульса определяется кинетической частью скалярного поля и обычной материей, т. е. имеет вид

$$T_{ij} = T_{ij}^{(m)} + \frac{\epsilon}{2} \left[ \phi_{;i} \phi_{;j} - \frac{1}{2} \phi^{;l} \phi_{;l} \right]. \tag{10.89}$$

Заметим, что вклад потенциала  $V(\phi)$  уже содержится в  $F$  по определению. Далее мы будем обозначать заглавной

буквой  $F$  плотность лагранжиана, которая также включает в себя вклад потенциала  $V(\phi)$ , а  $F(\phi)$ ,  $F(R)$  или  $F(R, \square R)$  — функции этих полей без потенциала. Варьируя по скалярному полю  $\phi$ , получаем уравнение Клейна – Гордона:

$$\epsilon \square \phi = -\frac{\partial F}{\partial \phi}. \quad (10.90)$$

Для дальнейшей работы с этими уравнениями используют различные приближения. Например, с помощью конформного преобразования можно получить скалярно-тензорную модель гравитации [125]–[129]. Наиболее простое расширение ОТО получается, как говорилось выше, если положить в действие (10.4)

$$F = f(R), \quad \epsilon = 0. \quad (10.91)$$

Стандартное действие ОТО, разумеется, соответствует случаю  $f(R) = R$ . Варьируя по  $g_{ij}$ , получаем (10.76), а затем, после преобразований, (10.78), где влияние гравитации высших порядков может восприниматься в качестве вклада тензора энергии-импульса. Это означает, что дополнительные члены и члены высших порядков в гравитационном действии, в принципе, ведут себя как тензор энергии-импульса, связанный с  $f(R)$ . Учитывая также обычный вклад материи, представляющей собой идеальную жидкость, получаем

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \\ &= \frac{1}{f'(R)} \left( \frac{1}{2} g_{ij} [f(R) - f'(R)R] + f'(R)_{;ij} - g_{ij} \square f'(R) \right) + \\ &+ \frac{\kappa T_{ij}^{(m)}}{f'(R)} = T_{ij}^{(curv)} + \frac{\kappa T_{ij}^{(m)}}{f'(R)}, \end{aligned} \quad (10.92)$$

где  $T_{ij}^{(curv)}$  — эффективный тензор энергии-импульса, составленный из членов высших порядков по кривизне. В ОТО  $T_{ij}^{(curv)}$  обращается в нуль. Поведение при  $f(R) = R$  обусловлено видом самого лагранжиана, который, даже будучи второго порядка, может быть записан нековариантным образом в виде суммы лагранжиана первого порядка и члена с дивергенцией. Для лагранжиана ОТО это выглядит следующим образом:

$$L_{HE} = \mathcal{L}\sqrt{-g} = [p^{ij}(\Gamma_{ik}^l \Gamma_{lj}^k - \Gamma_{lk}^l \Gamma_{ij}^k) + \nabla_k(p^{ij}u_{ij}^k)], \quad (10.93)$$

$$p^{ij} = \sqrt{-g} g^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{ij}}, \quad (10.94)$$

где  $\Gamma_{ik}^l$  — символы Кристоффеля, а  $u_{ij}^k$  — величины, составленные из их вариаций [126]. Поскольку совокупность величин  $u_{ij}^k$  не является тензором, выражение (10.94) нековариантно. Отметим, что в теориях первого порядка существует способ восстановления ковариантности, т. е. уравнения поля имеют второй порядок, благодаря чему лагранжиан ОТО получается вырожденным.

Из действия (10.4) можно получить другой интересный частный случай, положив

$$F = F(\phi)R - V(\phi), \quad \epsilon = -1. \quad (10.95)$$

Тогда

$$S = \int d^4x V(\phi) \left[ F(\phi)R + \frac{1}{2} g^{ij} \phi_{;i} \phi_{;j} - V(\phi) \right], \quad (10.96)$$

где  $V(\phi)$  и  $F(\phi)$  — обобщенные функции потенциала и скалярного поля  $\phi$  соответственно. Теория Бранса — Дикке является частным случаем действия (10.96) при  $V(\phi) = 0$ .

Вариация по  $g_{\mu\nu}$  приводит к уравнениям поля второго порядка:

$$\begin{aligned} F(\phi)G_{ij} &= F(\phi) \left[ R_{ij} - \frac{1}{2} Rg_{ij} \right] = \\ &= -\frac{1}{2} T_{ij}^\phi - g_{ij} \square_g F(\phi) + F(\phi)_{;ij}, \end{aligned} \quad (10.97)$$

где  $\square_g$  — оператор д'Аламбера по метрике  $g$ . Тензор энергии-импульса скалярного поля имеет вид

$$T_{ij}^\phi = \phi_{;i}\phi_{;j} - \frac{1}{2} g_{ij}\phi_{;l}\phi^{;l} + g_{ij}V(\phi). \quad (10.98)$$

В результате вариации по  $\phi$  получается уравнение Клейна — Гордона, т. е. уравнения движения для скалярного поля:

$$\begin{aligned} \square_g \phi - RF_\phi(\phi) + V_\phi(\phi) &= 0, \\ F_\phi(\phi) &= \frac{dF(\phi)}{d\phi}, \quad V_\phi(\phi) = \frac{dV(\phi)}{d\phi}. \end{aligned} \quad (10.99)$$

Последнее уравнение эквивалентно тождеству Бианки [130]. Выкладки для случая идеальной жидкости проводятся аналогичным образом.

## 10.5. Квантовые теории

**1. Теория с массивным гравитоном.** ОТО в линеаризованном пределе можно сформулировать как теорию безмассового поля спина 2 на пространстве Минковского, т. е. гравитон (частица-переносчик гравитационного взаимодействия) — это безмассовая частица спина 2. Именно эта теория оказывается неперенормируема. Естествен-

ным обобщением такой теории является введение в лагранжиан слагаемого, придающего гравитону массу. Конкретные особенности теории отличаются в зависимости от вида выбранного массового члена. Проблемой многих таких лагранжианов является то, что теория с массивным гравитоном в пределе стремящейся к нулю массы не совпадает с изначально безмассовой теорией. Если эту проблему удастся решить, то в теории появляется скалярное поле с отрицательной энергией («дух»), которое нестабильно относительно перекачки в него энергии. Для стабильной теории поля это считается недопустимым. Существуют модели, свободные от этих аномалий, однако они работают только при точной настройке параметров. Тем не менее разработка новых версий продолжается.

Прямым следствием наличия у гравитона массы является прежде всего конечный радиус гравитационного взаимодействия — гравитация становится близкодействующей силой. Однако при очень малых массах гравитона эффекты близкодействия практически незаметны: современное ограничение на массу гравитона  $m \leq 10^{-30}$  эВ [131].

Другим интересным эффектом массивной гравитации оказывается отсутствие горизонта у решения Шварцшильда [132]. Отклонения от стандартного решения вблизи  $r = 2M$  настолько сильны, что горизонт не формируется и решение гладко продолжается до сингулярности  $r = 0$ . В астрофизическом смысле решение вне  $r = 2M$  практически неотличимо от стандартного в ОТО. Однако рассматриваемые объекты можно различить. Спектр гравитационных волн объекта, падающего по спирали на черную дыру, будет отличаться. Более того, в массивной гравитации гравитационные волны можно будет детектировать даже тогда, когда объект упал под гравитационный радиус  $r < 2M$ .

Космологические решения в теориях с массивным гравитоном совпадают с решениями ОТО на большом интервале времен, отличаясь только на очень ранних и очень поздних временах — возникает периодически осциллирующая Вселенная. Сингулярность на малых временах заменяется локальным минимумом, а бесконечное расширение — на локальный максимум. Также наличие у гравитона массы может отражаться на деталях спектра космического микроволнового излучения [131] и картине гравитационного линзирования [133].

К сожалению, перечисленные эффекты исчезают при стремлении массы гравитона к нулю, так что их отсутствие в наблюдательных данных позволяет нам лишь устанавливать ограничения на массу гравитона.

**2. Петлевая квантовая гравитация.** Теория петлевой квантовой гравитации представляет собой попытку построения строгой (без использования методов теории возмущений) фоново-независимой общеквариантной квантовой теории поля. Теория построена на объединении принципов квантовой механики и ОТО [134]. Первый принцип ОТО, лежащий в основе теории, — отсутствие фонового пространства-времени. Как и в ОТО, структура пространства-времени определяется решениями уравнений поля, учитывающими влияние вещества и энергии. Вторым принципом, взятый из ОТО, — диффеоморфная инвариантность — гласит, что для отображения пространства-времени и построения уравнений может быть использована любая система координат. Точка задается только физически происходящими в ней событиями. Мы не будем подробно останавливаться на формализме теории, общее его изложение можно найти в обзорах [134], [135]. Перейдем сразу к обсуждению проблем и результатов.

Одним из наиболее важных теоретических следствий является дискретность пространства. На математическом уровне это выражается в дискретности спектра собственных значений операторов объема и площади. Согласно классической интерпретации квантовой механики это означает, что измеряемые величины объема и площади могут принимать дискретный набор значений. Возможные значения измеряются в планковских единицах<sup>41</sup>. Изменения структуры пространства (квантового состояния системы) также происходят дискретно. Вероятность того или иного изменения состояния определяется уравнениями теории. Последовательность таких трансформаций задает течение времени, которое, соответственно, также оказывается дискретным. Наиболее важным для теоретиков является тот факт, что дискретность пространства-времени — следствие теории и не содержится в начальных предположениях.

Другим впечатляющим следствием теории является отсутствие ультрафиолетовых расходимостей, т. е. механизм перенормировки оказывается применим к теории, в отличие от ОТО. Однако в то же время наличие ОТО в качестве низкоэнергетического предела строго не доказано. Уравнения петлевой квантовой гравитации приводят к ОТО при замене квантовых операторов на наблюдаемые, но *полное, математически строгое доказательство соответствия общей теории относительности и петлевой квантовой гравитации в настоящий момент отсутствует*. Задача решена для нескольких важных частных случаев — метрика Шварцшильда [136], решение Фридма-

---

<sup>41</sup> Квант площади примерно равен квадрату планковской длины, или  $10^{-66}$  см<sup>2</sup>. Квант объема — куб планковской длины, или  $10^{-99}$  см<sup>3</sup>. Таким образом, согласно теории, в каждом кубическом сантиметре пространства содержится приблизительно  $10^{99}$  квантов объема.

на, Вселенная с космологической постоянной [137] и антиде-ситтеровское пространство [138] получены как решения теории.

Важным свойством космологических решений петлевой квантовой гравитации является отсутствие начальной сингулярности. Квантовые эффекты и наличие ограничения на минимальный размер пространства препятствуют образованию сингулярности в начальный момент. При рассмотрении эволюции назад во времени Вселенная сначала сжимается до малого конечного размера (зависящего от параметров модели) и снова начинает расширяться — «Большой отскок». Уравнения теории полностью описывают как квантовое состояние с минимальным объемом, так и весь процесс эволюции. Аналогичное поведение наблюдается в космологии и в ряде других теорий [69].

В петлевой квантовой гравитации в квазиклассическом приближении эффективная метрика пространства времени зависит от энергии [139]. Это значит, что фотоны различных энергий перемещаются с несколько разными скоростями и достигают наблюдателя за разное время. Независимой от наблюдателя постоянной теории является планковская энергия. В низкоэнергетическом пределе (при разложении метрики по степеням обратной планковской энергии) постоянство скорости света восстанавливается в нулевом порядке. Точная величина данного эффекта не предсказывается теорией, но ожидается, что он ничтожно мал (как и все эффекты теории, он имеет порядок планковских величин). Однако на космологических расстояниях эффект может накапливаться и приводить к дисперсии, доступной для наблюдения современными приборами. Спутниковые наблюдения гамма-всплесков позволяют наложить ограничения на присутствие такой энергетической зависимости в скорости света [140].

Другое возможное проявление дискретности пространства-времени связано с космическими лучами высокой энергии. Классическая теория предсказывает, что протоны космических лучей с энергией более  $3 \times 10^{19}$  эВ должны рассеиваться на космическом микроволновом фоне, заполняющем пространство, и не достигать Земли (оценка среднего потока таких лучей около 1 события на 1 кв. км за 100 лет). Тем не менее в эксперименте AGASA было зарегистрировано более 10 событий с космическими лучами даже большей энергии<sup>42</sup>. В теории петлевой квантовой гравитации дискретность пространства повышает энергию, требуемую для реакции рассеивания [141], и позволяет высокоэнергетическим протонам достигнуть Земли. Если данные AGASA верны, этот результат можно рассматривать как косвенное свидетельство дискретности пространства.

Теория петлевой квантовой гравитации содержит ряд впечатляющих результатов для черных дыр. Решение Шварцшильда в теории имеет полностью идентичную ОТО внешнюю (относительно горизонта) структуру, но не содержит сингулярности. Более того, в отличие от ОТО, структура внутреннего пространства черной дыры *может* быть исследована. Это позволяет рассматривать последние стадии эволюции черной дыры, что не удается на сегодняшний день в ОТО. Поскольку площадь может принимать только дискретный набор значений, то масса черной дыры тоже оказывается квантована. Масса черной дыры убывает в процессе испарения, т. е. процесс испарения представляет собой квантовый переход к состоянию с меньшей массой. Следствием такого процесса является то, что частота излучения принимает значения из дискретно-

---

<sup>42</sup> Однако согласие об интерпретации данных AGASA на данный момент научным сообществом не достигнуто.

го набора. В макроскопическом режиме (большой массы) эти частоты оказываются достаточно близкими для имитации непрерывного спектра Хокинга. Таким образом, если бы удалось наблюдать последние стадии эволюции черной дыры, можно было бы напрямую сравнить предсказания двух теорий.

Другие интересные результаты относятся к энтропии черной дыры. В классической теории считается, что энтропия задается выражением Бекенштейна — Хокинга

$$S = \frac{k}{\hbar G_N} A, \quad (10.100)$$

где  $k$  — постоянная Больцмана, выражение записано в системе единиц  $c = 1$ . Тем не менее четкое понимание природы этого выражения, как и его вывод из первых принципов, отсутствует. В теории петлевой квантовой гравитации можно определить энтропию черной дыры путем статистического подсчета количества микросостояний горизонта с заданной площадью [142]:

$$S = \frac{1}{\gamma} \frac{k}{4\hbar G_N} A, \quad (10.101)$$

здесь  $\gamma$  — произвольный параметр теории. Соответственно выбор  $\gamma = 1/4$  приводит нас к формуле Бекенштейна — Хокинга, однако однозначность такого выбора в теории еще обсуждается. Такое определение энтропии оставляет несколько спорных вопросов. В статистической физике определение энтропии путем подсчета состояний основано на понятии энергии. В ОТО определение энергии нельзя ввести так просто и, соответственно, неясно, как определять канонический ансамбль в квантовой гравитации (вести подсчет микросостояний). Почему именно количество

микросостояний с определенной площадью должно определять термодинамику системы? Ответ на этот вопрос требует дальнейших исследований.

**3. Теория суперструн.** Данная теория построена на основе стандартной модели физики элементарных частиц с использованием двух основных идей: суперсимметрии и струн, т. е. теория суперструн является, в первую очередь, единой теорией поля и, уже как следствие, включает в себя гравитацию. В этой теории утверждается, что кварки и лептоны нефундаментальны: все они состоят из еще более тяжелых и не открытых экспериментально структур, сформированных из возбуждений одномерных объектов, называемых струнами. На сверхмалых расстояниях (или при сверхвысоких энергиях взаимодействий) материя представляет собой серию полевых стоячих волн, подобных возбуждениям струн музыкальных инструментов. Каждому возбуждению соответствует собственное энергетическое состояние или, другими словами, новая частица. Энергия и масса эквивалентны, а значит, чем выше частота вибрации струны, тем выше энергия, и тем выше масса наблюдаемой частицы. Спектры частот колебаний струн квантованы. Рассматриваются как замкнутые, так и открытые струны, они генерируют два разных спектра масс. Гравитация занимает свое место в этой схеме как одно из возбуждений струны, соответствующее гравитону — безмассовой частице со спином 2. Более подробно с формализмом теории струн можно познакомиться в книге [143]. Локальное взаимодействие суперструн может быть двух типов. Два свободных конца двух открытых струн (или одной и той же струны) могут соединиться. В результате получится одна открытая (или замкнутая) струна. Возможен и обратный процесс, т. е. разрыв одной открытой струны на две или разрыв замкнутой струны. Второй

тип взаимодействий суперструн — когда контактируют две внутренние точки двух струн или одной и той же струны (рис. 10.7).

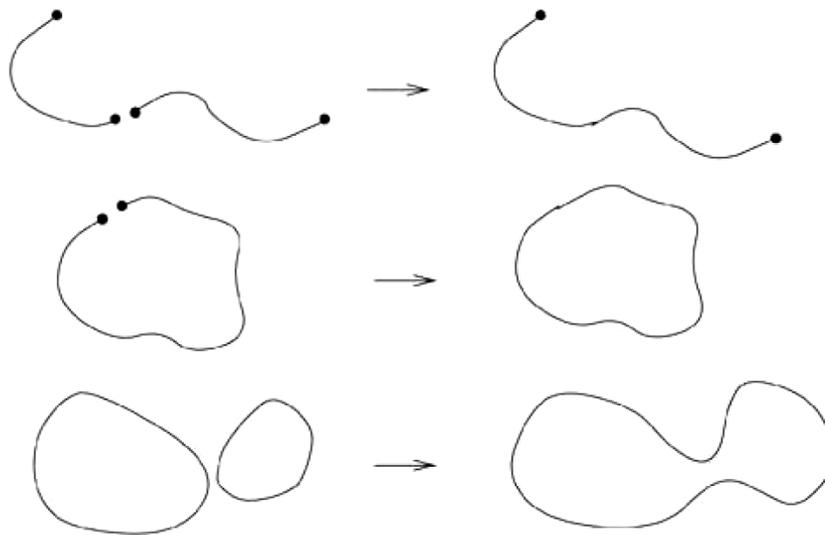


Рис. 10.7. Различные виды взаимодействия струн

Благодаря протяженности струны, решается проблема ультрафиолетовых расходимостей в квантовой теории поля, и, следовательно, вся процедура регуляризации и перенормировки перестает быть математическим трюком и обретает физический смысл. Действительно, в квантовой теории поля бесконечные значения амплитуд взаимодействия возникают в результате того, что две частицы могут сколь угодно близко подойти друг к другу. В теории струн это уже невозможно: слишком близко расположенные струны сливаются в струну [144].

Второй принцип в основе теории суперструн — суперсимметрия. Это гипотетическая симметрия, смешивающая бозоны и фермионы. Преобразования суперсимметрии связывают бозонное и фермионное квантовые поля, так что они могут взаимно превращаться друг в друга. Сейчас нет экспериментального подтверждения суперсимметрии (т. е. в природе она нарушена при наблюдаемых энергиях), но с теоретической точки зрения суперсимметричные полевые модели обладают рядом интересных свойств. В первую очередь, это взаимное сокращение многих ультрафиолетовых расходимостей в таких моделях. При строгом выполнении суперсимметрии энергия вакуума тождественно равна нулю, так как фермионный и бозонный вакуумы компенсируют друг друга. Суперсимметрия требует, чтобы каждой частице, переносящей взаимодействие (бозону), отвечал партнер-фермион и наоборот. Такие частицы называются суперпартнерами и должны наблюдаться [145]. Ни один из предсказываемых суперпартнеров на данный момент не наблюдался, поэтому предполагается, что они очень массивны. Суперпартнеры обычных частиц являются, с точки зрения теории суперструн, одним из кандидатов на роль темной материи.

Лоренц-инвариантность налагает жесткие требования на размерность пространства-времени, в котором формулируется теория суперструн, — пространство должно быть 10-мерным [146]. Поскольку мы, согласно наблюдениям, существуем в четырехмерном пространстве-времени, необходимо объяснить, почему остальные дополнительные измерения оказываются ненаблюдаемыми. В распоряжении теории струн имеется два механизма, скрывающих дополнительные измерения: это компактификация и локализация.

Первый из них заключается в компактификации до-

полнительных 6 измерений, т. е. замыкании их на себя на таких малых расстояниях, что они не могут быть обнаружены в экспериментах. Это значит, что остальные измерения столь малы, что их влияние совершенно неощутимо для макрообъектов.

Другой механизм — локализация — утверждает, что дополнительные измерения не столь малы, однако в силу ряда причин все частицы нашего мира локализованы на четырехмерном многообразии в многомерной Вселенной (называемом «браной») и не могут его покинуть. Это и есть наблюдаемая часть Вселенной. Поскольку наблюдатель всегда состоит из обычных частиц, то мы оказываемся, в принципе, неспособны обнаружить дополнительные измерения. Однако гравитация, будучи результатом искривления пространства-времени, не локализована на бране, и потому гравитоны и микроскопические черные дыры могут уходить с браны. В наблюдаемом мире такой процесс будет выглядеть как внезапное исчезновение энергии и импульса, уносимых этими объектами. Более подробно такие модели будут рассмотрены в следующем подразделе.

В связи с проблемой некомпактности дополнительных измерений в последнее время обсуждается возможность модификации закона всемирного тяготения на масштабах галактик. В результате вместо (1.3) в качестве потенциальной энергии взаимодействия  $V_{ik}$  используется выражение

$$V_{ik} = -G \frac{m_i m_k}{r_{ik}} \left( 1 + \alpha \exp\left(-\frac{r_{ik}}{\lambda}\right) \right), \quad (10.102)$$

где индексы  $i$  и  $k$  нумеруют взаимодействующие частицы. Добавочный член в (10.102) описывает поправки, связанные с возможным наличием короткодействующей составляющей в потенциале гравитационного поля. Этот член соответствует потенциалу Юкавы. Экспериментальная про-

верка (10.102) позволит сделать выводы о наличии и числе некомпактных измерений.

Теория струн определена на фоне классического пространства-времени ОТО. Тем не менее уравнения Эйнштейна в ней не всегда могут быть решены. В низкоэнергетическом пределе теория струн добавляет бесконечный ряд поправок к ОТО. В макроскопическом режиме, когда мы работаем с расстояниями много больше размеров струны, большая часть этих поправок пренебрежимо мала. Но с уменьшением масштабов величины поправок начинают быстро расти до тех пор, пока уравнения Эйнштейна не перестают адекватно описывать результат. Возможно, геометрия пространства-времени появляется в теории только на больших масштабах или при слабой связи.

В 1996 г. в [147] Стромингеру и коллегам удалось воспроизвести выражение Бекенштейна — Хокинга для энтропии черных дыр. Однако результат был получен для заряженных черных дыр, причем имеющих строго определенное соотношение массы и заряда, что, как считается, имеет мало общего с реальными астрофизическими объектами.

Теория суперструн в применении к космологии приводит к ряду интересных выводов. Во-первых, из теории суперструн может быть получена инфляционная модель Вселенной [148]. В качестве скалярного поля, индуцирующего инфляционное расширение, в струнной космологии вводится так называемое дилатонное поле, кванты которого массивны, поэтому влияние данного поля существенно лишь на расстояниях порядка размера элементарных частиц или на ранней стадии развития Вселенной. Во-вторых, из теории следует, что Вселенная должна иметь минимально допустимый размер. В-третьих, космология должна описывать эволюцию всех измерений, включая до-

полнительные. Суперструны, растянутые до межгалактических размеров, обладают сильным гравитационным полем и могут выступать в роли гравитационных линз. Кроме того, движущиеся струны должны создавать гравитационные волны, которые могут быть обнаружены в экспериментах. Они также могут накладывать небольшие отпечатки на реликтовое излучение, которые могут быть обнаружены в будущем.

Теория струн нуждается в экспериментальной проверке, однако на данный момент ни один из вариантов теории не дает однозначных предсказаний, которые можно было бы проверить в критическом эксперименте. В основном это происходит из-за малости предсказываемых эффектов или из-за того, что величина их может варьироваться подстройкой параметров теории. Это служит источником многочисленных дискуссий о принципиальной проверяемости и научности теории суперструн.

Одна из основных проблем теории суперструн — свести 10-мерные суперструнные теории к 4-мерной эффективной теории поля. Существует множество способов сделать это, так что проблема заключается в выборе наиболее адекватного. Каждый из вариантов редукции 10-мерной теории порождает свой 4-мерный мир, который может практически совпадать, а может и отличаться от наблюдаемого мира. Всю совокупность возможных реализаций низкоэнергетического мира из исходной суперструнной теории называют ландшафтом теории. Оказывается, что число возможных путей редукции составляет не менее  $10^{500}$  [149], во многом благодаря множеству способов компактификации дополнительных измерений. Никаких механизмов, делающих одни варианты компактификации более вероятными, чем другие, теория не предлагает. Некоторые авторы видят выход в применении антропного принципа, однако

другие не считают это решением на теоретическом уровне.

Еще одна проблема состоит в том, что, как и квантовая теория поля, большая часть теории струн все еще формулируется пертурбативно (в терминах теории возмущений), т. е. строгая форма теории нам на данный момент неизвестна.

## 10.6. Космологические расширения

**1. Мультивселенная.** Идея Мультивселенной (англ. *multiverse*) — гипотеза о том, что существует множество всех возможных одновременно реально существующих вселенных (включая ту, в которой мы находимся). Структура Мультивселенной, происхождение и физика каждой Вселенной, входящей в ее состав, и отношения между вселенными зависят от выбранной гипотезы [150]–[156].

Изначально идея Мультивселенной перешла из категории метафизических в физические благодаря сценарию хаотической инфляции [157]. Если рассмотреть Вселенную, изначально состоящую из многих областей со случайным образом распределенным скалярным полем  $\phi$ , то инфляция пойдет по-разному в разных частях Вселенной. В тех частях, где скалярное поле слишком мало, инфляция никогда не начинается, потому они не внесут существенного вклада в объем Вселенной. Основную же ее часть занимают те области, в которых скалярное поле изначально было большим. Инфляция таких областей формирует огромные регионы, размер которых существенно превышает размер наблюдаемой нами части Вселенной. Есть существенное отличие данного сценария от стандартной концепции Большого взрыва — в новой модели более не требуются условия изначальной однородности и термоди-

намического равновесия. Каждая часть Вселенной может иметь свое начало. Различные части Вселенной могли возникать в разные моменты времени и потом разрастаться до размеров, значительно превышающих наблюдаемый нами объем.

С самого начала в литературе обсуждалась простейшая инфляционная модель всего с одним скалярным полем. Реалистичные модели элементарных частиц, однако, вводят множество других скалярных полей. Например, в соответствии со стандартной теорией электрослабого взаимодействия массы всех элементарных частиц зависят от величины хиггсовского скалярного поля  $\varphi$  в нашей Вселенной — эта величина определяется значением в минимуме эффективного потенциала  $V(\varphi)$ . В простейших моделях  $V(\varphi)$  имеет только один минимум. Однако в общем случае этот потенциал может иметь множество различных минимумов. Так, в простейшей суперсимметричной теории, объединяющей слабое, сильное и электромагнитное взаимодействия, эффективный потенциал имеет несколько различных минимумов равной глубины по отношению к двум скалярным полям,  $\Phi$  и  $\varphi$ . Если эти скалярные поля скатываются в различные минимумы в разных частях вселенной (этот процесс называют спонтанным нарушением симметрии), массы элементарных частиц и законы взаимодействий в них будут различными. Каждая из этих частей может стать экспоненциально большей в результате инфляции.

Спектр возможных значений физических величин может быть непрерывен. Например, в рамках теории Бранса — Дикке эффективная гравитационная постоянная зависит от величины поля Бранса — Дикке, которое также флуктуирует в процессе инфляции. В результате Вселенная после инфляции оказывается разделенной на экспо-

ненциально большие части со всеми возможными значениями гравитационной постоянной  $G$  и амплитуды флуктуаций плотности  $\delta\rho/\rho$ . Инфляция может разделять Вселенную на экспоненциально большие области с непрерывно меняющимся отношением чисел барионов и фотонов  $n_B/n_\gamma$  и, соответственно, с галактиками, имеющими существенно различные свойства. Инфляция может также непрерывно менять эффективное значение энергии вакуума (космологической постоянной  $\Lambda$ ). В таких условиях по окончании инфляционной стадии могли возникнуть самые разнообразные наборы параметров физики частиц (масс, констант связи, энергии вакуума и т. д.).

Таким образом, в связи с идеей Мультивселенной в теории инфляции интересным образом решается вопрос о том, почему наблюдаемые физические константы имеют именно эти величины. Инфляция позволяет реализоваться во Вселенной всем значениям, которые возможны, — наш мир просто один из множества вариантов.

**2. Мир на бране.** Как мы уже обсуждали выше, при переходе к низкоэнергетическому пределу теории струн необходимо решить проблему ненаблюдаемости дополнительных измерений. Один из путей решения заключается в предположении, что вся материя и все поля, кроме гравитационного, локализованы на трехмерном пространственном многообразии — «бране» — и не могут выходить в дополнительные измерения — «балк»<sup>43</sup>. Дополнительные измерения могут иметь большой или бесконечно большой размер. Результатом такой локализации является то, что все наши эксперименты, проводимые инструментами из обычного вещества, демонстрируют эффективную четырехмерность пространства-времени. Такие модели называются моделями *мира на бране*. Модели различаются

---

<sup>43</sup> Соответственно *brane* и *bulk* в англоязычной литературе.

между собой механизмом удержания вещества на бране и геометрией многомерного пространства-времени. Основное требование к моделям — четырехмерная гравитация на бране должна эффективно соответствовать ОТО.

Задачи объяснения космологических явлений решаются в моделях мира на бране весьма интересным образом. Поскольку за счет присутствия балка в теории появляются дополнительные степени свободы, многие явления можно моделировать с помощью динамики браны в дополнительных измерениях. Например, космологическое расширение может соответствовать просто движению браны в дополнительном пространстве, а рождение вещества на бране или Большой взрыв — столкновению двух бран [158] (модель «воспламеняющейся Вселенной»).

Присутствие дополнительных измерений может приводить к экспериментально наблюдаемым эффектам. Во-первых, в моделях с некомпактными дополнительными измерениями изменяется закон Ньютона на малых расстояниях. Энергия взаимодействия между двумя точечными массами может быть записана в следующем виде:

$$V(r) = -\frac{G_\infty m_1 m_2}{r} [1 + \alpha e^{-r/\lambda}]. \quad (10.103)$$

Здесь  $r$  — расстояние между массами,  $G_\infty$  — величина гравитационного взаимодействия при  $r \rightarrow \infty$  (ньютоновская гравитационная постоянная),  $\alpha$  и  $\lambda$  — сила и эффективный радиус нового взаимодействия соответственно. Данное выражение приводит к следующей эффективной гравитационной постоянной:

$$G(r) = G_\infty [1 + \alpha(1 + r/\lambda)e^{-r/\lambda}]. \quad (10.104)$$

Таким образом, сила гравитационного взаимодействия начинает зависеть от расстояния  $r$ . В настоящее время закон Ньютона проверен на субмиллиметровых расстояниях,

и отклонений не обнаружено. Однако для более однозначных выводов о судьбе моделей с некомпактными дополнительными измерениями необходимы дальнейшие исследования.

Во-вторых, в моделях мира на бране гравитация может становиться очень сильной уже на энергетических масштабах порядка нескольких ТэВ, что делает возможной ее проверку в экспериментах в ближайшем будущем. Весьма приближенно причины такого эффекта можно объяснить следующим образом. В стандартной физике гравитационное взаимодействие считается самым слабым и, соответственно, масштаб энергий, на котором оно становится значимым, в физике элементарных частиц оказывается огромным — так называемый планковский масштаб объединения взаимодействий  $M_{Pl} \approx 10^{19}$  ГэВ<sup>44</sup>. Вопрос: почему планковский масштаб так сильно отличается от масштаба электрослабого объединения порядка  $10^2$  ГэВ — является весьма актуальным в физике. Это и есть знаменитая *проблема иерархии* масштабов. В моделях мира на бране 4-мерный масштаб Великого объединения оказывается эффективным, в то время как фундаментальным становится многомерный планковский масштаб, который принимает значения порядка ТэВ. Выражаясь образно, можно сказать, что гравитация слаба, так как распределяется по всему дополнительному объему, в то время как остальные взаимодействия концентрируются на бране. Проблема иерархии тогда переформулируется: почему дополнительные измерения некомпактны? В настоящее время идет активный поиск процессов, которые могут быть вызваны понижением фундаментального планковского масштаба.

Одним из возможных процессов является уход грави-

---

<sup>44</sup> В системе единиц, где скорость света равна единице,  $c = 1$ .

тонов с браны в дополнительные измерения (рис. 10.8). Для наблюдателя на бране это будет выглядеть как исчезновение энергии и импульса, уносимых гравитонами.

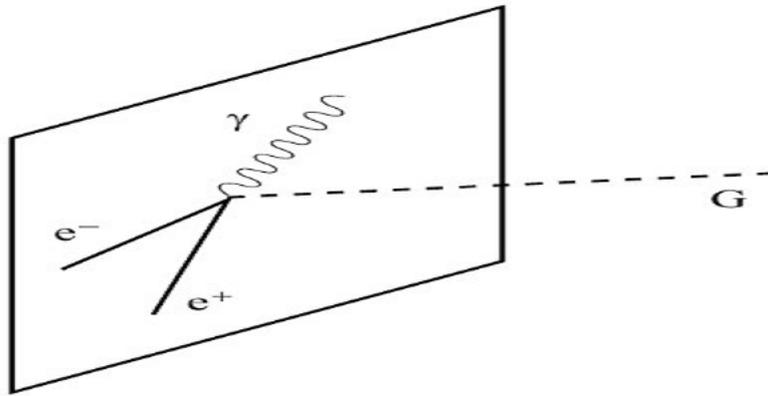


Рис. 10.8. Схематическое изображение ухода гравитона с браны

Еще одна проблема в теориях с большими (и бесконечными) дополнительными измерениями — потенциально очень быстрый распад протона. Эта проблема появляется, если рассматривать модель как низкоэнергетический предел некоторой теории, приводящей к объединению констант взаимодействий (например, теории струн). В обычных теориях Великого объединения время распада протона оценивается как

$$\tau_p \propto \frac{1}{\alpha_{GUT}^2 M_p} \left( \frac{M_{GUT}}{M_p} \right)^4. \quad (10.105)$$

В этом выражении  $M_p$  — масса протона,  $M_{GUT}$  — характерный массовый масштаб, на котором происходит объедине-

ние,  $\alpha_{GUT}$  — величина единой константы взаимодействия в точке объединения. Формула (10.105) не противоречит наблюдениям, т. е. отсутствию данных о распаде протона при  $M_{GUT} \propto 10^{16}$  ГэВ [158], так как время жизни протона оказывается больше возраста Вселенной. Однако если  $M_{GUT}$  оказывается меньше, как это происходит при наличии больших дополнительных измерений, то оценка дает слишком малое время жизни протона.

## Заключение

В данном учебном пособии рассмотрено описание гравитационного поля на основе современной теории гравитации — *общей теории относительности*. В первых главах пособия были сформулированы основные положения ОТО и изложен необходимый математический аппарат. Затем были рассмотрены основные проявления ОТО, включая эффекты в сильном гравитационном поле (черные дыры, космология). В заключительных главах рассматривались экспериментальный статус ОТО и ее возможные расширения. Нам представляется, что этот багаж знаний позволит читателям (студентам, преподавателям, научным сотрудникам) не только понимать научную литературу, посвященную задачам ОТО, но и применять изложенные подходы как в гравитации, так и в смежных областях.

Благодаря росту количества экспериментов, увеличению их точности с развитием технологий и набору статистики, физика гравитационного поля в настоящее время бурно развивается (особенно в приложении к космологии и физике черных дыр). Современные представления о путях развития, наблюдательных результатах и уже сделанных на их основе физических выводах по состоянию на 2014 г. были представлены в гл. 6—9. Мы стремились не только изложить математический аппарат и физические основы ОТО, необходимые для самостоятельной работы в различных направлениях теории гравитации, но и ввести читателя в круг проблем и полученных новых результатов, чтобы облегчить чтение оригинальных и обзорных статей. Нам представляется, что это позволит студентам

(и специалистам, профессионально работающим в этой и других областях физики) следить по научным публикациям за развитием теории гравитации, космологии, физики черных дыр, астрофизики и т. д.

В свою очередь, это, надеемся, даст студентам возможность выбрать направления исследований, которыми они хотели бы заняться, а преподавателям и научным работникам из других областей физики, возможно, позволит увидеть в данных интереснейших и бурно развивающихся областях задачи и методы для приложения своего профессионального мастерства в новых областях, ведь наиболее интересные результаты, как известно, появляются на стыках научных направлений.

## Список библиографических ссылок

1. *Choptuik M. W.* Critical behaviour in gravitational collapse // *Prog. Theor. Phys. Suppl.* 1999. Vol. 136. P. 353–365.
2. *Olabarrieta I., Choptuik M. W.* Critical Phenomena at the Threshold of Black Hole Formation for Collisionless Matter in Spherical Symmetry // *Phys. Rev. D.* 2002. Vol. 65. P. 024007.
3. *Bardeen J. M., Carter B., Hawking S. W.* The Four Laws of Black Hole Mechanics // *Commun. Math. Phys.* 1973. Vol. 31. P. 161–170.
4. *Carter B.* Axisymmetric Black Hole Has Only Two Degrees of Freedom // *Phys. Rev. Lett.* 1971. Vol. 26. P. 331–333.
5. *Carter B.* *Black Holes.* N. Y. : Gordon and Breach, 1973.
6. *Hawking S. W.* *Black Holes.* N. Y. : Gordon and Breach, 1973.
7. *Page D. N.* Hawking radiation and black hole thermodynamics // *New J. of Phys.* 2005. Vol. 7. P. 203.
8. *Hawking S. W.* Black holes in general relativity // *Commun. Math. Phys.* 1972. Vol. 25. P. 152–166.
9. *Hawking S. W., Ellis G. F. R.* *The large scale structure of space-time.* L.: Cambridge University Press, 1973.

10. *Hawking S. W.* Gravitational radiation from colliding black holes // *Phys. Rev. Lett.* 1971. Vol. 26. P. 1344–1346.
11. *Bardeen J. M.* Kerr Metric Black Holes // *Nature.* 1970. Vol. 226. P. 64–65.
12. *Christodoulou D.* Reversible and irreversible transformations in black hole physics // *Phys. Rev. Lett.* 1970. Vol. 25. P. 1596–1597.
13. *Зельдович Я. Б.* Генерация волн вращающимся телом // *Письма в ЖЭТФ.* 1971. Т. 14. С. 270.
14. *Зельдович Я. Б.* Усиление цилиндрических электромагнитных волн при отражении от вращающегося тела // *ЖЭТФ.* 1972. Т. 62. С. 2076.
15. *Misner C. W.* Stability of Kerr black holes against scalar perturbations // *Bull. Am. Phys. Soc.* 1972. Vol. 17. P. 472.
16. *Starobinski A. A.* Amplification of waves during reflection from a rotating black hole // *ЖЭТФ.* 1973. Vol. 64. P. 48–57.
17. *Bekenstein J. D.* Extraction of Energy and Charge from a Black Hole // *Phys. Rev. D.* 1973. Vol. 7. P. 949–953.
18. *Bekenstein J. D.* Baryon number, entropy, and black hole thermodynamics : Ph. D. thesis. Princeton : University, 1972.
19. *Bekenstein J. D.* Black holes and the second law // *Lett. Nuovo Cim.* 1972. Vol. 4. P. 737–740.

20. *Bekenstein J. D.* Black holes and entropy // *Phys. Rev. D.* 1973. Vol. 7. P. 2333–2346.
21. *Bekenstein J. D.* Generalized second law of thermodynamics in black hole physics // *Phys. Rev. D.* 1974. Vol. 9. P. 3292–3300.
22. *Hawking S. W.* Black hole explosions // *Nature.* 1974. Vol. 248. P. 30–31.
23. *Hawking S. W.* Particle Creation by Black Holes // *Commun. Math. Phys.* 1975. Vol. 43. P. 199–220.
24. *Новиков И. Д., Фролов В. П.* Физика черных дыр. М. : Наука, 1986.
25. *Page D. N.* Particle Emission Rates from a Black Hole: Massless Particles from an Uncharged, Nonrotating Hole // *Phys. Rev. D.* 1976. Vol. 13. P. 198–206.
26. *Page D. N.* Particle Emission Rates from a Black Hole. 2. Massless Particles from a Rotating Hole // *Phys. Rev. D.* 1976. Vol. 14. P. 3260–3273.
27. *Page D. N.* Comment On Entropy Evaporated By A Black Holes // *Phys. Rev. Lett.* 1983. Vol. 50. P. 1013.
28. *Thorne K. S., Zurek W. H., Price R. H.* Black Holes: The Membrane Paradigm. New Haven, CT : Yale University Press, 1986.
29. *Hawking S. W.* Breakdown of Predictability in Gravitational Collapse // *Phys. Rev. Lett.* 1976. Vol. 14. P. 2460–2473.

30. *Bekenstein J. D.* Universal upper bound on the entropy-to-energy ratio for bounded systems // *Phys. Rev. D.* 1981. Vol. 23. P. 287–298.
31. *Unwin S. D.* Possible violations of the entropy-to-energy-ratio bound // *Phys. Rev. D.* 1982. Vol. 26. P. 944–946.
32. *Page D. N.* Comment on a universal upper bound on the entropy-to-energy ratio for bounded systems // *Phys. Rev. D.* 1982. Vol. 26. P. 947–949.
33. *Page D. N.* Huge violations of Bekenstein’s entropy bound [Electronic resource]. URL: <http://arxiv.org/gc-gc/0005111> (дата обращения: 06.09.2014).
34. *Page D. N.* Subsystem entropy exceeding Bekenstein’s bound [Electronic resource]. URL: <http://arxiv.org/hep-th/0007237> (дата обращения: 06.09.2014).
35. *Page D. N.* Defining entropy bounds // *JHEP.* 2008. Vol. 10. P. 007.
36. *Unruh W. G., Wald R. M.* Acceleration radiation and the generalized second law of thermodynamics // *Phys. Rev. D.* 1982. Vol. 25. P. 942–958.
37. *Unruh W. G., Wald R. M.* Entropy bounds, acceleration radiation, and the generalized second law // *Phys. Rev. D.* 1983. Vol. 27. P. 2271–2276.
38. *Pelath M. A., Wald R. M.* Comment on entropy bounds and the generalized second law // *Phys. Rev. D.* 1999. Vol. 60. P. 104009.

39. *Deutsch D.* Is There a Fundamental Bound on the Rate at Which Information Can Be Processed? // *Phys. Rev. Lett.* 1982. Vol. 48. P. 286–288.
40. *Zaslavskii O.* Generalized second law and the Bekenstein entropy bound in Gedankenexperiments with black holes // *Class. Quantum Grav.* 1996. Vol. 13. P. L7.
41. *Marolf D., Sorkin R.* On the status of highly entropic objects // *Phys. Rev. D.* 2004. Vol. 69. P. 024014.
42. *Hawking S. W.* Information loss in black holes // *Phys. Rev. D.* 2005. Vol. 72. P. 084013.
43. *Naselsky P. D., Novikov I. D., Novikov D. I.* The Physics of the Cosmic Microwave Background. L. : Cambridge University Press, 2006.
44. *Komatsu E. et al.* Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP1) Observations : Cosmological Interpretation // *Astrophys. J. Suppl.* 2011. Vol. 192. P. 18.
45. *Рябов В. А., Царев В. А., Цховребов А. М.* Поиски частиц темной материи // *Успехи физических наук.* 2008. Т. 178. С. 1129.
46. *Zwicky F.* On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae // *Astrophys. J.* 1937. Vol. 86. P. 217.
47. *Springel V. et al.* Simulating the joint evolution of quasars, galaxies and their large-scale distribution // *Nature.* 2005. Vol. 435. P. 629.
48. *Fumagalli M., O’Meara J. M., Prochaska J. X.* Detection of Pristine Gas Two Billion Years After the Big Bang // *Science.* 2011. Vol. 334. P. 1245.

49. Долгов А. Д., Зельдович Я. Б., Сажин М. В. Космология ранней Вселенной. М. : Изд-во Моск. гос. ун-та, 1988.
50. *Heavens A.* Cosmology with Gravitational Lensing. В. : Springer, 2011.
51. *Auger M. W. et al.* The Sloan Lens ACS Survey. IX. Colors, Lensing, and Stellar Masses of Early-Type Galaxies // *The Astrophys. J.* 2009. Vol. 705. P. 1099.
52. *Hoekstra H., Jain B.* Weak Gravitational Lensing and its Cosmological Applications // *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* 2008. Vol. 58. P. 99.
53. *Belokurov V. et al.* Two new large-separation gravitational lenses from SDSS // *MNRAS.* 2009. Vol. 392. P. 104.
54. *Wambsganss J., Brunner H., Schindler S., Falco E. E.* The Gravitationally Lensed Quasar Q2237+0305 in X-rays: ROSAT/HRI Detection of the “Einstein Cross” // *Astron. Astrophys.* 1999. Vol. 346. P. L5–8.
55. *Дорошкевич А. Г., Новиков И. Д.* Средняя плотность излучения в Метагалактике и некоторые вопросы релятивистской космологии // *ДАН СССР.* 1964. Т. 154. С. 809–811.
56. *Mathiazhagan C., Johri V. B.* Qualitative Analysis of Brans-Dicke Universes with a Cosmological Constant // *Class. Quant. Grav.* 1984. Vol. 1. P. L29.
57. *La D., Steinhardt P. J.* Extended Inflationary Cosmology // *Phys. Rev. Lett.* 1989. Vol. 62, Nr 4. P. 262

58. *Linde A.* Extended chaotic inflation and spatial variations of the gravitational constant // *Phys. Lett. B.* 1990. Vol. 238. P. 160.
59. *Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.* Строение и эволюция Вселенной. М. : Наука, 1975.
60. *Вайнберг С.* Гравитация и космология. М. : Мир, 1975.
61. *Сахаров А. Д.* Вакуумные квантовые флуктуации в искривленном пространстве и теория гравитации // Письма в ЖЭТФ. 1967. Т. 5. С. 32.
62. *Степаньянц К. В.* Классическая теория поля. М. : Физматлит, 2009.
63. *Вайнберг С.* Первые три минуты. Ижевск : НИЦ «РХД», 2000.
64. *D'Amico G., Kamionkowski M., Sigurdson K.* Dark Matter Astrophysics [Electronic resource]. URL: <http://arxiv.org/pdf/0907.1912.pdf> (дата обращения: 06.09.2014).
65. *Lesgourgues J., Pastor S.* Massive neutrinos and cosmology // *Phys. Rept.* 2006. Vol. 429. P. 307.
66. *Tata X.* Supersymmetry, dark matter and the LHC // *AIP Conf. Proc.* 2010. Vol. 1200. P. 145.
67. *Copeland J., Sami M., Tsujikawa S.* Dynamics of dark energy // *Int. J. Mod. Phys.* 2006. Vol. D15. P. 1753–1936.

68. *Smolyakov M. A.* Small cosmological constant from the modified Brans — Dicke theory — An Interplay between different energy scales [Electronic resource]. URL: <http://arxiv.org/0711.3811vz> [gr-qc] (дата обращения: 02.12.2007).
69. *Novikov I. D., Shatskiy A. A., Alexeyev S. O., Tretyakova D. A. Ya. B.* Zeldovich's ideas and modern Brans — Dicke cosmology // *Physics Uspekhi*. 2014. Vol. 57, Nr 4.
70. *Розенталь И. Л.* Физические закономерности и численные значения фундаментальных постоянных // *Успехи физических наук*. 1980. Т. 131, № 6. С. 239–256.
71. *Caldwell R. R., Kamionkowski M., Weinberg N. N.* Phantom Energy: Dark Energy with  $w \rightarrow 1$  Causes a Cosmic Doomsday // *Phys. Rev. Lett.* 2003. Vol. 91. P. 071301.
72. *Hinshaw G. et al.* Nine-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Parameter Results // *Ap. J. Suppl.* 2013. Vol. 208. P. 19.
73. *Thorn K. S., Will C. M.* Theoretical frameworks for testing relativistic gravity. 1. Foundations // *Astrophys. J.* 1971. Vol. 163. P. 595–610.
74. *Dicke R. H.* The Theoretical Significance of Exparimental Relativity. N. Y. : Gordon Breach, 1964.
75. *Уилл К.* Теория и эксперимент в гравитационной физике. М. : Энергоатомиздат, 1985.

76. *Will C. M.* Theoretical frameworks for testing relativistic gravity. 2. Parametrized Post-Newtonian hydrodynamics, and the Nordtvedt effect // *Astrophys. J.* 1971. Vol. 163. P. 611–628.
77. *Eddington A. S.* The Mathematical Theory of Relativity. L. : Cambridge University Press, 1922.
78. *Robertson H. P.* Space Age Astronomy / ed. by A. J. Deutsch, W. B. Klemperer. N. Y. : Academic Press, 1962. P. 228.
79. *Schiff L. I.* Lectures in Applied Mathematics / ed. by J. Ehlers, Providence R. I. N. Y. : American Mathematical Society, 1967. Relativity and Cosmology. Vol. 1. P. 105–116.
80. *Nordtved K. Jr.* Equivalence Principle for Massive Bodies. 2. Theory // *Phys. Rev.* 1968. Vol. 169. P. 1017–1025.
81. *Baierlein R.* Testing General Relativity with Laser Ranging to the Moon // *Phys. Rev.* 1967. Vol. 162. P. 1275–1288.
82. *Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.* Гравитация. М. : Мир, 1997. Т. 3.
83. *Nordtved K. Jr.* Equivalence Principle for Massive Bodies. 1. Phenomenology // *Phys. Rev.* 1968. Vol. 169. P. 1014–1016.
84. *Турьшиев В. Г.* Экспериментальные проверки общей теории относительности : недавние успехи и будущие направления исследований // *Успехи физических наук.* 2009. Т. 179, № 1. С. 3–34.

85. *Lyne A. G. et al.* A Double-Pulsar System — A Rare Laboratory for Relativistic Gravity and Plasma Physics // *Science*. 2004. Vol. 303. P. 1153–1157.
86. *Weisberg J. M., Taylor J. H.* The Relativistic Binary Pulsar B1913+16: Thirty Years of Observations and Analysis // *Binary Radio Pulsars* / ed. by F. A. Rasio, I. H. Stairs. 2005. Vol. 328. P. 25.
87. *Wex N., Kramer M.* A characteristic observable signature of preferred frame effects in relativistic binary pulsars // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 2007.
88. *Breton R. P. et al.* Relativistic Spin Precession in the Double Pulsar // *Science*. 2008. Vol. 321. P. 104–107.
89. *Lorimer D. R. et al.* Two clocks in the PSR J0737-3039 binary system and their implications for the system's origin and evolution // *ASP Conf. Ser.* 2004.
90. *Kramer M. et al.* Tests of general relativity from timing the double pulsar // *Science*. 2006. Vol. 314. P. 97–102.
91. *Bell J. F.* A Tighter constraint on postNewtonian gravity using millisecond pulsars // *Astrophys. J.* 1996. Vol. 462. P. 287.
92. *Williams J. G., Newhall X. X., Dickey J. O.* Relativity parameters determined from lunar laser ranging // *Phys. Rev.* 1996. Vol. D53. P. 6730–6739.
93. *Bauch A., Weyers S.* New experimental limit on the validity of local position invariance // *Phys. Rev. D.* 2002. Vol. 65. P. 081101.

94. *Schlamminger S. et al.* Test of the equivalence principle using a rotating torsion balance // Phys. Rev. Lett. 2008. Vol. 100. P. 041101.
95. *Lamoreaux S. K., Jacobs J. P., Heckel B. R. et al.* // Phys. Rev. Lett. 1986. Dec. Vol. 57. P. 3125–3128 [Electronic resource]. URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.57.3125> (дата обращения: 06.09.2014).
96. *Celotti A., Miller J. C., Sciama D. W.* Astrophysical evidence for the existence of black holes: Topical review // Class. Quant. Grav. 1999. Vol. 16. P. A3.
97. *Capozziello S., De Laurentis M.* Extended Theories of Gravity // Phys.Rept. 2011. Vol. 509. P. 167–321.
98. *Fierz M.* On the physical interpretation of P. Jordan's extended theory of gravitation // Helv. Phys. Acta. 1956. Vol. 29. P. 128–134.
99. *Jordan P.* Zur empirischen Kosmologie // Naturwiss. 1938. Vol. 26. P. 417–421.
100. *Jordan P.* Schwerkraft und Weltfal 1, Grund lagen der Theoretische Kosmologie. Braunschweig : Vieweg Sohns, 1952.
101. *Capozziello S., de Laurentis M.* Extended Theories of Gravity // Phys. Rept. 2011. Vol. 509. P. 167–321.
102. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М. : Физматлит, 2006.
103. *Bertotti B., Iess L., Tortora P.* A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft // Nature. 2003. Vol. 425. P. 374–376.

104. *Anderson J. D., Lau E. L., Giampieri G.* Measurement of the PPN parameter with radio signals from the cassini spacecraft at X- and Ka- Bands // 22 Texas Symposium on Relativistic Astrophysics. 2004. P. 105.
105. *Agnese A. G., la Camera M.* Wormholes in the Brans — Dicke theory of gravitation // Phys. Rev. D. 1995. Vol. 51. P. 2011–2013.
106. *Brans C. H., Dicke R. H.* Mach's principle and a relativistic theory of gravitation // Phys. Rev. 1961. Vol. 124. P. 925–935.
107. *Bhadra A., Sarkar K.* Wormholes in vacuum Brans — Dicke theory // Mod. Phys. Lett. A. 2005. Vol. 20. P. 1831–1844.
108. *Алексеев С. О., Ранну К. А., Гареева Д. В.* Возможные наблюдательные проявления кротовых нор в теории Бранса — Дикке // ЖЭТФ. 2011. Т. 140. С. 722–731.
109. *Кардашев Н. С., Липатова Л. Н., Новиков И. Д., Шацкий А. А.* Наблюдательные эффекты в чернотельных дырах (динамических кротовых норах) // ЖЭТФ. 2014. Т. 145. С. 75–81.
110. *Шацкий А. А.* Образ неба другой Вселенной, наблюдаемый через горловину кротовой норы // Успехи физических наук. 2009. Т. 179. С. 861–864.
111. *Famaey B.* Modified Newtonian Dynamics : A Review [Electronic resource]. URL: <http://arxiv.org/1112.3960> [astro-ph.CO] (дата обращения: 06.09.2014).

112. *Milgrom M.* A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis // *Astrophys. J.* 1983. Vol. 270. P. 365–370.
113. *Milgrom M.* A modification of the Newtonian dynamics — Implications for galaxies // *Astrophys. J.* 1983. Vol. 270. P. 371–383.
114. *Milgrom M.* A modification of the Newtonian dynamics — Implications for galaxy systems // *Astrophys. J.* 1983. Vol. 270. P. 384–389.
115. *Blanchet L., le Tiec A.* Dipolar dark matter and dark energy // *Phys. Rev. D.* 2009. Vol. 80. P. 023524.
116. *Chiba T.* 1/R gravity and scalar-tensor gravity // *Phys. Lett. B.* 2003. Vol. 575. P. 1–3.
117. *Higgs P. W.* Quadratic lagrangians and general relativity // *Il Nuovo Cimento.* 1959. Vol. 11. P. 816–820.
118. *Teyssandier P., Tourrenc P.* The Cauchy problem for the  $R + R^2$  theories of gravity without torsion // *J. Math. Phys.* 1983. Vol. 24. P. 2793–2799.
119. *Wands D.* Extended gravity theories and the Einstein-Hilbert action // *Class. Quantum Grav.* 1994. Vol. 11. P. 269–280.
120. *Whitt B.* Fourth-order gravity as general relativity plus matter // *Phys. Lett. B.* 1984. Vol. 145. P. 176–178.
121. *Capozziello S., Troisi A.* PPN-limit of fourth order gravity inspired by scalar-tensor gravity // *Phys. Rev. D.* 2005. Vol. 72. P. 044022.

122. *Faraoni V.* Phantom cosmology with general potentials // *Class. Quantum Grav.* 2005. Vol. 22. P. 3235–3246.
123. *Nojiri S., Odintsov S. D., Tsujikawa S.* Properties of singularities in (phantom) dark energy universe // *Phys. Rev. D.* 2005. Vol. 71. P. 063004.
124. *Rubano C., Scudellaro P.* Variable G and lambda: Scalar-tensor versus RG-improved cosmology / *Gen. Relativ. Grav.* 2005. Vol. 37. P. 521–539.
125. *Capozziello S., de Ritis R., Marino A. A.* Recovering the effective cosmological constant in extended gravity theories // *Gen. Relativ. Grav.* 1998. Vol. 30. P. 1247–1272.
126. *Damour T., Esposito-Farese G.* Tensor multiscalar theories of gravitation // *Class. Quantum Grav.* 1992. Vol. 9. P. 2093–2176.
127. *Gottlober S., Schmidt H.-J., Starobinsky A. A.* Sixth Order Gravity And Conformal Transformations // *Class. Quantum Grav.* 1990. Vol. 7. P. 893–900.
128. *Quandt I., Schmidt H. J.* The Newtonian limit of fourth and higher order gravity // *Astron. Nachr.* 1991. Vol. 312. P. 97–102.
129. *Weinberg S.* Recent progress in gauge theories of the weak, electromagnetic and strong interactions // *Rev. Mod. Phys.* 1974. Vol. 46. P. 255–277.
130. *Capozziello S., de Ritis R.* Noether's symmetries and exact solutions in flat nonminimally coupled cosmological models // *Gen. Relativ. Grav.* 1994. Vol. 11. P. 107–117.

131. *Dubovsky S., Flauger R., Starobinsky A., Tkachev I.* Signatures of a Graviton Mass in the Cosmic Microwave Background // *Phys. Rev.* 2010. Vol. D81. P. 023523.
132. *Babak S. V., Grishchuk L.P.* Finite range gravity and its role in gravitational waves, black holes and cosmology // *Int. J. Mod. Phys.* 2003. Vol. D12. P. 1905–1960.
133. *Wyman M.* Galilean-invariant scalar fields can strengthen gravitational lensing // *Phys. Rev. Lett.* 2011. Vol. 106. P. 201102.
134. *Rovelli C.* Loop Quantum Gravity // *Living Reviews in Relativity.* 2008. Vol. 11, Nr. 5 [Electronic resource] URL: <http://www.livingreviews.org/lrr-2008-5> (дата обращения: 06.09.2014).
135. *Smolin L.* An Invitation to loop quantum gravity // *Rev. Mod. Phys.* 2004. P. 655–682.
136. *Gambini R., Pullin J.* Black holes in loop quantum gravity // *J. of Phys. Conf. Ser.* 2009. Vol. 189, Nr 1. P. 012034.
137. *Mielczarek J., Stachowiak T., Szydlowski M.* Exact solutions for a big bounce in loop quantum cosmology // *Phys. Rev. D.* 2008. Vol. 77, Nr 12. P. 123506.
138. *Bentivegna E., Pawłowski T.* Anti-de Sitter universe dynamics in loop quantum cosmology // *Phys. Rev. D.* 2008. Jun. Vol. 77. P. 124025.
139. *Smolin L.* Falsifiable predictions from semiclassical quantum gravity // *Nuclear Physics B.* 2006. Vol. 742, Nr 1–3. P. 142–157.

140. *Ellis J., Mavromatos N. E., Nanopoulos D. V. et al.* Robust limits on Lorentz violation from gamma-ray bursts // *Astroparticle Phys.* 2006. Vol. 25. P. 402–411.
141. *Nozari K., Davood Sadatian S.* Loop Quantum Gravity Modification of the Compton Effect // *Gen. Rel. Grav.* 2008. Vol. 40. P. 23–33.
142. *Rovelli C.* Black hole entropy from loop quantum gravity // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 77. P. 3288–3291.
143. *Грин М., Шварц Дж., Виттен Э.* Теория суперструн. М. : Мир, 1990.
144. *Морозов А. Ю.* Теория струн — что это такое? // *Успехи физических наук.* 1992. Т. 162, № 8. С. 83–175.
145. *Martin S. P.* A Supersymmetry Primer // *Perspectives on Supersymmetry* / ed. by G. L. Kane. Singapore : World Scientific, 1998. P. 1 [Electronic resource]. URL: <http://arxiv.org/pdf/hep-ph/9709356.pdf> (дата обращения: 06.09.2014).
146. *Барбашов Б. М., Нестеренко В. В.* Суперструны — новый подход к единой теории фундаментальных взаимодействий // *Успехи физических наук.* 1986. Т. 150, № 12. С. 489–524.
147. *Strominger A., Vafa C.* Microscopic origin of the Bekenstein — Hawking entropy // *Phys. Lett. B.* 1996. Vol. 379. P. 99–104.
148. *Alvarenga F.G., Batista A.B., Fabris J.C.* Does quantum cosmology predict a constant dilatonic field? // *Int. J. Mod. Phys.* 2005. Vol. D14. P. 291–308.

149. *Douglas M. R.* The Statistics of string : M-theory vacuum // *JHEP*. 2003. Vol. 0305. P. 046.
150. *Сахаров А. Д.* Космологические переходы с изменением сигнатуры метрики // *ЖЭТФ*. 1984. Т. 87. С. 375.
151. *Markov M. A.* Problems of a perpetually oscillating universe // *Ann. Phys.* 1984. Vol. 155. P. 333.
152. *Markov M. A.* Limiting density of matter as a universal law of nature // *JETP Lett.* 1982. Vol. 36. P. 214.
153. *Markov M. A., Mukhanov V. F.* De Sitter-like initial state of the universe as a result of asymptotical disappearance of gravitational interactions of matter // *Nuovo Cim. B.* 1985. Vol. 86. P. 97.
154. *Frolov V. P., Markov M. A., Mukhanov V. F.* Through a black hole into a new universe? // *Phys. Lett. B.* 1989. Vol. 216. P. 272.
155. *Frolov V. P., Markov M. A., Mukhanov V. F.* Black holes as possible sources of closed and semiclosed worlds // *Phys. Lett. D.* 1990. Vol. 41. P. 383.
156. *Carr B.* Universe or Multiverse? L. : Cambridge University Press, 2009.
157. *Linde A. D.* Inflationary Cosmology // *Lect. Notes Phys.* 2008. Vol. 738. P. 1–54.
158. *Рубаков В. А.* Большие и бесконечные дополнительные измерения // *Успехи физических наук*. 2001. Т. 171, № 9. С. 913–938.

## Список рекомендуемой литературы

### К главе 1

*Богородский А. Ф.* Всемирное тяготение / А. Ф. Богородский. Киев : Наукова думка, 1971.

*Боулер М.* Гравитация и относительность / М. Боулер. М. : Мир, 1979.

*Брагинский В. Б.* Удивительная гравитация (как измеряют кривизну мира) / В. Б. Брагинский, А. Г. Полнарев. М. : Наука, 1985.

*Гинзбург В. Л.* О теории относительности / В. Л. Гинзбург. М. : Наука, 1979.

*Захаров В. Д.* Тяготение. От Аристотеля до Эйнштейна / В. Д. Захаров. М. : БИНОМ ; Лаборатория знаний, 2003.

*Ландау Л. Д.* Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М. : Наука, 1973.

*Ландау Л. Д.* Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М. : Наука, 1973.

*Ландау Л. Д.* Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М. : Наука, 1986.

*Пайс А.* Научная деятельность и жизнь Альберта Эйнштейна / А. Пайс. М. : Наука, 1989.

*Сиама Д.* Физические принципы общей теории относительности / Д. Сиама. М. : Мир, 1971.

*Фридман А. А.* Мир как пространство и время / А. А. Фридман. М. : Наука, 1965.

## К главе 2

*Абрамов А. А.* Введение в тензорный анализ и риманову геометрию / А. А. Абрамов. М. : Либроком, 2012.

*Берке У.* Пространство-время, геометрия, космология / У. Берке. М. : Мир, 1985.

*Владимиров Ю. С.* Классическая теория гравитации / Ю. С. Владимиров. М. : Либроком, 2009.

*Волобуев И. П.* Дифференциальная геометрия и алгебры Ли и их приложения в теории поля / И. П. Волобуев, Ю. А. Кубышин. М. : ЛЕНАНД, 2015.

*Дирак П. А. М.* Общая теория относительности / П. А. М. Дирак М. : «Атомиздат», 1978.

*Дубровин Б. А.* Современная геометрия / Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. М. : Наука, 1986.

*Зельманов А. Л.* Элементы общей теории относительности / А. Л. Зельманов, В. Г. Агаков. М. : Наука, 1989.

*Мизнер Ч.* Гравитация / Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер. М. : Мир, 1977. Т. 1.

*Ландау Л. Д.* Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М. : Наука, 1973.

*Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ / П. К. Рашевский. М. : Наука, 1967.

*Сажин М. В.* Теория относительности для астрономов / М. В. Сажин [Electronic resource]. URL: <http://www.astronet.ru/db/msg/1170927/index.html> (дата обращения: 06.09.2014).

*Синг Дж.* Общая теория относительности / Дж. Синг. М. : Изд-во иностр. лит., 1963.

*Шредингер Э.* Пространственно-временная структура Вселенной / Э. Шредингер. М. : Наука, 1986.

### **К главе 3**

*Блюх П.В.* Гравитационные линзы / П. В. Блюх, А. А. Минаков. Киев : Наукова думка, 1989.

*Ландау Л. Д.* Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М. : Наука, 1973.

*Окунь Л. Б.* Гравитация, фотоны, часы / Л. Б. Окунь, В. Л. Телегди, К. Г. Селиванов // *Успехи физических наук.* 1999. Т. 169. С. 1141–1147.

*Паунд П. В.* О весе фотонов / П. В. Паунд // *Успехи физических наук.* 1960. Т. 72. С. 673–683.

*Уилл К.* Теория и эксперимент в гравитационной физике / К. Уилл. М. : «Энергоатомиздат», 1985.

*Vessot R. F. C.* A test of the equivalence principle using a space-borne / R. F. C. Vessot, M. W. Levine // *J. Grn. Rel.* 1979. Vol. 10. P. 181–204.

*Vessot R. F. C.* Test of relativistic gravitation with a space-borne hydrogen maser / R. F. C. Vessot et al. // *Phys. Rev. Lett.* 1980. Vol. 45. P. 2081–2084.

### **К главе 4**

*Бергман П. Г.* Введение в теорию относительности / П. Г. Бергман. М. : Изд-во иностр. лит., 1947.

*Вейнберг С.* Гравитация и космология / С. Вейнберг. М. : Мир, 1975.

*Владимиров Ю. С.* Классическая теория гравитации / Ю. С. Владимиров. М. : Либроком, 2009.

*Дирак П. А. М.* Общая теория относительности / П. А. М. Дирак. М. : «Атомиздат», 1978.

*Зельманов А. Л.* Элементы общей теории относительности / А. Л. Зельманов, В. Г. Агаков. М. : Наука, 1989.

*Мак-Витти Г.* Общая теория относительности / Г. Мак-Витти. М. : Изд-во иностр. лит., 1961.

*Монин А. С.* Космология, гидродинамика, турбулентность : А. А. Фридман и развитие его научного наследия / А. С. Монин, П. Я. Полубояринова-Кочина, В. И. Хлебников. М. : Наука, 1989.

*Паули В.* Теория относительности / В. Паули. М. : Наука, 1983.

*Лайтман А.* Сборник задач по теории относительности / А. Лайтман, Б. Пресс, Р. Прайс, С. Тюкольски. М. : Мир, 1979.

*Ландау Л. Д.* Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М. : Наука, 1973.

*Степаньянц К. В.* Классическая теория поля / К. В. Степаньянц. М. : Физматлит, 2009.

*Толмен Р.* Относительность, термодинамика и космология / Р. Толмен. М. : Наука, 1974.

*Фок В. А.* Теория пространства, времени и тяготения / В. А. Фок. М. : Изд-во Физматлит, 1961.

*Хокинг С.* Крупномасштабная структура пространства-времени / С. Хокинг, Дж. Эллис. М. : Мир, 1977.

*Хриплович И. Б.* Общая теория относительности / И. Б. Хриплович. Ижевск : НИЦ РХД, 2001.

*Шредингер Э.* Пространственно-временная структура Вселенной / Э. Шредингер. М. : Наука, 1986.

## К главе 5

*Бичак И.* Гравитационные волны в ОТО и проблема их обнаружения / И. Бичак, В. Н. Руденко. М. : Изд-во Моск. гос. ун-та, 1987.

*Вебер Дж.* Общая теория относительности и гравитационные волны / Дж. Вебер. М. : Изд-во иностр. лит., 1962.

*Захаров В. Д.* Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна / В. Д. Захаров. М. : Наука, 1972.

*Ландау Л. Д.* Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М. : Наука, 1973.

*Рис М.* Черные дыры, гравитационные волны и космология. Введение в современные исследования / М. Рис, Р. Руффини, Дж. Уилер. М. : Мир, 1977.

*Ade P. A. R.* Collaboration BICEP2. Detection of B-Mode Polarization at Degree Angular Scale de BICEP2 / P. A. R. Ade // Phys. Rev. Lett. 2014. Vol. 112. P. 241101–241125.

*Ade P. A. R.* BICEP2 : Experiment and Three-Year Data Set / P. A. R. Ade et al. // Astrophys. J. 2014. Vol. 792. P. 62.

*Cowen R.* Telescope captures view of gravitational waves / R. Cowen // Nature. 2014. Vol. 507. P. 281–283.

## К главе 6

*Зельдович Я. Б.* Теория тяготения и эволюция звезд / Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков. М. : Наука, 1971.

*Ландау Л. Д.* Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М. : Наука, 1973.

*Масевич А. Г.* Эволюция звезд : теория и наблюдения / А. Г. Масевич, А. В. Тутуков. М. : Наука, 1988.

*Уилер Дж.* Теория гравитации и гравитационный коллапс / Дж. Уилер, Б. Гаррисон, М. Вакано, К. Торн. М. : Мир, 1967.

*Шапиро С.* Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды : в 2 ч. / С. Шапиро, С. Тьюкльски. М. : Мир, 1985.

## К главе 7

*Бронников К.А.* Лекции по гравитации и космологии / К. А. Бронников, С. Г. Рубин. М. : Изд-во МИФИ, 2008.

*Гальцов Д. В.* Частицы и поля в окрестности черных дыр / Д. В. Гальцов. М. : Изд-во Моск. гос. ун-та, 1986.

*Кауфман У.* Космические рубежи теории относительности / У. Кауфман. М. : Мир, 1981.

*Ландау Л. Д.* Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М. : Наука, 1973.

*Новиков И. Д.* Физика черных дыр / И. Д. Новиков, В. П. Фролов. М. : Наука, 1986.

*Рис М.* Черные дыры, гравитационные волны и космология. Введение в современные исследования / М. Рис, Р. Руффини, Дж. Уилер. М. : Мир, 1977.

*Чандрасекар С.* Математическая теория черных дыр : в 2 ч. / С. Чандрасекар. М. : Мир, 1986.

*Шапиро С.* Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды : в 2 ч. / С. Шапиро, С. Тьюкльски. М. : Мир, 1985.

*Шацкий А. А.* Кротовые норы: что это — миф, врата в другие миры или математическая абстракция? / А. А. Шацкий [Electronic resource]. URL: <http://www.astronet.ru/db/msg/1331623> (дата обращения: 06.09.2014).

## К главе 8

*Архангельская И.В.* Космология и физический вакуум / И. В. Архангельская, И. Л. Розенталь, А. Д. Чернин М. : КомКнига, 2006.

*Берке У.* Пространство-время, геометрия, космология / У. Берке. М. : Мир, 1985.

*Берков А. В.* Приложения теории тяготения Эйнштейна к астрофизике и космологии / А. В. Берков, И. Ю. Кобзарев. М. : Изд-во МИФИ, 1990.

*Бисноватый-Коган Г. С.* Релятивистская астрофизика и физическая космология / Г. С. Бисноватый-Коган. М. : КРАСАНД, 2011.

*Бронников К.А.* Лекции по гравитации и космологии / К. А. Бронников, С. Г. Рубин. М. : Изд-во МИФИ, 2008.

*Вейнберг С.* Первые три минуты / С. Вейнберг. Ижевск : НИЦ «РХД», 2000.

*Вейнберг С.* Гравитация и космология / С. Вейнберг. М. : Мир, 1975.

*Вейнберг С.* Космология / С. Вейнберг. М. : Либликом, 2013.

*Горбунов Д. С.* Введение в теорию ранней Вселенной : Теория горячего Большого взрыва / Д. С. Горбунов, В. А. Рубаков. М. : Изд-во ЛКИ, 2008.

*Горбунов Д. С.* Введение в теорию ранней Вселенной : Космологические возмущения / Д. С. Горбунов, В. А. Рубаков. М. : КРАСАНД, 2010.

*Долгов А. Д.* Космология ранней Вселенной / А. Д. Долгов, Я. Б. Зельдович, М. В. Сажин. М. : Изд-во Моск. гос. ун-та, 1988.

*Зельдович Я. Б.* Строение и эволюция Вселенной / Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков. М. : Наука, 1975.

*Клапдор-Клайнротхаус Г. В.* Астрофизика элементарных частиц / Г. В. Клапдор-Клайнротхаус, К. Цюбер. М. : Едиториал УРСС, 2004.

*Климишин И. А.* Релятивистская астрономия / И. А. Климишин. М. : Наука, 1989.

*Ландау Л. Д.* Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М. : Наука, 1973.

*Линде А. Д.* Физика элементарных частиц и инфляционная космология / А. Д. Линде. М. : Наука, 1990.

*Лукаш В. Н.* Физическая космология / В. Н. Лукаш, Е. В. Михеева. М. : Физматлит, 2012.

*Мизнер Ч.* Гравитация / Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер. М. : Мир, 1977. Т. 2.

*Монин А. С.* Космология, гидродинамика, турбулентность : А. А. Фридман и развитие его научного наследия / А. С. Монин, П. Я. Полубояринова-Кочина, В. И. Хлебников. М. : Наука, 1989.

*Мурзин В. С.* Астрофизика космических лучей / В. С. Мурзин. М. : Логос, 2007.

*Насельский П. Д.* Реликтовое излучение Вселенной / П. Д. Насельский, Д. И. Новиков, И. Д. Новиков. М. : Наука, 2003.

*Рис М.* Черные дыры, гравитационные волны и космология. Введение в современные исследования / М. Рис, Р. Руффини, Дж. Уилер. М. : Мир, 1977.

*Силк Дж.* Большой взрыв / Дж. Силк. М. : Мир, 1982.

*Сажин М. В.* Современная космология в популярном изложении / М. В. Сажин. М. : Едиториал УРСС, 2004.

*Толмен Р.* Относительность, термодинамика и космология / Р. Толмен. М. : Наука, 1974.

*Хлопов М. Ю.* Основы космомикрoфизики / М. Ю. Хлопов. М. : Едиториал УРСС, 2004.

*Шредингер Э.* Пространственно-временная структура Вселенной / Э. Шредингер. М. : Наука, 1986.

## **К главе 9**

*Бескин В. С.* Гравитация и астрофизика / В. С. Бескин. М. : Физматлит, 2009.

*Инфельд Л.* Движение и релятивизм / Л. Инфельд, Е. Плебаньский. М. : Изд-во иностр. лит., 1962.

*Мизнер Ч.* Гравитация / Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер. М. : Мир, 1977. Т. 2.

*Турышев В. Г.* Экспериментальные проверки общей теории относительности : недавние успехи и будущие направления исследований / В. Г. Турышев // Успехи физических наук. 2009. Т. 179, № 1. С. 3–34.

*Уилл К.* Теория и эксперимент в гравитационной физике / К. Уилл. М. : «Энергоатомиздат», 1985.

### **К главе 10**

*Биррелл Н.* Квантованные поля в искривленном пространстве-времени / Н. Биррелл, П. Девис. М. : Мир, 1984.

*Бронников К.А.* Лекции по гравитации и космологии / К. А. Бронников, С. Г. Рубин. М. : Изд-во МИФИ, 2008.

*Грин М.* Теория суперструн / М. Грин, Дж. Шварц, Э. Виттен. М. : Мир, 1990.

*Зи Э.* Квантовая теория поля в двух словах / Э. Зи. Ижевск : НИЦ «РХД», 2009.

*Иваненко Д. Д.* Гравитация / Д. Д. Иваненко, Г. А. Сарданашвили. М. : Изд-во ЛКИ, 2012.

*Каку М.* Введение в теорию суперструн / М. Каку. М. : Мир, 1999.

*Морозов А. Ю.* Теория струн — что это такое? / А. Ю. Морозов // Успехи физических наук. 1992. Т. 162, № 8. С. 83–175.

*Рубаков В. А.* Большие и бесконечные дополнительные измерения / В. А. Рубаков // Успехи физических наук. 2001. Т. 171, № 9. С. 913–938.

*Уилл К.* Теория и эксперимент в гравитационной физике / К. Уилл. М. : «Энергоатомиздат», 1985.

*Учебное издание*

Алексеев Станислав Олегович  
Памятных Евгений Алексеевич  
Урсулов Андрей Владимирович  
Третьякова Дарья Алексеевна  
Ранну Кристина Алановна

ВВЕДЕНИЕ  
В ОБЩУЮ ТЕОРИЮ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ,  
ЕЕ СОВРЕМЕННОЕ РАЗВИТИЕ  
И ПРИЛОЖЕНИЯ

*Учебное пособие*

Заведующий редакцией М. А. Овечкина  
Редактор В. И. Попова  
Корректор В. И. Попова  
Компьютерная верстка Д. А. Третьяковой и А. В. Урсулова

План выпуска 2015 г. Подписано в печать 25.11.2015.  
Формат 60 × 84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная. Гарнитура Times.  
Уч.-изд. л. 15,5 Усл. печ. л. 22,08 Тираж 150 экз. Заказ 425  
Издательство Уральского университета  
620000, Екатеринбург, пр. Ленина, 51.  
Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ  
620000, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.  
Тел.: + (343) 350-56-64, 350-90-13  
Факс: +7 (343) 358-93-06  
E-mail: [press-urfu@mail.ru](mailto:press-urfu@mail.ru)