Сферическая
АСТРОНОМИЯ

Государственный астрономический институт
им. П. К. Штернберга

В. А. Жаров

Сферическая АСТРОНОМИЯ

Рекомендовано Учебно-Методическим Объединением
по классическому университетскому образованию
в качестве учебника для студентов ВУЗов,
обучающихся по специальности 010702–астрономия

ВЕК2

Фрязино
2006

УДК 52
ББК 28
Ж 83

Жаров В. Е.
Сферическая астрономия. — Фрязино, 2006. — 480 с.
ISBN 5–85099–168–9

В учебнике последовательно изложены основы фундаментальной астрономии. Формулируется рекомендуемый Международным Астрономическим Союзом (МАС) математический аппарат интерпретации и анализа астрометрических наблюдений.

Учебник может использован как справочник рекомендованных МАС и Международной службой вращения Земли и систем отсчета (МСВЗ) формул редукции оптических и радионаблюдений.

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06–02–30049)

На обложке:

ISBN 5–85099–168–9
© Век 2, 2006

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие **9**

Введение **13**

0.1. Основные задачи, решаемые сферической астрономией 13

0.2. Краткий исторический обзор 21

Глава 1. Основы сферической геометрии **39**

1.1. Основные понятия 39

1.2. Скаляры, векторы, тензоры и системы координат 44

1.3. Сферическая система координат 56

1.4. Основные формулы сферической геометрии 63

Глава 2. Астрономические системы координат **70**

2.1. Горизонтальная система координат 72

2.2. Экваториальная система координат 74

2.3. Эклиптическая система координат 79

2.4. Галактическая система координат 80

2.5. Преобразование координат из одной системы в другую 83

2.6. Суточное вращение небесной сферы 94

2.7. Восход и заход небесных тел 96

2.8. Определение систем координат
в современной астрометрии 97

2.9. Эпоха каталога, эпоха равноденствия,
динамическое равноденствие 101

2.10. Основы небесной механики 106
2.10.1. Законы Кеплера 106
2.10.2. Параметры и аномалии кеплеровской орбиты . . 116
2.11. Барицентрическая система координат 123
Глава 3. Системы координат на Земле 126
3.1. Основные параметры Земли 128
3.2. Уравнение геоида 133
3.3. Геоцентрическая и геодезическая системы координат . 142
3.4. Земная система координат 152
3.5. Приливы и определение земной системы координат . . 159
Глава 4. Шкалы времени 163
4.1. Солнечное время 165
4.1.1. Системы всемирного времени и неравномерность вращения Земли 170
4.1.2. Всемирное координированное время UTC 178
4.1.3. Местное, поясное и декретное время 184
4.2. Звездное время 186
4.3. Эфемеридное время 188
4.4. Атомное время 189
4.5. Динамические шкалы времени 198
4.5.1. Координатное и собственное время 200
4.5.2. Связь между динамическими шкалами времени 209
4.5.3. Барицентрическая и геоцентрическая небесные системы отсчета 220
4.6. Пульсарная шкала времени 227
4.7. Системы счета дней 234
4.7.1. Юлианские даты и юлианская эпоха 234
4.7.2. Тропический и звездный год 236
4.8. Летосчисление 239
4.9. Связь всемирного и звездного времени 245
Глава 5. Эффекты, искажающие положение звезд на небесной сфере 251

5.1. Рефракция 251
5.1.1. Учет рефракции в оптическом диапазоне 252
5.1.2. Формула Лапласа для вычисления рефракции . 258
5.1.3. Восход и заход светил с учетом рефракции . . . 262
5.1.4. Влияние рефракции на прямое восхождение и склонение звезды 263
5.1.5. Рефракция при наблюдениях в радиодиапазоне 265
5.1.6. Рефракция и задержка радиосигнала в тропосфере 277
5.1.7. Задержка оптического сигнала в тропосфере . . 296
5.2. Аберрация 297
5.2.1. Изменение координат звезды из-за рефракции или аберрации 301
5.2.2. Суточная аберрация 304
5.2.3. Формулы учета годичной аберрации низкой точности 305
5.2.4. Точные формулы учета годичной аберрации . . 308
5.2.5. Планетная аберрация 315
5.3. Параллакс 317
5.3.1. Оценка расстояния до звезд Ньютоном 319
5.3.2. Изменение координат звезды из-за параллактического смещения 320
5.3.3. Суточный параллакс 321
5.3.4. Суточный параллакс Солнца 323
5.3.5. Влияние суточного параллакса на экваториальные координаты 325
5.4. Собственное движение звезд 326
5.5. Измерение параллаксов и собственных движений звезд 333
5.6. Отклонение луча света в гравитационном поле 334
5.7. Изменение координат опорного источника в поле Солнца 339
Глава 6. Прецессия и нутация 349
6.1. Причины прецессии и нутации 351

6.2. Определение матрицы прецессии 359
6.3. Прецессионные параметры в теории IAU2000 365
6.4. Математическое описание прецессии 366
6.5. Точные формулы учета нутации 375
6.6. Преобразование из земной к небесной системе координат 379
6.6.1. Определение небесного эфемеридного полюса . 380
6.6.2. Гринвичское истинное звездное время 385
6.6.3. Классическое преобразование из ЗСК в НСК . . 388
6.6.4. Концепция «невращающегося начала отсчета» . 390
6.7. Процедура редукции оптических наблюдений 402
Глава 7. Редукция наблюдений на РСДБ 407
7.1. Основные этапы редукции наблюдений на РСДБ 411
7.2. Вычисление гравитационной задержки 412
7.3. Вычисление геометрической задержки 415
7.4. Вычисление частных производных по нутации 421
Глава 8. Астрономические постоянные 424
Приложение А. Юлианские и календарные даты 435
Приложение В. Основные математические определения 439
В.1. Матричная алгебра 439
В.2. Линейная алгебра 441
В.3. Декартовы прямоугольные и сферические координаты вектора 442
В.4. Элементы дифференциального и интегрального исчисления 443
В.5. Криволинейные координаты 445
В.6. Сферические функции 447
Приложение С. Основные термины 450
Литература 465
Предметный указатель 469

ПРЕДИСЛОВИЕ

Астрометрия — это область астрономии, занимающаяся установлением системы координат на небесной сфере. Ее раздел — сферическая астрономия, одной из задач которой является строгое математическое определение этой системы. В последние два десятилетия XX века в развитии астрометрии наступил новый этап. В связи с появлением и использованием в астрометрии новых инструментов, таких как радиоинтерферометры со сверхдлинными базами (РСДБ), дальномеры для лазерной локации Луны и спутников, космический телескоп ГИППАРКОС, а также развитием космических навигационных систем GPS и ГЛОНАСС, точность получаемых астрометрических данных повысилась на три порядка. Для корректной обработки результатов наблюдений (редукции) были разработаны новые алгоритмы, ориентированные на использование компьютеров. В связи с ростом точности при обработке наблюдений учитываются эффекты общей теории относительности (ОТО), используются точные формулы прецессии, нутации, аберрации и других эффектов.

В отличие от традиционного подхода, в котором использовался аппарат сферической тригонометрии, все новые алгоритмы редукции астрометрических наблюдений построены на основе векторного и тензорного исчисления с применением матричной алгебры, чтобы в максимальной степени оптимизировать время вычислений и сэкономить машинную память. Автор старался использовать стандартные (принятые или рекомендованные Международным астрономическим союзом) определения величин.

Увеличение точности наблюдений, широкое использование радиоинтерферометров и космических навигационных систем для ре-

шения задач астрометрии и геодинамики, повсеместное применение компьютеров для обработки данных требуют изменения содержания курса «Сферическая астрономия». Несмотря на то, что решение задач сферической астрономии выполняется на основе методов матричной и векторной алгебры, автор предпочел сохранить традиционное название «Сферическая астрономия».

Трудность создания нового курса заключается в сложности современных алгоритмов редукции наблюдений и необходимости доступного для студентов изложения. «Сферическая астрономия» читается в МГУ им. М. В. Ломоносова для студентов первого курса, когда общая подготовка по математике и физике еще не завершена. Поэтому некоторые вопросы приходится излагать без строгих доказательств. Это касается, главным образом, решений задач в рамках специальной и общей теории относительности. Строгие решения можно найти в учебнике М. В. Сажина «Общая теория относительности для астрономов».

В учебнике последовательно изложены основы фундаментальной астрономии, целью которой является определение инерциальной системы координат в пространстве — основы для изучения Вселенной. Для этого формулируется рекомендуемый Международным Астрономическим Союзом (МАС) математический аппарат интерпретации и анализа астрометрических наблюдений. Поэтому учебник, по мнению автора, может быть использован как справочник рекомендованных МАС и Международной службой вращения Земли и систем отсчета (МСВЗ) формул редукции оптических и радионаблюдений (см. IERS Conventions (2003), которые в тексте называются как «Стандарты МСВЗ»).

В соответствии с основными задачами сферической астрономии содержание учебника следующее.

Первая часть посвящена определению систем координат на небесной сфере и преобразованию координат вектора из одной системы в другую с использованием как формул сферической тригонометрии, так и матриц вращения.

Во второй части рассматриваются различные шкалы времени, используемые в современной астрономии. Координаты небесных объектов меняются со временем из-за различных причин. Поэтому для изучения их движения необходимо задать единицы измерения времени и, кроме того, определить промежуток времени между на-

блюдениями. Принципы исчисления времени также рассматриваются во второй части. Определяются понятия: юлианская дата, юлианский год, эпоха каталога, эпоха равноденствия, стандартная эпоха, даются основы построения календаря. Здесь же рассматриваются причины неравномерности шкалы всемирного времени, связанные с неравномерностью вращения Земли.

Третья часть учебника посвящена определению топоцентрической, геоцентрической, гелиоцентрической и барицентрической систем координат. Особое внимание уделяется определению земной системы координат на основе современных наблюдений на радиоинтерферометрах со сверхдлинными базами и с помощью космических навигационных систем. Определяются геодезические, геоцентрические и астрономические координаты и устанавливается связь между ними.

В четвертой части рассматриваются явления рефракции, аберрации, причины параллактического смещения небесных объектов. В связи с широким использованием в настоящее время наблюдений в радиодиапазоне подробно рассматривается вопрос о радиорефракции. В отличие от прежних курсов по сферической астрономии, в данной части приводятся формулы точного учета аберрации и параллактического смещения. После исправления координат объекта из-за влияния рефракции, аберрации и параллакса получают его координаты, относящиеся к истинному экватору и равноденствию даты. Это означает, что положение небесного экватора и точки весеннего равноденствия вычисляются на момент наблюдения. Исправление наблюдаемых координат объекта (введение поправок за рефракцию, аберрацию и параллакс) т. е. приведение их к барицентрической системе отсчета является одним из этапов редукции. Учет нутации Земли позволяет определить координаты, отнесенные к среднему экватору и равноденствию даты.

Учет собственного движения небесного объекта и прецессии земной оси в пространстве позволяет преобразовать координаты объекта к системе, связанной со средним экватором и равноденствием стандартной эпохи. Положение небесных тел в этой системе координат является средним стандартным местом.

Основы теории прецессии и нутации даются в пятой части учебника. Здесь также рассматривается преобразование координат из-за этих явлений от одного равноденствия к другому.

В связи с широким использованием РСДБ в астрометрии в шестой части учебника кратко излагаются основы радионаблюдений и принципы обработки наблюдений. Также рассматриваются основы метода РСДБ, дается характеристика небесной и земной систем координат, которые задаются координатами радиоисточников и радиотелескопов, соответственно. Рассматриваются также особенности редукции наблюдений на радиоинтерферометрах со сверхдлинными базами. Обсуждаются проблемы, связанные со стабильностью реализованной и будущей небесных систем координат.

В приложениях приводятся определения основных астрометрических и математических терминов.

Автор выражает глубокую признательность К. В. Куимову, который прочитал рукопись и дал ценные советы и рекомендации, а также благодарит М. В. Сажина и О. А. Титова, обсуждения с которыми помогли значительно улучшить изложение материала, В. Н. Семенцова за помощь при редактировании текста.

Автор надеется, что предлагаемый учебник окажется полезным не только студентам-астрономам, но и студентам и аспирантам смежных с астрономией наук, и будет рад, если он поможет правильному пониманию основ сферической астрономии и астрометрии коллегами-астрофизиками.

Автор благодарен РФФИ за поддержку (гранты 01-02-16529, 02-05-39004, 05-02-17091). Полученные результаты частично были использованы при подготовке учебника.

ГАИШ МГУ *В. Е. Жаров*
2002–2005

ВВЕДЕНИЕ

Звуча в гармонии вселенной
И в хоре сфер гремя, как гром,
Златое солнце неизменно
Течет предписанным путем.
Непостижимость мирозданья
Дает нам веру и оплот,
И, словно в первый день созданья,
Торжественен вселенной ход!

И. В. Гёте «Фауст»

0.1. Основные задачи, решаемые сферической астрономией

За тридцать лет, прошедших после выхода прекрасного учебника профессора МГУ К. А. Куликова «Курс сферической астрономии», астрометрия изменилась коренным образом. Точность позиционных наблюдений возросла примерно в тысячу раз. Такой прогресс обусловлен вводом в строй и непрерывным совершенствованием радиоинтерферометров со сверхдлинными базами (РСДБ), инструментов для лазерной локации Луны и спутников, вводом в действие систем глобального определения местоположения (GPS и ГЛОНАСС), разработкой специальных спутников для проведения астрометрических наблюдений, а также разработкой новых методов обработки результатов. Успешное завершение космического проекта HIPPARCOS (аббревиатура от английского HIgh Precision PARallax COllecting Satellite или «спутник для высокоточного измерения параллаксов») позволило создать высокоточный каталог $\sim$ 120000 звезд. Измерение параллаксов дало ценнейшую информацию о пространственном распределении этих звезд около Солнца не

только для астрометристов, но и для астрофизиков, специалистов по звездной динамике и небесной механике.

Каковы основные задачи астрометрии и сферической астрономии, о которой далее пойдет речь? Астрометрия является частью астрономии. Ее главной задачей является определение из наблюдений векторов положений и скоростей различных небесных тел, а также формы тел. Но положение или координаты тела могут быть определены лишь относительно другого тела или какой-то выбранной точки. В астрономии координаты измеряются в выбранной системе отсчета. Система отсчета (английский термин «reference system») — это условное понятие; на основе официальных соглашений определяются основные плоскости и точки, а также координатные оси системы. Ни оси, ни основные точки системы на небе не выделены. Поэтому в виде практической реализации системы отсчета («reference frame») принимается список координат и скоростей некоторого числа выбранных объектов (например, звезд или радиоисточников). Такой список называется *каталогом*. Отдельный каталог является одной из реализаций системы отсчета.

Таким образом, на основе наблюдений астрометрия определяет системы координат. Две таких системы имеют особую важность. Это небесная система координат, необходимая для определения движения небесных тел, и земная система координат, в которой измеряется положение наблюдателя. Желательно, чтобы небесная система координат была инерциальной. В этом случае уравнения движения записываются самым простым образом, т. к. в них отсутствуют силы инерции, обусловленные вращением системы отсчета.

Другой задачей астрометрии является определение моментов астрономических событий и промежутков времени между ними, т. е. определение и хранение времени.

Задачи, которые решает сферическая астрономия, связаны, главным образом, с математическими методами *редукции*[1] астрономических наблюдений.

Возникла сферическая астрономия в Древней Греции, хотя древнегреческие ученые многому научились у вавилонян. Это связано с необычайным расцветом математики в IV–II в. до н. э., и исполь-

[1] Редукция наблюдений — приведение координат и скоростей небесных тел от системы координат, в которой они непосредственно измерены, к стандартной системе.

зованием греческими учеными математических методов в астрономии. Краткий исторический обзор развития сферической астрономии и астрометрии приводится ниже. Безусловно, обзор не является исчерпывающим, так как автор старался выделить лишь основные этапы в развитии этой науки.

Рассмотрим основные задачи, которые решаются сферической астрономией. Первой задачей, как уже говорилось, является *определение систем сферических координат*, тогда как задачей астрометрии является построение этих систем в виде каталогов звезд, радиоисточников и других небесных объектов. После того, как системы координат определены, второй задачей сферической астрономии является *вывод формул преобразования координат небесных тел из одной системы в другую*.

Положение небесных объектов непрерывно меняется с течением времени. Поэтому для изучения их движения необходимо определить *шкалу и единицу времени* для задания точного момента наблюдений и промежутка времени между наблюдениями. *Определение различных шкал времени* и установление связи между ними — это третья важнейшая задача сферической астрономии.

Уточним здесь, что мы понимаем под координатами небесного тела. Астрометрические инструменты используют свойства принимаемого электромагнитного излучения, испускаемого этим телом, для определения направления на него. Направление на источник излучения может быть указано как в декартовой (при предположении, что он находится на сфере единичного радиуса), так и в сферической системе координат. В дальнейшем эти координаты (прямоугольные или сферические) будем называть «видимыми».

Если наблюдения проводятся с поверхности Земли, то видимые координаты небесных тел искажаются из-за *рефракции* и *аберрации*. Рефракцией называется искривление луча света от источника из-за преломления при прохождении земной атмосферы. Аберрация — это изменение направления на объект в результате движения наблюдателя и конечности скорости света. Кроме этих эффектов мы должны описать изменения, происходящие с электромагнитными волнами при распространении внутри инструмента, и учесть их при редукции наблюдений. Это отдельная задача, которая решается перед проведением астрометрических наблюдений. Она связана с изучением инструмента и свойств приемника излучения и в данном учеб-

нике не рассматривается. Параметры инструмента и приемника могут быть получены в результате калибровки.

С другой стороны, положение самого небесного тела, например, в геоцентрической или барицентрической системе, может быть указано как в декартовой, так и в сферической системе. Изменение координат тела происходит из-за его *собственного движения в пространстве*. Кроме этого, при переходе от геоцентрической к барицентрической системе мы должны учесть перенос начала осей, что приводит к *параллактическому смещению*, и повороту из-за прецессии, нутации и вращения Земли.

Учет рефракции, аберрации, параллактического смещения и собственного движения является классической задачей сферической астрономии и частью редукции наблюдений.

Координаты объекта после учета рефракции, аберрации и параллактического смещения относятся к системе координат, заданной на момент наблюдения, связанной с наблюдателем и называемой *топоцентрической*. Для разных наблюдателей положение осей этой системы будет различным относительно *земной системы координат*. В свою очередь, положение земной системы координат относительно *инерциальной системы координат* изменяется из-за *собственного вращения Земли, ее движения по орбите вокруг Солнца, прецессии и нутации*. Поэтому для преобразования координат объекта из системы, связанной с наблюдателем, сначала в земную систему координат, а затем в инерциальную систему, необходимо знать *фигуру Земли* и *параметры вращения Земли*.

Изучение вращения Земли — одна из важнейших задач астрометрии. В курсе «Сферической астрономии» мы лишь кратко коснемся этой проблемы, поскольку изучение вращения Земли необходимо для установления связи между земной и небесной системами координат. Без этой связи нельзя выполнить редукцию наблюдений. Кроме того, построение теории вращения Земли — это интересная задача на стыке многих наук: астрономии, механики, геофизики. В свою очередь, изучение фигуры Земли — это задача геодезии и гравиметрии. Заметим, что на современном этапе границы между этими науками практически стерлись. Измерение координат пункта с миллиметровой точностью невозможно без проведения гравиметрических измерений, без точного измерения и хранения времени в данном пункте.

Вращение Земли вокруг оси издавна принималось за основу счета времени. Сутки — одна из основных единиц счета времени и в природе, и в человеческой жизни. Лишь в середине XX века было доказано, что *продолжительность суток* (или угловая скорость вращения Земли вокруг оси) не остается постоянной. Значительно раньше (в конце XIX века) было обнаружено *движение полюсов*, т. е. изменение положения мгновенной оси вращения относительно главной оси инерции Земли.

Таким образом, вектор мгновенной угловой скорости вращения Земли, две компоненты x и y которого определяют положение полюса (или мгновенной оси вращения Земли), а третья — продолжительность суток, не остается постоянным ни по величине, ни по направлению. Три компоненты угловой скорости (или параметры вращения Земли — ПВЗ) не могут быть предсказаны с требуемой точностью на основе теории. Существует множество причин (в том числе и неизвестных), следствием которых являются вариации компонент угловой скорости. Изменения компонент довольно малы, но спектр очень сложен[2]. К настоящему времени в спектре продолжительности суток обнаружены колебания с периодами от нескольких часов до полутора тысяч лет с амплитудами от 2–3 мкс до $\sim$ 2 мс. Так как продолжительность суток примерно равна 86400 с, то максимальное относительное изменение скорости вращения Земли не превышает $\sim 2 \cdot 10^{-8}$. В спектре движения полюсов также найдены внутрисуточные и сезонные колебания с амплитудами от 10 до 50 мкс дуги (1 сек дуги $= 1'' \approx 1$ радиан$/206264,80624709636$). Наибольшую амплитуду ($\sim 0''\!,2$) имеет *чандлеровское колебание* с периодом $\sim 1,2$ года и годовое колебание с амплитудой $\sim 0''\!,1$. Полюс не отклоняется от главной оси инерции Земли более чем на 15 м.

Кроме периодических вариаций в скорости вращения Земли и в движении полюсов обнаружены вековые изменения: скорость вращения замедляется (продолжительность суток увеличивается), а полюс смещается относительно условного международного начала в направлении $\sim 75^\circ\!,7$ западной долготы.

[2]Сложные периодические сигналы, к которым относятся и параметры вращения Земли, можно представить в виде суммы гармонических колебаний с частотами, кратными основной частоте сигнала. Разложение сигнала на гармоники называется *гармоническим анализом*. В результате анализа определяется спектральная функция (*спектр* сигнала), которая содержит информацию об амплитудах и фазах отдельных гармоник.

Причинами неравномерности вращения Земли и движения полюсов являются внешние и внутренние процессы. К внешним процессам обычно относят приливное действие Луны и Солнца, а к внутренним — движения в атмосфере, в Мировом океане и в жидком ядре, а также перераспределение масс в коре и мантии.

Приливное воздействие Луны и Солнца приводит не только к изменению положения земного шара относительно вектора мгновенной угловой скорости, но и к изменению направления самого этого вектора в пространстве. Это явление называется *лунно-солнечной прецессией*. Причиной прецессии оси вращения является момент сил, возникающий из-за действия Луны, Солнца и планет на экваториальное утолщение Земли.

Прецессия изменяет со временем вид звездного неба. Амплитуда прецессии равна $\sim 23^{\circ}\!,\!5$, а период — примерно 26000 лет. Кроме прецессионного смещения в пространстве, которое называют вековым из-за большого периода по сравнению с другими гармониками, ось вращения испытывает и периодические колебания (*нутацию*) с гармониками, основные из которых имеют периоды 13,7 суток, 27,6 суток, 6 месяцев, 1 год, 18,6 лет. Гармоника с периодом 18,6 лет имеет максимальную амплитуду ($\sim 9''\!,\!2$). В результате нутации ось вращения описывает сложные петли в пространстве (рис. 1).

Разработка теории нутации Земли является одной из самых сложных задач астрометрии, геофизики и небесной механики. *Учет влияния прецессии и нутации* при вычислении взаимной ориентации земной и небесной систем координат является одной из задач сферической астрономии.

Необходимость рассмотрения теории вращения Земли в данном курсе связана также с определением *небесного эфемеридного* и *небесного промежуточного полюсов*, изучением суточных движений полюсов и их связи с нутационным движением оси вращения Земли. Движение полюсов согласно определению, принятому на XVII Генеральной Ассамблее МАС (Монреаль, 1979 г.), представляет движение небесного эфемеридного полюса, определенного с помощью принятой теории прецессии и нутации, по отношению к связанной с Землей координатной системе.

Теория нутации IAU1980 была рекомендована для использования во всех астрометрических вычислениях, начиная с 1984 г., и использовалась до 1 января 2003 г. С этого момента, согласно резо-

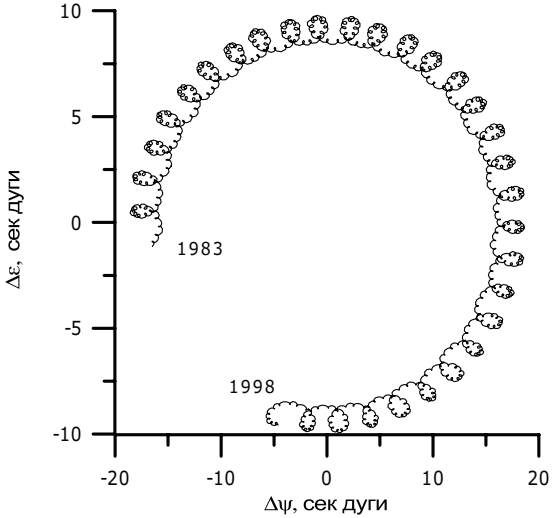


Рис. 1. Нутация оси Земли (без учета прецессионного движения) с 1983 по 1998 гг. Нутационное движение разложено на две компоненты: $\Delta\psi$—нутацию в долготе и $\Delta\varepsilon$—нутацию в наклоне (обратите внимание, что оси имеют разный масштаб). Главная нутационная гармоника, имеющая период, равный 18,6 года, определяется поворотом плоскости лунной орбиты. Меньшие петли вызваны эллиптичностью орбит Луны и Земли, наклоном орбиты Луны к эклиптике и рядом других причин. Теория нутации Земли IAU1980 включает 106 гармоник нутационного движения с периодом от 18,6 лет до 4,7 суток и амплитудами от $\sim 9''\!,2$ до менее 1 мс дуги.

люции XXIV Генеральной Ассамблеи МАС (Бирмингем, 2000 г.), при редукции наблюдений должна использоваться новая теория нутации IAU2000. Эта теория включает примерно 1500 нутационных гармоник, и ошибка не превышает 0, 2 мс дуги. В связи с переходом к новой теории нутации был определен *небесный промежуточный полюс*. Это было вызвано необходимостью разделения высокочастотных нутационных гармоник, которые вычисляются на основе теории, и высокочастотных гармоник в движении полюсов Земли, которые определяются на основе наблюдений.

Знание положения оси вращения в пространстве и в теле Земли необходимо для определения ориентации земной системы координат относительно небесной системы, которая с 1998 г. задается координатами ~ 600 внегалактических радиоисточников. Начало этой

системы помещается в центр масс (*барицентр*) Солнечной системы. Из-за большого расстояния до радиоисточников их видимое собственное движение относительно земного наблюдателя очень мало. Поэтому небесная система близка к инерциальной системе координат[3]. Реализацией земной системы координат являются геоцентрические прямоугольные координаты более чем 500 станций, расположенных в 290 пунктах наблюдений.

Земная и небесная системы координат являются основой для построения теории прецессии и нутации, изучения тектоники, деформаций земной коры, а также для решения задач космической геодезии и навигации. В связи с ростом точности решаемых в этих областях задач требуется создание инерциальной системы координат, направления осей которой должны быть определены с погрешностями не более 0, 1 мс дуги, и земной системы координат с погрешностями взаимных положений пунктов не более 2–3 мм. Небесная и земная системы координат должны связываться новой теорией нутации и прецессии неупругой Земли, согласующейся с наблюдениями в пределах ± 1 мс дуги. Для решения этой задачи требуется также знать параметры вращения Земли, которые, как было сказано выше, не могут быть предсказаны с требуемой точностью. Поэтому для определения ПВЗ проводятся регулярные наблюдения звезд, радиоисточников, искусственных спутников Земли, Луны.

Подытожим сказанное. Накопление наших знаний о Земле отразилось в повышении точности определения астрономических постоянных, характеризующих Землю, ее вращение вокруг оси и обращение вокруг Солнца. Радиолокация планет позволила с высокой точностью определить величину астрономической единицы, которая является основной единицей расстояния в Солнечной системе. Измерения координат космических аппаратов, запущенных для исследования тел Солнечной системы, привели к уточнению масс планет. Эти данные привели к построению новой теории прецессии и нутации Земли. Разработка новых средств для проведения астрометрических наблюдений привела к резкому повышению точности определения координат объектов (искусственных спутников, звезд, радиоисточников) на небесной сфере и точек на земной поверхно-

[3] В идеальном случае небесная система координат должна быть инерциальной. Однако из-за непредсказуемых движений небесных тел и ошибок наблюдений возможны малые случайные и систематические повороты реализованной системы координат. Поэтому часто такую систему называют квазиинерциальной.

сти. Найдя из наблюдений параметры вращения Земли, можно определить ориентацию земной системы координат в пространстве, т. е. в конечном счете вычислить координаты небесных тел в инерциальной системе.

Это очень сложная задача, решение которой требует колоссальных затрат. Но мировое сообщество идет на эти расходы, так как это нужно для удовлетворения хозяйственных, политических, военных и научных потребностей.

0.2. Краткий исторический обзор

Астрометрия — одна из самых древних наук — появилась на заре человечества из-за необходимости человека определять свое местоположение, измерять промежутки времени, предсказывать наступление астрономических событий и т. д. Как и любая наука, астрометрия началась с накопления данных, которыми были результаты наблюдений за звездами, Солнцем, Луной, планетами. Измерение положений этих объектов явилось основой для построения первых моделей Вселенной.

Строго говоря, до изобретения телескопа в начале XVII века астрономия являлась астрометрией. Основными задачами древней астрономии были определения моментов определенных событий, связанных с религией, мифологией и т. д. Хозяйственные нужды требовали установления точного календаря, основанного на наблюдениях Солнца, Луны и звезд. Из большого количества клинописных глиняных табличках, найденных на территории Месопотамии, достоверно известно, что древневавилонские астрономы вели регулярные наблюдения за небом. Вавилонские жрецы, которые, собственно, и занимались астрономией, вели и записывали наблюдения различных небесных явлений: затмений Солнца и Луны, появлений комет и других небесных тел. За ~ 2500 лет они установили периодичность затмений, что позволяло предсказывать их. Позднее наблюдения лунных затмений были использованы сначала Гиппархом, а затем Птолемеем для построения теории движения Луны.

В Вавилонии была изобретена шестидесятиричная система счисления, от которой идет современный счет времени: в одном часе содержится 60 минут, в одной минуте — 60 секунд. Лунно-солнечный календарь был создан здесь в начале второго тысячелетия до н. э.

Таблички донесли до нас указ царя Хаммурапи о введении дополнительного месяца с целью подтягивания продолжительности лунного года (354,36 суток) к солнечному (или тропическому) году — 365,24 суток.

Значительные достижения в астрономии связаны с наблюдениями древнеегипетских жрецов. Существование Египта зависело от разливов Нила, приносивших на поля плодородный ил. Если они запаздывали, стране грозили неурожай и голод. Неудивительно поэтому, что египтяне внимательно следили за важнейшим событием — появлением на небе Сириуса перед восходом Солнца, совпадавшим с ежегодным разливом Нила. Можно сказать, что египетскую астрономию создала необходимость вычисления периодов подъема и спады воды в Ниле. Египтяне дали определение *эклиптики* — видимого пути Солнца на фоне созвездий и разделили ее на двенадцать частей, образовавших Зодиак, т. е. «круг зверей». Наблюдения, проводившиеся жрецами, позволили создать точный солнечный календарь; была определена продолжительность года в 365, 25 суток. Для измерения времени использовались водяные и солнечные часы. Благодаря этим достижениям астрономов история Древнего Египта известна очень хорошо.

Наблюдения жрецов Вавилона и Египта не потеряли ценности и в наши дни. На основании записей моментов затмений жрецами и вычислений этих моментов с помощью современных теорий движения Земли и Луны оказалось возможным вычислить замедление скорости вращения Земли за последние ~ 2500 лет.

Дальнейший прогресс астрономии–астрометрии связан, в первую очередь, с достижениями в области математики во время расцвета древнегреческой науки. Астрономия в Древней Греции стала точной математической наукой.

Многому греческие ученые могли научиться у вавилонян. Этому способствовали торговые связи между городами Древней Греции и Вавилоном. Наиболее тесные контакты греков с вавилонянами относятся к эпохе Нововавилонского царства (605 г. до н. э. — 539 г. до н. э.). Это и было как раз время зарождения греческой науки. Многие достижения вавилонян в области наблюдательной астрономии были позже использованы греческими учеными.

Первым древнегреческим астрономом и математиком был Фалес Милетский, живший в конце VII — первой половине VI в. до н. э.

Он — один из «семи мудрецов» — прославился предсказанием солнечного затмения, случившегося в 585 г. до н. э., хотя реальная возможность такого предсказания, даже при условии, что Фалес был знаком с вычислениями вавилонских жрецов, в настоящее время подвергается сомнению. Ему приписывается также установление времени равноденствий и солнцестояний, определение продолжительности года в 365 суток, понимание того, что Луна светит не своим светом и т. д. Как и вавилоняне и египтяне, он не понимал того, что происходит во время затмений, а просто использовал периодичности, найденные жрецами Вавилона и Египта. Опираясь на результаты вавилонской науки, Фалес пытался разобраться в строении Вселенной, определить порядок расположения звезд, Солнца, Луны по отношению к Земле, которую он представлял плоским диском. Он считал, что ближе всего к Земле находятся звезды, а дальше всего — Солнце.

Анаксагору из Клазомен (предположительно 500–428 гг. до н. э.) принадлежит заслуга правильного объяснения не только солнечных, но и лунных затмений. Происходя из богатой и знатной семьи, он отказался заниматься хозяйством и говорил, что родился для того, «чтобы созерцать Солнце, Луну и небо». Он утверждал, что Солнце — это огненная глыба, которая по размерам больше Пелопоннеса; Луна подобна Земле, на ней есть холмы и ущелья, она получает свет от Солнца и обитаема. Земля, по Анаксагору, плоская.

Эмпедокл из Агригента (около 490–430 гг. до н. э.) — астроном и философ, поэт и политический деятель, отказавшийся от царской власти, также объясняет затмения прохождением между Землей и Солнцем темной Луны. Неясно, какой представлял себе Эмпедокл форму Земли, но Луна у него имеет плоскую форму, получая свой свет от Солнца.

Поразительна догадка Эмпедокла о том, что свет распространяется с большой, но конечной скоростью. К сожалению, эта (и многие другие гениальные догадки древних греков) были отвергнуты благодаря авторитету Аристотеля, который писал: «Эмпедокл и всякий другой, придерживающийся того же мнения, неправильно утверждали, будто свет передвигается и распространяется в известный промежуток времени между землей и небесной твердью, нами же [это движение] не воспринимается» из-за того, что скорость света очень велика.

Впервые гипотеза о шарообразности Земли была сформулирована пифагорейцами. В пифагорейской школе оформилась классическая модель космоса, в которой небесные светила располагались на семи сферах, в следующем порядке по мере удаления от Земли: Луна, Солнце, Меркурий, Венера, Марс, Юпитер и Сатурн. При своем вращении сферы издают отдельные тона. Например, звук Луны высокий и пронзительный, звук Сатурна самый низкий. В совокупности звуки образуют гармоничную мелодию — «музыку сфер», слышать которую, как утверждают античные источники, мог Пифагор, обладавший очень тонким слухом.

Пифагореец Филолай из Тарента, живший в конце V века до н. э., изменил эту модель. Он поместил в центр мира Огонь, вокруг которого вращается десять сфер: сфера неподвижных звезд, сферы пяти планет, сферы Луны, Солнца, Земли и невидимой «Противоземли». Филолай буквально поклонялся декаде. Поэтому Противоземля введена для круглого счета, как десятое небесное тело; с ее помощью «объяснялись» лунные затмения. Центральный огонь с Земли не виден, так как его загораживает Противоземля.

От теории пифагорейцев в современной астрономии сохранилось понятие «небесная сфера». Отказ от геоцентризма, признание шарообразной формы Земли, ее обращения вокруг центрального огня, объяснение времен года наклоном земной орбиты по отношению к солнечной орбите (Солнце тоже обращается вокруг центрального огня), объяснение солнечных затмений прохождением Луны между Солнцем и Землей представляли приближение к истине, без чего не возникла бы гелиоцентрическая система Аристарха Самосского.

Во второй половине V в. до н. э., благодаря наблюдениям афинских астрономов Метона и Эвктемона, была установлена продолжительность тропического года и неравенство времен года. Метон ввел 19-летний цикл, который содержит 6940 суток и почти в точности равен длительности 235 лунных (синодических) месяцев. Средняя длительность года в метоновом цикле составляла 365, 26316 суток, что всего на 19 минут длиннее введенного четырьмя столетиями позднее юлианского года (365, 25 сут.) и на 30 минут — длительности тропического года во время Метона (365, 2425 сут.) Длительность лунного месяца в метоновом цикле была всего на 2 минуты больше точного значения. Эвктемон из наблюдений равноденствий и солнцестояний нашел, что длительность весны равнялась 93 сут-

кам, лета — 90, осени — 90, зимы — 92, т. е. обнаружил неравномерность движения Солнца по эклиптике. Столетие спустя астроном Каллипп, ученик и помощник Аристотеля, улучшил метонов цикл и уточнил неравенство времен года.

Выдающиеся достижения греческой астрономии IV в. до н. э. связаны с именами Евдокса Книдского (ок. 400–355 г. до н. э.) и Аристотеля (384–322 г. до н. э.). Евдокс был великим математиком. Он первым привнес в астрономию строгие математические методы, и поэтому его считают создателем античной теоретической астрономии.

По уже сложившемуся мнению греческих мыслителей наиболее совершенным геометрическим телом являлся шар, а наиболее совершенной плоской фигурой — круг. Поэтому задачей Евдокса, которую он блестяще решил, было согласование предположения о движении небесных тел по круговым орбитам с наблюдениями. Из наблюдений же следовало, что орбиты Солнца и Луны не являются круговыми; видимые траектории движения планет также далеки от круговых. Евдокс представил неравномерные движения небесных тел в виде комбинаций равномерных круговых движений. С каждым телом (за исключением неподвижных звезд) связано определенное число равномерно вращающихся сфер. Связь сфер выражалась в том, что полюсы каждой внутренней сферы фиксированы относительно внешней. Поэтому каждая сфера, помимо собственного вращения, участвует во вращении всех наружных сфер. Само небесное тело фиксировано в определенной точке экватора самой внутренней сферы. Всего в модели Евдокса 27 равномерно вращающихся вокруг Земли сфер, центры которых совпадают, а оси вращения могут иметь различное направление.

Модель космоса Евдокса далека от реальной картины, но это была первая математическая модель. В этой связи заметим, что разработка теории движения небесных тел в виде комбинации вращающихся сфер неизбежно должна была привести к разработке сферической геометрии и кинематики точки. Мы знаем об этом из двух небольших сочинений, написанных неким Автоликом в конце IV в. до н. э.

Теория Евдокса была улучшена впоследствии Каллиппом и Аристотелем. Каллипп добавил ряд дополнительных сфер, чтобы лучше согласовать результаты для внутренних планет, объяснить различную длительность времен года. Всего в модели стало 34 сферы.

Аристотель еще более усложнил теорию Евдокса. Благодаря его авторитету теоретическое построение стало восприниматься как реальный механизм движения небесных тел. Земля находилась в центре мира и была неподвижна. Согласно Аристотелю вращающаяся сфера неподвижных звезд увлекает за собой следующую сферу — это внешняя сфера Сатурна. Та в свою очередь увлекает вторую сферу Сатурна и т. д. Для исключения влияния Сатурна на Юпитер (чтобы последний не повторял движения Сатурна) Аристотель помещает между ними три нейтрализующих сферы. Аналогично он поступает для других планет. Всего в его модели уже 56 сфер, причем это надо понимать буквально — небесные тела прикреплены к эфирным сферам, и движутся не сами тела, а сферы. Космос Аристотеля конечен, он имеет форму сферы, за пределами которой нет ни пространства, ни времени. Вне его находится лишь Перводвигатель-бог, который приводит в движение сферу неподвижных звезд.

Следующий важный шаг в теории устройства космоса был сделан учеником Платона Гераклидом Понтийским (IV в. до н. э.). Он предположил, что вращение небесной сферы может быть объяснено вращением самой Земли. Для объяснения изменения яркости Меркурия и Венеры — важнейшего недостатка моделей Евдокса и Каллиппа — Гераклид предположил, что они обращаются вокруг Солнца, а не вокруг Земли. Звезды, которые Платон считал «божественными», Гераклид рассматривает как простые небесные тела.

Аристарх Самосский (310–230 г. до н. э.) пошел дальше своего предшественника. На основе математических расчетов он доказывает, что Солнце должно быть гораздо больше Земли по размерам. Каким образом он сделал этот вывод? Аристарх фиксирует момент, когда Луна находится в первой (или последней) четверти, т. е. когда освещена ровно половина лунного диска. Измерив угол между направлениями на центры лунного и солнечного дисков, можно найти угол, под которым из центра Солнца видно расстояние Земля–Луна. По наблюдениям Аристарха этот угол равняется одной тридцатой прямого угла ($\sim 3°$). Так как отношение расстояния от Земли до Луны к расстоянию от Земли до Солнца равно синусу этого угла ($\sim 0,05$) Аристарх заключает, что Солнце должно быть в 18–20 раз дальше от Земли, чем Луна. Так как угловые размеры Солнца и Луны примерно равны, то их диаметры находятся в той же пропорции, что и их расстояния до Земли.

Для вычисления отношения диаметра Солнца к диаметру Земли Аристарх предполагает, что поперечник земной тени, в которую попадает Луна во время затмения в два раза больше диаметра Луны. Использую эту гипотезу и найденное выше соотношение между расстояниями от Земли до Луны и Солнца, он находит отношение диаметров Солнца и Земли, которое равно $19/3$. Отсюда он находит, что объем Солнца должен быть примерно в $(19/3)^3$ или приблизительно 250 раз больше объема Земли. Хотя эта цифра занижена, можно полагать, что этого было достаточно для возникновения сомнений в правильности геоцентрической системы мира: если Солнце столь велико, то почему ему не быть в центре космоса. В подобной системе мира сразу решается проблема с изменениями яркости планет. В ответ на возражение, что движение Земли должно привести к смещению положения звезд (то, что сегодня мы называем параллактическим смещением), Аристарх говорит о большой величине радиуса небесной сферы.

Метод рассуждений Аристарха Самосского — безупречен. Ошибочными были наблюдения. В действительности угол, под которым из центра Солнца видно расстояние Земля—Луна, равен не $3°$, а всего $\sim 8,5'$. Значит отношение расстояний Земля–Солнце и Земля–Луна равно не 18–20, а ~ 400.

В качестве основных возражений противников гелиоцентрической системы Аристарха Самосского обычно приводят следующие. При предположении, что все планеты движутся по круговым орбитам вокруг Солнца, невозможно объяснить неравенство времен года. Подобные возражения высказывались и Копернику, который обосновывая гелиоцентрическую картину мира, следовал все же античной традиции и считал, что планеты двигаются по круговым орбитам. Так же, как и древние астрономы, Коперник полагал, что наблюдаемые неравномерные движения являются результатом сложения нескольких круговых движений, и использовал прекрасно разработанную в Древней Греции теорию эпициклов и эксцентров. Лишь через полвека проблема неравенства времен года была разрешена в работах Кеплера, установившего, что планеты, в том числе и Земля, движутся по эллиптическим, а не круговым орбитам.

В качестве второго возражения обычно приводят аргументы Клавдия Птолемея. По его словам все предметы, не связанные жестко с Землей, должны двигаться в направлении, обратном враще-

нию Земли. Поэтому «ни облака, ни другие летающие или парящие объекты никогда не будут видимы движущимися на восток», т. е. в направлении вращения Земли. Против этого заключения довольно трудно возразить, особенно в рамках аристотелевской физики, в которой не был известен закон инерции.

Кроме выдающихся теоретических работ в III в. до н. э., в Древней Греции, по-видимому, проводятся первые позиционные наблюдения звезд. Астрономы-наблюдатели Аристилл и Тиморахис (III в. до н. э.), используя специальные угломерные инструменты (описание которых, к сожалению, не сохранилось), определяли прямые восхождения и склонения звезд, т. е. координаты в экваториальной системе и получили первый звездный каталог. Впоследствии Гиппарх и Птолемей использовали эти наблюдения для исследования прецессии.

Эратосфен из Кирены (276–194 гг. до н. э.), измерив дугу меридиана между Александрией и Сиеной, вычислил размер земного шара. Из его вычислений следует, что длина окружности меридиана составляет около 252000 стадиев[4], или 39690 км, что всего на 310 км отличается от истинного значения. Кроме этой работы Эратосфен определил наклон эклиптики к экватору с ошибкой всего в $8'$, которое затем было использовано Гиппархом и Птолемеем.

Гиппарх (ок. 180–125 гг. до н. э.) — величайший астроном античного времени. Заслуги Гиппарха громадны — как в области наблюдательной, так и теоретической астрономии[5]. Прежде всего его имя связано с разработкой законченной теории эпициклов и эксцентров.

Поскольку Гиппарх занимался разработкой календаря, вполне естественно, что он пытался сначала построить теорию движения Солнца и Луны. Для этого он использовал понятия эпициклов и эксцентров, введенные его предшественниками, для объяснения неравномерности движения Солнца по эклиптике и вывел «первое неравенство»: разность в положении центра истинного и среднего Солнца. В современной литературе это неравенство известно как «уравнение времени». Но этим вклад Гиппарха в развитие астрономии не ограничивается.

---

[4]Длина египетского стадия, которым, по-видимому, пользовался Эратосфен, была равна 157,5 м.

[5]Первый космический астрометрический эксперимент, названный HIPPARCOS (ГИППАРКОС), напоминает нам о Гиппархе.

Он по справедливости считается создателем прецизионной наблюдательной астрономии. Сравнивая свои наблюдения с наблюдениями Аристилла и Тиморахиса, он обнаружил, что изменились лишь долготы звезд, а широты остались неизменными. Гиппарх объяснил это тем, что точка осеннего равноденствия за примерно сто семьдесят лет переместилась вдоль эклиптики с востока на запад на 2°, т. е. постоянная прецессии равна $\sim 43''$, что всего на 15% меньше истинного значения. На основе этого открытия он смог очень точно определить продолжительность тропического года (с ошибкой всего 6 мин).

Птолемей в «Альмагесте», ссылаясь на работу Гиппарха «О длительности года», приводит следущую цитату: «…солнцестояния и равноденствия за один год отступают по меньшей мере на 1/100 градуса в год». Таким образом, Гиппарх указывает нижний предел ($36''$) постоянной прецессии, что вполне согласуется с учетом ошибок наблюдений с приведенной выше оценкой. Птолемей не придал значения оговорке «по меньшей мере» и принял за величину прецессии именно это значение ($36''$), утвердив ошибку своим авторитетом на сотни лет.

Динамическое объяснение прецессии, т. е. на основе законов механики, впервые было дано Ньютоном. Во времена Гиппарха, когда еще не было ни динамики, ни данных о сжатии Земли, не могло существовать правильного объяснения прецессии.

Огромной заслугой Гиппарха явилось составление первого звездного каталога, дошедшего до нас. Впоследствии этот каталог был дополнен Птолемеем и приведен в «Альмагесте». Считается, что бóльшая часть звезд этого каталога (около 850) наблюдалась именно Гиппархом.

За следующие два столетия после смерти Гиппарха не появилось сколько-нибудь значительных работ, хотя астрономия была популярной наукой. Упомянем лишь о книге Гемина (первая половина I в. до н. э.) «Элементы астрономии», в которой излагаются основы сферической астрономии в популярном изложении.

Новый подъем в астрономии происходит лишь в конце I в. н. э., уже в эпоху Римской империи, и связан с Птолемеем. Непосредственным предшественником Птолемея был выдающийся астроном Менелай Александрийский. Помимо наблюдений, которые впоследствии использовал Птолемей, он активно работал в области триго-

нометрии. В арабском переводе до нас дошла его «Сферика», состоящая из трех книг, в которых он доказывает ряд теорем о сферических треугольниках. В «Альмагесте» Птолемей также приводит доказательства этих теорем, но не делает ссылок на Менелая (как впрочем и на Евклида и Архимеда). Тем не менее «Альмагест» Клавдия Птолемея (ок. 100–165 г.) — выдающееся достижение античной астрономии[6]. В тринадцати книгах «Альмагеста» Птолемей изложил и систематизировал достижения древнегреческих астрономов, и прежде всего Гиппарха. В первых двух книгах автор излагает основы сферической тригонометрии, дает описание некоторых угломерных инструментов и приводит решение ряда задач сферической астрономии. Затем рассматривается движение Солнца и Луны. Шестая книга посвящена теории солнечных и лунных затмений. Седьмая и восьмая книги содержат знаменитый звездный каталог 1027 звезд, составленный Птолемеем на основании своих наблюдений[7] и наблюдений Гиппарха. Книги с девятой по тринадцатую посвящены теории движения планет.

Помимо того, что «Альмагест» — научное произведение, в котором построена астрономическая система мира, того, что сейчас называют «системой мира Птолемея», он в течение почти полутора тысяч лет использовался как учебник астрономии.

После выхода в свет «Альмагест» становится основным астрономическим сочинением. В первую очередь идеи Птолемея распространяются на восток: известно, что копии попали в Персию и Индию. После арабских завоеваний середины VII века астрономия начинает активно развиваться в Средней Азии: Багдаде, Хорезме, Дамаске и др. В это время появляется арабский перевод «Альмагеста». Многие ученые, как, например, аль-Хорезми (начало IX в.), аль-Фергани (середина IX в.), аль-Баттани (конец IX в.) и др., подробно излагают основные идеи Птолемея, стараясь сделать изложение более популярным и простым. При этом разрабатываются новые математические методы, в частности, для вычисления сферических тре-

[6]Первоначальное название «Альмагеста» — «Мегале синтаксис», что означает «Большое построение». Впоследствии арабские переводчики в средние века употребили название «Аль Маджести» (или «Величайшее»), от которого и произошло русское название.

[7]Ряд исследователей «Альмагеста» приводят убедительные доказательства, что Птолемей мог подделывать свои и искажать чужие наблюдения для подгонки их к теории.

угольников. Помимо теоретических работ арабские астрономы начинают проводить собственные наблюдения с целью уточнения координат звезд, вошедших в каталог Птолемея.

Начиная с IX в. каталог Птолемея неоднократно перенаблюдался. Упомянем здесь астрономов аль-Баттани (880 г.), ас-Суфи (964 г.), Улугбека (1437 г.). Благодаря повышению точности наблюдений и большой разности эпох аль-Баттани, ас-Суфи получают значение постоянной прецессии с ошибкой $1''$, определяют наклон эклиптики к экватору с ошибкой $6''$.

После завоевания арабами Испании «Альмагест» и книги арабских ученых появились в Европе, где были переведены на латинский язык. По одному из переводов «Альмагеста» (с примечаниями и дополнениями Региомонтана) учился молодой Коперник. В середине XIII в. по указанию короля Альфонса X Кастильского группа астрономов подготовила так называемые «Альфонсовы таблицы», в которые кроме положений планет, моментов восходов и заходов светил, вошел звездный каталог Птолемея, приведенный к эпохе 1252 г.

Годы 1543 и 1609 являются особыми датами в астрономии. В 1543 г. вышла знаменитая книга Коперника «Об обращениях небесных сфер», положившая начало революции в астрономии. В 1609 г. вышла книга Иоганна Кеплера «Новая астрономия», в которой был дан вывод двух законов движения планет вокруг Солнца.

На промежуток между этими двумя датами приходится деятельность датского астронома Тихо Браге (1546–1601), который выполнил огромную по объему работу по накоплению и систематизации точных астрономических наблюдений. Тихо Браге был замечательным наблюдателем. Он составил каталог, содержавший положения 777 звезд с очень высокой для дотелескопической эпохи точностью $\pm 30''$. Впоследствии каталог был расширен до 1005 звезд и опубликован Кеплером в его «Рудольфовых таблицах» в 1627 г. В течение 20 лет Тихо Браге наблюдал Марс, и точные координаты Марса были очень ценным материалом для расчетов Кеплера.

Перед смертью Тихо Браге завещал Кеплеру результаты своих наблюдений, чтобы последний использовал их для подтверждения его гипотезы, согласно которой планеты движутся вокруг Солнца, которое обращается с годичным периодом вокруг неподвижной Земли. Кеплер не выполнил завещания, но всегда подчеркивал особое значение наблюдений Тихо Браге для теории движения планет.

Заслуги Тихо Браге в развитии астрономии не ограничиваются только составлением каталога звезд. На основе расчетов и наблюдений кометы 1577 г. он доказал, что кометы — это небесные тела. Он пишет: «…эта комета находится далеко за Луной, в сфере Венеры, которая помещена астрономами прямо под сферой Солнца и находится на расстоянии от 164 до 1104 земных радиусов от Земли». Это было смелое заявление, так как оно противоречило освященной веками аристотелевской концепции, согласно которой кометы не являются небесными телами, а располагаются в непосредственной близости Земли, в изменчивом «подлунном мире», т. е. в верхних слоях атмосферы. Из наблюдений же Тихо следовало, что комета находится в «надлунном мире», в котором по Аристотелю все вечно, ничего не возникает и ничего не исчезает, и находятся лишь небесные тела — звезды, планеты, Луна и Солнце. К этому открытию Тихо Браге был уже подготовлен: несколько лет назад он наблюдал новую звезду 1572 г. и установил, что она находится среди других звезд, в «надлунном мире».

Большой заслугой Тихо Браге было также исследование явления рефракции в атмосфере Земли, ее влияния на координаты звезд. Результатом работы были таблицы рефракции.

Чтобы повысить точность наблюдений, Тихо использовал новый подход к организации астрономических наблюдений, который заключался в многократном повторении однотипных наблюдений, введении инструментальных поправок, учете рефракции. Высокая точность и большое количество наблюдений Солнца позволили ему определить длину года с ошибкой, меньшей, чем одна секунда. По составленным им таблицам движения Солнца, его положение можно было определить с точностью до $1'$, тогда как до Тихо ошибка могла достигать $15–20'$.

Тихо Браге оставил последующим поколениям ученых точные и многочисленные наблюдения небесных тел, которые были использованы Кеплером при формулировании законов движения планет. Вывод этих законов был сделан Исааком Ньютоном на основе сформулированных им законов механики и теории всемирного тяготении.

В одно время с Тихо Браге жил Джон Непер (1550–1617). Он известен как изобретатель логарифмов. Непер использовал новый метод для решения ряда задач сферической тригонометрии. С его име-

нем связаны формулы определения двух углов сферического треугольника по противолежащим сторонам и углу между ними, так называемые «аналогии Непера».

В 1609–1610 гг., т. е. практически одновременно с выходом книги Кеплера «Новая астрономия», Галилео Галилей (1564–1642) с помощью построенного им телескопа сделал ряд выдающихся открытий. Открытие спутников Юпитера показало, что не только Земля может быть физическим центром движений во Вселенной. Таким образом, был опровергнут один из догматов, что вращательные движения возможны лишь вокруг покоящегося тела, так как в противном случае спутник отставал бы от движущегося центрального тела. Следовательно, обращение Луны вокруг Земли и движение самой Земли вокруг Солнца вполне могут реализоваться одновременно. Поэтому стало ясно, что критика Коперника, основанная на этом догмате, не имела никакого основания.

Галилей и независимо от него несколько других астрономов обнаружили пятна на Солнце, с помощью которых было открыто вращение Солнца. Но если Солнце вращается, то почему Земля и другие планеты не могут вращаться?

Помимо открытий в астрономии Галилей установил (1636 г.) принцип относительности или принцип физического равноправия всех инерциальных систем отсчета, проявляющийся в том, что законы механики во всех таких системах одинаковы. Отсюда следует, что никакими механическими измерениями, проводящимися в какой-либо инерциальной системе отсчета, нельзя определить покоится данная система или движется прямолинейно и равномерно.

Исаак Ньютон (1643–1727), обобщив результаты исследований Кеплера, Галилея и других ученых, в своем главном труде «Математические начала натуральной философии» (1687 г.) сформулировал основные законы классической механики — закон инерции, закон изменения количества движения, закон равенства действия и противодействия — и применил их к теории движения тел. Здесь же он изложил теорию всемирного тяготения и показал, что любые два тела притягиваются с силой, прямо пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. Закон всемирного тяготения позволил Ньютону не только обобщить законы Кеплера, но объяснить так называемые неравенства в движении Луны, найденные Тихо Браге из наблюдений.

Теоретические работы по изучению вращения Земли также были начаты Ньютоном. Применив законы механики к вращающейся Земле, он пришел к заключению, что Земля должна быть сплющена у полюсов. Как показал Ньютон, прецессия и нутация обусловлены притяжением экваториального избытка масс Земли Луной и Солнцем.

Для решения всех этих задач Ньютону потребовался новый математический аппарат (дифференциальное и интегральное исчисление), основы которого он разработал и без которого современная наука немыслима.

В связи с потребностями мореплавания (необходимостью определения координат кораблей) в XVII веке осознается важность точного измерения времени. В 1656 г. Христианом Гюйгенсом были изобретены маятниковые часы, а в 1675 г. он предложил заменить маятник спиральной пружиной. После этого Гюйгенс обратился к проблеме определения долготы, так как был уверен, что именно с помощью часов — хранителей времени, можно решить сложнейшую проблему навигации — измерение долготы в открытом море.

Насколько остра была эта проблема, говорит решение английского правительства от 1713 года об объявлении премии в 20 тыс. фунтов стерлингов ($\sim$ 1 млн. долларов по сегодняшнему курсу) за способ, позволяющий определить долготу с точностью до половины градуса. В поисках решения приняли участие крупнейшие астрономы XVIII века. Главные усилия были направлены на улучшение теории движения Луны и построение точного каталога звезд. Так, Эйлер составил таблицы, по которым долгота находилась с точностью около градуса, и получил часть премиальной суммы.

Второй способ, предложенный Гюйгенсом, был реализован в 1735 г. Джоном Гаррисоном, который изобрел хронометр. Однако только в 1761 г. его сын Вильям, после ряда усовершенствований хронометра, во время путешествия на Ямайку смог определить долготу корабля с ошибкой 1/3 градуса и окончательно решил эту проблему.

За век до этого события для решения проблемы долготы была основана Гринвичская обсерватория (1675 г.). Благодаря усовершенствованию методов наблюдений, которое произвел первый королевский астроном Джон Флемстид, точность определения координат звезд достигла $\pm 2''$. Для хранения времени были построены самые

точные для того времени маятниковые часы, которые показывали среднее солнечное время.

К концу XVIII века механические часы получают повсеместное распространение, их конструкция постоянно совершенствуется, следовательно, растет точность. Ежегодно производится уже примерно 50000 часов.

К середине XIX века в связи с бурным развитием техники, расширением сети железных дорог, люди начинают путешествовать, и, если они передвигаются на значительные расстояние по долготе, вынуждены до двадцати раз переводить часы из-за различия местного времени. Поэтому, независимо в разных странах (Англии, Швеции, Канаде, США и т.д.), вводятся часовые зоны. В 1870 г. школьный учитель Чарльз Доуд из США предложил разделить территорию США на 15-градусные зоны, в каждой из которых время одинаково и меняется на один час на границах зон. Это предложение было в 1884 г. принято на международной конференции в Вашингтоне как определение поясного времени на земном шаре, которое основано на всемирном нулевом меридиане — меридиане Гринвича. На конференции была также определена линия изменения даты.

Прогресс в развитии техники привел к фундаментальным открытиям в астрономии. После изобретения телескопа в XVII веке и усовершенствования его конструкции Ньютоном точность наблюдений стала быстро расти. В 1725 г. английский королевский астроном Джеймс Брадлей открыл явление аберрации света. Причина аберрации заключается в том, что скорость света конечна, а наблюдения проводятся с Земли, движущейся с некоторой скоростью по орбите вокруг Солнца. Фактически это было прямое доказательство того, что Земля перемещается в пространстве. Наблюдения Брадлея были доказательством постулата Коперника: правильнее считать Землю движущейся вокруг Солнца, а не Солнце — вокруг Земли, так как при наблюдении аберрации непосредственно обнаруживается происходящее в течение года изменение направления скорости Земли относительно звезд. С позиций современной науки мы бы сказали, что речь идет о движении Земли относительно квазиинерциальной системы отсчета, которая связана со звездами.

Для того, чтобы сделать это открытие, требовалась высокая точность наблюдений, так как величина постоянной аберрации (отношение скорости Земли к скорости света) равна $\sim 20''\!.5$. Точность ка-

талогов звезд Дж. Брадлея достигла $\pm 0^{s}\!,16$ по прямому восхождению и $\pm 1''\!,3$ по склонению.

Спустя столетие после открытия аберрации удалось измерить параллаксы ближайших звезд, хотя правильную оценку расстояний до них дал еще Ньютон (см. стр. 319). В 1837 г. Фридрих Бессель из измерений расстояний звезды 61 Лебедя, которая считалась близкой к Земле из-за большой величины собственного движения, до двух соседних (как считалось, более далеких от Земли) звезд, определил ее параллакс ($\sim 0''\!,3$).

Разработка теории, объясняющей результаты наблюдений — это важнейший этап становления науки. Главная задача теории состоит в объяснении результатов наблюдений, например, предсказании положений небесных тел, прецессии и нутации Земли, аберрации и т. д. Этими проблемами были заняты лучшие европейские ученые на протяжении XVIII и XIX веков. Эйлер, Лагранж, Лаплас, Гаусс и другие выдающиеся ученые посвятили многие работы согласованию теории и наблюдений небесных объектов. В процессе решения этой задачи был развит весьма мощный математический аппарат, применяемый в астрономии и теоретической механике. В результате развития теории появились *астрономические эфемериды* — вычисленные значения координат, скоростей, блеска и других параметров небесных тел.

Идеи Ньютона были развиты в трудах Эйлера, Клеро, Даламбера, Лагранжа, Лапласа. В 1749 г. Даламбер разработал строгую теорию прецессии, которую Ньютон рассмотрел ранее в общих чертах. При этом Даламбер объяснил также явление нутации — периодического колебания земной оси в пространстве (нутация была открыта Брадлеем уже после смерти Ньютона — в 1745 г.). Даламбер показал, что сила, с которой Луна действует на экваториальное утолщение Земли, переменна из-за движения Луны по орбите и поворота самой орбиты. Это создает переменный момент сил, вызывающий нутационное движение земной оси в пространстве, причем главная гармоника, имеющая период 18,6 года, определяется как раз поворотом плоскости лунной орбиты.

Клеро занимался вопросом о фигуре Земли и вывел теорему, которая носит его имя, позволяющую определить сжатие Земли по измерениям силы тяжести на ее поверхности. Лаплас более подробно, чем Даламбер, рассмотрел теорию прецессии и нутации Земли с

учетом влияния атмосферы и океанов, построил теорию приливов. Использовав результаты Клеро и изучая фигуры равновесия вращающейся жидкости, Лаплас доказал, что плотность внутри Земли должна увеличиваться к ее центру. В связи с разработкой теории фигур равновесия он ввел понятие потенциала, или силовой функции, которое сразу стало широко использоваться в механике и астрономии. Впервые Лаплас высказал предположение о движении полюса и переменности скорости вращения Земли, т. е. о неравномерности шкал времени, которые основаны на вращении Земли. Из-за недостаточной точности наблюдений в XVIII веке эта гипотеза не могла быть проверена. Многие из работ Лапласа были продолжением и развитием гениальных работ Эйлера, который фактически построил динамику вращающихся тел.

Для проверки результатов теоретических работ требовалось усовершенствование методов наблюдений, а иногда также длительное накопление данных. Многие ученые, начиная с Тихо Браге, завоевали репутацию великих не за новизну открытий, а за точность, полноту полученных рядов и надежность разработанных методов наблюдений.

Благодаря повышению точности наблюдений в конце XIX века было обнаружение движение полюсов Земли, предсказанное Эйлером. Открытие Сэтом Чандлером в 1891 г. колебания полюса с периодом $\sim 1,2$ года, которое впоследствии было названо его именем, послужило толчком к использованию астрометрических наблюдений для изучения строения Земли. Саймону Ньюкомбу принадлежит идея (1892 г.) объяснения чандлеровского колебания влиянием упругости Земли на период свободных эйлеровских колебаний полюса твердой Земли. Он же доказал, что движение полюса не может быть определено из теоретических соображений, что послужило поводом для организации регулярных наблюдений изменений широт. Для этого в 1898 г. была создана Международная служба широты (МСШ). В настоящее время функции МСШ выполняет Международная служба вращения Земли и систем отсчета (МСВЗ).

В конце XIX века была построена теория вращения абсолютно твердой Земли; Оппольцером получены формулы, описывающие изменение координат звезд из-за прецессии и нутации. Благодаря работам Ньюкомба была принята система параметров для описания прецессии, используемая в настоящее время. Наблюдения Луны и

Солнца, их сравнение с теориями движения, которые были разработаны Ньюкомбом, Брауном, де Ситтером, привели к обнаружению векового замедления вращения Земли. Впоследствии теория движения Солнца, созданная Ньюкомбом, была использована для создания первой динамической шкалы времени, известной как шкала эфемеридного времени, и определения эфемеридной секунды. О фундаментальности работы Ньюкомба говорит тот факт, что для построения теории движения Солнца он обработал более 40000 наблюдений Солнца.

В середине XX века были разработаны первые атомные стандарты частоты, на основе показаний которых была построена атомная шкала времени, заменившая шкалу эфемеридного времени. Определение атомной шкалы времени позволило непосредственно измерить неравномерность вращения Земли.

Развитие электроники, радиотехники, компьютерной техники в конце XX века привели к появлению новых методов наблюдений, таких как радиоинтерферометрия со сверхдлинными базами, лазерная дальнометрия. Кроме этих методов для определения системы координат на Земле, построения равномерной шкалы времени и определения координат наблюдателя в земной системе широко используются глобальные спутниковые навигационные системы GPS (Global Positioning System) и ГЛОНАСС (ГЛОбальная НАвигационная Спутниковая Система). Для увеличения точности построения системы координат на небесной сфере, увеличения числа реперных объектов и облегчения доступа потребителей к этой системе в начале XXI века начаты работы над несколькими космическими астрометрическими проектами. Успешное их завершение, безусловно, будет новым этапом в развитии астрометрии.

Глава 1

ОСНОВЫ СФЕРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

1.1. Основные понятия

Одним из главных достижений проекта ГИППАРКОС, осуществленного в 90-х годах XX века, является измерение параллаксов (т. е. расстояний) $\sim$ 120000 звезд. Так как ошибки измерения параллаксов составляют примерно 1 мс дуги, то большая часть этих звезд находится на расстоянии до 1 килопарсека (кпк) от Солнца. Несмотря на то, что объем, в котором расположены эти звезды, составляет очень малую часть от объема нашей Галактики, измерение расстояний является важнейшим результатом проекта, потому что оказалось возможным построить трехмерную картину ближайшей окрестности Солнца.

Если расстояния до небесных объектов неизвестны, то удобно отнести все объекты: звезды, радиоисточники и т. д. на одно и то же расстояние, то есть расположить их на поверхности сферы с центром в точке, где находится наблюдатель. Такая сфера называется *небесной сферой*. Радиус небесной сферы произволен, но удобно для дальнейших вычислений считать его равным единице.

Чтобы знать изменение положения звезды в пространстве, необходимо измерить три компоненты её скорости. К сожалению, для большинства звезд известны лишь две компоненты скорости в картинной плоскости, то есть в плоскости, перпендикулярной линии, соединяющей наблюдателя и звезду. Удобнее всего считать, что картинная плоскость совпадает с плоскостью, касательной к небесной сфере.

Геометрические построения и вычисления на поверхности сферы отличаются от таковых на плоскости. Поэтому можно говорить о сферической геометрии как о самостоятельном разделе геометрии. Следует заметить, что формулы сферической геометрии справедливы не только для небесной сферы, но и для любой другой сферы (например, при проведении вычислений на земном глобусе). Необходимо лишь учитывать радиус сферы.

Одними из основных понятий планиметрии являются понятия точки и прямой линии. В сферической геометрии аналогом прямой линии как линии с наименьшей длиной, соединяющей две точки, является дуга окружности, образованной пересечением плоскости, проходящей через центр сферы, со сферой. Так как круг — это часть плоскости, ограниченная окружностью, то дадим следующее определение[1].

Определение 1.1.1. *Любая плоскость, которая проходит через центр сферы и ограничена сферой, называется большим кругом.*

Определение 1.1.2. *Любая плоскость, которая не проходит через центр сферы и ограничена сферой, называется малым кругом.*

Как большой, так и малый круг пересекает сферу по окружности. Очевидно, что любая прямая, лежащая в плоскости большого круга и проходящая через центр сферы, является диаметром сферы. Следовательно, два больших круга пересекаются по диаметру сферы.

Через любые две точки, лежащие на поверхности сферы, можно провести большой круг, и дуга окружности между этими точками является кратчайшим расстоянием между ними на сфере. Это утверждение эквивалентно аксиоме из планиметрии: через любые две точки можно провести прямую линию.

Перпендикуляр к большому кругу, проходящий через центр сферы, пересекает ее в двух точках, называемых *полюсами*.

Рассмотрим сферу с центром в точке O (рис. 1.1).

Проведем большой круг через две точки A и B, лежащие на поверхности сферы, затем проведем перпендикуляр к большому кругу. Полюсы обозначим как P и Z. Через точки P и A, затем через P и B проведем два больших круга.

[1] В учебнике К.А.Куликова «Курс сферической астрономии» дается другое определение: « Круг, плоскость которого проходит через центр сферы, называется большим кругом. Все остальные круги называются малыми кругами».

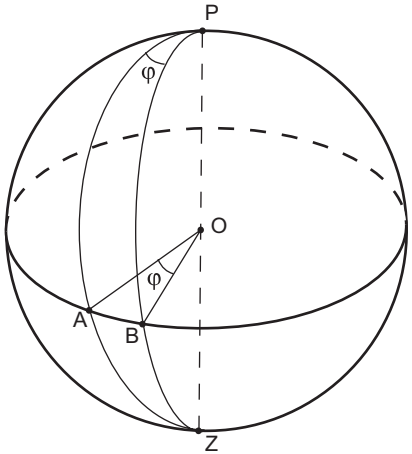


Рис. 1.1. Определение двугранного угла.

Определение 1.1.3. *Угол между двумя большими кругами называется двугранным углом.*

Единицами измерения углов в астрономии являются градусы, радианы, часы. Так как радиус сферы равен единице, то длина дуги $\widehat{AB}$ (рис. 1.1) равна центральному углу AOB, то есть φ, выраженному в радианах. По определению 1 градус (1°) — это центральный угол, равный $1/360$ части окружности. Градус делится на 60 угловых минут ($1^\circ = 60'$), каждая из которых равна 60 угловым секундам ($1' = 60''$), то есть градус состоит из 3600 угловых секунд.

Длина окружности равна 2π радиан, поэтому

$$1 \text{ радиан} = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57^\circ\!,29577951308232 \approx 206264''\!,80624709636.$$

В современных астрометрических наблюдениях точность намного превышает $1''$. Поэтому часто используется миллисекунда (мс) дуги, причем 1 мс дуги $= 10^{-3''}$. Чтобы представить себе величину угла в 1 мс дуги, вычислим угловой размер горошины диаметром 5 мм, находящейся на расстоянии, равном 1000 км. Угловой размер горошины равен:

$$\frac{5 \cdot 10^{-3} \text{ м}}{10^6 \text{ м}} \times 206264''\!,8062 \approx 10^{-3''}.$$

Для измерения углов используются также часы, причем (1^{h}) — это центральный угол, соответствующий $1/24$ части окружности. В одном часе содержится 60 минут или 3600 секунд $(1^{\mathrm{h}} = 60^{\mathrm{m}} = 3600^{\mathrm{s}})$. Очевидно, что $1^{\mathrm{h}} = 15^\circ, 1^{\mathrm{m}} = 15', 1^{\mathrm{s}} = 15''$.

Рассмотрим теперь три точки, которые лежат на сфере и не принадлежат одному большому кругу. Через каждую пару точек можно провести большие круги (рис. 1.2).

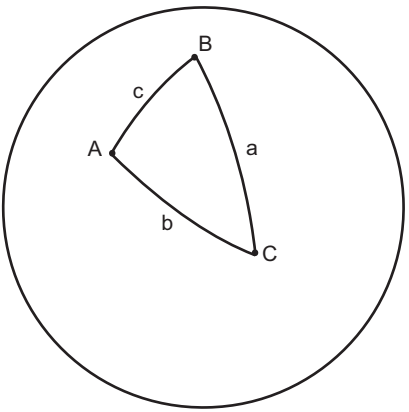


Рис. 1.2. Определение сферического треугольника.

Определение 1.1.4. *Сферическим треугольником называется фигура, образованная тремя дугами окружностей больших кругов, попарно соединяющих три точки.*

Примерами сферических треугольников могут быть треугольники ABP, ABZ (рис. 1.1) и ABC (рис. 1.2).

Обычно углы сферического треугольника обозначают большими буквами, например A, B, C, а стороны, противолежащие углам — соответствующими малыми буквами: $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ (рис. 1.2). Как и в планиметрии, в сферической геометрии существуют определенные соотношения между сторонами и углами треугольников. Основные формулы, связывающие углы и стороны треугольника, будут выведены в следующем параграфе. Здесь отметим лишь следующие свойства сферических треугольников. Углы A и B в треугольнике ABP (рис. 1.1) – прямые, так как большие круги,

проходящие через точки P, A, Z и P, B, Z, перпендикулярны плоскости AOB. Поэтому, поскольку угол $\varphi > 0$, сумма углов сферического треугольника может превышать $180°$. Теперь проведем плоскость через точки A, B, C (рис. 1.2), лежащие на сфере, и параллельно ей плоскость, которая проходит через центр сферы. Очевидно, что вторая плоскость поделит сферу на две полусферы, причем треугольник ABC будет полностью лежать в одной из полусфер. Таким образом, любой из углов сферического треугольника будет меньше $180°$. В пределе (при увеличении каждого из углов до $180°$) сферический треугольник трансформируется в полусферу.

Следующие свойства сферического треугольника аналогичны свойствам плоского треугольника:

а) в каждом сферическом треугольнике против бо́льшего угла лежит бо́льшая сторона;

б) сумма любых двух сторон больше третьей стороны.

Найдем площадь сферического треугольника. Для этого рассмотрим треугольник ABC (рис. 1.3). Обозначим его площадь через S.

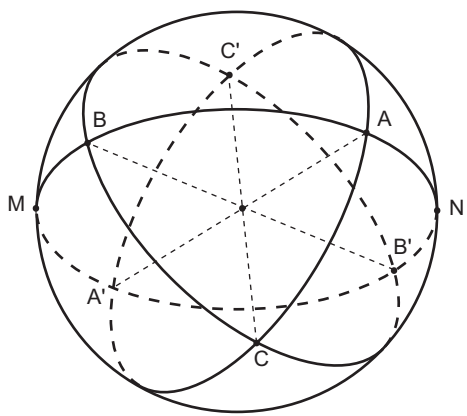


Рис. 1.3. Вычисление площади сферического треугольника.

Плоскость $ABMA'B'N$ делит сферу на две полусферы, в одной из которых и расположен треугольник ABC. Площадь полусферы равна $2\pi R^2$, если радиус сферы равен R. На рис. 1.3 площадь ближней к нам полусферы складывается из площадей следующих фигур: сегмента сферы $ABMA'CA$, сегмента $BCB'NAB$ минус треуголь-

ник ABC, сегмента $CA'C'B'C$ минус треугольник $A'B'C'$. Если углы треугольника ABC измеряются в радианах, то площадь каждого из указанных сегментов равна $2AR^2$, $2BR^2$, $2CR^2$, соответственно. Треугольник $A'B'C'$ равновелик заданному треугольнику ABC. Поэтому можно написать уравнение:

$$2\pi R^2 = 2AR^2 + 2BR^2 - S + 2CR^2 - S.$$

Отсюда площадь сферического треугольника ABC равна

$$S = R^2(A + B + C - \pi),$$

где углы A, B, C выражены в радианах.

Определим теперь площадь всей небесной сферы, которую удобно выразить в квадратных градусах. Для этого сначала выразим радиус сферы в градусах: $R = 360°/2\pi$. Тогда площадь всей сферы будет равна

$$4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{360°}{2\pi}\right)^2 \approx 41252,97 \text{ квадратных градусов.}$$

1.2. Скаляры, векторы, тензоры и системы координат

Прежде чем выводить основные формулы сферической геометрии, рассмотрим более общий вопрос: об определении скалярных, векторных и тензорных величин в математике и физике и их связи с системами координат.

Многие физические законы в векторной форме имеют вид:

$$\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}, \tag{1.1}$$

т. е. вектор $\mathbf{a}$ пропорционален с коэффициентом λ вектору $\mathbf{b}$. В качестве примера можно привести закон Ньютона: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ — ускорение $\mathbf{a}$ тела пропорционально действующей на него силе $\mathbf{F}$. Коэффициент пропорциональности равен массе m тела. Согласно (1.1) вектор $\mathbf{a}$ параллелен вектору $\mathbf{b}$, если $\lambda > 0$, и антипараллелен, если $\lambda < 0$.

Введем систему координат с началом в точке O и осями Ox, Oy, Oz. Направления осей задаются векторами $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, соответственно, причем длина каждого вектора считается равной единице. Поэтому они называются единичными векторами. Система координат

$Oxyz$ является прямоугольной (декартовой), если векторы $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ взаимно перпендикулярны.

Определение 1.2.1. *Скалярным произведением* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ *двух векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *называется скаляр, равный произведению модулей векторов на косинус угла* γ *между ними:*

$$c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos\gamma. \tag{1.2}$$

Скалярное произведение векторов обозначается точкой $(\cdot)$, результатом его является скаляр, т. е. величина, характеризуемая только числовым значением. Скалярами, например, являются масса, температура, давление, длина и т. д.

Пусть в системе $Oxyz$ векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ имеют компоненты (декартовы координаты) a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3, причем a_1, b_1 — это проекции векторов на ось Ox, a_2, b_2 — на ось Oy, a_3, b_3 — на ось Oz. Тогда модули векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равны

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \quad b = |\mathbf{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}. \tag{1.3}$$

Из свойств скалярного произведения выделим следующие:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, \quad (\beta\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \beta(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \tag{1.4}$$

где β — скаляр.

Из определения скалярного произведения следует, что оно равно произведению модуля одного вектора на величину проекции другого вектора на первый. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — углы между вектором и осями системы координат (единичными векторами $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$), соответственно. Используя определение скалярного произведения, находим, что проекции вектора $\mathbf{a}$ на оси системы координат $Oxyz$ равны

$$a_1 = |\mathbf{a}| \cos\varphi_1, \quad a_2 = |\mathbf{a}| \cos\varphi_2, \quad a_3 = |\mathbf{a}| \cos\varphi_3.$$

Косинусы углов между вектором и осями системы координат называются *направляющими косинусами*. Используя определение модуля вектора (1.3), получим, что сумма квадратов направляющих косинусов равна единице:

$$\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 = 1.$$

Так как $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$, то проекции вектора на оси координат равны также:

$$a_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}, \quad a_2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{j}, \quad a_3 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{k}.$$

Если в формуле (1.2) $\gamma = 90°$, то $c = 0$. Значит два вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю. Используя это свойство, получим:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0.$$

Так как векторы $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ имеют единичную длину, то

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1.$$

Вектор $\mathbf{a}$ может быть выражен через компоненты a_1, a_2, a_3 следующим образом:

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}. \tag{1.5}$$

В линейной алгебре выражение (1.5) называется разложением вектора $\mathbf{a}$ по базисным векторам $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Тогда скалярное произведение в декартовых координатах имеет вид:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \tag{1.6}$$

Так как в дальнейшем мы будем использовать матричные методы вычислений, то следует использовать более общее определение скалярного произведения. Определим матрицу C как таблицу

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

скаляров $c_{ij}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$. Элементы c_{ij} называются элементами прямоугольной матрицы C размером $m \times n$, m есть число строк, n — число столбцов матрицы. Матрица размера $m \times 1$ называется вектор–столбцом, а матрица размера $1 \times m$ — вектор–строкой; число m называется размерностью вектора.

Согласно определению, произведение матрицы A размера $m \times n$ на матрицу B размера $n \times k$ есть матрица C размера $m \times k$, причем элементы матрицы C определяются формулой:

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}.$$

Элемент c_{ij} матрицы C является суммой произведений элементов i-ой строки матрицы A на элементы j-ого столбца матрицы B. Число столбцов матрицы A должно равняться числу строк матрицы B. Поэтому обратное произведение BA может не существовать. Если обе матрицы квадратные ($m = n$), то произведение BA определено, но в общем случае $BA \neq AB$.

Исходя из этого определения, получим, что скалярное произведение равно произведению вектор–строки на вектор–столбец, и (1.6) можно записать в виде:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Обратное произведение $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ (произведение вектор–столбца на вектор–строку) является матрицей. Чтобы свойства скалярного произведения не изменились, соотношения (1.4) следует переписать с учетом формул сложения и умножения матриц. Если символом ^{T} обозначить операцию транспонирования, то $(AB)^T = B^T A^T$. Напомним, что матрица C^T размера $k \times n$ с элементами c_{ji} называется транспонированной по отношению к матрице C размера $n \times k$ с элементами c_{ij}, т. е. строки и столбцы меняются местами. Тогда с учетом определения операции транспонирования скалярное произведение записывается в виде

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^T = \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{a}^T = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Вернемся к свойству (1.1). В более общем виде его можно записать так:

$$\mathbf{a} = \Lambda \mathbf{b}, \tag{1.7}$$

где Λ — матрица размером 3×3:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{pmatrix}, \tag{1.8}$$

причем $\Lambda_{11} = \Lambda_{22} = \Lambda_{33} = \lambda$, а остальные элементы матрицы Λ равны нулю, т. е. $\mathbf{a} = \lambda I \mathbf{b}$, где I — единичная матрица, у которой диагональные элементы равны единице, остальные элементы равны нулю. В уравнении (1.7) векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ записаны в виде столбцов.

В декартовой системе координат $Oxyz$ компоненты векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ пропорциональны:

$$a_1 = \lambda b_1, \quad a_2 = \lambda b_2, \quad a_3 = \lambda b_3. \tag{1.9}$$

В общем виде, когда диагональные элементы $\Lambda_{ii}, i = 1, 2, 3$ не равны друг другу или недиагональные элементы $\Lambda_{ij}, i \neq j$ отличны от нуля, зависимость компонент вектора $\mathbf{a}$ от компонент вектора $\mathbf{b}$ выражается вместо (1.9) системой уравнений:

$$\begin{aligned} a_1 &= \Lambda_{11} b_1 + \Lambda_{12} b_2 + \Lambda_{13} b_3, \\ a_2 &= \Lambda_{21} b_1 + \Lambda_{22} b_2 + \Lambda_{23} b_3, \\ a_3 &= \Lambda_{31} b_1 + \Lambda_{32} b_2 + \Lambda_{33} b_3. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Это означает, что физический закон не может быть описан простым уравнением вида (1.1). Компоненты вектора $\mathbf{a}$ зависят от компонент вектора $\mathbf{b}$, но векторы уже не параллельны. Величина Λ, входящая в физический закон (1.7) и описываемая матрицей (1.8), называется *тензором*[2]. Тем не менее, в пространстве можно выделить направления, вдоль которых векторы остаются параллельными, т. е. вдоль них, по-прежнему, $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$. Эти направления играют очень важную роль и в физике, и в математике. Перед определением этих направлений рассмотрим следующий пример.

Пусть модуль вектора $\mathbf{b}$ равен 2, вектор лежит в плоскости Oxy, и угол между вектором и осью Ox равен φ. Тогда проекции b_1, b_2 на оси Ox, Oy равны:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}.$$

[2]Термин «тензор» появился в теории упругости и произошел от слова tension — натяжение. Впоследствии тензор стал использоваться для математического описания физических объектов с общими свойствами.

Пусть тензор Λ имеет вид:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0,3 \\ 0,3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что тензор Λ является симметричным, т. е. $\Lambda_{ij} = \Lambda_{ji}$.

Используя правила умножения матрицы на столбец, найдем компоненты вектора **a** по формуле:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 & 0,3 \\ 0,3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

для разных значений угла φ. Результат вычислений показан на рис. 1.4. Из рисунка видно, что при наклоне вектора **b** под углами

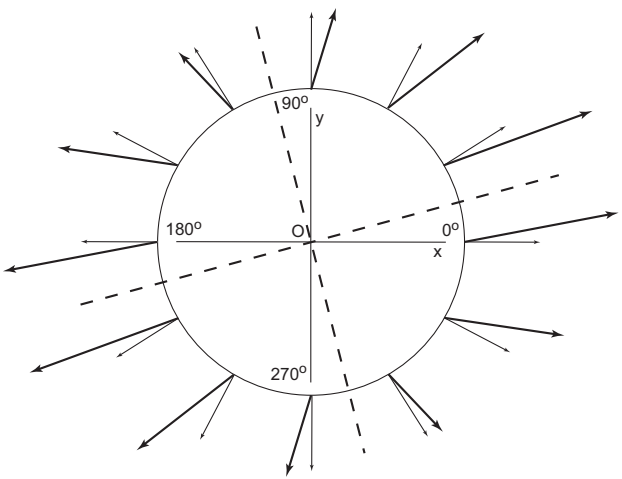


Рис. 1.4. К определению тензора Λ. Вектор **a** (показан жирной линией) вычисляется как результат умножения тензора Λ на вектор **b** (показан тонкой линией) для разных ориентаций **b**. Существуют два направления (под углом $\sim 15°$ и $\sim 105°$ к оси Ox), вдоль которых векторы **a** и **b** параллельны.

$\sim 15°$, $\sim 105°$, $\sim 195°$ и $\sim 285°$ к оси Ox вектор **a** будет параллелен вектору **b**.

Определим теперь эти направления следующим образом.

Требование пропорциональности векторов, накладываемое физическим законом, приводит к уравнению:

$$\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b} = \lambda I \mathbf{b} = \Lambda \mathbf{b}$$

или

$$(\Lambda - \lambda I)\mathbf{b} = 0. \tag{1.11}$$

Параметры λ, входящие в (1.11), называются *собственными значениями* матрицы Λ. Как мы покажем ниже, собственные значения характеризуют направления осей системы координат, в которых компоненты векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ параллельны.

Очевидно, что система (1.11) имеет решение $\mathbf{b} = 0$, которое не дает нам никакой информации. Чтобы система (1.11) имела нетривиальное решение, детерминант матрицы $M = \Lambda - \lambda I$ должен равняться нулю:

$$\det M = 0. \tag{1.12}$$

Уравнение (1.12) является полиномом относительно параметра λ. Известно, что корнями полинома могут быть как действительные, так и комплексные числа. Но с физической точки зрения параметры λ должны быть действительными числами. Это условие накладывает определенные требования на величины недиагональных элементов матрицы Λ. Проще всего это показать для матрицы Λ размером 2×2, т. е. для двухмерных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Так как

$$\det M = (\Lambda_{11} - \lambda)(\Lambda_{22} - \lambda) - \Lambda_{12}\Lambda_{21} = 0,$$

то из условия реальности корней этого уравнения

$$(\Lambda_{11} - \Lambda_{22})^2 + 4\Lambda_{12}\Lambda_{21} \geq 0$$

следует, что $\Lambda_{12} = \Lambda_{21}$. Значит, матрица Λ должна быть *симметричной* ($\Lambda_{ij} = \Lambda_{ji}$).

Если собственные значения найдены (обозначим их как λ_j), то

$$(\Lambda - \lambda_j I)\mathbf{b}^{(j)} = 0. \tag{1.13}$$

Каждому собственному значению λ_j матрицы Λ соответствует *собственный вектор* $\mathbf{b}^{(j)}$ матрицы. Для двумерных векторов легко вычислить, что

$$\begin{cases} (\Lambda_{11} - \lambda_1)b_1^{(1)} + \Lambda_{12}b_2^{(1)} = 0, \\ \Lambda_{12}b_1^{(1)} + (\Lambda_{22} - \lambda_1)b_2^{(1)} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} (\Lambda_{11} - \lambda_2)b_1^{(2)} + \Lambda_{12}b_2^{(2)} = 0, \\ \Lambda_{12}b_1^{(2)} + (\Lambda_{22} - \lambda_2)b_2^{(2)} = 0. \end{cases}$$

Так как $\det M = 0$, то, как говорят, строки матрицы M линейно зависимы. Поэтому компоненты собственных векторов можно найти лишь с точностью до произвольного множителя. Из первых уравнений этих систем получим:

$$\frac{b_1^{(1)}}{b_2^{(1)}} = -\frac{\Lambda_{12}}{\Lambda_{11} - \lambda_1}, \qquad \frac{b_1^{(2)}}{b_2^{(2)}} = -\frac{\Lambda_{12}}{\Lambda_{11} - \lambda_2}.$$

Если собственные значения различны, то собственные векторы взаимно перпендикулярны. В самом деле, собственные векторы с номерами m и n удовлетворяют уравнению (1.13), т. е.:

$$\Lambda \mathbf{b}^{(m)} = \lambda_m \mathbf{b}^{(m)},$$
$$\Lambda \mathbf{b}^{(n)} = \lambda_n \mathbf{b}^{(n)}.$$

Умножим первое уравнение скалярно на вектор–строку $(\mathbf{b}^{(n)})^T$, а второе — на вектор–строку $(\mathbf{b}^{(m)})^T$ и затем вычтем одно из другого. Получим

$$(\mathbf{b}^{(n)})^T \Lambda \mathbf{b}^{(m)} - (\mathbf{b}^{(m)})^T \Lambda \mathbf{b}^{(n)} = (\mathbf{b}^{(n)})^T \lambda_m \mathbf{b}^{(m)} - (\mathbf{b}^{(m)})^T \lambda_n \mathbf{b}^{(n)}. \quad (1.14)$$

Легко проверить, что если матрица Λ симметрична, то левая часть (1.14) равна нулю. Используя определения транспонирования и свойства скалярного произведения, получим

$$(\mathbf{b}^{(n)})^T \lambda_m \mathbf{b}^{(m)} - (\mathbf{b}^{(m)})^T \lambda_n \mathbf{b}^{(n)} = \lambda_m \left((\mathbf{b}^{(m)})^T \cdot \mathbf{b}^{(n)} \right)^T - \lambda_n (\mathbf{b}^{(m)})^T \cdot \mathbf{b}^{(n)}.$$

Но

$$\left((\mathbf{b}^{(m)})^T \cdot \mathbf{b}^{(n)} \right)^T = (\mathbf{b}^{(m)})^T \cdot \mathbf{b}^{(n)},$$

(число равно самому себе) и в результате имеем

$$(\lambda_m - \lambda_n)(\mathbf{b}^{(m)})^T \cdot \mathbf{b}^{(n)} = 0. \quad (1.15)$$

Так как $\lambda_m \neq \lambda_n$, то из определения скалярного произведения следует перпендикулярность собственных векторов $\mathbf{b}^{(m)}, \mathbf{b}^{(n)}$.

В трехмерном пространстве три собственных вектора определяют три взаимно-перпендикулярных направления, которые можно

выбрать в качестве осей декартовой системы координат. Они называются *главными осями* тензора Λ. Вдоль главных осей векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ параллельны. Диагональные элементы тензора в системе главных осей называются *главными моментами* тензора и применительно к каждой конкретной задаче имеют особое значение.

На рис. 1.4 главные оси тензора Λ показаны пунктирной линией. В системе главных осей недиагональные компоненты тензора равны нулю. Это легко показать, используя пример, рассмотренный выше. Собственные значения матрицы Λ равны $\lambda_1 = 2,08, \lambda_2 = 0,92$. Компоненты собственных векторов могут быть найдены с точностью до произвольной постоянной: $b_1^{(1)} = 3,75 b_2^{(1)}$, $b_1^{(2)} = -0,28 b_2^{(2)}$. Отсюда получим, что угол φ между вектором $\mathbf{b}^{(1)}$ и осью Ox равен $14^\circ\!,9$, а между вектором $\mathbf{b}^{(2)}$ и осью Ox равен $104^\circ\!,9$. Определим теперь оси новой системы координат $O\xi$, $O\eta$, направив их вдоль векторов $\mathbf{b}^{(1)}$, $\mathbf{b}^{(2)}$, соответственно. Преобразование от координат ξ, η к координатам x, y, как будет показано ниже, можно записать в виде матричного уравнения:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_3(-\varphi) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix},$$

где $R_3(-\varphi)$ — матрица вращения (см. стр. 89). Для рассматриваемого примера матрица $R_3(-\varphi)$ равна:

$$R_3(-\varphi) = \begin{pmatrix} 0,966 & -0,258 \\ 0,258 & 0,966 \end{pmatrix}.$$

Формула преобразования компонент тензора Λ при переходе от координат x, y к ξ, η имеет вид:

$$\Lambda'_{in} = \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \Lambda_{kj} R_{ki} R_{jn},$$

где R_{ki} — компоненты матрицы $R_3(-\varphi)$. Выполнив суммирование, найдем компоненты тензора Λ' в системе главных осей:

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} 1,933 & 0,000 \\ 0,000 & 0,916 \end{pmatrix}.$$

В главе 3 мы рассмотрим системы координат, связанные с Землей. Особое значение имеет система координат, определяемая главными моментами инерции Земли или *осями фигуры Земли*.

Условие равенства нулю скалярного произведения определяет перпендикулярность векторов, но не зависит от их взаимной ориентации. Так, если единичные векторы $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ декартовой системы координат лежат в плоскости страницы, то третий вектор $\mathbf{k}$, перпендикулярный и $\mathbf{i}$, и $\mathbf{j}$, может быть направлен либо вверх, либо вниз. В зависимости от направления $\mathbf{k}$ система координат называется левой или правой.

Выбрать ту или иную систему координат можно с помощью *векторного произведения* векторов.

Определение 1.2.2. *Векторное произведение* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *двух векторов есть вектор, перпендикулярный и* $\mathbf{a}$, *и* $\mathbf{b}$, *модуль которого равен*

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin\gamma, \tag{1.16}$$

а направление совпадает с направлением движения правого винта при его повороте от $\mathbf{a}$ *к* $\mathbf{b}$ *на угол* γ, *меньший* π.

Если $\sin\gamma = 0$, то векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ параллельны (или антипараллельны). В прямоугольной системе координат получим:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

Компоненты вектора, равного векторному произведению $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, в декартовой системе координат можно найти, вычислив следующий определитель:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{k}. \tag{1.17}$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$. Из других свойств векторного произведения выделим следующие:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}, (\beta\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \beta(\mathbf{a} \times \mathbf{b}),$$

β — скаляр. Особо выделим формулу двойного векторного произведения:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \tag{1.18}$$

которая часто будет использоваться в дальнейшем.

С помощью определения векторного произведения можно однозначно определить ориентацию базисной тройки векторов. Мы будем использовать только правые системы координат (исключением является горизонтальная система).

Вернемся теперь к формуле (1.7):

$$\mathbf{a} = \Lambda \mathbf{b},$$

причем положим, что матрица Λ равна:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.19}$$

Тогда

$$a_1 = c_2 b_3 - c_3 b_2, \quad a_2 = -c_1 b_3 + c_3 b_1, \quad a_3 = c_1 b_2 - c_2 b_1.$$

Нетрудно проверить, что умножение матрицы Λ (1.19) на вектор $\mathbf{b}$ эквивалентно векторному произведению: $\mathbf{a} = \mathbf{c} \times \mathbf{b}$, где вектор $\mathbf{c}$ имеет компоненты (c_1, c_2, c_3).

Так как в (1.19) $\Lambda_{ij} = -\Lambda_{ji}$, то матрица Λ называется *антисимметричной*. Соответственно, тензор, изображаемый матрицей (1.19), называется антисимметричным.

Суммируем вышесказанное. Определение системы координат означает выбор тройки базисных векторов, которые: 1) описывают ориентацию системы в пространстве, а также 2) позволяют однозначно определить положение объекта относительно осей системы.

Можно определить разные системы координат в зависимости от решаемой задачи. Выбор в качестве системы координат декартовой системы иногда оказывается удачным, благодаря следующим ее свойствам: оси, задаваемые тройкой базисных векторов $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, являются взаимно-перпендикулярными, направление осей неизменно для любой точки пространства, оси являются прямыми линиями.

В декартовой системе координат закон пропорциональности между двумя векторами, записанный в виде $\mathbf{a} = \Lambda \mathbf{b}$, упрощается, так как тензор Λ является квадратной матрицей с особыми свойствами.

Если матрица Λ антисимметрична, то это означает, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ всегда перпендикулярны, и с математической точки зрения действие такого тензора эквивалентно векторному произведению.

Если матрица Λ симметрична, то существуют выделенные в пространстве направления, в которых векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ параллельны. Подчеркнем, что это — еще одна интерпретация выражения (1.7). С физической точки зрения и векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, и тензор Λ отражают вполне определенные свойства физического тела, и, следовательно, существование главных осей тензора отражает физические характеристики тела.

В качестве примера приведем уравнение:

$$\mathbf{H} = \overline{C}\mathbf{\Omega}, \tag{1.20}$$

связывающее $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)$ — вектор момента импульса (или угловой момент) тела с вектором его угловой скорости вращения $\mathbf{\Omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Матрица $\overline{C}$ называется тензором инерции. В матричном виде это уравнение имеет вид:

$$\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}.$$

Если $\rho(\mathbf{r})$ представляет собой плотность тела в точке, радиус-вектор которой есть $\mathbf{r}$, то можно записать компоненты тензора $\overline{C}$ в виде интегралов

$$C_{11} = \int \rho(\mathbf{r})(r^2 - x^2)dV, \quad C_{12} = -\int \rho(\mathbf{r})xydV \quad \text{и т. д.}$$

Интегрирование выполняется по объему V тела.

Диагональные элементы матрицы $\overline{C}$ называются моментами инерции, а недиагональные — произведениями инерции. Каждый из компонентов тензора инерции зависит от распределения масс в теле и от мгновенной ориентации тела относительно осей координат X, Y, Z, которые в рассматриваемом случае совпадают с инерциальной системой отсчета. Вращая систему координат, можно привести тензор $\overline{C}$ к диагональному виду:

$$\overline{C} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}.$$

В системе этих особых осей (главных осей тензора) уравнение (1.20) принимает особенно простой вид:

$$H_1 = A\omega_1,$$
$$H_2 = B\omega_2,$$
$$H_3 = C\omega_3.$$

При изучении вращения Земли относительно инерциальной системы отсчета X, Y, Z вводится система x, y, z, оси которой совпадают с главными осями тензора инерции Земли. Обычно ось z направлена вдоль максимального (полярного) момента инерции C Земли, оси x и y лежат в экваториальной плоскости.

1.3. Сферическая система координат

Для решения многих задач оказывается удобнее вместо декартовой системы использовать криволинейные системы координат. В общем случае используются три функции $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$, $f_3(x, y, z)$ для определения положения тела в пространстве. Координатная сетка состоит из пересекающихся кривых $f_i(x, y, z) = \text{const}\ (i = 1, 2, 3)$ вместо сетки прямых линий $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, $z = \text{const}$ в декартовой системе. Если функции выбраны подходящим образом, то положение объекта может быть *однозначно* определено с помощью криволинейных координат (f_1, f_2, f_3) вместо декартовых координат (x, y, z).

К таким системам относится и *сферическая система координат*, широко используемая не только в астрономии, но и других науках. Сферические координаты (см. рис. 1.5): R — радиус-вектор объекта, θ — полярное расстояние, которое иногда называют коширотой, и λ — долгота связаны с декартовыми координатами x, y, z уравнениями:

$$\begin{aligned} x &= R\sin\theta\cos\lambda, \\ y &= R\sin\theta\sin\lambda, \\ z &= R\cos\theta. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Полярное расстояние (кошировта) изменяется от $0°$ до $180°$, долгота — от $0°$ до $360°$. Вместо полярного расстояния часто используется широта φ, причем $\varphi = 90° - \theta$.

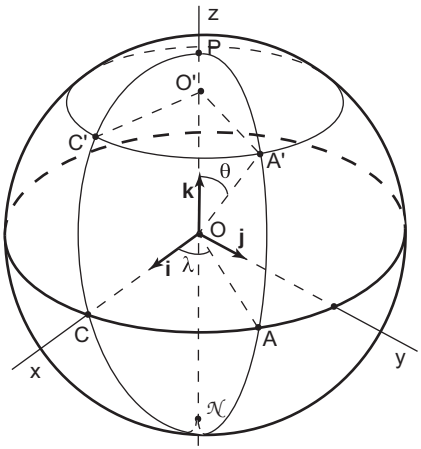


Рис. 1.5. Определение сферических координат точки.

Система уравнений (1.21) представляет преобразование между сферической и декартовой системами координат. Следовательно, функции f_1, f_2, f_3 равны:

$$f_1 = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$
$$f_2 = \theta = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad 0 \le \theta \le \pi,$$
$$f_3 = \lambda = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & 0 \le \lambda < \pi/2, \text{ если } x > 0,\ y \ge 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & \pi/2 \le \lambda \le 3\pi/2, \text{ если } x \le 0, \\ 2\pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & 3\pi/2 < \lambda < 2\pi, \text{ если } x > 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Вернемся к рис. 1.5. Через произвольно выбранные точки A и C проведем большой круг. Полюсы обозначим как P и $\mathcal{N}$. Проведем теперь через полюсы и точку A большой круг (аналогично проведем большой круг через точку C). Обозначим через θ центральный угол между направлением на точку P и направлением на произвольную точку A', лежащую на сфере в плоскости большого круга $PA\mathcal{N}$. Проведем через точку A' плоскость, параллельную большому кругу OAC. Полученная плоскость является малым кругом, и радиус $O'A' = \rho$ окружности равен, если $OA' = R$:

$$\rho = OA' \sin\theta = R \sin\theta. \tag{1.22}$$

Введем декартову систему координат: ось x направим вдоль радиуса OC, ось z — вдоль радиуса OP. Обозначим единичные векторы осей x и z как $\mathbf{i}$ и $\mathbf{k}$, соответственно. Направление оси y зададим единичным вектором $\mathbf{j}$ согласно уравнению:

$$\mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{i}. \tag{1.23}$$

Векторное произведение (1.23) векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{i}$ определяет правую декартову систему координат $Oxyz$.

Обозначим через λ двугранный угол между плоскостями $PC\mathcal{N}$ и $PA\mathcal{N}$. Числа R, θ, λ называются *сферическими координатами* точки A'. При $R = 1$ достаточно знать две координаты θ, λ для определения положения точки на сфере. В следующей главе будут определены различные системы сферических координат. В каждой из них координаты θ, λ имеют разные названия и могут обозначаться другими буквами.

Пусть точка C' лежит на сфере и является точкой пересечения большого круга $PC\mathcal{N}$ и малого круга $A'O'C'$ (рис. 1.5). Найдем длину дуги $\widehat{A'C'}$. Так как центральный угол $A'O'C'$ равен λ, то

$$\widehat{A'C'} = O'A' \cdot \lambda = R\lambda \sin\theta. \tag{1.24}$$

Рассмотрим более подробно вопрос преобразования координат вектора в криволинейных координатах.

В криволинейной системе координат, в отличие от декартовой, возможны два способа выбора базисной тройки векторов: 1) базисные векторы являются касательными в точке (x_0, y_0, z_0) к кривым $f_1(x_0, y = \text{const}, z = \text{const})$, $f_2(x = \text{const}, y_0, z = \text{const})$, $f_3(x = \text{const}, y = \text{const}, z_0)$; обозначим их как $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и 2) базисные векторы перпендикулярны в точке (x_0, y_0, z_0) к поверхностям, задаваемым функциями f_1, f_2, f_3, т. е. $f_1(x_0, y_0, z_0) = \text{const}$, $f_2(x_0, y_0, z_0) = \text{const}$, $f_3(x_0, y_0, z_0) = \text{const}$; обозначим их как $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$. Еще одним отличием от декартовой системы является то, что направление, а также длина базисных векторов может различаться в разных точках пространства.

В случае сферических координат поверхность, задаваемая уравнением $f_1 = \text{const}$, есть сфера радиуса r, уравнение $f_2 = \theta = \text{const}$ определяет малый круг, а $f_3 = \lambda = \text{const}$ — плоскость меридиана. Пересечения этих плоскостей со сферой являются окружностями.

Так как кривые $f_1(x_0, y = \text{const}, z = \text{const})$, $f_2(x = \text{const}, y_0, z = \text{const})$, $f_3(x = \text{const}, y = \text{const}, z_0)$ также являются окружностями, то в случае сферических координат обе базисные тройки совпадают. В общем случае это не так.

Два выбора базисных троек дают возможность найти проекции вектора $\mathbf{a}$ как на оси $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, так и на оси $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$:

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}^1 + a_2\mathbf{e}^2 + a_3\mathbf{e}^3 = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3. \tag{1.25}$$

Используя предложенное Эйнштейном обозначение суммирования, согласно которому суммирование в выражении выполняется по паре повторяющихся индексов (знак суммы при этом опускается), разложение вектора по базисным тройкам записывается в виде:

$$\mathbf{a} = a_i\mathbf{e}^i, \quad \mathbf{a} = a^j\mathbf{e}_j; \tag{1.26}$$

индексы суммирования могут обозначаться любыми буквами.

Числа a^1, a^2, a^3 называются *контравариантными*, а a_1, a_2, a_3 — *ковариантными* проекциями вектора $\mathbf{a}$.

Для базисных векторов $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^k$ справедливы соотношения:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^k = \delta_i^k = \begin{cases} 1, & \text{при } i = k \\ 0, & \text{при } i \neq k. \end{cases} \tag{1.27}$$

Символ δ_i^k называется символом Кронекера[3].

Скалярное произведение в криволинейных координатах записывается в виде

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a^i\mathbf{e}_i) \cdot (b_j\mathbf{e}^j) = (a^i b_j)\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j.$$

По определению $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j$, причем $\delta_i^i = 1$, $\delta_i^j = 0$ при $i \neq j$. Значит $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a^i b_j)\delta_i^j = a^i b_i$. Скалярное произведение можно вычислить, если известны ковариантные проекции вектора $\mathbf{a}$ и контравариантные проекции вектора $\mathbf{b}$, при этом $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^i b_i = a_i b^i$.

Для того, чтобы получить явное выражение ковариантных и контравариантных координат вектора, умножим скалярно первое из уравнений (1.26) на $\mathbf{e}_j$, а второе — на $\mathbf{e}^i$. Учитывая определение (1.27), найдем:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_j = a_i(\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j) = a_i\delta_j^i = a_j$$
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^i = a^j(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^i) = a^j\delta_j^i = a^i.$$

[3] Л. Кронекер — немецкий математик (1823–1891).

Значит,

$$a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i, \quad a^i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^i. \tag{1.28}$$

Используя формулы (1.28), перепишем (1.26) в виде:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i)\mathbf{e}^i, \quad \mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^i)\mathbf{e}_i. \tag{1.29}$$

Соотношения справедливы для любого вектора $\mathbf{a}$. Если вместо $\mathbf{a}$ в (1.29) подставить базисные векторы, то получим:

$$\mathbf{e}_k = (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i)\mathbf{e}^i, \quad \mathbf{e}^k = (\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}^i)\mathbf{e}_i. \tag{1.30}$$

Вводя обозначения

$$g_{ki} = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i, \quad g^{ki} = \mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}^i, \tag{1.31}$$

перепишем соотношения (1.30) таким образом:

$$\mathbf{e}_k = g_{ki}\mathbf{e}^i, \quad \mathbf{e}^k = g^{ki}\mathbf{e}_i. \tag{1.32}$$

Для построения базисной тройки $\mathbf{e}_k$ по векторам $\mathbf{e}^i$ необходимо знать матрицу с элементами $[g_{ki}]$, а для построения базиса $\mathbf{e}^k$ по базису $\mathbf{e}_i$ — матрицу с элементами $[g^{ki}]$. Эти матрицы взаимно обратны, т. е.

$$g^{ki}g_{ij} = \delta^k_j = \begin{cases} 1, & \text{при } j = k \\ 0, & \text{при } j \neq k. \end{cases}$$

Величины g^{ki} и g_{ij} называются компонентами дважды контравариантного и ковариантного *метрического тензора* соответственно.

Что собой представляет тензор в математике? Как мы видели, задание базисной тройки определяет систему координат, в которой можно найти координаты произвольных векторов, т. е. их проекции на базисные векторы. Но так как при переходе в другую точку пространства направление и величина базисных векторов может меняться, то необходимо решить задачу о преобразовании проекций произвольных векторов из одной базисной тройки в другую. Эта задача решается методами тензорного анализа. Тензоры представляют собой систему величин, преобразующихся по линейному закону при переходе от одной системы координат к другой. Соотношения, записанные в тензорной форме, сохраняют свою форму в любой координатной системе.

Найдем теперь расстояние $d\mathbf{r}$ между двумя бесконечно близкими точками пространства. Декартовы координаты вектора $d\mathbf{r}$ равны dx, dy, dz. Считая x, y, z в формулах (1.21) функциями переменных r, θ, λ, найдем дифференциалы dx, dy, dz. По правилу вычисления дифференциалов функций многих переменных, сначала фиксируем переменные θ, λ и находим изменение функции (частную производную $\partial/\partial r$) в зависимости от приращения dr, затем фиксируем переменные r и λ и находим изменение функции в зависимости от приращения $d\theta$, и наконец при постоянных r и θ находим частную производную $\partial/\partial\lambda$. В результате получим:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial x}{\partial \lambda}d\lambda, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial y}{\partial \lambda}d\lambda, \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial r}dr + \frac{\partial z}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial z}{\partial \lambda}d\lambda, \end{aligned} \tag{1.33}$$

Очевидно, частные производные $\partial x/\partial r, \partial y/\partial r, \partial z/\partial r$, вычисленные в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r} = (x, y, z)$, представляют собой координаты касательного вектора к линии r в этой точке. Аналогичные замечания можно сделать про другие частные производные. Таким образом, они представляют собой компоненты базисных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ вдоль направлений r, θ, λ:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial z}{\partial r} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial z}{\partial \lambda} \end{pmatrix}.$$

Из (1.25) следует, что приращения $dr, d\theta, d\lambda$ являются контравариантными проекциями вектора $d\mathbf{r}$ в сферических координатах; уравнения (1.33), поэтому, представляют преобразование контравариантного вектора.

Следовательно, дифференциал функции является контравариантным вектором. Переобозначив бесконечно малые приращения как $dx^1 = dx$, $dx^2 = dy$, $dx^3 = dz$, найдем квадрат расстояния ds^2 между двумя бесконечно близкими точками в декартовой системе координат:

$$(ds)^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \tag{1.34}$$

В более общем виде с учетом правила суммирования выражение для квадрата расстояния между двумя точками пространства записывается в виде:

$$(ds)^2 = (d\mathbf{r})^2 = dx^i dx^j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = g_{ij} dx^i dx^j, \tag{1.35}$$

где g — метрический тензор. Закон вычисления расстояния (1.35) называется *метрикой пространства*.

Выбор той или иной системы координат дает возможность определить положение тела в пространстве и упростить уравнения движения тела, но не определяет свойства самого пространства. Задание метрики совместно с определением системы координат полностью описывает пространство. Это означает, что, зная метрический тензор, можно вычислить расстояние между двумя точками. В случае евклидова пространства, которое называется *плоским*, расстояние находится по формуле (1.34), и метрический тензор равен

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.36}$$

В случае плоского пространства метрический тензор g является диагональным и симметричным: $g_{ij} = g_{ji}$. В общем случае тензор может иметь недиагональные элементы, которые зависят от координат, но тензор g всегда является симметричным, так как величины g_{ij} определяются из симметричной формы (1.35).

Если пространство не является плоским, то для вычисления расстояний уже нельзя использовать теорему Пифагора (1.34). В частности, при вычислениях на сфере (в кривом пространстве) длина дуги между двумя точками не равна длине хорды (расстоянию в плоском пространстве).

Квадрат элемента длины в сферической системе координат легко найти, вычислив частные производные $\partial x/\partial r, \partial x/\partial \theta$ и т. д. и подставив их в (1.34). Используя уравнения (1.21), находим, что $\partial x/\partial r = \sin\theta\cos\lambda$, $\partial x/\partial\theta = r\cos\theta\cos\lambda$ и т. д. В результате после приведения подобных членов получим, что

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\lambda^2.$$

Метрический тензор, следовательно, равен

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

Тензор не содержит недиагональных членов. Это говорит о том, что сферические координаты ортогональны: сфера с радиусом $r = \text{const}$, конус с углом $\theta = \text{const}$ и меридиональная плоскость $\lambda = \text{const}$ пересекаются под прямыми углами друг к другу.

Таким образом, свойства геометрии в криволинейной системе координат определяются компонентами g_{ij} метрического тензора. В дальнейшем мы будем рассматривать четырехмерное пространство–время для вычисления эффектов теории относительности (изменения хода часов, находящихся в гравитационном поле, отклонения луча света). В четырехмерном пространстве–времени имеется, следовательно, 16 компонент тензора, из них только 10 различны из-за симметричности тензора (четыре с одинаковыми индексами и $12/2 = 6$ с различными индексами).

1.4. Основные формулы сферической геометрии

Рассмотрим сферический треугольник ABC на небесной сфере, причем точка A является полюсом, а точка B лежит в плоскости Oxz (рис. 1.6). Декартовы координаты единичных векторов $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C$ определяются согласно (1.21) при $R = 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_A &= (0, 0, 1), \\ \mathbf{r}_B &= (\sin c, 0, \cos c), \\ \mathbf{r}_C &= (\sin b \cos A, \sin b \sin A, \cos b). \end{aligned}$$

По определению скалярного произведения $\mathbf{r}_B \cdot \mathbf{r}_C = \cos a$. Это же произведение в декартовых координатах имеет вид:

$$\mathbf{r}_B \cdot \mathbf{r}_C = \sin c \sin b \cos A + \cos c \cos b.$$

Перепишем эти формулы в следующем виде:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A. \tag{1.37}$$

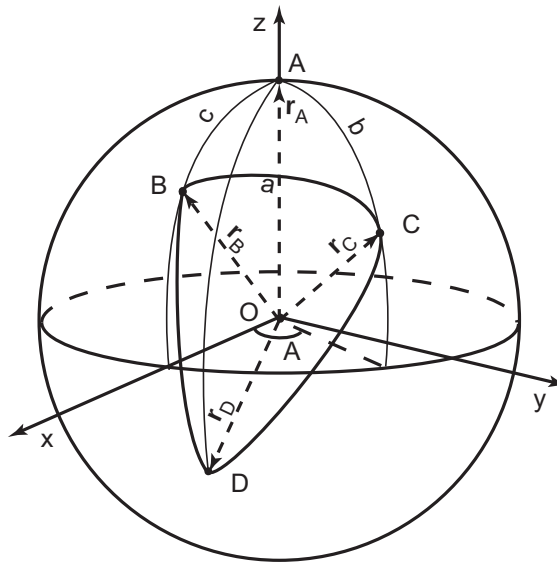


Рис. 1.6. К выводу формул синусов и косинусов.

Мы доказали теорему: «*Косинус стороны сферического треугольника равен произведению косинусов двух других его сторон плюс произведение синусов этих сторон на косинус угла между ними*». Обычно соотношение (1.37) называют формулой косинусов. С помощью циклической перестановки можно написать формулы косинусов для двух других сторон:

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B,$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

Теперь вычислим векторное произведение $\mathbf{r}_C \times \mathbf{r}_B$. Согласно (1.16) получим:

$$|\mathbf{r}_C \times \mathbf{r}_B| = \sin a.$$

Допустим, что вектор $\mathbf{r}_C \times \mathbf{r}_B$ направлен в точку D (рис. 1.6), то есть

$$\mathbf{r}_C \times \mathbf{r}_B = \mathbf{r}_D \sin a, \tag{1.38}$$

$\mathbf{r}_D$ — тоже единичный вектор. Используя (1.17), запишем левую часть (1.38) в виде:

$$\mathbf{r}_C \times \mathbf{r}_B = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \sin b \cos A & \sin b \sin A & \cos b \\ \sin c & 0 & \cos c \end{pmatrix} = (\sin b \sin A \cos c)\,\mathbf{i} +$$
$$+ (\cos b \sin c - \sin b \cos A \cos c)\,\mathbf{j} + (-\sin b \sin c \sin A)\,\mathbf{k}. \qquad (1.39)$$

Правую часть (1.38) согласно (1.5) можно записать в виде:

$$\mathbf{r}_D \sin a =$$
$$= \sin a \left[\mathbf{i}(\sin AD \cos BAD) + \mathbf{j}(\sin AD \sin BAD) + \mathbf{k} \cos AD\right]. \qquad (1.40)$$

В треугольнике BAD сторона $\widehat{BD} = 90°$, и плоскость OBD перпендикулярна плоскости OBC ($\angle DBC = 90°$). Поэтому $\angle ABD = 90° + B$. По формуле косинусов имеем

$$\cos \widehat{AD} = \cos 90° \cos c + \sin 90° \sin c \cos(90° + B)$$

или

$$\cos \widehat{AD} = -\sin c \sin B.$$

Приравнивая z-компоненты в формулах (1.39) и (1.40), получим:

$$-\sin b \sin c \sin A = -\sin a \sin c \sin B$$

или

$$\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin a}{\sin A}.$$

По аналогии из треугольника CAD получим:

$$\cos \widehat{AD} = -\sin b \sin C,$$

что приводит к выражению:

$$-\sin b \sin c \sin A = -\sin a \sin b \sin C.$$

В результате, мы можем записать, что

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}. \qquad (1.41)$$

Эти соотношения известны как формулы синусов. Сформулируем полученный результат как теорему: «*В сферическом треугольнике отношение синусов сторон равно отношению синусов противолежащих им углов*».

Для вывода следующей группы соотношений между сторонами и углами сферического треугольника запишем формулу синусов для треугольника ABD:

$$\frac{\sin AD}{\sin(90^\circ + B)} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin BAD}$$

или: $\cos B = \sin AD \sin BAD$. Сравнивая y-компоненты в уравнениях (1.39) и (1.40), получим:

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A. \tag{1.42}$$

Сформулируем следующую теорему: «*Произведение синуса стороны сферического треугольника на косинус прилежащего угла равно произведению косинуса противолежащей углу стороны на синус третьей стороны минус произведение синуса на косинус этих же сторон, умноженное на косинус угла между ними*».

Используя циклическую перестановку сторон и углов, можно получить следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
\sin a \cos C &= \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A,\\
\sin b \cos A &= \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B,\\
\sin b \cos C &= \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B,\\
\sin c \cos A &= \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C,\\
\sin c \cos B &= \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C.
\end{aligned} \tag{1.43}$$

Формулы (1.42) и (1.43) известны как формулы пяти элементов или формулы подобия.

На основе формул синусов, косинусов и формул подобия можно получить ряд других уравнений, связывающих углы и стороны сферического треугольника. Приведем так называемые формулы косинусов:

$$\begin{aligned}
\cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,\\
\cos B &= -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b,\\
\cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c,
\end{aligned}$$

из которых следует, что «*Косинус угла равен произведению косинусов двух других углов, взятого с обратным знаком, плюс произведение синусов этих углов, умноженное на косинус стороны между ними*».

С выводом этих и других уравнений можно ознакомиться в соответствующих учебниках. Так как в астрономии наиболее часто используются формулы синусов, косинусов и подобия, на выводе других уравнений мы не будем останавливаться.

Для усвоения основных формул сферической рассмотрим решение следующих задач.

Задача 1. Вычислить кратчайшее расстояние между точками A и B на поверхности Земли, координаты которых (широта и долгота) равны φ_1, λ_1 и φ_2, λ_2, соответственно. Землю считать сферой радиуса R.

Решение. Так как кратчайшим расстоянием на сфере является дуга окружности большого круга, используем для решения задачи формулу косинусов. Рассмотрим сферический треугольник с вершинами A, B, C, в котором точка C является северным полюсом. Тогда дуга $\widehat{AC}$ равна $\pi/2 - \varphi_1$, дуга $\widehat{BC}$ равна $\pi/2 - \varphi_2$, дуга $\widehat{AB}$ равна $\lambda_2 - \lambda_1$ (будем считать, что $\lambda_2 > \lambda_1$). Если $\lambda_2 = \lambda_1$, то, очевидно, расстояние в угловой мере равно $|\varphi_2 - \varphi_1|$, в линейной мере $R|\varphi_2 - \varphi_1|$. Здесь φ_1, φ_2 выражены в радианах.

Согласно (1.16) получим:

$$\cos\widehat{AB} = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1).$$

Расстояние между двумя точками равно $R \arccos(\cos\widehat{AB})$.

Задача 2. Вычислить широту и долготу φ, λ самой северной точки дуги большого круга, проходящего через точки A, B на поверхности Земли, широты и долготы которых равны φ_1, λ_1 и φ_2, λ_2, соответственно.

Решение. Рассмотрим сферический треугольник ABC, в котором точка C является северным полюсом (рис. 1.7). Определим северный полюс как точку, при наблюдении с которой вращение Земли происходит против часовой стрелки.

Обозначим самую северную точку дуги большого круга, проходящего через точки A, B, через D. Проведем через точку D плоскость, перпендикулярную оси, соединяющей полюсы. Такая плос-

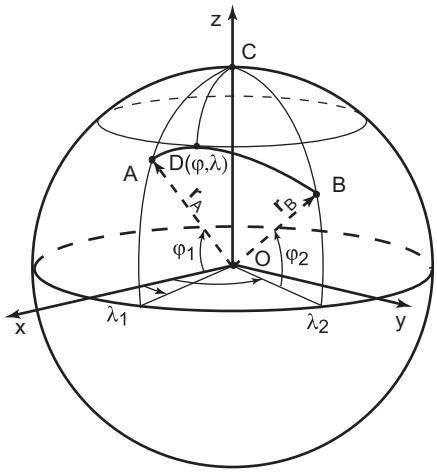


Рис. 1.7. К задаче 2.

кость пересечет сферу по окружности, называемой *параллелью*. Очевидно, что дуга $\widehat{AB}$ большого круга касается в точке D параллели, и, следовательно, меридиан CD пересекает дугу $\widehat{AB}$ под прямым углом. Значит углы $\angle CDA$, $\angle CDB$ равны $\pi/2$, дуги $\widehat{AC}$ и $\widehat{BC}$ равны $\pi/2-\varphi_1$ и $\pi/2-\varphi_2$ соответственно, и по формуле синусов для треугольника CAD получим:

$$\frac{\sin\widehat{CD}}{\sin(\angle CAD)}=\frac{\sin(\pi/2-\varphi_1)}{\sin(\angle CDA)}$$

или

$$\sin\widehat{CD}=\cos\varphi_1\sin(\angle CAD).$$

По формуле синусов для треугольника ABC найдем:

$$\frac{\sin(\angle CAD)}{\sin(\pi/2-\varphi_2)}=\frac{\sin(\lambda_2-\lambda_1)}{\sin\widehat{AB}}.$$

Так как длина дуги $\widehat{CD}$ равна $\pi/2-\varphi$ и $\sin(\angle CAD)=\sin(\angle CAB)$, то находим широту точки D:

$$\cos\varphi=\cos\varphi_1\cos\varphi_2\frac{\sin(\lambda_2-\lambda_1)}{\sin\widehat{AB}}. \qquad (1.44)$$

Синус дуги $\widehat{AB}$ легко вычислить, используя решение предыдущей задачи. Как известно, $\sin\widehat{AB} = \pm\sqrt{1-\cos^2\widehat{AB}}$. Нужный знак выбирается из условия $\sin(\lambda_2-\lambda_1)/\sin\widehat{AB} > 0$, так как $\cos\varphi > 0$ и требуется найти самую северную точку дуги большого круга.

Долготу λ точки D найдем из следующих соображений. Используя формулу подобия для прямоугольного треугольника CAD, получим:

$$\sin\widehat{AD}\cos(\angle CDA) = \cos(\frac{\pi}{2}-\varphi_1)\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi)- \\ -\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi_1)\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)\cos(\lambda-\lambda_1)$$

или:

$$\cos(\lambda-\lambda_1) = \operatorname{tg}\varphi_1\operatorname{ctg}\varphi.$$

Определение долготы становится невозможным в двух случаях: если точки A и B лежат на экваторе (в этом случае $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$; $\sin\widehat{AB} = \sin(\lambda_2-\lambda_1)$; из (1.44) следует, что $\varphi = 0$; значит $\cos(\lambda-\lambda_1) = 0\cdot\infty$) и если точки A и B лежат на одном меридиане (в этом случае $\lambda_1 = \lambda_2$ или $\lambda_1 = \lambda_2+\pi$ и $\varphi = \pi/2$, т. е. дуга проходит через полюс).

Глава 2

АСТРОНОМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Одной из задач сферической астрономии, как говорилось во «Введении», является определение системы отсчета. Под системой отсчета мы будем понимать совокупность координатных осей и часов, по отношению к которым находится положение небесных тел и определяется шкала времени. В сферической астрономии дается математическое определение систем координат и связи между ними, а также определение шкал времени и соотношений между ними. Реализация систем координат, т. е. привязка их к выбранным небесным телам, является задачей астрометрии. Реализация шкал времени (разработка часов и методов их сличения, определение единицы времени) является комплексной задачей, которая решается не только астрономами, но и специалистами в области атомной, лазерной физики, электроники и т. д.

Для определения системы координат необходимо задать её начало и направление осей. Когда оси заданы, определяется основная плоскость системы, от которой отсчитывается одна из сферических координат. В древности чаще всего использовали эклиптическую систему координат, т. е. основной плоскостью была плоскость эклиптики. Такой выбор объясняется тем, что древние астрономы изучали главным образом движение планет, Солнца и Луны, которые располагаются вблизи плоскости эклиптики. В средние века в качестве одного из основных направлений стали использовать направление оси вращения Земли. Более удобной стала экваториаль-

ная система, задаваемая плоскостью среднего экватора и точкой весеннего равноденствия[1].

Кроме указанных, используются горизонтальная и галактическая системы координат, основными плоскостями в которых являются плоскость горизонта наблюдателя и плоскость экватора нашей Галактики. В каждой из этих систем можно использовать для определения положения небесных тел тройки чисел x, y, z или R, θ, λ, которые связаны друг с другом посредством уравнений (1.21).

Вполне естественно для наблюдателя одну из осей системы координат связывать с выделенным направлением. На Земле сама природа подсказывает наблюдателю два направления: одно совпадает с отвесной линией, или с силой притяжения Земли, второе — с осью вращения Земли. Плоскости, перпендикулярные этим направлениям, являются основными плоскостями горизонтальной и экваториальной систем координат, соответственно.

В следующем параграфе мы определим эти системы и введем соответствующие сферические координаты. Затем получим формулы для преобразования координат небесных тел от одной системы координат к другой в случае, когда начала осей совпадают. Если системы отсчета движутся друг относительно друга, то строгое преобразование координат выполняется с учетом формул общей теории относительности.

Центр небесной сферы и, следовательно, начало систем координат может быть расположено в любой точке пространства. В зависимости от выбора начала различают следующие системы координат:

- топоцентрические, с началом в точке наблюдения на поверхности Земли;
- геоцентрические — в центре масс Земли;
- гелиоцентрические — в центре Солнца;
- барицентрические — в центре масс Солнечной системы.

При изучении движения космических аппаратов рассматриваются объектоцентрические системы с началом в центре масс аппарата. Определение этих систем будет дано в следующей главе.

[1] Термин «средний экватор» употребляется в астрометрии в том смысле, что экватор смещается только вследствие прецессии.

2.1. Горизонтальная система координат

Представим себе наблюдателя, находящегося на поверхности Земли. Одним из выделенных направлений для него является направление, совпадающее с отвесной линией, или с силой притяжения Земли. Мысленно продолжим отвесную линию вверх и вниз до пересечения ее с небесной сферой. Точки пересечения (полюсы горизонтальной системы координат) называются *зенитом* и *надиром* и обозначаются как Z и $\mathcal{N}$, соответственно (рис. 2.1). Плоскость, перпендикулярная отвесной линии, называется *плоскостью горизонта*. Если через точки зенита и надира провести плоскость, то часть этой

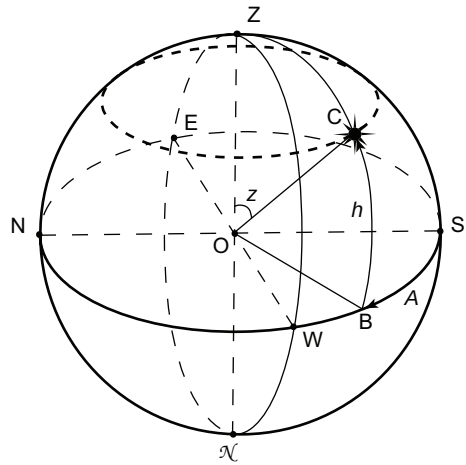


Рис. 2.1. Горизонтальная система координат.

плоскости, ограниченная по окружности небесной сферой, по традиции называется *вертикальным кругом*. На плоскости горизонта выделим четыре точки: севера N, юга S, запада W и востока E (рис. 2.1). Определение этих точек связано с направлением оси вращения Земли (см. § 2.2).

Определение 2.1.1. *Вертикальный круг, проходящий через точки востока и запада, называется первым вертикалом.*

Если вертикальный круг проходит через небесный объект C, то он называется *вертикалом* этого объекта. Дуга вертикала $\widehat{ZC}$ назы-

вается *зенитным расстоянием* z объекта C. Вместо зенитного расстояния часто используется другая координата: *высота* h объекта над горизонтом; дуга $\widehat{CB}$ равна h. Из рисунка видно, что $z + h = 90°$. Зенитное расстояние (или высота небесного объекта) является одной из координат в горизонтальной системе. Если небесный объект находится над горизонтом, то его зенитное расстояние изменяется от $0°$ (объект в зените) до $90°$ (объект в плоскости горизонта). Высота объекта изменяется от $90°$ до $0°$, соответственно. Если $z > 90°$ или $h < 0°$, то говорят, что объект находится под горизонтом; он в этом случае невидим для наблюдателя. Заметим здесь, что из-за рефракции луча света (§ 5.1) в атмосфере Земли изображение небесного объекта приподнимается над горизонтом, поэтому наблюдатель может видеть объекты, находящиеся под горизонтом. Могут быть и другие экзотические случаи, например, в горах, когда небесные тела можно наблюдать при $h < 0°$.

При $z = 180°$ или $h = -90°$ объект находится в надире. При таком определении зенитного расстояния угол z эквивалентен углу θ (см. определение сферических координат (§ 1.3) и рис. 1.5).

Второй координатой в горизонтальной системе является *азимут* A небесного объекта. Азимут — это двугранный угол между плоскостью $NZSN$ и вертикалом объекта. Следует заметить, что в определении начальной точки отсчета азимута нет согласия. В учебнике К. А. Куликова «Курс сферической астрономии» и некоторых других учебниках азимут отсчитывается от точки юга в направлении на запад (по часовой стрелке) от $0°$ до $360°$. В данном учебнике также принимается это соглашение. В ряде книг азимут отсчитывается от точки севера на восток от $0°$ до $360°$, а иногда азимут измеряется в пределах $-180° < A \leq 180°$.

Главными кругами в горизонтальной системе координат являются: *плоскость горизонта*, *первый вертикал*, *вертикал* небесного тела. Главные *точки* — это точки зенита, надира, севера, юга, востока и запада.

Используются также малые круги светил — *круги высоты* или альмукантараты. Это — круги, параллельные плоскости горизонта и проходящие через небесное тело. На рис. 2.1 круг высоты показан жирной пунктирной линией.

Допустим, что наблюдатель неподвижен относительно горизонтальной системы координат. Из-за того, что направление отвесной

линии не совпадает с направлением оси вращения Земли (если наблюдатель не находится на полюсе), объекты на небе движутся относительно горизонтальной системы сложным образом: одновременно меняются и зенитное расстояние, и азимут. Поэтому, чтобы звезда сохраняла свое положение в поле зрения телескопа, скорость движения телескопа должна изменяться.

2.2. Экваториальная система координат

Направление оси вращения Земли является вторым выбранным направлением для наблюдателя, находящегося на поверхности Земли. С направлением оси вращения Земли связана вторая широко используемая в астрономии система координат — экваториальная.

Допустим пока, что центр небесной сферы совпадает с центром масс Земли. Если продолжить ось вращения Земли до пересечения с небесной сферой, то точки пересечения называются *полюсами мира*, а сама ось — *осью мира*.

Определение 2.2.1. *Тот полюс мира, с которого видно, что вращение Земли происходит против часовой стрелки называется северным, а противоположный — южным.*

Определение 2.2.2. *Плоскость, перпендикулярная оси мира и проходящая через центр небесной сферы, называется плоскостью небесного экватора.*

В настоящее время северный полюс мира располагается вблизи (на расстоянии менее 1°) от Полярной звезды (α Малой Медведицы). Поэтому Полярная звезда кажется почти неподвижной. Если наблюдатель находится в северном полушарии Земли и будет смотреть на нее длительное время, то увидит, что остальные звезды совершают круговое движение вокруг Полярной звезды. Кажущееся вращение небесной сферы относительно Полярной звезды (точнее, вокруг оси мира) происходит против часовой стрелки и является отражением вращения Земли. Если встать лицом по направлению к Полярной звезде и провести большой круг через нее (точнее, через северный полюс мира) и зенит, то пересечение этого круга с плоскостью горизонта определит точку севера.

Отметим на рис. 2.2 северный (P_N) и южный (P_S) полюсы мира, а также зенит Z и надир $\mathcal{N}$ наблюдателя, расположенного в точке C на поверхности Земли.

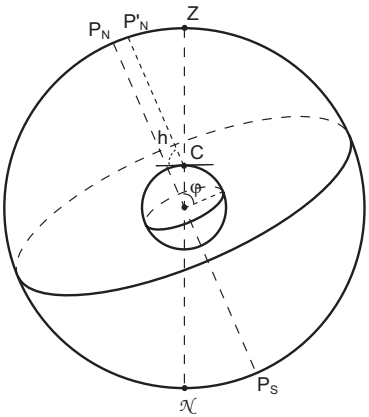


Рис. 2.2. К выводу соотношения: $\varphi = h$.

Определение 2.2.3. *Плоскость, проходящая через точки P_N и Z, называется плоскостью небесного меридиана.*

Проведем через точку C плоскость горизонта (она перпендикулярна плоскости страницы и показана прямой линией), а также ось CP'_N параллельно оси мира. Астрономической широтой φ наблюдателя, находящегося в точке C, назовем угол между отвесной линией и плоскостью экватора. Если h — высота полюса мира над горизонтом, то из рисунка следует, что $\varphi = h$, то есть мы доказали, что *высота полюса мира равна астрономической широте наблюдателя*.

Парадокс, суть которого заключается в том, что с одной стороны радиус небесной сферы равен единице, а с другой, — что точки P_N и P'_N расположены на бесконечном расстоянии, решается достаточно просто: радиус Земли пренебрежимо мал по сравнению с расстоянием до ближайших звезд.

Пусть C — звезда на небесной сфере (рис. 2.3).

Определение 2.2.4. *Большой круг, проходящий через полюсы мира и звезду C, называется кругом склонений.*

Пусть точка A — точка пересечения круга склонения звезды и небесного экватора. Дуга $\widehat{AC}$, отсчитываемая от небесного экватора до звезды, называется *склонением*:

$$\widehat{AC} = \delta.$$

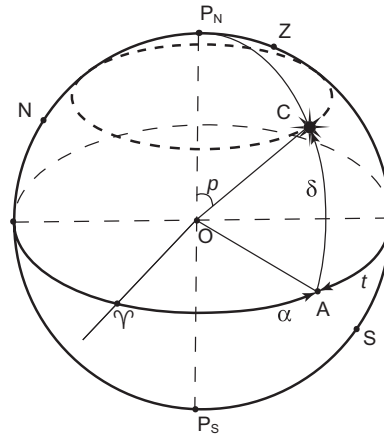


Рис. 2.3. Экваториальная система координат.

Склонение δ положительно, если звезда находится в северном полушарии, и отрицательно, если — в южном: значит $-90° \leq \delta \leq 90°$. Довольно редко вместо склонения используется *полярное расстояние* p, равное дуге $\widehat{P_N C}$. Полярное расстояние отсчитывается от северного полюса мира от 0° до 180°. Очевидно, что $p + \delta = 90°$. Склонение (или полярное расстояние) является первой координатой в экваториальной системе.

Второй координатой в экваториальной системе координат является *прямое восхождение* α. Никакого особого (выделенного) направления в плоскости экватора нет. Поэтому выбор начала отсчета прямых восхождений произволен.

До 1998 года эта точка определялась в момент пересечения центром Солнца небесного экватора, когда Солнце двигается из южного полушария в северное. Это происходит примерно 21 марта каждого года, и точка называется *точкой весеннего равноденствия*. Противоположная точка на экваторе называется *точкой осеннего равноденствия*. Эту точку Солнце проходит примерно 23 сентября, перемещаясь из северного полушария в южное.

Если точка весеннего равноденствия ♈ определена, то дуга экватора $\widehat{\Upsilon A}$ от точки весеннего равноденствия до круга склонений звезды называется *прямым восхождением*:

$$\widehat{\Upsilon A} = \alpha.$$

Прямое восхождение отсчитывается от точки весеннего равноденствия Υ против часовой стрелки, если смотреть с северного полюса мира, от 0^h до 24^h или от $0°$ до $360°$.

Если Z — зенит наблюдателя, N и S — точки севера и юга на плоскости горизонта (на рис. 2.3 горизонт не показан), то, как было сказано раньше, плоскость $P_N Z S P_S N$ является плоскостью небесного меридиана. Двугранный угол между плоскостью небесного меридиана и кругом склонения называется *часовым углом* t светила. Часовые углы отсчитываются от высшей точки экватора по часовой стрелке, если смотреть с северного полюса мира, от 0^{h} до 24^{h} или от $0°$ до $360°$. Заметим, что система координат (t, δ), задаваемая часовым углом и склонением, является левой.

Малый круг, параллельный экватору и проходящий через звезду C, называется *параллелью* (показан жирным пунктиром на рис. 2.3).

В экваториальной системе координат основной плоскостью является плоскость *небесного экватора*, от которого отсчитываются склонения, основными кругами — *небесный меридиан*, *круг склонений*. Основные точки — *полюсы мира*, *точка весеннего равноденствия* (начало отсчета прямых восхождений) и *высшая точка экватора* — начало отсчета часовых углов.

Видимое движение Солнца есть отражение движения Земли вокруг Солнца. Согласно «Стандартам МСВЗ» *плоскостью эклиптики* называется плоскость, которая перпендикулярна к вектору орбитального углового момента (см. уравнение (2.39)) системы Земля–Луна, причем скорость барицентра этой системы вычисляется относительно инерциальной системы отсчета. Эта плоскость определяет *эклиптическую систему координат*. Поэтому, согласно определению, принятому до 1998 г., точки весеннего и осеннего равноденствий лежали на линии пересечения небесного экватора и эклиптики. Так как координаты Земли и Солнца находятся на основе решения уравнений динамики, то плоскость эклиптики определяется на основе динамического метода. Точки весеннего и осеннего равноденствий, определяемые пересечением экватора и эклиптики, называются *динамическими*, а сам момент пересечения центром Солнца точки весеннего равноденствия — *динамическим равноденствием*.

С 1998 г. Международным астрономическим союзом в качестве реализации небесной системы координат принят каталог внегалактических радиоисточников. МАС рекомендует, чтобы начало пря-

мых восхождений новой небесной системы координат было близким к динамическому равноденствию J2000.0[2]. Для этого начало системы отсчета прямых восхождений с 1998 г. по решению МАС было определено следующим образом. Из разных каталогов были выбраны 23 радиоисточника, среди которых был и квазар 3C273B, и вычислены средние значения прямого восхождения каждого из них. Затем координаты источников были исправлены таким образом, чтобы прямое восхождение квазара 3C273B было согласовано со значением в системе фундаментального каталога FK5 ($\alpha = 12^{\mathrm{h}}29^{\mathrm{m}}6{,}^{\mathrm{s}}6997$; J2000.0), т. е. разница между этим значением и средним прямым восхождением 3C273B была добавлена к прямым восхождениям остальных 22 источников. При таком определении точка весеннего равноденствия уже не привязывается к эклиптике.

В настоящее время точка весеннего равноденствия находится в созвездии Рыб, точка осеннего равноденствия — в созвездии Девы. Принятое обозначение точек — Υ и $\simeq$ для весеннего и осеннего равноденствий, относятся к знакам Овна и Весов, соответственно. Причиной смещения точек весеннего и осеннего равноденствия является *прецессия*, о которой мы расскажем позже. В результате прецессии плоскость небесного экватора не сохраняет свое положение в пространстве, а полюсы мира описывают на небесной сфере окружность приблизительно за 26000 лет. Примерно 4500 лет назад северный полюс мира находился около звезды α Дракона (Тубан), которая была в то время полярной. Через 2000 лет полярной будет звезда γ Цефея (Альран), а через 14000 лет — Вега (созвездие Лира).

Базисную тройку векторов, определяющих экваториальную систему координат, обозначим как $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, причем вектор $\mathbf{k}$ направлен в северный полюс мира P_N и определяет ось Oz декартовой системы координат, вектор $\mathbf{i}$ направлен в точку весеннего равноденствия Υ и определяет ось Ox, а вектор $\mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{i}$ и задает ось Oy, так что $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ составляют правую тройку векторов.

В дальнейшем изложении будем считать, что на небесную сферу мы смотрим снаружи. Это аналогично взгляду на глобус Земли. Координаты звезд в экваториальной системе в этом случае определяются аналогично широте и долготе на поверхности Земли. Заметим, что при взгляде на небесную сферу снаружи расположение звезд зеркально отличается от того, что видит наблюдатель с Земли.

[2] J2000.0 — определение стандартной эпохи равноденствия (см. § 2.9).

2.3. Эклиптическая система координат

При изучении движения тел Солнечной системы удобнее использовать не экваториальную, а эклиптическую систему координат. Дело в том, что плоскости орбит большинства тел Солнечной системы наклонены к плоскости орбиты Земли под малыми углами (из планет самый большой наклон у орбиты Плутона — около $17°$). Поэтому для наблюдателя, находящегося на Земле, выбор плоскости орбиты Земли в качестве основной вполне естественен.

Основой для построения эклиптической системы координат служат уравнения динамики, описывающие движение Земли по орбите вокруг Солнца. Определение плоскости эклиптики дано выше. Пересечение этой плоскостью небесной сферы называется эклиптикой. Движение Земли по орбите приводит к кажущемуся движению Солнца по отношению к далеким звездам. Полный оборот по эклиптике Солнце проходит за год. Значит, Солнце движется относительно звезд со скоростью $\sim 1°$ в сутки.

Ось вращения Земли наклонена к плоскости орбиты под углом $\sim 23{,}^{\circ}5$. Очевидно, что угол ε между плоскостями экватора и эклиптики (назовем его *наклоном эклиптики к экватору*) также равен этой величине. Угол ε медленно меняется из-за *прецессии от планет*. Притяжение планетами Земли приводит также к возмущениям в движении Земли. В результате центр масс Земли оказывается то ниже, то выше плоскости эклиптики. Как отражение возмущений в движении Земли мы видим, что центр Солнца находится то выше, то ниже эклиптики.

Основной плоскостью в эклиптической системе координат является плоскость эклиптики. Северный полюс эклиптики обозначим через Π_N; по определению дуга $\widehat{P_N\Pi_N}$ должна быть меньше $90°$ (рис. 2.4). Южный полюс эклиптики обозначим как Π_S. Линия пересечения двух плоскостей — небесного экватора и эклиптики называется линией узлов. Плоскость эклиптики делит небесную сферу на два полушария: северное и южное.

Определение 2.3.1. *Большой круг, проведенный через полюсы эклиптики и небесный объект, называется кругом широты.*

Дуга круга широты $\widehat{AC}$, отсчитываемая от плоскости эклиптики, называется *эклиптической широтой* :

$$\widehat{AC} = \beta.$$

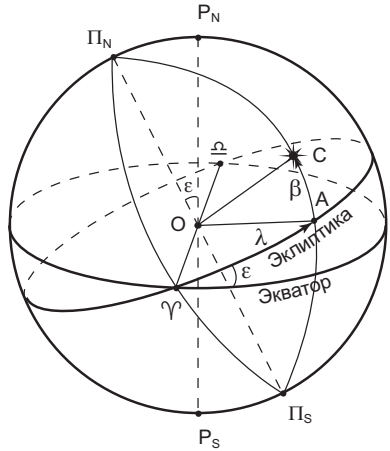


Рис. 2.4. Эклиптическая система координат.

Широта положительна в северном и отрицательна в южном полушарии: $-90° \leq \beta \leq 90°$.

Второй координатой является *эклиптическая долгота*, равная двугранному углу между большим кругом, который проходит через полюсы эклиптики и динамическую точку весеннего равноденствия, и кругом широты:

$$\widehat{\Upsilon A} = \lambda.$$

Долгота измеряется от точки весеннего равноденствия от 0° до 360° против часовой стрелки, если смотреть с северного полюса эклиптики, то есть в направлении возрастания прямых восхождений. Ось Ox в эклиптической системе координат совпадает с осью Ox экваториальной системы. Обозначим орты эклиптической системы через $\mathbf{i}_e, \mathbf{j}_e, \mathbf{k}_e$, причем $\mathbf{i}_e = \mathbf{i}$, вектор $\mathbf{k}_e$ направлен в северный полюс эклиптики Π_N, а $\mathbf{j}_e = \mathbf{k}_e \times \mathbf{i}_e$.

Основными кругами в эклиптической системе координат являются плоскость эклиптики, круг широты, а основными точками — полюсы эклиптики и точка весеннего равноденствия.

2.4. Галактическая система координат

Еще одной часто используемой, особенно в звездной динамике, системой координат является галактическая система.

Наша Галактика, или Млечный Путь, классифицируется как спиральная галактика. Основными составляющими Галактики являются плоский диск диаметром более 100000 световых лет, ядро и гало̀. Бо̀льшая часть звезд и газопылевых облаков сосредоточены в галактическом диске. Структура диска неоднородна; известны несколько спиральных рукавов, в которых плотность звезд и газа значительно выше средней. Значительная часть звезд концентрируется к центральной части, или к галактическому ядру, и образует в центре Галактики утолщение. И, наконец, третьей составляющей Галактики является гало, которое состоит из старых звезд и шаровых скоплений. Гало имеет практически сферическую форму.

Солнце находится на периферии Галактики (на расстоянии примерно 28000 световых лет от ее центра) и является одной из звезд, составляющих ее диск. Так как мы смотрим на Галактику изнутри, находясь в ее диске, то последний проецируется на небесную сферу как полоса звезд или Млечный Путь. Вместе с ближайшими к нему звездами Солнце движется со скоростью примерно 250 км/с в направлении созвездия Лебедя. Это движение объясняется вращением галактического диска. Солнце делает полный оборот вокруг центра Галактики за $\sim$ 200 млн. лет.

Для изучения движения звезд в Галактике за основную плоскость галактической системы координат естественно принять плоскость диска. Положение основной плоскости в экваториальной системе задается координатами одного из полюсов.

При обработке результатов проекта ГИППАРКОС галактическая система координат была определена следующим образом[3]. Обозначим точку, экваториальные координаты которой на эпоху J2000.0 равны

$$\alpha = 192\overset{\circ}{,}85948,$$
$$\delta = 27\overset{\circ}{,}12825,$$

как G_N и назовем ее северным галактическим полюсом, а диаметрально противоположную точку — южным. Большой круг, перпен-

[3]Используются также другие постоянные, определяющее поворот галактической системы координат относительно экваториальной. Но так как система отсчета, реализованная каталогом HIPPARCOS, официально признана МАС (резолюция B1.2 XXIV Генеральной Ассамблеи МАС), и одной из задач проекта ГИППАРКОС является связь галактической системы с ICRS, мы будем использовать предложенные авторами этого проекта постоянные.

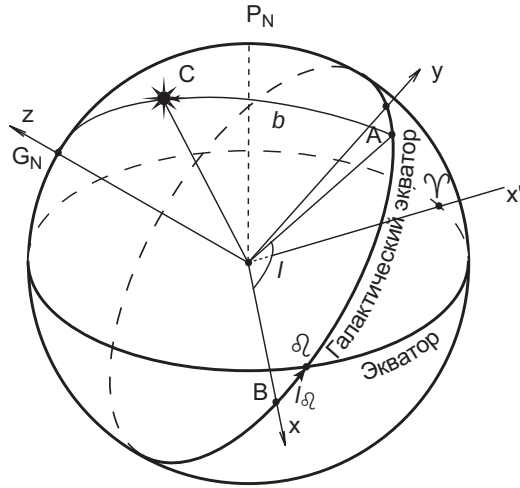


Рис. 2.5. Галактическая система координат.

дикулярный линии, соединяющей полюсы, назовем *галактическим экватором* (рис. 2.5).

Определение 2.4.1. *Большой круг, проходящий через звезду C и полюсы Галактики, называется кругом галактической широты.*

Пусть точка A является точкой пересечения круга широты и галактического экватора. Дуга $\widehat{AC}$ называется *галактической широтой* звезды: $\widehat{AC} = b$. Галактические широты положительны в северном и отрицательны в южном полушарии: $-90^\circ \leq b \leq 90^\circ$. Раньше галактические долготы l отсчитывались от восходящего узла ☊, то есть точки пересечения галактического и небесного экваторов, прямое восхождение которой равнялось $\sim 18^{\mathrm{h}}40^{\mathrm{m}}$. Сейчас начало отсчета долгот (точка B на рис. 2.5 — направление на центр Галактики) определяется галактической долготой восходящего узла ☊, которая равна $l_{☊} = 32\overset{\circ}{,}93192$. Галактические долготы отсчитываются от 0° до 360° против часовой стрелки, если смотреть с северного полюса Галактики.

Единичный вектор в направлении северного полюса Галактики обозначим $\mathbf{k}_g$, а вектор, направленный в центр Галактики — как $\mathbf{i}_g$. Ось Ox галактической системы направим вдоль вектора $\mathbf{i}_g$, ось Oz — вдоль $\mathbf{k}_g$. Ось Oy определяется единичным вектором $\mathbf{j}_g = \mathbf{k}_g \times \mathbf{i}_g$.

Аналогичным образом (заданием тройки базисных векторов) могут быть определены любые другие системы координат.

После определения основных сферических систем координат рассмотрим методы, используемые для преобразования координат из одной системы в другую.

2.5. Преобразование координат из одной системы в другую

Данная задача уже упоминалась при рассмотрении горизонтальной системы координат. Если система установки телескопа горизонтальная, то движение звезд в этой системе будет неравномерным. Для точного ведения телескопа за звездой требуется непрерывно пересчитывать экваториальные координаты звезды в горизонтальные.

Рассмотрим сначала классический метод и найдем выражения, связывающие экваториальные и горизонтальные координаты. Затем рассмотрим матричный метод, который значительно облегчает задачу преобразования координат вектора из одной системы в другую.

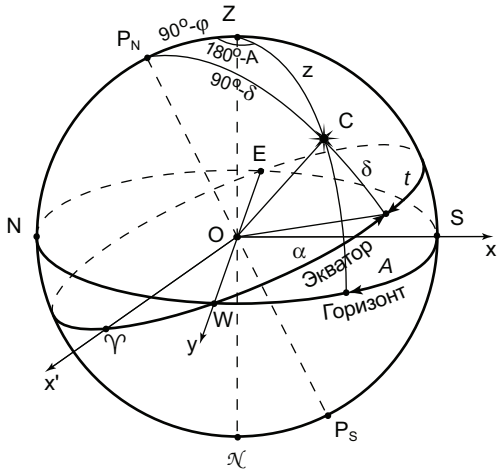


Рис. 2.6. Связь горизонтальных и экваториальных координат.

Рассмотрим треугольник $P_N ZC$ (рис. 2.6). Вершинами в этом треугольнике являются зенит, полюс мира и звезда C. Такой тре-

угольник называется *параллактическим*. Согласно определениям координат имеем: дуга $\widehat{ZC}$ равна зенитному расстоянию z, дуга $\widehat{P_NC}$ равна $90^\circ - \delta$, дуга $\widehat{P_NZ}$ равна $90^\circ - \varphi$, двугранный угол ZP_NC — это часовой угол t, двугранный угол P_NZC равен $180^\circ - A$. Допустим, что требуется найти зенитное расстояние и азимут источника по его сферическим координатам. По теореме косинусов, используя треугольник P_NZC, имеем:

$$\cos z = \cos(90^\circ - \delta)\cos(90^\circ - \varphi) + \sin(90^\circ - \delta)\sin(90^\circ - \varphi)\cos t$$

или

$$\cos z = \sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos t \tag{2.1}$$

По теореме синусов получим:

$$\frac{\sin z}{\sin t} = \frac{\sin(90^\circ - \delta)}{\sin(180^\circ - A)}$$

или

$$\sin z \sin A = \cos\delta\sin t \tag{2.2}$$

По теореме подобия получим:

$$\sin z\cos(180^\circ - A) = \cos(90^\circ - \delta)\sin(90^\circ - \varphi) - \sin(90^\circ - \delta)\cos(90^\circ - \varphi)\cos t$$

или

$$\sin z\cos A = -\sin\delta\cos\varphi + \cos\delta\sin\varphi\cos t. \tag{2.3}$$

Из системы уравнений (2.1-2.3) можно однозначно определить z и A по координатам δ и t. Обратим внимание на необходимость использования всех трех уравнений (2.1-2.3) для решения задачи. Так как азимут A входит в уравнения под знаком синуса и косинуса, то только совместное решение уравнений (2.2-2.3) позволяет однозначно найти A.

Обратное преобразование (от z и A к δ и t) записывается в виде:

$$\begin{aligned} \cos\delta\cos t &= \cos z\cos\varphi + \sin z\sin\varphi\cos A, \\ \cos\delta\sin t &= \sin z\sin A, \\ \sin\delta &= \cos z\sin\varphi - \sin z\cos\varphi\cos A. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Точно так же можно получить формулы, связывающие экваториальную систему координат с эклиптической, экваториальную с галактической и т. д.

Однако более просто найти преобразование от одной системы координат к другой системе с помощью матричных методов. Так как в дальнейшем мы будем использовать эти методы часто, рассмотрим их подробно.

Разложение вектора по тройке базисных векторов $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ было записано в виде (1.5):

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

где x, y, z — проекции вектора $\mathbf{r}$ (1.3) на векторы $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, соответственно. Используя матричные обозначения, это выражение можно записать в виде:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

где запись $(\mathbf{i}\ \mathbf{j}\ \mathbf{k})$ обозначает вектор-строку. Оставим обозначение $(\mathbf{i}\ \mathbf{j}\ \mathbf{k})$ для базисной тройки векторов экваториальной системы. Базисные тройки векторов эклиптической и галактической системы координат обозначены в § 2.3 и 2.4 как $(\mathbf{i}_e\ \mathbf{j}_e\ \mathbf{k}_e)$ и $(\mathbf{i}_g\ \mathbf{j}_g\ \mathbf{k}_g)$, соответственно.

Разложим радиус-вектор одного и того же небесного объекта по базисным тройкам экваториальной, эклиптической и галактической систем. Для этого используем формулу (1.21), в которой координаты θ, λ заменяются на α, δ, или β, λ, или b, l, и запишем матричное равенство (2.5) в виде:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}\,\mathbf{j}\,\mathbf{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}_e\,\mathbf{j}_e\,\mathbf{k}_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\lambda \\ \cos\beta\sin\lambda \\ \sin\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{i}_g\,\mathbf{j}_g\,\mathbf{k}_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos b\cos l \\ \cos b\sin l \\ \sin l \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Чтобы найти преобразование от одной системы координат к другой, надо найти матрицу поворота от одной базисной тройки к дру-

гой. Например, найдем преобразование от экваториальной к эклиптической системе. Тогда

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}_e & \mathbf{j}_e & \mathbf{k}_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\lambda \\ \cos\beta\sin\lambda \\ \sin\beta \end{pmatrix}.$$

Умножим обе части уравнения на $\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix}^T$ слева, индекс ^{T} обозначает транспонирование, $\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}$. В результате получим

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_e & \mathbf{j}_e & \mathbf{k}_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\lambda \\ \cos\beta\sin\lambda \\ \sin\beta \end{pmatrix}.$$

По определению скалярного произведения и правилу умножения матриц имеем:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где I — единичная матрица.

В итоге, преобразование от эклиптической к экваториальной системе можно записать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix} = A_e \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\lambda \\ \cos\beta\sin\lambda \\ \sin\beta \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

где

$$A_e = \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_e & \mathbf{j}_e & \mathbf{k}_e \end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицу A_e в явном виде, используя рис. 2.7. В обе-

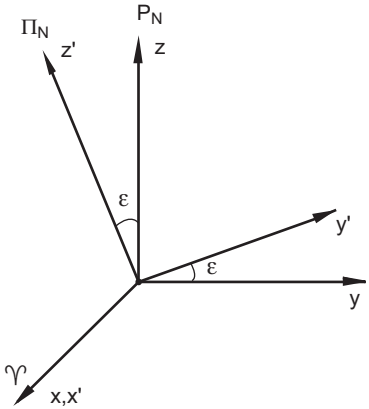


Рис. 2.7. Расположение осей экваториальной и эклиптической систем координат.

их системах ось Ox направлена в точку весеннего равноденствия ♈. Поэтому направление векторов $\mathbf{i}$ и $\mathbf{i}_e$ совпадает. Оси Oz и Oz' направлены соответственно в полюс мира P_N и полюс эклиптики Π_N. Следовательно угол между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_e$ равен ε. Угол между векторами $\mathbf{j}$ и $\mathbf{j}_e$ также равен ε. Используя определение скалярного произведения, получим:

$$A_e = \begin{pmatrix} \mathbf{i}\cdot\mathbf{i}_e & \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}_e & \mathbf{i}\cdot\mathbf{k}_e \\ \mathbf{j}\cdot\mathbf{i}_e & \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}_e & \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}_e \\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{i}_e & \mathbf{k}\cdot\mathbf{j}_e & \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & \cos(90^\circ+\varepsilon) \\ 0 & \cos(90^\circ-\varepsilon) & \cos\epsilon \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon \\ 0 & \sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Уравнения (2.7) и (2.8) однозначно определяют связь между двумя системами координат и удобны при вычислении на компьютере. Тем не менее, приведем преобразование (2.7) в явном виде:

$$\cos\delta\cos\alpha = \cos\beta\cos\lambda, \tag{2.9}$$

$$\cos\delta\sin\alpha = \cos\beta\sin\lambda\cos\varepsilon - \sin\beta\sin\varepsilon, \tag{2.10}$$

$$\sin\delta = \cos\beta\sin\lambda\sin\varepsilon + \sin\beta\cos\varepsilon. \tag{2.11}$$

Используя матричную запись (2.7) легко найти обратное преобразование от экваториальной к эклиптической системе координат. Для этого умножим уравнение (2.7) слева на матрицу, обратную A_e, т. е. на A_e^{-1}:

$$A_e^{-1}\begin{pmatrix}\cos\delta\cos\alpha\\ \cos\delta\sin\alpha\\ \sin\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\beta\cos\lambda\\ \cos\beta\sin\lambda\\ \sin\beta\end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Матрица A_e обладает специальными свойствами. Нетрудно проверить, что $A_e^T A_e = A_e A_e^T = I$, т. е. $A_e^T = A_e^{-1}$. Подобные матрицы называются ортогональными. Преобразование (2.12) имеет, таким образом, вид:

$$\begin{pmatrix}\cos\beta\cos\lambda\\ \cos\beta\sin\lambda\\ \sin\beta\end{pmatrix}=A_e^T\begin{pmatrix}\cos\delta\cos\alpha\\ \cos\delta\sin\alpha\\ \sin\delta\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varepsilon & \sin\varepsilon\\ 0 & -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\delta\cos\alpha\\ \cos\delta\sin\alpha\\ \sin\delta\end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Матрица A_e^T описывает преобразование от экваториальной системы к эклиптической. Вращение на угол ε для совмещения осей Oy и Oz с осями Oy' и Oz', соответственно, называется правым, так как при этом движение воображаемого правого винта совпадает с направлением оси Ox. Матрица A_e^T, поэтому, описывает правое вращение относительно оси Ox.

В явном виде из (2.13) получим:

$$\begin{aligned}\cos\beta\cos\lambda &= \cos\delta\cos\alpha\\ \cos\beta\sin\lambda &= \cos\delta\sin\alpha\cos\varepsilon+\sin\delta\sin\varepsilon\\ \sin\beta &= -\cos\delta\sin\alpha\sin\varepsilon+\sin\delta\cos\varepsilon.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Аналогично могут быть получены матрицы вращений относительно осей Oy и Oz. Для сохранения общности изложения обозна-

чим матрицы поворотов относительно осей Ox, Oy, Oz на угол ϕ как $R_1(\phi)$, $R_2(\phi)$, $R_3(\phi)$ соответственно, причем

$$R_1(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}; R_2(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix};$$

$$R_3(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (2.15)$$

Матрица A_e (2.8) равна, следовательно, $R_1(-\varepsilon)$, т. е. для перехода от эклиптической к экваториальной системе необходимо повернуть оси эклиптической системы относительно оси Ox (Ox') на угол $-\varepsilon$.

С помощью матриц (2.15) можно вычислить любую матрицу, описывающую вращение в трехмерном пространстве.

Рассмотрим две декартовы системы координат: $Oxyz$ и $Ox'y'z'$ (рис. 2.8). Найдем матрицу преобразования R координат вектора из

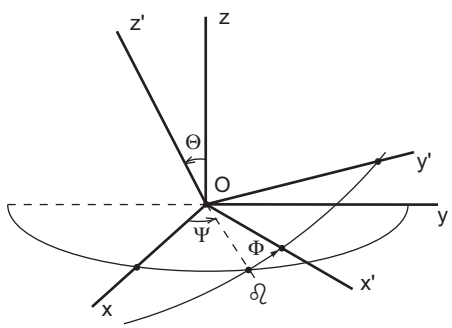


Рис. 2.8. Определение углов Эйлера.

системы $Oxyz$ к системе $Ox'y'z'$. Для этого сначала повернем систему $Oxyz$ относительно оси Oz на угол Ψ (до совмещения оси Ox с линией узлов $O☊$). Вращение относительно линии узлов (которая теперь совпадает с осью Ox) на угол Θ приведет к совмещению оси Oz с осью Oz'. И, наконец, поворот относительно оси Oz' на угол Φ переводит ось Ox в положение Ox' (Oy в Oy' соответственно). Все повороты — положительны.

Углы Ψ, Θ, Φ называются *углами Эйлера*. Три угла Эйлера *однозначно* определяют поворот одной системы координат относительно другой. Эти углы имеют собственные названия. Если оси Ox, Oy лежат в плоскости эклиптики, то угол Ψ называется *углом прецессии*, угол Θ — *углом нутации*, а угол Φ — *углом собственного вращения*.

Матрица вращения R равна произведению трех матриц (обратите внимание на порядок перемножения и последовательность вращений):

$$R = R_3(\Phi)R_1(\Theta)R_3(\Psi) =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\Phi & \sin\Phi & 0 \\ -\sin\Phi & \cos\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & \sin\Theta \\ 0 & -\sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\Psi & \sin\Psi & 0 \\ -\sin\Psi & \cos\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

или $R =$

$$\begin{pmatrix} \cos\Phi\cos\Psi - \sin\Phi\cos\Theta\sin\Psi & \cos\Phi\sin\Psi + \sin\Phi\cos\Theta\cos\Psi & \sin\Phi\sin\Theta \\ -\sin\Phi\cos\Psi - \cos\Phi\cos\Theta\sin\Psi & -\sin\Phi\sin\Psi + \cos\Phi\cos\Theta\cos\Psi & \cos\Phi\sin\Theta \\ \sin\Theta\sin\Psi & -\sin\Theta\cos\Psi & \cos\Theta \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

С помощью матричного метода легко найти матрицу преобразования экваториальных координат (α, δ) к галактическим координатам (l,b) (рис. 2.5).

Из уравнения (2.6) имеем:

$$\begin{pmatrix} \cos b\cos l \\ \cos b\sin l \\ \sin b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}_g \\ \mathbf{j}_g \\ \mathbf{k}_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix}.$$

Напомним, что орт $\mathbf{i}$ направлен в точку весеннего равноденствия Υ, $\mathbf{j}$ — в точку с прямым восхождением, равным 90°, и $\mathbf{k}$ — в северный полюс мира. Согласно определению вектор $\mathbf{i}_g$ направлен в центр Галактики, $\mathbf{k}_g$ — в северный полюс G_N (§ 2.4).

Матрица

$$A_G = \begin{pmatrix} \mathbf{i}_g \\ \mathbf{j}_g \\ \mathbf{k}_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

является искомой матрицей преобразования.

Довольно трудно вычислить скалярные произведения $\mathbf{i}_g \cdot \mathbf{i}$, $\mathbf{i}_g \cdot \mathbf{j}$ и т. д. непосредственно. Поэтому вычислим матрицу (2.17), соответствующую переходу от экваториальной системы к галактической следующим образом (см. рис. 2.5): выполним первое вращение относительно оси мира на угол $\alpha_{☊}$ (прямое восхождение точки ☊), т. е. вычисляем матрицу $R_3(\alpha_{☊})$, затем выполняем вращение относительно линии узлов на угол $90^\circ - \delta_{G_N}$ и вычисляем матрицу $R_1(90^\circ - \delta_{G_N})$, где δ_{G_N} — склонение северного галактического полюса. Третий поворот — это поворот относительно оси, соединяющей северный и южный полюса Галактики, на угол $-l_{☊}$. В результате матрица A_G записывается в виде:

$$A_G = R_3(-l_{☊}) \cdot R_1(90^\circ - \delta_{G_N}) \cdot R_3(\alpha_{☊}).$$

Заметим, что $\alpha_{☊} = \alpha_{G_N} + 90^\circ$, α_{G_N} — прямое восхождение северного галактического полюса. Это следует из того, что двугранный угол $G_N P_N ☊$ равен 90°. Заменяя символ ϕ в (2.15) на соответствующие углы, получим: $A_G =$

$$\begin{pmatrix} \cos l_{☊} & -\sin l_{☊} & 0 \\ \sin l_{☊} & \cos l_{☊} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\delta_G & \cos\delta_G \\ 0 & -\cos\delta_G & \sin\delta_G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha_{☊} & \sin\alpha_{☊} & 0 \\ -\sin\alpha_{☊} & \cos\alpha_{☊} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

Подставив значения углов и вычислив произведение матриц, получим: $A_G =$

$$\begin{pmatrix} -0,0548755601367195 & -0,8734370902532698 & -0,4838350155472244 \\ +0,4941094280132430 & -0,4448296298016944 & +0,7469822445004389 \\ -0,8676661489582886 & -0,1980763737056720 & +0,4559837761713720 \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

Обратное преобразование (от галактической к экваториальной системе координат) выражается матричным уравнением:

$$\begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix} = A_G^{-1} \begin{pmatrix} \cos b\cos l \\ \cos b\sin l \\ \sin b \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

Так как матрица A_G — ортогональная, то $A_G^{-1} = A_G^T$.

В заключение используем матричный метод для вычисления матрицы преобразования от горизонтальной (z, A) к экваториальной системе координат (t, δ) (рис. 2.3 и 2.6). Для этого достаточно

выполнить один поворот: относительно оси $-Oy$ (обе системы координат — левые) на угол $-(90^\circ - \varphi)$, где φ — астрономическая широта. Следовательно, матричное уравнение преобразования координат можно записать как

$$\begin{pmatrix} \cos\delta\cos t \\ \cos\delta\sin t \\ \sin\delta \end{pmatrix} = R_2(\varphi - 90^\circ) \begin{pmatrix} \sin z\cos A \\ \sin z\sin A \\ \cos z \end{pmatrix}. \qquad (2.21)$$

Легко проверить, что эта система совпадает с уравнениями (2.4).

Используем полученные формулы преобразования координат для решения следующих задач.

Задача 1. Найти геометрическое место точек на небесной сфере, у которых склонение δ равно эклиптической широте β.

Решение. Преобразование координат точки из экваториальной в эклиптическую систему задается уравнениями (2.14):

$$\begin{aligned} \cos\beta\cos\lambda &= \cos\delta\cos\alpha, \\ \cos\beta\sin\lambda &= \cos\delta\sin\alpha\cos\varepsilon + \sin\delta\sin\varepsilon, \\ \sin\beta &= -\cos\delta\sin\alpha\sin\varepsilon + \sin\delta\cos\varepsilon. \end{aligned}$$

Из первого уравнения получим: $\cos\lambda = \cos\alpha$. Если из второго уравнения выразить $\sin\alpha$ и подставить в третье, то найдем, что $\sin\lambda = -\sin\alpha$. Решением системы этих двух уравнений будет $\alpha = -\lambda$.

Очевидно, что в точке весеннего равноденствия $\delta = \beta = 0$, также $\alpha = \lambda = 0$; в точке осеннего равноденствия $\delta = \beta = 0$, $\alpha = \lambda = 180^\circ$. Геометрическим местом на сфере, удовлетворяющим условию $\delta = \beta = \kappa$ (κ — некоторое число), является точка сферического треугольника, одной из сторон которого является дуга между полюсом мира и полюсом эклиптики и равная ε, двумя другими — дуги с длиной $90^\circ - \kappa$. При увеличении κ до 90° треугольник вырождается в дугу, а точка поднимается по дуге окружности, проходящей посередине между полюсом мира и полюсом эклиптики.

Таким образом, искомым геометрическим местом точек на небесной сфере будет окружность — пересечение большого круга, наклоненного к экватору под углом $90^\circ + \varepsilon/2$ и проходящего через точки равноденствия, с небесной сферой.

Задача 2. Найти геометрическое место точек на небесной сфере, у которых прямое восхождение α равно эклиптической долготе λ.

Решение. По аналогии с предыдущей задачей получим два уравнения:

$$\cos\beta = \cos\delta,$$
$$\sin\beta = -\sin\delta,$$

которые удовлетворяются при $\beta = -\delta$. Легко доказать, что геометрическим местом на небесной сфере, соответствующим условию $\beta = -\delta$, будет окружность — пересечение сферы с большим кругом, наклоненным к экватору под углом $\varepsilon/2$.

Задача 3. Каково прямое восхождение и склонение северного и южного полюса эклиптики?

Решение. Координаты полюсов эклиптики можно найти, решая уравнения (2.14). Однако проще найти решение, воспользовавшись рис. 2.7. Для совмещения осей двух систем достаточно повернуть экваториальную систему относительно оси Ox на угол ε, так как полюсы эклиптики лежат в плоскости Oyz. Значит, координаты северного полюса эклиптики равны $\alpha = 270°$, $\delta = 90° - \varepsilon$, а южного — $\alpha = 90°$, $\delta = -90° + \varepsilon$.

Задача 4. В каких точках Земли эклиптика может совпадать с первым вертикалом?

Решение. Напомним, что первым вертикалом называется вертикальный круг, проходящий через точки востока и запада, т. е. эклиптика должна проходить через зенит наблюдателя и точки востока и запада. Значит северный полюс эклиптики должен находиться в плоскости горизонта наблюдателя и совпадать с точкой севера. Это возможно, если широта наблюдателя равна ε, т. е. наблюдатель находится на северном тропике. Солнце восходит в точке востока, движется через зенит наблюдателя и заходит в точке запада. Если встать лицом к северу, то Солнце встает справа, заходит слева.

В южном полушарии аналогичная картина наблюдается, если наблюдатель находится на южном тропике (широта равна $-\varepsilon$). Однако кажется, что небесная сфера вращается в противоположную сторону; Солнце встает слева, заходит справа, если встать лицом к югу.

2.6. Суточное вращение небесной сферы

Из-за вращения Земли вокруг своей оси кажется, что небесная сфера вращается вокруг оси мира, которая параллельна оси вращения Земли. В результате этого через небесный меридиан периодически проходят звезды, Солнце и другие светила.

Определение 2.6.1. *Момент прохождения звезды через меридиан называется кульминацией звезды.*

Та из двух кульминаций, которая происходит ближе к зениту, называется верхней, вторая — нижней. Для наблюдателя в северном полушарии верхняя кульминация происходит к югу от северного полюса мира (точка t_1 на рис. 2.9), а нижняя — к северу от него (точка t_2). В верхней кульминации часовой угол светила равен 0^{h}, а в нижней — 12^{h}. Значит промежуток времени между t_1 и t_2 равен 12^{h} (или $180°$ в угловой мере).

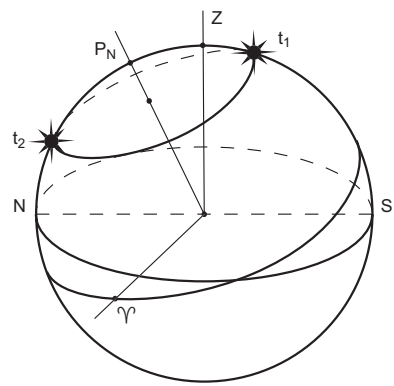


Рис. 2.9. Верхняя и нижняя кульминации звезды для наблюдателя в северном полушарии.

Из рис. 2.10 ясно, что для звезды C_1, кульминирующей к югу от зенита, $\varphi = z_1 + \delta_1$, тогда как для звезды C_2, кульминирующей к северу от зенита, справедливо равенство $\varphi = \delta_2 - z_2$.

Таким образом в верхней кульминации имеем:

$$\text{для } C_1: \qquad z_u = \varphi - \delta, \ \text{ если } \varphi > \delta; \tag{2.22}$$

$$\text{для } C_2: \qquad z_u = \delta - \varphi, \ \text{если } \varphi < \delta. \tag{2.23}$$

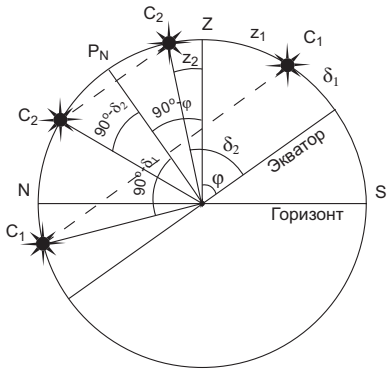


Рис. 2.10. Заходящие и незаходящие звезды.

Для нижней кульминации получим:

$$z_l = (90^\circ - \varphi) + (90^\circ - \delta) = 180^\circ - (\varphi + \delta). \qquad (2.24)$$

Зенитное расстояние звезды в верхней (нижней) кульминации является минимальным (максимальным) зенитным расстоянием. В зависимости от величин z_u и z_l звезды можно разделить на незаходящие, невосходящие, восходящие и заходящие. Если в нижней кульминации $z_l < 90^\circ$, то звезда всегда находится над горизонтом. Из (2.24) получим:

$$z_l = 180^\circ - (\varphi + \delta) < 90^\circ.$$

Значит для незаходящих звезд в северном полушарии выполняется соотношение:

$$\delta > 90^\circ - \varphi.$$

Для невосходящих звезд зенитное расстояние в верхней кульминации $z_u > 90^\circ$, то есть $\varphi - \delta > 90^\circ$ или $\delta < -(90^\circ - \varphi)$. Таким образом, если склонение звезды δ удовлетворяет условию

$$-(90^\circ - \varphi) < \delta < 90^\circ - \varphi,$$

то звезда периодически восходит и заходит.

До последней четверти XX века наблюдения звезд в верхней и нижней кульминациях использовались для определения широты

места или склонения звезд. Если при помощи наблюдений получены z_u и z_l, то, складывая (2.23) и (2.24), получим:

$$\varphi = 90^\circ - \frac{z_u + z_l}{2}.$$

В этом случае не требуется знать склонение звезды. Обратно, склонение звезды может быть найдено, даже если не известна широта места, из уравнения:

$$\delta = 90^\circ + \frac{z_u - z_l}{2}.$$

2.7. Восход и заход небесных тел

В момент восхода и захода небесного тела его зенитное расстояние $z = 90^\circ$. Тогда формулу (2.1) можно преобразовать к виду:

$$\cos t = -\operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\varphi. \tag{2.25}$$

Зная склонение δ небесного тела и широту места наблюдения φ, можно определить часовой угол t в момент восхода или захода. Так как

$$\frac{1-\cos t}{1+\cos t} = \operatorname{tg}^2\frac{t}{2} = \frac{1+\operatorname{tg}\delta\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}\delta\operatorname{tg}\varphi},$$

то уравнение (2.25) можно записать в виде:

$$\operatorname{tg}^2\frac{t}{2} = \frac{\cos(\varphi-\delta)}{\cos(\varphi+\delta)}. \tag{2.26}$$

Возможны три случая.

1. Каждое из уравнений (2.25), (2.26) имеет два решения t_r, t_s: значение t_r лежит между 180° и 360° — в этот момент небесное тело восходит; значение t_s лежит между 0° и 180° и является моментом захода. Это означает, что небесное тело периодически восходит и заходит.

   Азимут в точках восхода и захода определяется из системы уравнений:

$$\begin{aligned} \sin A &= \cos\delta\sin t, \\ \cos A &= -\sin\delta\cos\varphi + \cos\delta\sin\varphi\cos t, \end{aligned} \tag{2.27}$$

где t равняется t_r или t_s. Азимут в точке восхода может принимать значения $180° \div 360°$, в точке захода — $0° \div 180°$.

Чтобы найти время восхода (захода), необходимо к часовому углу прибавить прямое восхождение α небесного тела:

$$s = t + \alpha,$$

где s — местное звездное время. Определение звездного времени будет дано ниже (см. § 4.2).

2. Если уравнения (2.25), (2.26) имеют одно решение, то это означает, что небесное тело касается горизонта. Если это событие происходит во время нижней кульминации, то $\varphi + \delta = 90°$. При этом из (2.26) получим: $t_r = t_s = 180°$, а из (2.27) $A = 180°$. Если небесное тело достигает плоскости горизонта во время верхней кульминации, то $\varphi - \delta = 90°, t_r = t_s = 0°, A = 0°$.

3. Если правая часть уравнения (2.25) больше 1 или меньше –1, то уравнение не имеет решений, т. е. восход и заход невозможны. Чтобы решить вопрос, является ли небесное тело незаходящим или невосходящим в северном полушарии, надо проверить неравенства:

$$\delta > 90° - \varphi, \quad \delta < -(90° - \varphi).$$

В первом случае тело является незаходящим, во втором — невосходящим.

Заметим в конце параграфа, что при выводе формулы (2.25) не учитывалось явление *рефракции* (§ 5.1), которое приводит к подъему светила над горизонтом относительно его истинного положения. В результате рефракции время восхода наступает на несколько минут раньше, а время захода — на несколько минут позже вычисленного по формулам (2.25), (2.26).

2.8. Определение систем координат в современной астрометрии

При предположении, что пространство является евклидовым (или абсолютным, по терминологии Ньютона), система может быть инерциальной, если она неподвижна или движется прямолинейно

с постоянной скоростью относительно абсолютного пространства. Время в ньютоновой механике также является абсолютным в том смысле, что течение времени не зависит от положения часов в пространстве. Это означает, что при переносе начала координат из одной точки пространства в другую (или переходу в другую инерциальную систему) законы физики остаются неизменными. Говорят, что они ковариантны по отношению к этому преобразованию координат. Расстояние между двумя событиями, происшедшими в одно и то же время, одинаково в разных инерциальных системах, т. е. является инвариантной величиной.

При переходе от классической механики к специальной теории относительности необходимо изменить некоторые понятия. Преобразования между координатами и временем данного события в двух различных инерциальных системах отсчета осуществляются с помощью уравнений Лоренца. Они получены в 1904 г. голландским физиком Х. А. Лоренцем как преобразования, по отношению к которым уравнения классической электродинамики сохраняют свой вид. В 1905 г. их вывел А. Эйнштейн, исходя из двух постулатов, составивших основу специальной теории относительности: равноправия всех инерциальных систем отсчета и независимости скорости распространения света от движения источника света.

Так как законы физики должны иметь одинаковую форму во всех инерциальных системах отсчета, они должны сохранять свой вид при преобразованиях Лоренца. Это требование называется принципом релятивистской инвариантности или лоренц–ковариантности законов физики. Из преобразований Лоренца легко получить основные эффекты специальной теории относительности: относительность одновременности, замедление времени, сокращение продольных размеров движущихся тел. Это означает, что промежуток времени между двумя событиями в разных инерциальных системах уже не является инвариантом: например, собственное время (время в лабораторной системе отсчета L', связанное с движущимся наблюдателем) течет медленнее, чем время, измеряемое часами, покоящимися относительно инерциальной системы координат L.

Если система отсчета L' движется относительно L, то с точки зрения наблюдателя в L', все процессы в L замедлены. Для инерциальных систем отсчета все пространственно-временные эффекты относительны: с точки зрения наблюдателя в L замедляются все процес-

сы и сокращаются все продольные размеры в L'. Однако это утверждение несправедливо, если хотя бы одна из систем неинерциальна. Если часы 1 перемещаются из точки A в точку B относительно инерциальной системы L со скоростью V, а затем обратно, из B в A со скоростью $-V$, то часы 1 отстанут по сравнению с часами 2. Это экспериментальный факт, так что эффект абсолютен. Он объясняется тем, что система отсчета, связанная с часами 1 не является инерциальной, так как в точке B при повороте часы 1 испытывают ускорение; поэтому часы 1 и 2 неравноправны.

При наличии полей тяготения законы специальной теории относительности в общем случае не работают. Однако в ограниченных областях пространства, как утверждается в теории относительности, можно специальным образом выбрать ускоренно движущуюся систему координат. Если ускорение системы равно ускорению, которое приобрела бы свободная частица, помещенная в рассматриваемую область пространства, то такую систему можно считать локально инерциальной. В этой системе законы специальной теории относительности выполняются с высокой точностью. Преобразование координат при переходе от одной локальной системы к другой определяется уравнениями Лоренца.

В общей теории относительности течение времени определяется не только скоростью часов, но и гравитационным полем в месте, где находятся часы. Поле характеризуется функцией, называемой *гравитационным потенциалом*. Поэтому в выбранной системе отсчета вводится «координатное» время и определяется закон преобразования времени при переходе в другую систему, т. е. к другому координатному или «собственному» времени, если система отсчета связана с наблюдателем. Эти вопросы будут подробно рассмотрены в главе 4. Все регистрируемые моменты или «эпохи» выражаются при обработке наблюдений в той шкале времени, которая связана с выбранной системой отсчета.

В современной астрометрии преобразования координат небесных объектов, промежутков времени из одной системы в другую осуществляются на основе общей теории относительности.

Дадим теперь определение небесной системы отсчета и ее реализации, которую мы назовем опорной системой отсчета. Она являются основой во всех разделах астрометрии, так как служит для определения положения и движения небесных тел.

Ни оси, ни основные плоскости инерциальной системы на небесной сфере не нарисованы. Поэтому в астрономии для определения системы координат используются небесные тела. Определить основные плоскости и оси системы отсчета можно двумя способами: кинематическим и динамическим. Если существуют выбранные тела, координаты которых известны и постоянны, то с этими телами можно связать инерциальную или, как говорят астрометристы, *фундаментальную систему координат*. Это кинематическое определение. В действительности координаты небесных тел точно не известны из-за ошибок наблюдений и, кроме этого, могут меняться по ряду причин. В этом случае наилучшим приближением к инерциальной системе будет система, определяемая объектами, координаты которых известны с наилучшей точностью и искажены лишь случайными ошибками.

Мы можем говорить, что подобная система *в среднем* не имеет вращения и можем назвать ее квазиинерциальной. В настоящее время наилучшей системой является система, задаваемая координатами внегалактических радиоисточников. Наилучшей оптической реализацией квазиинерциальной системы является каталог звезд HIPPARCOS.

Систему координат можно определить динамическим образом, если в качестве тел выбрать тела Солнечной системы, координаты которых определяются на основе уравнений движения, не содержащих кориолисовых членов. В простейшем случае — кеплеровском движении тела по эллиптической орбите относительно центрального тела — система координат может быть определена плоскостью орбиты, которая в этом случае сохраняет свое положение в пространстве, как будет показано в § 2.10.2; ось z может быть определена как перпендикуляр к плоскости орбиты, а ось x, например, совпадать с большой полуосью эллипса. В рамках ньютоновой механики ось x сохраняет свое положение в плоскости орбиты. Задавая ось y с помощью уравнения (1.23), можно определить инерциальную систему координат. Так как период обращения тела является постоянным, то в динамической системе отсчета может быть определена динамическая шкала времени, которая получила название *эфемеридной*.

В действительности ни положение плоскости орбиты в пространстве, ни положение большой полуоси не остаются постоянными из-за *возмущений* со стороны других тел Солнечной систе-

мы и эффектов общей теории относительности. Поэтому динамическая система отсчета задается эфемеридами — таблицами положений Солнца, Луны и больших планет. В настоящее время используются эфемериды DE200/LE200, DE403/LE403 и DE405/LE405, вычисленные Лабораторией реактивного движения (Jet Propulsion Laboratory, JPL). Эфемериды DE405/LE405 рекомендованы Международной службой вращения Земли и систем отсчета (International Earth Rotation and Reference Systems Service, IERS) для использования в качестве стандартных, и ожидается, что они в скором времени заменят эфемериды DE200/LE200, которые сейчас являются основой при составлении ежегодников.

Для того, чтобы определить положение динамической эклиптики в кинематической системе, необходимы специальные исследования (изучение движения Луны, наблюдения космических зондов относительно квазаров, т. е. одновременно и в кинематической, и в динамической системах, и т. д.). В качестве наиболее перспективного метода привязки динамической точки весеннего равноденствия к кинематической системе является наблюдение пульсаров на РСДБ относительно квазаров и одновременно с этим хронометрирование пульсаров (см. стр. 229).

2.9. Эпоха каталога, эпоха равноденствия, динамическое равноденствие

До 1998 г. квазиинерциальная система была реализована в виде фундаментального каталога, носящего название FK5 (Fundamental Katalog 5). Каталог включает 1535 звезд. Координаты звезд известны с ошибкой $\sim 0\overset{''}{,}08$ и собственные движения с ошибкой ~ 1 мс дуги в год. Дополнительный каталог (FK5 Sup.) включает 3117 звезд, координаты и собственные движения которых определены с бо́льшими ошибками ($\sim 0\overset{''}{,}12$ и 2 мс дуги в год, соответственно). Основная плоскость системы FK5 задавалась экватором на стандартную эпоху J2000.0 (см. стр. 235), а начало отсчета прямых восхождений — пересечением экватора с эклиптикой на эпоху J2000.0. Согласно решению МАС эклиптика определялась динамическим образом на основании наблюдений тел Солнечной системы. Поэтому начало отсчета прямых восхождений называется *динамическим равноденствием* и обозначается как $\Upsilon_{J2000.0}$.

Выше мы уже несколько раз употребили термин *эпоха*. Так как координаты небесных тел, измеряемые наблюдателем в разные моменты времени, меняются из-за прецессии, нутации и ряда других причин, то для вычисления изменения координат прежде всего необходимо измерить промежуток времени между наблюдениями.

Для измерения времени выбирается какой-либо периодический процесс. Измерение длительности промежутка между двумя событиями заключается в его сравнении с периодом этого процесса. Итак, с одной стороны, необходимо определить с максимальной точностью момент проведения наблюдения или *эпоху наблюдения*, а с другой стороны, нужно измерить интервал между двумя эпохами в выбранных единицах временной шкалы. С давних пор основными единицами счета времени были сутки и год, отражающие вращение Земли вокруг оси и обращение Земли вокруг Солнца. В связи с повышением точности наблюдения и обнаружением неравномерности вращения Земли были введены более точные шкалы времени. Вопросы, связанные с определением шкал времени и связи между ними, будут рассмотрены в главе 4.

При составлении каталога каждая звезда наблюдается несколько раз на протяжении одного или нескольких лет. Для этого могут использоваться разные инструменты, и наблюдения могут проводиться на разных обсерваториях. В результате, на каждый момент, или эпоху наблюдения, в системе, связанной с инструментом, определяются видимые координаты звезды. Под *эпохой каталога* понимают среднюю эпоху наблюдения звезд каталога. Для сравнения координат звезд, полученных в разное время и на разных инструментах, необходимо привести их к единой системе координат, заданной на *стандартную эпоху*.

Если при вычислении положения небесного экватора на определенный момент времени учитывается только явление прецессии (нутация не принимается во внимание), то экватор называется *средним*. Соответствующий этому экватору полюс называется средним полюсом. Международный астрономический союз рекомендует, чтобы основная плоскость небесной системы отсчета, реализуемой координатами радиоисточников, была как можно ближе к среднему экватору для выбранного момента времени, так называемой *стандартной эпохе* J2000.0. В настоящее время стандартной эпохой считается дата: январь 1,5 2000 г. Момент времени определяется для

геоцентрической системы отсчета в шкале земного времени TT, Terrestrial Time (см. § 4.5.2). До этого стандартными эпохами были B1950.0, B1900.0 (буквы перед годом обозначают счет времени юлианскими (J) или бесселевыми (B) годами).

Эпохой равноденствия называется эпоха, на которую фиксируется положение небесного экватора и эклиптики и, следовательно, точка динамического равноденствия. Например, эпохой каталога HIPPARCOS является эпоха J1991.25. Координаты звезд в каталоге приводятся на момент J1991.25, а положение в пространстве плоскости экватора задается на момент J2000.0.

С 1 января 1998 г. по решению МАС определена Международная небесная система отсчета (International Celestial Reference System, ICRS), оси которой фиксированы по отношению к квазарам, причем для сохранения преемственности направления осей согласованы с системой FK5. Система ICRS реализуется координатами 212 опорных радиоисточников. Для более плотного заполнения к ним добавлены 396 дополнительных источников, координаты которых измерены с худшей точностью.

Новая система отсчета основывается на кинематическом принципе: считается, что оси системы остаются неподвижными относительно самых удаленных из известных объектов Вселенной. Система ICRS не связана ни с экватором Земли, ни с эклиптикой. Лишь для сохранения традиции координаты опорных радиоисточников названы прямым восхождением и склонением. Начало отсчета прямых восхождений в системе ICRS произвольно. Очевидно, что использование эклиптики для определения этой точки не обязательно, тем более, что наблюдения на радиоинтерферометрах со сверхдлинными базами не чувствительны к положению эклиптики. Поэтому вместо точки весеннего равноденствия может быть выбрана любая точка, лежащая на экваторе ICRS.

На сайте <http://rorf.usno.navy.mil/ICRF/> можно найти Каталог внегалактических радиоисточников, координаты которых реализуют ICRS. Там же приводятся физические параметры источников (красное смещение, спектральная плотность потока), карты распределения яркости на разных частотах. Этот каталог является практической реализацией ICRS и представляет Международную опорную небесную систему отсчета (International Celestial Reference Frame, ICRF).

Создание новой опорной системы отсчета (ICRF) стало возможным благодаря результатам 20-летних наблюдений на РСДБ. Кроме построения небесной системы координат результаты наблюдений были использованы для того, чтобы определить движение среднего полюса опорной системы на небе из-за неточного знания прецессии Земли. Анализ этих результатов позволил найти поправки к принятой в 1976 г. теории прецессии и теории нутации IAU1980, принятой в 1980 г., а также найти смещение среднего полюса опорной системы $P_{J2000.0}$ на эпоху J2000.0 относительно полюса ICRS.

На рис. 2.11, взятом из отчета МСВЗ за 2000 г., показаны полюсы систем ICRS и FK5 (P_{ICRS}, P_{FK5}) и начала отсчета прямых восхождений (O_{ICRS}, O_{FK5}) в этих системах. Также показано положение полюса опорной системы $P_{J2000.0}$ на эпоху J2000.0 и динамическое равноденствие $\Upsilon_{J2000.0}$. Из анализа РСДБ наблюдений следует, что средний небесный экватор на эпоху J2000.0 не совпадает с экватором системы ICRS. При использовании рекомендованной МАС новой теории нутации IAU2000 было найдено, что смещение среднего полюса опорной системы $P_{J2000.0}$ на эпоху J2000.0 относительно полюса ICRS составляет $+16,6$ мс дуги в направлении $\alpha = 12^{\mathrm{h}}$ и $+6,8$ мс дуги в направлении $\alpha = 18^{\mathrm{h}}$. Для других теорий нутации смещение будет отличаться от указанного.

По рекомендациям МАС положение полюса P_{ICRS} должно быть согласовано с P_{FK5}. Исследования показали, что ошибки в собственных движениях звезд каталога FK5 и постоянной прецессии приводят к неопределенности, равной $\sigma_{P_{FK5}} = 50$ мс дуги, в положении полюса FK5 относительно полюса опорной системы $P_{J2000.0}$ на эпоху J2000.0 (рис. 2.11). Таким образом, с учетом указанного выше смещения $P_{J2000.0}$ относительно полюса системы ICRS, последний согласуется с полюсом P_{FK5} в пределах ошибки $\sigma_{P_{FK5}}$.

Ориентация системы FK5 относительно ICRS (положение полюса и начала отсчета прямых восхождений) была определена с высокой точностью из наблюдений звезд каталога FK5 в процессе космического эксперимента ГИППАРКОС.

Так как все звезды каталога FK5 наблюдались космическим телескопом ГИППАРКОС, то оказалось возможным определить положение полюса P_{FK5} и начала O_{FK5} в системе каталога HIPPARCOS с ошибкой $2,3$ мс дуги на эпоху J1991.25. Ориентация осей системы, реализованной каталогом HIPPARCOS, относительно осей ICRS

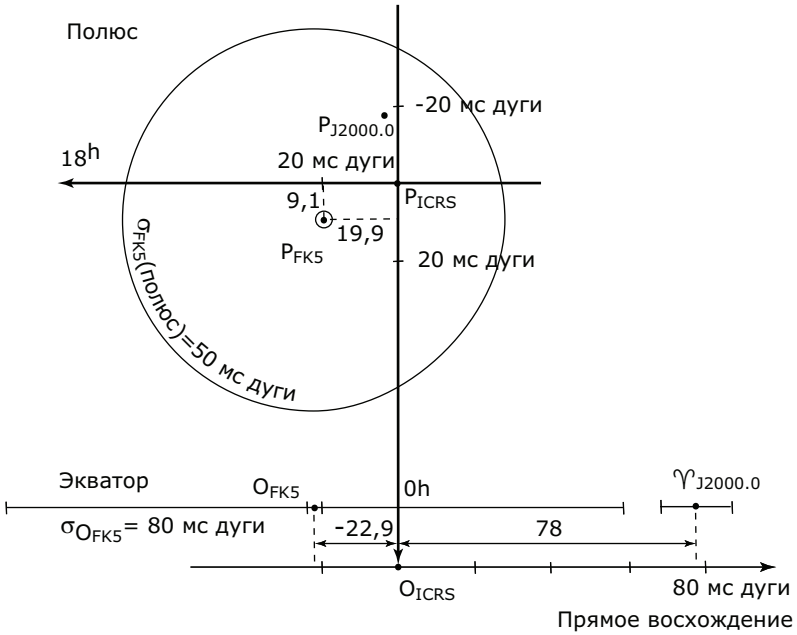


Рис. 2.11. Полюс P_{ICRS} и начало прямых восхождений O_{ICRS} в системе ICRS. Показаны также положение среднего полюса $P_{J2000.0}$ и динамического равноденствия $\Upsilon_{J2000.0}$ на эпоху J2000.0, которые найдены из наблюдений на РСДБ и лазерной локации Луны. Ошибка определения полюса $P_{J2000.0}$ равна $0,1$ мс дуги, ошибка положения точки $\Upsilon_{J2000.0}$ — 10 мс дуги. Положение полюса FK5 (P_{FK5}) и начала отсчета прямых восхождений в ICRS (O_{FK5}) определены с ошибкой $2,3$ мс дуги из наблюдений звезд каталога FK5 в процессе космического эксперимента ГИППАРКОС. Показаны также и оригинальные ошибки направления осей системы FK5 (± 50 мс дуги для полюса и ± 80 мс дуги для начала O_{FK5} на эпоху J2000.0).

определена с ошибкой $0,6$ мс дуги на ту же эпоху, т. е. система, реализуемая каталогом HIPPARCOS, была использована как промежуточная. В результате было найдено, что начало O_{FK5} отстоит от O_{ICRS} на $-22,9 \pm 2,3$ мс дуги, координаты полюса P_{FK5} относительно P_{ICRS} равны: $+9,1 \pm 2,3$ мс дуги в направлении $\alpha = 0^{\mathrm{h}}$ и $+19,9 \pm 2,3$ мс дуги в направлении $\alpha = 18^{\mathrm{h}}$ (рис. 2.11).

В соответствии с рекомендациями МАС начало отсчета прямых восхождений в ICRS должно быть как можно ближе к динамическому равноденствию на эпоху J2000.0. Ось x системы ICRS за-

дается прямым восхождением квазара 3C273B, которое согласовано со значением в системе фундаментального каталога FK5 ($\alpha = 12^{\mathrm{h}}29^{\mathrm{m}}6\overset{\mathrm{s}}{,}6997$; J2000.0). Неопределенность начала отсчета прямых восхождений в FK5 оценивается величиной ± 80 мс дуги.

Из данных, полученных при лазерной локации Луны, было вычислено смещение динамического равноденствия $\Upsilon_{J2000.0}$ относительно начала отсчета прямых восхождений в ICRS (O_{ICRS}) вдоль экватора ICRS. При использовании эфемерид DE200 Фолкнер и др. нашли, что это смещение равно 78 ± 10 мс дуги (рис. 2.11).

2.10. Основы небесной механики

При определении динамических шкал времени, рассматриваемых в главе 4, нам потребуется знание основных законов небесной механики.

2.10.1. Законы Кеплера

Для определения системы координат необходимо сначала определить плоскость, затем в плоскости определить направление на выделенную точку. Тогда с единичным вектором $\mathbf{i}$, направленным в эту точку, можно связать ось x, с перпендикуляром к плоскости — единичный вектор $\mathbf{k}$ и ось z; единичный вектор $\mathbf{j}$ (ось y системы координат) определяется на основе векторного произведения так, чтобы система осей была правой ($\mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{i}$).

Рассмотрим вопрос, как в пространстве определить эту плоскость и оси, лежащие в плоскости.

В основе динамического метода определения системы координат лежат уравнения динамики — и в первую очередь закон притяжения Ньютона. Введем прямоугольную систему координат $OXYZ$. Допустим, что два тела, представляющих собой материальные точки, расположены в точках P_1 и P_2, декартовы координаты которых равны x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 соответственно. Пусть масса точки P_1 равна m_1, масса точки P_2 — m_2.

Согласно закону притяжения Ньютона два тела с массами m_1 и m_2 притягиваются с силой $F = Gm_1m_2/r^2$, где r — расстояние между телами, причем

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

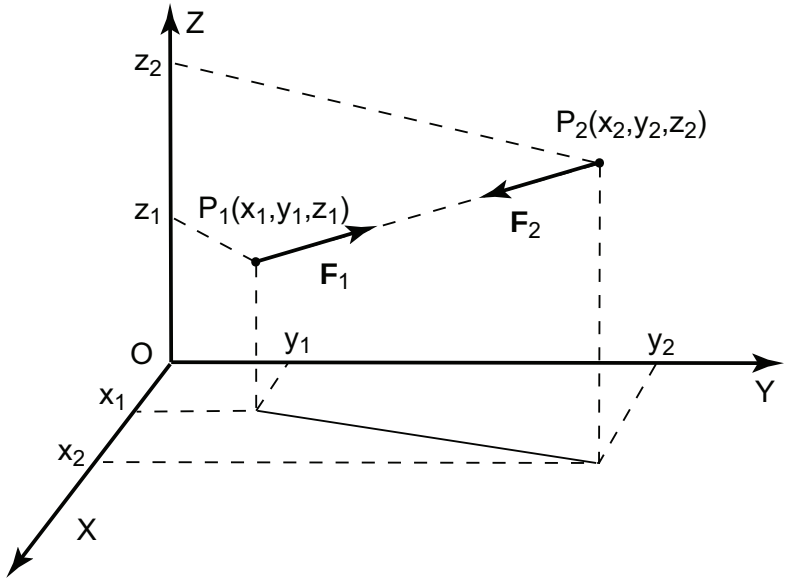


Рис. 2.12. Силы притяжения между материальными точками.

$F = | \mathbf{F}_1 | = | \mathbf{F}_2 |$, $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$. Коэффициент G называется постоянной тяготения. Рекомендуемое в «Стандартах МСВЗ» значение постоянной $G = 6,673 \cdot 10^{-11}$ м$^3 \cdot$кг$^{-1} \cdot$с$^{-2}$. Проекции силы притяжения $\mathbf{F}_2$, действующей на точку P_2 со стороны P_1, на оси системы $OXYZ$ равны:

$$G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{x_1 - x_2}{r}, \quad G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{y_1 - y_2}{r}, \quad G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{z_1 - z_2}{r}.$$

Следовательно, движение тела с массой m_2 описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} m_2\ddot{x}_2 &= -Gm_1 m_2\frac{x_2 - x_1}{r^3}, \\ m_2\ddot{y}_2 &= -Gm_1 m_2\frac{y_2 - y_1}{r^3}, \\ m_2\ddot{z}_2 &= -Gm_1 m_2\frac{z_2 - z_1}{r^3}; \end{aligned} \tag{2.28}$$

точками обозначено дифференцирование по времени.

Под действием силы $\mathbf{F}_1$, противоположной и равной силе $\mathbf{F}_2$, тело с массой m_1 движется согласно уравнениям:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= Gm_1m_2\frac{x_2-x_1}{r^3}, \\ m_1\ddot{y}_1 &= Gm_1m_2\frac{y_2-y_1}{r^3}, \\ m_1\ddot{z}_1 &= Gm_1m_2\frac{z_2-z_1}{r^3}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Введем обозначения: $\xi = x_2 - x_1$, $\eta = y_2 - y_1$, $\zeta = z_2 - z_1$. Вычитая из уравнений (2.28) уравнения (2.29), получим

$$\ddot{\xi} + \mu\frac{\xi}{r^3} = 0, \tag{2.30}$$

$$\ddot{\eta} + \mu\frac{\eta}{r^3} = 0, \tag{2.31}$$

$$\ddot{\zeta} + \mu\frac{\zeta}{r^3} = 0, \tag{2.32}$$

где $\mu = G(m_1 + m_2)$. В уравнения (2.30-2.32) входят лишь относительные координаты двух точек, т. е. уравнения движения не зависят от положения начала системы координат. Умножая уравнение (2.30) на η, а уравнение (2.31) на ξ, и затем вычитая из первого уравнения второе, получим

$$\eta\ddot{\xi} - \xi\ddot{\eta} = 0$$

или

$$\frac{d}{dt}(\eta\dot{\xi} - \xi\dot{\eta}) = 0. \tag{2.33}$$

Из (2.33) следует, что величина в скобках не зависит от времени, т. е.

$$\eta\dot{\xi} - \xi\dot{\eta} = A = \text{const}. \tag{2.34}$$

Аналогичным образом из уравнений (2.31), (2.32) получим выражение:

$$\zeta\dot{\eta} - \dot{\zeta}\eta = B = \text{const}, \tag{2.35}$$

а из (2.30) и (2.32):

$$-\zeta\dot{\xi} + \dot{\zeta}\xi = C = \text{const}. \tag{2.36}$$

Уравнения (2.34-2.36) называются *интегралами площадей*, а постоянные A, B, C — *постоянными площадей*.

Умножая уравнение (2.34) на ζ, (2.35) — на ξ, (2.36) — на η и складывая, находим, что

$$A\zeta + B\xi + C\eta = 0. \tag{2.37}$$

Уравнение (2.37) — это уравнение плоскости. Значит, два тела, движущиеся в пространстве под действием силы притяжения, всегда находятся в одной и той же плоскости; траектория тела 2 относительно тела 1 является плоской кривой и называется *орбитой*. Другими словами, орбита одного тела относительно другого лежит в плоскости.

Расположим оси Ox, Oy системы координат, которую мы хотим определить, в плоскости орбиты, а ось Oz будет перпендикулярна ей. Точку O (начало системы координат) совместим с телом m_1. Тогда уравнения движения (2.30-2.32) можно записать в виде:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \mu\frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0, \tag{2.38}$$

где $\mathbf{r}$ — вектор, направленный от тела 1 к телу 2. Умножая векторно (2.38) на $\mathbf{r}$ слева, получим

$$\mathbf{r} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = 0,$$

так как $\mathbf{r} \times \mathbf{r} = 0$. Интегрируя, мы получим, что

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{h}, \tag{2.39}$$

где $\mathbf{h}$ — не зависящий от времени вектор. Вектор $\mathbf{h}$ называется вектором орбитального углового момента и, согласно определению векторного произведения, он перпендикулярен к плоскости орбиты, в которой лежат радиус-вектор $\mathbf{r}$ и вектор скорости $d\mathbf{r}/dt$. Уравнение (2.39) эквивалентно уравнению (2.37): постоянные A, B, C представляют собой проекции $\mathbf{h}$ на оси системы координат.

Умножим теперь уравнения (2.30-2.32) соответственно на $2\dot{\xi}$, $2\dot{\eta}$, $2\dot{\zeta}$ и сложим. Числа ξ, η, ζ являются координатами тела 2 относительно тела 1. В результате получим следующее уравнение:

$$2\dot{\xi}\ddot{\xi} + 2\dot{\eta}\ddot{\eta} + 2\dot{\zeta}\ddot{\zeta} = -\frac{2\mu}{r^3}(\xi\dot{\xi} + \eta\dot{\eta} + \zeta\dot{\zeta}).$$

Так как $r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$, то имеем

$$\xi\dot{\xi} + \eta\dot{\eta} + \zeta\dot{\zeta} = r\dot{r},$$

вследствие чего предыдущее уравнение примет вид

$$\frac{d}{dt}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) = -\frac{2\mu}{r^2}\dot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{2\mu}{r}\right).$$

Интегрирование уравнения дает:

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} + W, \tag{2.40}$$

где $V^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2$ — квадрат скорости тела 2, движущегося относительно тела 1. Произвольная постоянная W в уравнении (2.40) называется постоянной энергии. Она может быть величиной равной нулю, положительной или отрицательной. В небесной механике доказывается, что от величины постоянной энергии зависит тип орбиты тела: при $W < 0$ орбита есть эллипс, при $W = 0$ — парабола и при $W > 0$ — гипербола.

Так как орбита лежит в плоскости, и положение тела 2 относительно тела 1 определяется лишь координатами x, y, то удобно ввести полярные координаты r, θ (рис. 2.13), так что

$$x = r\cos\theta,$$
$$y = r\sin\theta.$$

В полярной системе координат введем два единичных вектора $\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\theta$, причем первый из них направлен вдоль $\mathbf{r}$, а второй — перпендикулярен ему и направлен в сторону увеличения угла θ. Тогда

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\dot{\theta},$$
$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\dot{\theta}$$

или в векторном виде

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i}_r\dot{r} + \mathbf{i}_\theta r\dot{\theta}. \tag{2.41}$$

Следовательно, в полярных координатах уравнение углового момента (2.39) имеет вид:

$$\mathbf{i}_r r \times (\mathbf{i}_r\dot{r} + \mathbf{i}_\theta r\dot{\theta}) = \mathbf{h}$$

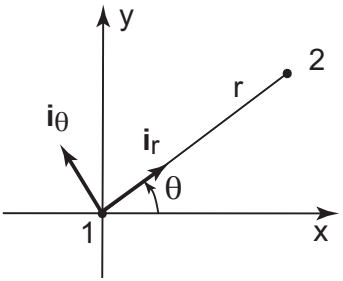


Рис. 2.13. Определение полярных координат.

или

$$\mathbf{i}_r \times \mathbf{i}_\theta r^2 \dot{\theta} = \mathbf{k} r^2 \dot{\theta} = \mathbf{k} h,$$

где $\mathbf{k}$ — единичный вектор, направленный вдоль вектора $\mathbf{h}$ и, согласно нашему определению совпадающий с направлением оси Oz. Значит,

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h. \tag{2.42}$$

Допустим, что в момент t тело 2 находилось на расстоянии r от тела 1, а через промежуток времени Δt переместилось на угол $\Delta\theta$, причем расстояние стало $r + \Delta r$. Считая, что промежуток времени Δt мал, можно считать дугу, по которой движется тело 2, прямой линией. Тогда площадь сектора, который образуют два радиуса-вектора r и $r + \Delta r$, будет близка к площади треугольника, равной $\frac{1}{2} r(r+\Delta r) \sin \Delta\theta$. Устремляя $\Delta\theta$ к нулю и деля на промежуток времени $\Delta t \to 0$, находим, что площадь сектора, описываемая телом, равна $\frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$. Следовательно, на основе уравнения (2.42) можно утверждать, что за одинаковые промежутки времени радиус-вектор описывает одинаковые площади, причем величина углового момента равна удвоенной площади сектора. Это *второй закон Кеплера*.

Запишем теперь уравнение (2.38) в полярных координатах. Так как производная $\dot{\mathbf{r}}$ уже найдена (2.41), то

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{r}\mathbf{i}_r + \dot{r}\frac{d\mathbf{i}_r}{dt} + \frac{d(r\dot{\theta})}{dt}\mathbf{i}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\mathbf{i}_\theta}{dt}. \tag{2.43}$$

Единичные векторы $\mathbf{i}_r$, $\mathbf{i}_\theta$ меняют направление со временем, поэтому меняются их проекции на оси x, y. Следовательно, производные

$d\mathbf{i}_r/dt$, $d\mathbf{i}_\theta/dt$ не равны нулю. Чтобы их вычислить, найдем производную единичного вектора $\mathbf{i}_r$ по углу θ (рис. 2.13). Так как

$$\mathbf{i}_r = \mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\sin\theta,$$

то,

$$\frac{d\mathbf{i}_r}{d\theta} = -\mathbf{i}\sin\theta + \mathbf{j}\cos\theta = \mathbf{i}_r(\theta + \frac{\pi}{2}) = \mathbf{i}_\theta.$$

Из последнего выражения находим

$$\frac{d\mathbf{i}_r}{dt} = \frac{d\mathbf{i}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \mathbf{i}_\theta\dot{\theta}.$$

Аналогичным образом найдем выражение для производной $d\mathbf{i}_\theta/dt$:

$$\frac{d\mathbf{i}_\theta}{d\theta} = -\mathbf{i}\cos\theta - \mathbf{j}\sin\theta = -\mathbf{i}_r, \quad \frac{d\mathbf{i}_\theta}{dt} = \frac{d\mathbf{i}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\mathbf{i}_r\dot{\theta}.$$

Подставляя значения производных $d\mathbf{i}_r/dt$, $d\mathbf{i}_\theta/dt$ в уравнение (2.43) и приводя подобные члены, получим, что ускорение тела разлагается на две компоненты — радиальную и нормальную:

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{i}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{i}_\theta.$$

Так как второй член в скобках можно записать в виде:

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right),$$

то из второго закона Кеплера (2.42) следует его равенство нулю. Иными словами, нормальная составляющая ускорения тела, движущегося по кеплеровской орбите, равна нулю.

Полагая, что $\mathbf{r} = \mathbf{i}_r r$, запишем уравнение (2.38) в полярных координатах в следующем виде:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2}. \tag{2.44}$$

Дифференциальные уравнения (2.42) и (2.44) описывают зависимость расстояния r одного тела относительно другого и угла θ от времени. Для решения этих уравнений обычно исключают время из (2.44) с помощью (2.42). Для удобства введем параметр u, так что

$$u = \frac{1}{r}.$$

Тогда закон Кеплера (2.42) записывается в виде: $\dot{\theta} = hu^2$. Теперь выразим производную $\ddot{r}$ через параметр u. Для этого найдем сначала производную $\dot{r}$:

$$\dot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -h\frac{du}{d\theta},$$

и, учитывая, что $\dot{r}$ является неявной функцией θ, а $h = \text{const}$, получим

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}(\dot{r}) = \frac{d\dot{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}.$$

После подстановки $\ddot{r}$ в уравнение (2.44) найдем:

$$-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - h^2u^3 = -\mu u^2$$

или

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2}. \tag{2.45}$$

Решение дифференциального уравнения второго порядка (2.45) записывается в виде:

$$u = \frac{\mu}{h^2} + A\cos(\theta - \omega),$$

где A и ω — две константы интегрирования. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что u является решением уравнения (2.45). Заменяя u на r и вводя новые параметры: $p = h^2/\mu$, $e = Ah^2/\mu$, находим уравнение траектории тела в полярных координатах:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \omega)}. \tag{2.46}$$

Уравнение (2.46) является уравнением конических сечений. Вид орбиты зависит от параметра e — эксцентриситета орбиты. Если $0 \le e < 1$, то траектория является эллипсом, если $e = 1$, то — параболой, если $e > 1$, то — гиперболой. Вид орбиты можно определить также по величине постоянной энергии в уравнении (2.40), ко-

торая зависит от скорости и радиуса-вектора тела. Поэтому удобно связать вид орбиты с начальными параметрами V_0 и r_0:

$$\begin{aligned}
&\text{если } V_0^2 < \frac{2\mu}{r_0}, \text{ то } W < 0 \text{ и } 0 \le e < 1 \text{ — эллиптическая орбита,}\\
&\text{если } V_0^2 = \frac{2\mu}{r_0}, \text{ то } W = 0 \text{ и } e = 1 \text{ — парабола,}\\
&\text{если } V_0^2 > \frac{2\mu}{r_0}, \text{ то } W > 0 \text{ и } e > 1 \text{ — гиперболическая орбита.}
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Ограничимся сейчас случаем, когда $0 \le e < 1$. В этом случае уравнение (2.46) является математической формой *первого закона Кеплера*.

Если тело с массой m_1 назвать Солнцем, другое тело — планетой, то первый закон Кеплера формулируется следующим образом: планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце. Параметр p называется параметром эллипса и связан с большой полуосью a эллипса формулой: $p = a(1 - e^2)$. Малая полуось b может быть выражена через a и e: $b^2 = a^2(1 - e^2)$ (рис. 2.14). На рис. 2.14 Солнце находится в точке O, планета — в точке P, ось OX направлена в точку восходящего узла орбиты, а ось Ox — в точку орбиты, ближайшей к Солнцу, которая называется *перигелием*. Угол ω называется угловым расстоянием перигелия от узла или аргументом перигелия.

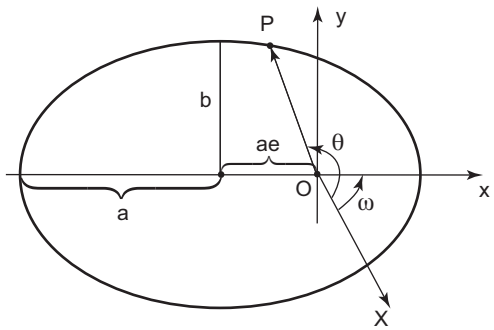


Рис. 2.14. Определение параметров эллипса.

Если обозначить период обращения планеты P как T, то согласно второму закону Кеплера за время T планета опишет полный эл-

липс, площадь которого равна πab. Отношение площади эллипса к периоду обращения равно половине углового момента планеты, т. е.

$$\frac{\pi ab}{T} = \frac{h}{2} = \text{const}.$$

Следовательно

$$2\pi a^2\sqrt{1-e^2} = hT. \tag{2.48}$$

Так как $h^2/\mu = p = a(1-e^2)$, то $h^2 = \mu a(1-e^2)$. Исключая h из (2.48), находим:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}.$$

Период обращения зависит только от величины большой полуоси орбиты и суммы масс тел, так как $\mu = G(m_1 + m_2)$.

Обозначим через n среднюю угловую скорость движения планеты по орбите:

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}. \tag{2.49}$$

В небесной механике параметр n называется *средним движением*. Если массу Солнца обозначить $M_\odot$, массу планеты — M_{P_1}, причем период обращения и большая полуось равны T_1 и a_1, то

$$G(M_\odot + M_{P_1}) = \frac{4\pi^2 a_1^3}{T_1^2} = n_1^2 a_1^3. \tag{2.50}$$

Аналогичное уравнение можно написать для другой планеты с массой M_{P_2}, периодом обращения T_2 и большой полуосью a_2:

$$G(M_\odot + M_{P_2}) = \frac{4\pi^2 a_2^3}{T_2^2} = n_2^2 a_2^3.$$

Деля одно уравнение на другое, получим:

$$\frac{G(M_\odot + M_{P_1})}{G(M_\odot + M_{P_2})} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2. \tag{2.51}$$

Уравнение (2.51) является математической записью *третьего закона Кеплера*. Так как для самой массивной планеты в Солнечной системе — Юпитера отношение $M_P/M_\odot \sim 10^{-3}$, то величина в левой

части (2.51) отличается от единицы в третьем знаке. Следовательно, с точностью до 10^{-3} имеем

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 \approx \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2. \qquad (2.52)$$

Квадраты периодов обращения планет относятся как кубы их больших полуосей. Если определить большую полуось a_1 для Земли как 1 астрономическую единицу (1 а. е.) (это неточное определение астрономической единицы; см. главу 8) и T_1 как 1 год, то, измеряя период обращения какой либо планеты в Солнечной системе в годах, можно записать третий закон Кеплера в форме:

$$a^3 = T^2,$$

где a, T — большая полуось и период обращения любой планеты. Таким образом, третий закон Кеплера устанавливает лишь относительные параметры орбит планет. Чтобы установить истинные размеры в Солнечной системе, необходимо знать величину 1 а. е. в метрах. В начале XX века для этого использовались наблюдения Солнца, планет, астероидов и вычислялась величина параллакса Солнца (см. стр. 323). Затем на смену оптическим наблюдениям пришли более точные методы радиолокации планет, астероидов, что позволило определить значение 1 а. е. с ошибкой в несколько метров.

2.10.2. Параметры и аномалии кеплеровской орбиты

При рассмотрении движения планет можно ограничиться только случаем эллиптического движения. Орбита планеты в этом случае характеризуется шестью параметрами.

Определим систему координат $Oxyz$, связанную с орбитой планеты. Точка орбиты, ближайшая к Солнцу, называется *перигелием*, а наиболее удаленная от Солнца — *афелием*. Ось Ox направим в перигелий, ось Oz — перпендикулярно плоскости орбиты. Точки пересечения плоскости орбиты планеты и эклиптики называются *узлами орбиты*, причем восходящим узлом называется тот, который планета проходит, переходя из области отрицательных широт в область положительных широт. Графическое представление и параметры кеплеровской орбиты показаны на рис. 2.15.

Ориентация орбиты в пространстве (ориентация системы координат $Oxyz$ относительно гелиоцентрической системы $OXYZ$) опи-

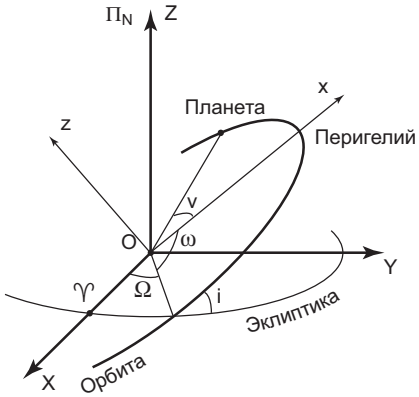


Рис. 2.15. Определение параметров эллиптической орбиты.

сывается тремя углами. Угол между направлением на точку весеннего равноденствия и точку восходящего узла называется *долготой восходящего узла* и обозначается Ω. Двугранный угол между плоскостями орбиты и эклиптики называется *наклонением* орбиты и обозначается как i. Третьим углом, который обозначается ω и называется *аргументом перигелия*, является угол между направлениями на восходящий узел и перигелий. Так как угол ω постоянен, то это означает неизменность положения оси Ox и в плоскости орбиты, и в пространстве.

Следующие два параметра: большая полуось a и эксцентриситет e определяют размеры и форму орбиты. И, наконец, положение тела на орбите в начальный момент определяется *эпохой* прохождения через перигелий — T_0.

Мгновенное положение планеты на момент t определяется углом v, который называется *истинной аномалией* (рис. 2.16).

Помимо истинной аномалии в небесной механике используются *эксцентрическая* E и *средняя* M аномалии. Построим окружность с радиусом a, равным большой полуоси эллипса, с центром, который совпадает с центром эллипса C. Опустим перпендикуляр PB на ось Ox; тогда его продолжение пересечет окружность в точке P'. Угол $\angle P'CO = E$ называется эксцентрической аномалией. Средняя аномалия M для любого момента времени t вычисляется по формуле:

$$M(t) = n(t - T_0), \tag{2.53}$$

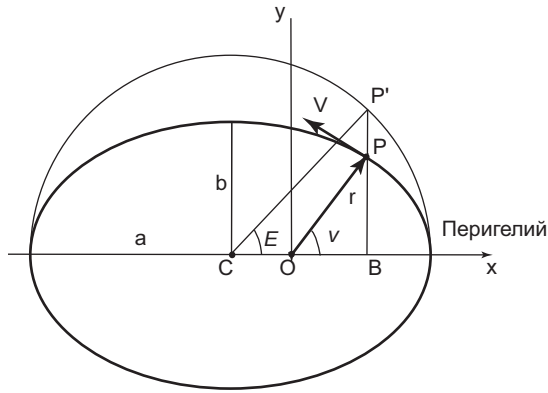


Рис. 2.16. Определение истинной v и эксцентрической E аномалий.

где n — среднее движение, T_0 — эпоха прохождения через перигелий. Часто в небесной механике и астрометрии используется величина, определяемая формулой

$$L = \Omega + \omega + M = \pi + M, \tag{2.54}$$

и называемая *средней долготой*, где $\pi = \Omega + \omega$ — *долгота перигелия*.

Так при кеплеровском движении планета находится в одной плоскости, то её положение определяется проекциями радиуса-вектора $\mathbf{r}$, которые равны x, y. Проекция $\mathbf{r}$ на ось Oz равна нулю, т. е. $\mathbf{r} = (x, y, 0)$. Из рис. 2.16 очевидно, что

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos v \\ r\sin v \end{pmatrix}. \tag{2.55}$$

Также, используя рис. 2.16, находим, что

$$CB = CO + OB, \quad a\cos E = ae + r\cos v.$$

Далее, с одной стороны,

$$\frac{P'B}{PB} = \frac{a\sin E}{r\sin v},$$

с другой стороны, используя свойства эллипса, имеем

$$\frac{P'B}{PB} = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}.$$

Следовательно, соотношение (2.55) можно переписать в виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos v \\ r\sin v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(\cos E - e) \\ a\sqrt{1-e^2}\sin E \end{pmatrix}. \tag{2.56}$$

Так как $r = \sqrt{x^2+y^2}$, из (2.56) и (2.46) находим:

$$r = a(1 - e\cos E) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}. \tag{2.57}$$

Из выражений (2.56), (2.57) и формулы тангенса половинного угла получим выражение, связывающее истинную и эксцентрическую аномалии:

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \frac{\sin v}{1+\cos v} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}. \tag{2.58}$$

Углы v и E зависят от времени. Дифференцируя уравнение (2.58) по времени, найдем, что

$$\sec^2\frac{v}{2}dv = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\sec^2\frac{E}{2}\,dE.$$

После несложных преобразований выразим dv через dE:

$$dv = \frac{\sqrt{1-e^2}\,dE}{1-e\cos E}. \tag{2.59}$$

Теперь вернемся к уравнению (2.42). Так как $\omega = \text{const}$, то уравнение (2.42) можно переписать в виде:

$$r^2\dot{v} = h. \tag{2.60}$$

Заменяя r выражением (2.57), dv — на (2.59) и h на $\sqrt{\mu a(1-e^2)}$, получим:

$$(1 - e\cos E)dE = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\,dt.$$

Интегрируя

$$\int_0^E (1 - e\cos E)dE = \int_0^t n dt,$$

получим трансцендентное уравнение, связывающее эксцентрическую и среднюю аномалии, которое называется *уравнением Кеплера*:

$$E - e\sin E = n(t - T_0) = M, \tag{2.61}$$

где T_0 есть постоянная интегрирования — момент прохождения через перигелий.

Найдем теперь вектор скорости $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{r}} = d\mathbf{r}/dt$. Заметим, что $dE/dt = na/r$. Вектор скорости лежит в плоскости орбиты, следовательно, его проекция на ось Oz равна нулю. Из (2.56) находим проекции $\mathbf{V}$:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \frac{na^2}{r} \begin{pmatrix} -\sin E \\ \sqrt{1-e^2}\cos E \end{pmatrix} \tag{2.62}$$

и квадрат скорости

$$V^2 = \frac{n^2a^4}{r^2}(1 - e^2\cos^2 E) = \mu\Big(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\Big). \tag{2.63}$$

Дифференцируя по времени вектор скорости (2.62) и учитывая, что $\dot{r} = ae\sin E\dot{E}$, найдем вектор ускорения тела при движении по кеплеровской орбите, который также лежит в плоскости орбиты:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \frac{n^2a^4}{r^3} \begin{pmatrix} e - \cos E \\ -\sqrt{1-e^2}\sin E \end{pmatrix}. \tag{2.64}$$

Для вычисления прямоугольных координат и проекций скорости тела в гелиоцентрической системе координат достаточно найти матрицу поворота S системы $Oxyz$. Если матрица S известна, то преобразование записывается в виде матричных уравнений:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = S\mathbf{r}, \quad \dot{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = S\dot{\mathbf{r}}. \tag{2.65}$$

Матрица S вычисляется следующим образом (см. рис. 2.15): сначала выполняем поворот относительно оси Oz на угол $-\omega$ до совмещения оси Ox с линией узлов, затем — поворот относительно линии узлов на угол $-i$ и, наконец, поворот относительно оси OZ на угол $-\Omega$:

$$S = R_3(-\Omega)R_1(-i)R_3(-\omega) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\Omega\cos\omega - & -\cos\Omega\sin\omega - & \sin\Omega\sin i \\ -\sin\Omega\sin\omega\cos i & -\sin\Omega\cos\omega\cos i & \\ & & \\ \sin\Omega\cos\omega + & -\sin\Omega\sin\omega + & -\cos\Omega\sin i \\ +\cos\Omega\sin\omega\cos i & +\cos\Omega\cos\omega\cos i & \\ & & \\ \sin\omega\sin i & \cos\omega\sin i & \cos i \end{pmatrix}. \quad (2.66)$$

Если элементы орбиты тела известны, то его положение и скорость в эклиптической системе координат в любой момент времени t определяются следующей последовательностью вычислений: 1) сначала находится средняя аномалия $M(t)$ по формуле (2.53); 2) решая уравнение Кеплера (2.61), находим эксцентрическую аномалию $E(t)$; 3) зная $E(t)$, получаем радиус-вектор тела $r(t)$ (2.57) и его проекции x, y в орбитальной системе координат (2.56); 4) используя уравнения (2.65) и матрицу (2.66), получаем прямоугольные эклиптические координаты и проекции скорости тела.

Если эксцентриситет орбиты мал, то удобным методом решения уравнения Кеплера является метод итераций. На первом шаге предполагается, что $E_1 = M$. Тогда процесс итераций

$$E_2 = M + e\sin E_1, \quad E_3 = M + e\sin E_2 \text{ и т. д.}$$

можно остановить, когда разность $|E_i - E_{i-1}|$ станет меньше некоторого заранее заданного числа. Ограничимся сейчас тремя итерациями и выразим в явном виде E как функцию M. Имеем

$$E = E_3 = M + e\sin(M + e\sin M).$$

Считая, что $e \ll 1$, получим с точностью до e^2 ряд

$$E = M + e\sin M + \frac{e^2}{2}\sin 2M + \ldots. \quad (2.67)$$

Выразим теперь в виде ряда по степеням экцентриситета e истинную аномалию v как функцию средней аномалии M. Для этого умножим сначала первое уравнение (2.56) на $-\sin E$, второе — на

$\cos E$ и сложим результат. После приведения подобных членов получим:

$$r\sin(v-E) = a\sin E\cos E(\sqrt{1-e^2}-1) + ae\sin E.$$

Разлагая $\sqrt{1-e^2}$ в ряд и деля обе части уравнения на r, находим, что

$$\sin(v-E) = \frac{e\sin E - \frac{e^2}{2}\sin E\cos E}{1-e\cos E}.$$

При $e \ll 1$ можно разложить знаменатель в ряд по степеням e, затем (так как $v-E$ равно арксинусу малого угла, пропорционального e) разложить арксинус. Сохраняя члены до e^2, получим:

$$v = E + e\sin E + \frac{e^2}{4}\sin 2E + \dots. \tag{2.68}$$

Выразим теперь $\sin E, \sin 2E$ через M, используя ряд (2.67). Имеем

$$\begin{aligned}\sin E &= \sin(M + e\sin M + \frac{e^2}{2}\sin 2M) \approx \\ &\approx \sin M\left[1 - \frac{(e\sin M)^2}{2}\right] + \frac{e}{2}\sin 2M + \frac{e^2}{2}\cos M\sin 2M.\end{aligned}$$

После простых тригонометрических преобразований находим, что

$$\sin E \approx \sin M\left(1 - \frac{e^2}{8}\right) + \frac{e}{2}\sin 2M + \frac{3e^2}{8}\sin 3M. \tag{2.69}$$

Аналогично находим, что

$$\sin 2E = \sin 2M + e(-\sin M + \sin 3M).$$

Подставив в ряд (2.68) разложения (2.67), $\sin E, \sin 2E$ как функции M, после приведения подобных членов получим уравнение, называемое *уравнением центра*:

$$v = M + 2e\sin M + \frac{5e^2}{4}\sin 2M + \dots. \tag{2.70}$$

В заключение этого раздела рассмотрим движение Земли по орбите.

1) Центр Земли движется относительно центра масс системы Земля+Луна. Последний находится на линии, соединяющей центры

масс Земли и Луны, на расстоянии, равном $rM_{☾}/(M_{\oplus} + M_{☾}) \approx$ 4500 км от центра тяжести Земли, где r — расстояние между Землей и Луной, массы которых равны $M_{\oplus}, M_{☾}$.
2) Центр тяжести системы Земля+Луна движется вокруг Солнца по орбите, элементы которой не являются постоянными, а есть функции времени. Орбита близка к круговой, её эксцентриситет $\sim 0,0167$. Орбита центра тяжести системы Земля+Луна является *возмущенной* вследствие притяжения Земли, Луны и Солнца планетами. Из-за возмущений движение центра тяжести системы Земля+Луна отличается от кеплеровского движения, однако это отличие не превышает в долготе $\pm 40''$, а в широте $\pm 0''.8$.
3) Центр Солнца движется относительно центра тяжести Солнечной системы — *барицентра*. Движение центра Солнца относительно барицентра Солнечной системы определяется, главным образом, двумя наиболее массивными планетами — Юпитером и Сатурном и представляется двумя почти круговыми движениями с периодами обращения этих планет ($\sim$ 12 и $\sim$ 29,5 лет). Радиус круговых движений центра Солнца относительно барицентра равен примерно $5,2$ а. е.$/1047 \approx 0,0050$ а. е. $\approx 0,75 \cdot 10^6$ км для Юпитера и $9,54$ а. е.$/3498 \approx 0,0027$ а. е. $\approx 0,41 \cdot 10^6$ км для Сатурна (1047 и 3498 — отношения массы Солнца к массам Юпитера и Сатурна) (рис. 2.17). Солнце удаляется от центра масс Солнечной системы на величину, не превышающую его диаметра.

Орбитальные скорости движения Юпитера и Сатурна равны примерно 13 км/с и 9,5 км/с, соответственно компоненты скорости движения центра Солнца, вызываемые этими планетами, составляют $13/1047 \approx 0,012$ км/с и $9,5/3498 \approx 0,003$ км/с.

2.11. Барицентрическая система координат

Как уже говорилось выше, одной из основных задач сферической астрономии является преобразование координат из геоцентрической системы, которая не является инерциальной, в барицентрическую систему. Принятая МАС небесная система координат, определяемая точными положениями внегалактических радиоисточников, находится в покое относительно барицентра Солнечной системы. На уровне современной точности наблюдений небесная система координат ICRS не имеет вращения и может считаться инерциальной. Поэтому главную задачу можно сформулировать в общем

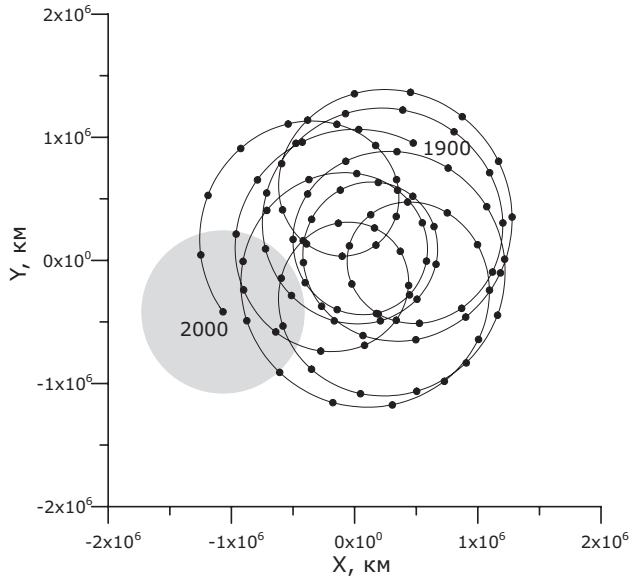


Рис. 2.17. Движение Солнца относительно барицентра Солнечной системы в эклиптической системе координат на интервале времени 1900 — 2000 гг. Промежуток между точками равен одному году.

виде следующим образом. Необходимо найти положение небесного тела, которое будет задано вектором $\mathbf{r}(t)$ относительно барицентра Солнечной системы как функцию времени, которое измеряется в этой же системе. Так как наблюдения проводятся в геоцентрической системе, движущейся со скоростью $\mathbf{v}$ относительно барицентра, то радиус-вектор небесного тела в геоцентрической системе из-за лоренцева сокращения равен $\mathbf{r}'(t')$. Положение тела измеряется как функция земного времени t'.

Таким образом, преобразование координат включает перенос осей, лоренцево сокращение радиусов-векторов и времени, а также изменение скорости течения времени из-за изменения гравитационного потенциала в точке расположения часов. Определение динамических шкал земного и барицентрического времени будет подробно рассмотрено в главе 4.

Положение и скорость центра Земли относительно барицентра Солнечной системы вычисляется на основе эфемерид. Как говорилось выше, в настоящее время широко используются эфемериды Ла-

боратории реактивного движения DE200, DE403 и DE405. Основное отличие между ними заключается в том, что в более поздних версиях были уточнены массы планет, учтены массы некоторых астероидов и использованы разные шкалы барицентрического времени. Массы планет уточнены на основе измерений траекторий космических аппаратов.

Если система материальных тел состоит из N точек с массами m_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, то положение её центра масс определяется относительно заданной системы координат радиусом-вектором $\mathbf{r}_O$. Радиус-вектор центра масс N материальных точек есть по определению:

$$\mathbf{r}_O = \frac{\sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}.$$

Радиусы-векторы каждой из точек $\mathbf{r}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ и $\mathbf{r}_O$ определены в заданной системы координат. Если начало этой системы координат помещается в центр масс, то, очевидно, $\mathbf{r}_O = 0$ и

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i m_i = 0.$$

Пусть векторы положения и скорости центра Земли относительно барицентра Солнечной системы равны $\mathbf{R}_\oplus$, $\mathbf{V}_\oplus$, а геоцентрические радиусы-векторы и векторы скорости Солнца, Луны, планет, астероидов равны $\mathbf{R}_{Ei}$, $\mathbf{V}_{Ei}$. Тогда легко показать, что:

$$\mathbf{R}_\oplus = \sum_{i \neq E}^{N} m_i \mathbf{R}_{Ei} / \sum_{i=1}^{N} m_i,$$

$$\mathbf{V}_\oplus = \sum_{i \neq E}^{N} m_i \mathbf{V}_{Ei} / \sum_{i=1}^{N} m_i.$$

Изменение масс планет и астероидов приводит к изменению координат и скорости центра Земли относительно барицентра Солнечной системы. С помощью РСДБ наблюдений космических аппаратов, радиолокации планет эфемериды DE403, DE405 согласованы с системой ICRS, тогда как оси системы, задаваемой эфемеридами DE200, повернуты на несколько миллисекунд дуги.

Глава 3

СИСТЕМЫ КООРДИНАТ НА ЗЕМЛЕ

При определении небесной сферы указывалось, что центром сферы является глаз наблюдателя. Небесная сфера с центром на поверхности Земли называется *топоцентрической*. Если гипотетического наблюдателя поместить в центр Земли, то такая система координат называется *геоцентрической*, если в центр Солнца, то *гелиоцентрической* и, если центр небесной сферы помещен в центр тяжести Солнечной системы, то *барицентрической*.

При перемещении наблюдателя по поверхности Земли меняется положение центра сферы, следовательно, координаты небесных тел также будут меняться. Для того, чтобы сравнить положения небесных тел, полученных наблюдателями с разных точек на поверхности Земли, нужно привести эти положения к одной системе координат. Так как принятая МАС система ICRS имеет начало в барицентре Солнечной системы, то преобразование координат небесных тел из топоцентрической в барицентрическую систему и обратно является одной из основных задач сферической астрономии. При этом необходимо учесть разное течение времени в разных системах и, прежде всего, определить используемые шкалы времени (глава 4).

Каждая из точек (центр Земли, центр Солнца или барицентр Солнечной системы) может быть началом экваториальной, эклиптической, галактической и других систем координат. Преобразование координат небесного тела между различными системами выполняется в два этапа: сначала с помощью вращений координатные

оси одной из систем поворачиваются таким образом, чтобы они стали параллельны осям второй системы (метод вычисления матрицы вращения изложен в предыдущей главе). На втором этапе учитывается перенос начала системы, изменение координат и промежутков времени из-за эффектов общей теории относительности. Кроме этого должно быть учтено изменение положений небесных тел при переходе от одной системы координат к другой, возникающее из-за собственного движения тел, параллактического смещения и других причин. Видимые координаты небесных тел предварительно должны быть исправлены за рефракцию. В связи с увеличением точности наблюдений аберрацию следует вычислять с учетом членов второго порядка малости; также необходимо учитывать отклонение лучей в поле тяжести Солнца, планет. Эти эффекты будут обсуждаться в главе 5.

Для чего вводится такое большое число систем отсчета? Выше уже говорилось, что необходима лишь одна система, к которой необходимо привести все наблюдения небесных тел для изучения их движения. Напомним, что в настоящее время — это Международная небесная система отсчета (ICRS).

В течение $\sim$ 2000 лет такой системой была геоцентрическая система, которая была построена Птолемеем. Из-за вращения Земли она не была инерциальной. Переход от геоцентрической системы к гелиоцентрической системе Коперника привел не только к открытию законов обращения планет Кеплером и закона тяготения Ньютоном. Гелиоцентрическая система была первой инерциальной (точнее квазиинерциальной) системой отсчета в астрономии, в которой выполняются законы Ньютона.

Переход от гелиоцентрической системы отсчета к барицентрической системе, оси которой были фиксированы по отношению к звездам, а с 1998 г. по отношению к внегалактическим компактным радиоисточникам, отражает прогресс методов наблюдений. Появление и развитие радиоинтерферометрии со сверхдлинными базами, осуществление проекта ГИППАРКОС привели к значительному увеличению точности практической реализации инерциальной системы координат.

Таким образом, чтобы преобразовать наблюдения к барицентрической системе отсчета, необходимо: 1) знать положение наблюдателя и ход часов относительно центра Земли; 2) определить ориен-

тацию геоцентрической системы координат относительно барицентрической системы; 3) вычислить положение центра Земли относительно барицентра Солнечной системы и преобразовать показания часов к барицентрической системе.

Каждая из этих задач решается различными методами. Для решения первой задачи надо установить систему координат на Земле. Это делается методами геодезии. Мгновенная ось вращения Земли изменяет свое положение и в теле планеты, и в пространстве. Изучением вращения Земли занимается Международная служба вращения Земли и систем отсчета. Наконец, положение центра Земли относительно барицентра Солнечной системы можно определить методами небесной механики. Все эти проблемы тесно связаны.

В следующих параграфах мы рассмотрим вопросы, связанные с определением и построением земной системы координат.

3.1. Основные параметры Земли

Для определения положения наблюдателя нам понадобятся сведения о фигуре Земли.

Земля не является идеальной сферой. Из-за вращения Земля сплюснута у полюсов, кроме этого высоты точек, расположенных в материковых областях, изменяются в пределах нескольких километров над уровнем моря. Для удобства работы желательно представить реальную сложную физическую поверхность Земли достаточно простой математической фигурой. В качестве фигур, аппроксимирующих поверхность Земли, выбирают *геоид* и *эллипсоид вращения*. С геоидом связана *система астрономических координат*, с эллипсоидом — *система геодезических координат*. Эллипсоидом вращения называется фигура, получаемая вращением эллипса относительно его малой оси. Зная координаты точек на эллипсоиде, можно легко вычислить их взаимные расстояния и азимуты. Точность вычисления ограничена лишь ошибками измерения координат точек.

Если бы вся поверхность Земли была покрыта океаном, то при отсутствии волн, а также приливного воздействия Луны и Солнца, поверхность океана представляла бы собой геоид. Геоид — это поверхность, всюду нормальная к силе тяжести.

Для вывода приближенной формулы, описывающей эту поверхность, используем понятие потенциала.

Согласно закону притяжения Ньютона две материальные точки с массами m_1, m_2, расстояние между которыми равно r, притягиваются друг к другу с силой

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где G — постоянная тяготения. Хотя каждая из точек притягивает другую с одинаковой силой, удобно назвать одну из них притягивающей, другую — притягиваемой массой. Если положить, что масса притягивающей точки равна $m_1 = M$, а масса притягиваемой точки равна единице ($m_2 = 1$), то формула

$$F = \frac{GM}{r^2}$$

выражает силу притяжения точки с массой M другой точки с единичной массой, расположенной на расстоянии r.

Определим скалярную функцию для нашей системы двух точек с массами $m_1 = M$ и $m_2 = 1$:

$$U = \frac{GM}{r}, \tag{3.1}$$

которая называется силовой функцией или гравитационным потенциалом. Заметим, что в физике потенциалом обычно называют функцию $-U$. Эта функция характеризует потенциальную энергию поля. В случае гравитационного притяжения двух тел потенциальная энергия пропорциональна массам тел и обратно пропорциональна расстоянию между ними.

По определению силовая функция зависит только от масс точек и взаимного расстояния между ними и, следовательно, не зависит от выбора системы координат. Функция U положительна всюду, за исключением случая, когда расстояние между точками становится бесконечно большим ($U = 0$ при $r = \infty$). Наоборот, силовая функция обращается в бесконечность при $r = 0$, т. е. при столкновении материальных точек[1].

Уравнения (2.28) описывают движение точки P_2 с массой m_2, прямоугольные координаты которой равны x_2, y_2, z_2, под действием

[1] Во многих учебниках и монографиях по астрономии, гравиметрии используются термины «потенциал силы тяжести» или «гравитационный потенциал», под которыми понимается силовая функция (3.1). В дальнейшем мы также под гравитационным потенциалом будем понимать силовую функцию U.

силы притяжения $\mathbf{F}_2$ (рис. 2.12). При $m_1 = M$ и $m_2 = 1$ получим, что компоненты силы $\mathbf{F}_2$ равны:

$$F_{2x} = -GM\frac{x_2 - x_1}{r^3},$$
$$F_{2y} = -GM\frac{y_2 - y_1}{r^3},$$
$$F_{2z} = -GM\frac{z_2 - z_1}{r^3},$$

где $r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$. Используя определение потенциала (3.1), получим:

$$F_{2x} = \frac{\partial U}{\partial x_2}, \quad F_{2y} = \frac{\partial U}{\partial y_2}, \quad F_{2z} = \frac{\partial U}{\partial z_2}$$

или

$$\mathbf{F}_2 = \operatorname{grad} U = \left(\frac{\partial U}{\partial x_2}, \frac{\partial U}{\partial y_2}, \frac{\partial U}{\partial z_2}\right).$$

Символ grad означает оператор градиента, который в декартовых координатах записывается следующим образом:

$$\operatorname{grad} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}, \tag{3.2}$$

а в сферических координатах (r, θ, λ), где r — расстояние, θ — полярное расстояние, λ — долгота (1.21) имеет вид:

$$\operatorname{grad} = \mathbf{i}_r\frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{i}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{i}_\lambda\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \lambda}, \tag{3.3}$$

причем единичные векторы $\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\theta, \mathbf{i}_\lambda$ направлены в сторону возрастания координат и $\mathbf{i}_r \times \mathbf{i}_\theta = \mathbf{i}_\lambda$.

Иными словами, вектор силы притяжения $\mathbf{F}_2$ есть градиент скалярной функции — гравитационного потенциала U.

Если система состоит из N материальных точек $m_1, m_2, \ldots, m_N$, то потенциал системы равен сумме вкладов от каждой точки (3.1):

$$U = \frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2} + \cdots + \frac{Gm_N}{r_N} = G\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{r_i}. \tag{3.4}$$

Это выражение легко обобщить на случай непрерывного распределения материальных точек внутри некоторого объема V. Тогда сумма (3.4) может быть записана в виде интеграла

$$U(P) = G \iiint\limits_V \frac{1}{r}\, dM, \tag{3.5}$$

где r — расстояние от элемента массы dM до притягиваемой этим элементом точки P.

Если материальная точка находится на поверхности вращающегося тела, то помимо силы притяжения на точку действует центробежная сила. Свяжем с телом правую систему координат, начало которой O поместим в центр масс тела, ось Oz направим по его оси вращения, а оси Ox, Oy расположим в плоскости экватора. Тогда центробежная сила, действующая на материальную точку с единичной массой, равна:

$$F_c = \Omega^2 \sqrt{x^2 + y^2},$$

где Ω — угловая скорость вращения тела. Вектор центробежной силы $\mathbf{F}_c$ параллелен плоскости экватора и имеет компоненты:

$$\mathbf{F}_c = (\Omega^2 x, \Omega^2 y, 0).$$

Следовательно, потенциал U_c центробежной силы равен:

$$U_c = \frac{1}{2}\Omega^2 (x^2 + y^2),$$

так что

$$\mathbf{F}_c = \operatorname{grad} U_c = \left(\frac{\partial U_c}{\partial x}, \frac{\partial U_c}{\partial y}, \frac{\partial U_c}{\partial z} \right).$$

Общая сила, действующая на материальную точку, равна сумме силы притяжения и центробежной силы. Она называется силой тяжести. Если точка P находится на поверхности вращающегося тела, то потенциал силы тяжести W в точке P:

$$W(P) = U(P) + U_c(P). \tag{3.6}$$

Вектор силы тяжести $\mathbf{g}$ есть градиент W:

$$\mathbf{g} = \operatorname{grad} W = (W_x, W_y, W_z) = \left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z} \right). \tag{3.7}$$

Поверхности, определяемые уравнениями $W = \text{const}$, называются эквипотенциальными, или уровенными. Применительно к Земле, одна из них, соответствующая среднему уровню моря в отсутствии волн, течений и приливных возмущений из-за воздействия Луны и Солнца, является геоидом. Строгое определение геоида при учете приливных деформаций дается в § 3.5. Понятие «средний уровень моря» — условное; поэтому в «Стандартах МСВЗ» геоид определен числовым значением потенциала W.

Линии, которые ортогональны к уровенным поверхностям, называются силовыми линиями. В общем случае они не являются прямыми линиями, а слегка искривлены. Вектор силы тяжести направлен по касательной к силовой линии и определяет направление отвесной линии.

Введем единичный вектор $\mathbf{n}$, так что

$$\mathbf{n} = -\frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|}, \tag{3.8}$$

то есть вектор $\mathbf{n}$ направлен вверх (в зенит).

Тогда угол между направлением отвесной линии в точке P, или вектором $\mathbf{n}$, и плоскостью экватора Земли называется *астрономической широтой* точки P. Проведем теперь через точку P линию, параллельную оси вращения Земли. Эта линия и отвесная линия в точке P определяют плоскость меридиана, которая проходит через P. Двугранный угол между плоскостями меридианов Гринвича и точки P называется *астрономической долготой* точки P.

Если астрономическая широта точки P равна φ, астрономическая долгота равна λ, то вектор $\mathbf{n}$ имеет компоненты:

$$\mathbf{n} = (\cos\varphi\cos\lambda, \cos\varphi\sin\lambda, \sin\varphi). \tag{3.9}$$

Тогда из выражений (3.7), (3.8), (3.9) получим:

$$\begin{aligned} W_x &= -g\cos\varphi\cos\lambda, \\ W_y &= -g\cos\varphi\sin\lambda, \\ W_z &= -g\sin\varphi, \end{aligned} \tag{3.10}$$

где $g = |\mathbf{g}|$. Эти уравнения связывают прямоугольные координаты x, y, z точки P, от которых зависит потенциал W (3.6), и астрономические координаты φ, λ.

Дифференцируя потенциал силы тяжести $W = W(x, y, z)$, получим

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x}dx + \frac{\partial W}{\partial y}dy + \frac{\partial W}{\partial z}dz$$

или в векторном виде:

$$dW = \operatorname{grad} W \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r}, \tag{3.11}$$

где $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$.

Предположим, что мы поднимаемся по силовой линии от уровенной поверхности W_0, совпадающей с уровнем моря, до поверхности W, проходящей через точку P, на высоту H. Высота H точки P, измеряемая вдоль силовой линии, начиная от геоида, называется ортометрической высотой. Если вектор $d\mathbf{r}$ направлен вдоль силовой линии в направлении увеличения высоты H, то его длина

$$|d\mathbf{r}| = dH,$$

а направление противоположно $\mathbf{g}$. Следовательно, $\mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} = -gdH$ и уравнение (3.11) принимает вид:

$$dW = -gdH. \tag{3.12}$$

Уравнение (3.12) связывает высоту H и потенциал W:

$$H = -\int_{W_0}^{W} \frac{dW}{g}.$$

Интеграл вычисляется вдоль силовой линии, начиная от геоида ($H = 0, W = W_0$), до точки P, через которую проходит уровенная поверхность W.

3.2. Уравнение геоида

По определению, в каждой точке геоида сила тяжести направлена по нормали к поверхности, то есть по касательной к силовой линии. Геоид не имеет простой геометрической формы, однако близок к эллипсоиду вращения. Поэтому для изучения фигуры Земли вводят *референц-эллипсоиды*, аппроксимирующие геоид в некоторой области ее поверхности с той или иной точностью, или *средний*

земной эллипсоид, геометрические параметры которого определяются физическими параметрами (массой, сжатием, моментами инерции) реальной Земли (см. § 3.3). Топографические особенности (горы, впадины физической поверхности Земли) рассматривают как отклонения от выбранного эллипсоида.

Для вычисления приближенного уравнения геоида используем формулу (3.6) и вычислим потенциал притяжения тела произвольной формы. Полученные выражения будут также использоваться при вычислении прецессионного и нутационного движения осей Земли.

Используем выражение для потенциала точки (3.1) и найдем потенциал притяжения элемента массы $dM = \rho dV$ тела произвольной формы в точке P (ρ — плотность, зависящая от координат элемента объема dV). Для этого определим систему координат $Oxyz$ с началом в центре масс тела (рис. 3.1).

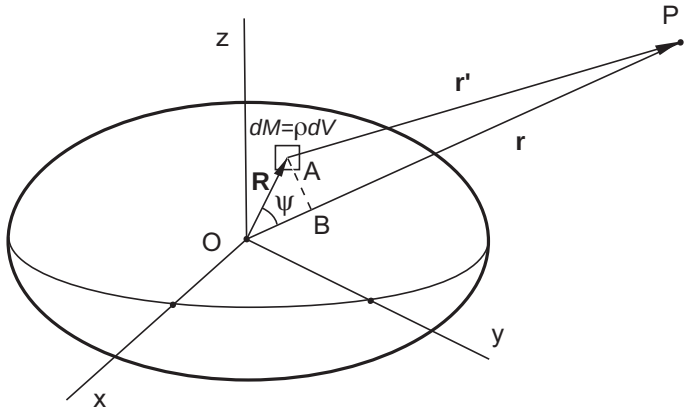


Рис. 3.1. Вычисление гравитационного потенциала в точке P.

Будем считать, что точка P расположена вне тела. Расстояние от точки O до элемента массы dM, находящегося в точке A с координатами x, y, z, равно R, а до точки P равно r. Тогда потенциал притяжения элемента dM в точке P

$$dU(P) = \frac{GdM}{r'} = \frac{GdM}{r\sqrt{1 + \left(\frac{R}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{R}{r}\right)\cos\psi}}, \qquad (3.13)$$

где r' — расстояние от точки A до точки P, ψ — угол между отрезками OA и OP. Найдем разложение знаменателя по степеням $1/r$ до членов третьего порядка, предполагая, что $s = (\frac{R}{r})^2 - 2(\frac{R}{r})\cos\psi$:

$$
\begin{aligned}
&(1+s)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}s + \frac{3}{8}s^2 - \frac{15}{48}s^3 + \cdots = \\
&= 1 + \frac{R}{r}\cos\psi - \frac{1}{2}\Big(\frac{R}{r}\Big)^2 + \frac{3}{2}\Big(\frac{R}{r}\Big)^2\cos^2\psi - \frac{3}{2}\Big(\frac{R}{r}\Big)^3\cos\psi + \cdots = \\
&= 1 + \frac{R}{r}\cos\psi + \Big(\frac{R}{r}\Big)^2 - \frac{3}{2}\Big(\frac{R}{r}\Big)^2\sin^2\psi + \cdots . \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

Традиционное представление потенциала U имеет вид:

$$
dU = \frac{GdM}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{R}{r}\Big)^n P_n(\cos\psi),
$$

где $P_n(\cos\psi)$ — полиномы Лежандра (см. приложение В.6). Индекс n называется степенью полинома Лежандра, причем

$$
P_0(\cos\psi) = 1,\ P_1(\cos\psi) = \cos\psi,\ P_2(\cos\psi) = \frac{3}{2}\cos^2\psi - \frac{1}{2}.
$$

Чтобы найти потенциал в точке P от всех точек тела, проинтегрируем (3.13) по всему объему тела, используя разложение (3.14):

$$
\begin{aligned}
U =& \frac{G}{r}\iiint\limits_V dM + \frac{G}{r^2}\iiint\limits_V R\cos\psi dM + \\
&+ \frac{G}{r^3}\iiint\limits_V R^2 dM - \frac{3}{2}\frac{G}{r^3}\iiint\limits_V R^2\sin^2\psi dM + \cdots . \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

Первый член соответствует потенциалу расположенной в начале координат O точки с массой $M = \iiint_V dM$. Второй член равен нулю, так как начало координат совпадает с центром масс тела. Это легко доказать. В самом деле, центр масс тела — это точка O, радиус-вектор которой относительно некоторой системы координат равен:

$$
\mathbf{r}_O = \frac{1}{M}\iiint\limits_V \mathbf{r}dM,
$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор элемента массы dM. Если центр масс тела совпадает с началом системы координат, то $\mathbf{r}_O = 0$, следовательно

$\iiint_V \mathbf{r} dM = 0$. Это доказывает утверждение, что второй член в (3.15) равен нулю.

Определим осевые моменты инерции Земли A, B, C относительно осей x, y, z, соответственно, следующим образом:

$$I_x = \iiint\limits_V (y^2 + z^2) dM,$$
$$I_y = \iiint\limits_V (x^2 + z^2) dM,$$
$$I_z = \iiint\limits_V (x^2 + y^2) dM.$$

Тогда третий член в (3.15) можно представить в виде:

$$\frac{G}{r^3} \iiint\limits_V R^2 dM = \frac{G}{r^3} \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2) dM =$$
$$= \frac{G}{2r^3} \left[\iiint\limits_V (y^2 + z^2) dM + \iiint\limits_V (x^2 + z^2) dM + \iiint\limits_V (x^2 + y^2) dM \right] =$$
$$= \frac{G}{2r^3} (I_x + I_y + I_z).$$

Так как произведение $R \sin \psi$ равно перпендикуляру AB, опущенному из точки A на прямую OP, то четвертый интеграл в (3.15) равен моменту инерции I тела относительно оси OP. Следовательно, гравитационный потенциал тела произвольной формы в точке P, расположенной вне тела, равен:

$$U = \frac{GM}{r} + \frac{G}{2r^3} (I_x + I_y + I_z - 3I) + \cdots . \tag{3.16}$$

Выразим теперь момент инерции I тела относительно оси OP через направляющие косинусы $l = \cos \varphi_1, m = \cos \varphi_2, n = \cos \varphi_1$ этой прямой относительно осей x, y, z. Пусть $\mathbf{i}_r = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$. Тогда

$$R \sin \psi = |\mathbf{i}_r \times \mathbf{R}|.$$

Так как вектор $\mathbf{R}$ имеет компоненты (x, y, z), то имеем согласно (1.17):

$$\mathbf{i}_r \times \mathbf{R} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ l & m & n \\ x & y & z \end{vmatrix} = (zm - yn)\mathbf{i} + (xn - zl)\mathbf{j} + (yl - xm)\mathbf{k}.$$

Отсюда

$$R^2 \sin^2 \psi = (zm - yn)^2 + (xn - zl)^2 + (yl - xm)^2.$$

Раскрывая скобки и подставляя в четвертый интеграл в (3.15), получим:

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_V R^2 \sin^2 \psi dM = \\ &= l^2 \iiint\limits_V (y^2 + z^2) dM + m^2 \iiint\limits_V (x^2 + z^2) dM + n^2 \iiint\limits_V (x^2 + y^2) dM - \\ &- 2lm \iiint\limits_V xy\, dM - 2mn \iiint\limits_V yz\, dM - 2ln \int_V xz\, dM. \end{aligned}$$

Интегралы

$$\begin{aligned} I_{xy} = I_{yx} &= \iiint\limits_V xy\, dM, \\ I_{yz} = I_{zy} &= \iiint\limits_V yz\, dM, \\ I_{zx} = I_{xz} &= \iiint\limits_V xz\, dM \end{aligned}$$

называются центробежными моментами инерции твердого тела. Осевые I_x, I_y, I_z и центробежные моменты инерции тела определяют его тензор инерции:

$$I = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{pmatrix}.$$

В системе главных осей недиагональные компоненты тензора равны нулю, а осевые (или главные) моменты относительно осей x, y, z обозначим как A, B, C, соответственно, т. е. тензор инерции в системе главных осей имеет вид

$$I = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}.$$

Таким образом, если координатные оси системы $Oxyz$ совпадают с главными осями тензора инерции, то

$$I = Al^2 + Bm^2 + Cn^2.$$

Обозначим угол между OP и осью Oz через θ. Тогда

$$n^2 = \cos^2\theta = 1 - l^2 - m^2.$$

Предположим, что $A = B$. В этом случае момент инерции

$$I = A(l^2 + m^2) + Cn^2 = A + (C - A)n^2.$$

Подставляя I в (3.16), найдем окончательное выражение для гравитационного потенциала в точке P:

$$U = \frac{GM}{r} - \frac{G}{2r^3}(C - A)(3\cos^2\theta - 1) + \cdots . \qquad (3.17)$$

Для Земли главные моменты инерции:
$C = (8,0365 \pm 0,0002) \cdot 10^{37}$ кг· м^2, $A = (8,0101 \pm 0,0002) \cdot 10^{37}$ кг· м^2, $B = (8,0103 \pm 0,0002) \cdot 10^{37}$ кг· м^2, $B - A = (1,765 \pm 0,001) \cdot 10^{33}$ кг· м^2. Относительная разность экваториальных моментов A и B равна $(B - A)/A \sim 2 \cdot 10^{-5}$. Поэтому часто считают, что $A = B$ и тем самым полагают, что Земля — двухосный эллипсоид или эллипсоид вращения. Гравитационный потенциал Земли называется геопотенциалом.

Перепишем (3.17) в следующем виде:

$$U = \frac{GM}{r}\left[1 - J_2\left(\frac{a}{r}\right)^2 P_2(\cos\theta) + \ldots\right], \qquad (3.18)$$

где $J_2 = (C - A)/(Ma^2) = 1,0826359 \cdot 10^{-3} \pm 1.0 \cdot 10^{-10}$ называется динамическим форм-фактором Земли, a — экваториальный радиус Земли ($a = 6378136,6$ м). Приведенные значения J_2 и a взяты из «Стандартов МСВЗ».

Уравнение (3.18) в пределе должно выполняться на поверхности Земли. Если ограничиться разложением до $(a/r)^2$, то полный геопотенциал на поверхности Земли:

$$W = \frac{GM}{r}\left[1 - J_2\left(\frac{a}{r}\right)^2 P_2(\cos\theta)\right] + U_c, \qquad (3.19)$$

где U_c — центробежный потенциал. Запишем его в виде:

$$U_c = \frac{1}{2}\,\Omega^2 r^2 \sin^2\theta.$$

Так как геоид определяется как поверхность постоянного потенциала, приравняем потенциалы на полюсе и экваторе Земли, учитывая, что при $\theta = 0^\circ$ $r = c$ (c — полярный радиус Земли), а при $\theta = 90^\circ$ $r = a$:

$$\frac{GM}{a} + \frac{1}{2}\frac{GM}{a}J_2 + \frac{1}{2}a^2\Omega^2 = \frac{GM}{c} - \frac{GM}{c}J_2\frac{a^2}{c^2}.$$

Отсюда

$$\frac{c-a}{a}\left(1 + \frac{1}{2}J_2\frac{c^2+ac+a^2}{c^2}\right) = -\frac{3}{2}\frac{C-A}{Mc^2} - \frac{1}{2}\frac{a^2c\Omega^2}{GM}.$$

Определяя геометрическое сжатие эллипсоида как $f = (a-c)/a$ и замечая, что второй член в скобках имеет величину порядка 10^{-3}, получим

$$f = \frac{a-c}{a} \approx \frac{3}{2}J_2 + \frac{1}{2}\frac{\Omega^2 a^3}{GM}. \tag{3.20}$$

Формула верна с точностью до 10^{-3}.

Чтобы найти уравнение поверхности геоида, перепишем формулу (3.19) в следующем виде:

$$W = \frac{GM}{a}\left[\frac{a}{r} - \frac{1}{2}J_2\left(\frac{a}{r}\right)^3(3\cos^2\theta - 1) + \frac{q}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^2\sin^2\theta\right],$$

где

$$q = \frac{\Omega^2 a^3}{GM} = \frac{\Omega^2 a}{g'_e} \approx 3,46139\cdot 10^{-3}, \quad g'_e = \frac{GM}{a^2} \approx 9,79829\,\text{м}^2/\text{с}^2,$$

q — отношение центростремительного ускорения к ускорению силы притяжения на экваторе g'_e. Так как на поверхности геоида величина потенциала W постоянна, приравняем его потенциалу на экваторе ($r = a, \theta = 90^\circ$):

$$\frac{GM}{a}\left[\frac{a}{r} - \frac{1}{2}J_2\left(\frac{a}{r}\right)^3(3\cos^2\theta - 1) + \frac{q}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^2\sin^2\theta\right] = \frac{GM}{a}\left[1 + \frac{1}{2}J_2 + \frac{q}{2}\right].$$

Тогда

$$\frac{r}{a} = \frac{1 - \frac{1}{2}J_2\left(\frac{a}{r}\right)^2(3\cos^2\theta - 1) + \frac{q}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^3\sin^2\theta}{1 + \frac{1}{2}J_2 + \frac{q}{2}}.$$

Так как величины $J_2 \approx 10^{-3}, q \approx 10^{-3}$, то ошибка отбрасывания членов порядка $J_2^2, q^2, J_2 q$ и т. д. сравнима по величине с отброшенными членами в разложении потенциала силы тяжести. Сохраняя лишь линейные члены при разложении знаменателя, получим

$$\frac{r}{a} \approx \left[1 - \frac{1}{2}J_2\left(\frac{a}{r}\right)^2(3\cos^2\theta - 1) + \frac{q}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^3\sin^2\theta\right]\left(1 - \frac{1}{2}J_2 - \frac{q}{2}\right).$$

Так как $a/r \approx 1$ с ошибкой 10^{-3}, то перемножая скобки и пренебрегая членами, содержащими произведения малых величин, запишем уравнение геоида в виде

$$r = a(1 - \varepsilon\cos^2\theta), \quad \varepsilon = \frac{3}{2}J_2 + \frac{q}{2}. \tag{3.21}$$

В первом приближении уравнение геоида представляет фигуру, близкую к эллипсоиду с геометрическим сжатием $\varepsilon \approx f = (a - c)/a$. С точностью до первого порядка $\varepsilon = 3,3546 \cdot 10^{-3} \approx 1/298,10$.

В самом деле, рассмотрим меридиональное сечение двухосного эллипсоида, которое является эллипсом с большой a и малой c полуосями:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{3.22}$$

Так как малая полуось $c = a(1 - f)$ и $x = r\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, то из (3.22) получим:

$$r = a(1 - f)[1 + (f^2 - 2f)\sin^2\theta]^{-1/2}.$$

Это — точное уравнение эллипса. Если сжатие f мало, то, разлагая квадратный корень в ряд по f и сохраняя только члены первого порядка, находим:

$$r = a(1 - f\cos^2\theta).$$

В настоящее время коэффициент J_2 определяется по наблюдениям искусственных спутников Земли. Забегая вперед, скажем, что по скорости прецессии определяется динамическое сжатие Земли

$$H = \frac{C - \frac{1}{2}(A + B)}{C}.$$

Для теории IAU2000 $H = 0,0032737875 \pm 5 \cdot 10^{-10} = 1/305,4566$. Используя определения параметров J_2 и H, найдем полярный момент инерции Земли:

$$C = \frac{J_2}{H} M a^2 \approx 0,330698 M a^2.$$

Так как моменты инерции определяются плотностью вещества внутри тела, то вычисленное на основе наблюдений значение полярного момента инерции Земли C представляет одно из основных условий, которым должно удовлетворять радиальное распределение плотности внутри Земли. Момент инерции Земли C меньше момента инерции однородного шара, для которого численный множитель равен 0,4, и, следовательно, плотность вещества внутри Земли должна увеличиваться к центру Земли.

Найдем теперь ускорение силы тяжести g на геоиде. Для этого достаточно продифференцировать полный геопотенциал (3.19). Так как $\mathbf{g} = \operatorname{grad} W$, то с учетом (3.3) найдем, что модуль $\mathbf{g}$ равен:

$$g = \left[\left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Второй член имеет величину порядка ε^2 (3.21). Поэтому с точностью до ε, получим:

$$g \approx g_r = \frac{\partial W}{\partial r} = \frac{GM}{a} \left[-\frac{a}{r^2} + \frac{3}{2} J_2 \frac{a^3}{r^4} (3 \cos^2 \theta - 1) + q \frac{r}{a^2} \sin^2 \theta \right].$$

На поверхности геоида выполняется равенство: $r = a(1 - \varepsilon \cos^2 \theta)$. Поэтому, сохраняя лишь члены порядка 10^{-3}, получим:

$$g \approx -\frac{GM}{a^2} (1 + 2\varepsilon \cos^2 \theta) + \frac{3}{2} \frac{GM}{a^2} J_2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \Omega^2 a \sin^2 \theta. \quad (3.23)$$

Отсюда ускорение силы тяжести на экваторе g_e равно:

$$g_e = -\frac{GM}{a^2} \left(1 + \frac{3}{2} J_2 - q \right). \quad (3.24)$$

Знак минус в формуле (3.24) подчеркивает тот факт, что радиальная компонента $\mathbf{g}$ направлена в сторону, противоположную направлению единичного вектора $\mathbf{i}_r$. В соответствии с принятыми значениями постоянных (см. табл. 8.2) $g_e = 9,7803278 \pm 1 \cdot 10^{-6}$ м $\cdot$ с$^{-2}$.

Используя определение g_e (3.24) и (3.23), найдем ускорение силы тяжести на широте $\varphi = 90^\circ - \theta$:

$$g = g_e \left[1 - \left(\frac{3}{2}J_2 - 2q\right)\sin^2\varphi\right]. \tag{3.25}$$

Более точное выражение для ускорения силы тяжести g, измеряемого в точке с геодезической широтой φ на высоте h над эллипсоидом с полуосями a, b и сжатием $f = (a-b)/a$, имеет вид:

$$\begin{aligned} g = g_e\big[1 + (f_2 + f_4)\sin^2\varphi - \frac{1}{4}f_4\sin^2 2\varphi\big] - \\ - \frac{2g_e}{a}\Big[1 + f + q + (-3f + \frac{5}{2}q)\sin^2\varphi\Big]h + \frac{3g_e}{a^2}h^2, \end{aligned} \tag{3.26}$$

где

$$f_2 = -f + \frac{5}{2}q + \frac{1}{2}f^2 - \frac{26}{7}fq + \frac{15}{4}q^2, \quad f_4 = -\frac{1}{2}f^2 + \frac{5}{2}fq.$$

С точностью до членов второго порядка малости

$$q = \frac{\Omega^2 a^2 b}{GM}, \quad g_e = \frac{GM}{ab}\left(1 - \frac{3}{2}q - \frac{3}{14}\frac{a^2 - b^2}{b^2}q\right).$$

Используя принятые значения постоянных, получим:

$$\begin{aligned} g = g_e\big[1 + 0,005302228650\sin^2\varphi - 0,5823893680\cdot 10^{-5}\sin^2(2\varphi)\big] - \\ - 0,3066829206\cdot 10^{-5}\big[1,006802606 - 0,1433994528\cdot 10^{-2}\sin^2\varphi\big]h \\ + 0,7212520044\cdot 10^{-12}h^2, \end{aligned} \tag{3.27}$$

где высота h измеряется в метрах.

3.3. Геоцентрическая и геодезическая системы координат

Формула (3.20) связывает геометрические параметры (a, c) Земли с её динамическими параметрами (A, C, J_2). Это позволяет выбрать геометрическую фигуру — эллипсоид вращения, который будет близок к реальной фигуре — геоиду.

Определим средний земной эллипсоид как эллипсоид, геометрические параметры которого определяются динамическими параметрами реальной Земли. Средний земной эллипсоид имеет те же

значения геоцентрической гравитационной константы $GM_\oplus$ ($M_\oplus$ — масса Земли), динамического форм-фактора J_2, что и реальная Земли. Постоянная скорость вращения эллипсоида должна равняться средней скорости вращения Ω Земли относительно главной оси инерции. Малая полуось среднего земного эллипсоида связана с осью вращения Земли. При этих условиях центр эллипсоида совпадает с центром масс Земли.

Таким образом, параметры среднего земного эллипсоида определяются динамическими параметрами Земли, которые были точно измерены лишь с появлением искусственных спутников. В настоящее время, наоборот, средний эллипсоид широко используется в динамической астрономии, потому что его гравитационный потенциал на больших расстояниях практически не отличается от потенциала геоида.

Однако с точки зрения геодезистов средний земной эллипсоид не является наилучшей фигурой. Он хорошо аппроксимирует геоид в среднем, но на отдельных участках поверхности отличие эллипсоида от геоида может быть очень большим. Поэтому с помощью геодезических методов для разных участков земной поверхности были построены *местные референц-эллипсоиды* (в большинстве развитых стран еще до начала космической эры). Как правило, они лучше аппроксимируют геоид на некоторой площади, чем средний земной эллипсоид, однако оси референц-эллипсоида могут быть повернуты относительно осей среднего земного эллипсоида. Кроме этого, начало осей O' может не совпадать с центром масс Земли O (рис. 3.2).

Отличие координат, измеряемых относительно осей среднего или референц-эллипсоидов, обязательно учитывается и в науке, и в повседневной жизни. Эта процедура выполняется, например, при посадке самолетов, координаты которых измеряются с помощью GPS в системе WGS84, на аэродром, координаты которого определены относительно осей местного референц-эллипсоида.

В таблице 3.1 приводятся параметры некоторых, наиболее часто используемых, средних земных эллипсоидов. Для каждого из эллипсоидов приведенные параметры являются константами, то есть считается, что они известны точно.

Система спутниковой навигации GPS сообщает координаты в системе среднего эллипсоида WGS84 (World Goodetic System 1984). Эллипсоид IERS96 (International Earth Rotation Service 1996), пред-

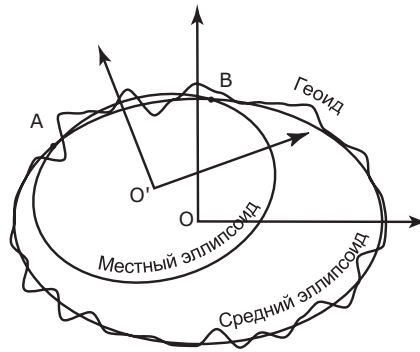


Рис. 3.2. Определение среднего земного эллипсоида и референц-эллипсоида для области AB.

Таблица 3.1. Параметры некоторых эллипсоидов.

Название	a, км	$1/f$	$GM_{\oplus}$, $\times 10^{14}$м^{3}с$^{-2}$	J_2, $\times 10^{-3}$	Ω $\times 10^{-5}$рад/с
WGS84	6378,137	298,25722356	3,986004418	1,08263	7,292115
GRS80	6378,137	298,257222101	3,986005	1,08263	7,292115
IERS96	6378,13649	298,25645	3,986004418	1,0826359	7,292115
ПЗ-90	6378,136	298,257839303	3,9860044	1,0826257	7,292115

лагаемый в стандартах Международной службы вращения Земли, рекомендуется использовать при обработке РСДБ-наблюдений. Для геодезических работ рекомендуется использовать средний эллипсоид GRS80 (Geodetic Reference System 1980), принятый Генеральной Ассамблеей Международной ассоциации геодезии в 1979 г.

Постановлением правительства Российской Федерации № 568 от 28 июля 2000 г. на территории России устанавливаются единые государственные системы координат: система геодезических координат 1995 года (СК-95) — для использования при осуществлении геодезических и картографических работ, начиная с 1 июля 2002 г.; геоцентрическая система координат «Параметры Земли 1990 года» (ПЗ-90) — для использования в целях геодезического обеспечения орбитальных полетов и решения навигационных задач. Параметры земного эллипсоида ПЗ-90, который используется при определении координат с помощью навигационный системы ГЛОНАСС, также приводятся в таблице 3.1.

Определим теперь систему координат, связанную со средним земным эллипсоидом. Основным направлением геоцентрической системы координат является ось вращения Земли, совпадающая с малой полуосью среднего земного эллипсоида. Плоскость, проходящая через полюсы эллипсоида и точку (не обязательно находящуюся на поверхности эллипсоида), называется *плоскостью геодезического меридиана* этой точки. Уравнение меридионального сечения эллипсоида есть уравнение эллипса (3.22).

Нулевым меридианом (началом отсчета долгот) считается меридиан, проходящий через Гринвичскую обсерваторию.

На рис. 3.3 изображен эллипс (меридиональное сечение эллипсоида), наблюдатель находится в точке P, а P' — точка эллипсоида такая, что PP' есть нормаль к эллипсоиду.

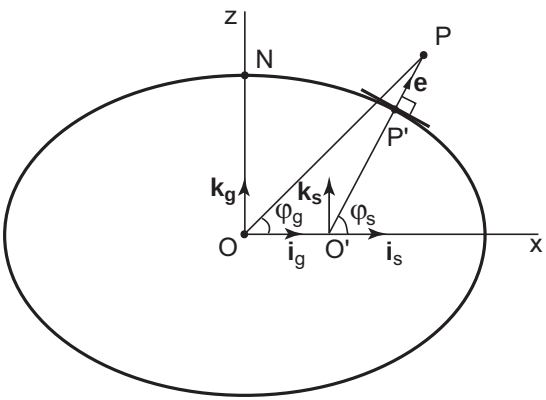


Рис. 3.3. Определение геоцентрических и геодезических координат.

Координаты точки P можно задать в виде :
а) геоцентрических прямоугольных координат: x, y, z;
б) геоцентрической широты, долготы и расстояния: $\varphi_g, \lambda_g, a\rho$;
в) геодезической широты, долготы и высоты: φ_s, λ_s, h.

Для определения геодезических и геоцентрических координат введем оси x (с ортом $\mathbf{i}_g$) и z (орт $\mathbf{k}_g$), направленные по большой и малой полуосям эллипса. Определим также орты $\mathbf{i}_s$ и $\mathbf{k}_s$ с началом в точке O' (рис. 3.3). Орт $\mathbf{e}$ направим вдоль перпендикуляра PP', т. е. $\mathbf{e}$ является нормалью к эллипсоиду в точке P', направленной наружу.

Тогда $\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{e} = \sin\varphi_s$, где угол φ_s называется *геодезической широтой* точки P (и P'), $\mathbf{k}_g \cdot \overrightarrow{OP} = \sin\varphi_g$, угол φ_g называется *геоцентрической широтой* точки P.

Пусть теперь ось x лежит в плоскости нулевого меридиана. На рис. 3.4 показана плоскость экватора, видимая с северного полюса (из точки N).

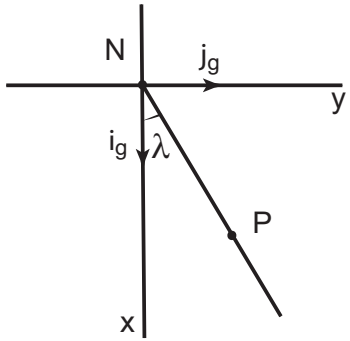


Рис. 3.4. Определение долготы.

Направление оси y определяется уравнением:

$$\mathbf{j}_g = \mathbf{k}_g \times \mathbf{i}_g.$$

Назовем геодезической долготой λ двугранный угол между плоскостями нулевого меридиана и меридиана точки P. Геодезическая и геоцентрическая долготы точки P равны, так как единичные векторы $\mathbf{r}_P = \overrightarrow{OP}/|\overrightarrow{OP}|$ и $\mathbf{r}'_P = \overrightarrow{O'P}/|\overrightarrow{O'P}|$ лежат в одной меридиональной плоскости: $\lambda_s = \lambda_g$. Координаты точки P можно выразить через элементы геодезического базиса, а также через геоцентрические координаты:

$$\mathbf{r}'_P = (\mathbf{i}_s\, \mathbf{j}_s\, \mathbf{k}_s) \begin{pmatrix} \cos\varphi_s \cos\lambda_s \\ \cos\varphi_s \sin\lambda_s \\ \sin\varphi_s \end{pmatrix}, \tag{3.28}$$

$$\mathbf{r}_P = (\mathbf{i}_g\, \mathbf{j}_g\, \mathbf{k}_g) \begin{pmatrix} \cos\varphi_g \cos\lambda_g \\ \cos\varphi_g \sin\lambda_g \\ \sin\varphi_g \end{pmatrix}. \tag{3.29}$$

Разность геодезической и геоцентрической широт $\varphi_s - \varphi_g$ не превышает $12'$ и максимальна при $\varphi_g = 45°$.

Вектор $\mathbf{r}'_P$ определяет геодезический зенит, а $\mathbf{r}_P$ — геоцентрический зенит. Оба этих направления не совпадают с астрономическим зенитом, то есть с направлением отвесной линии. Геодезический зенит был бы астрономическим зенитом, если бы геоид точно совпадал с эллипсоидом, т. е. не было бы локальных гравитационных аномалий и точка P была бы на эллипсоиде. Отклонение отвесной линии от нормали к эллипсоиду характеризуется двумя малыми углами ξ и η, составляющими *уклонение отвесной линии.* Допустим, что

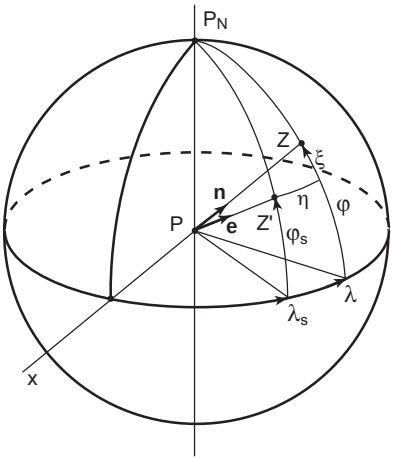


Рис. 3.5. Уклонение отвесной линии (ξ, η). Показана небесная сфера с центром в точке P.

координаты единичного вектора $\mathbf{n}$, касательного к силовой линии в точке P, есть φ, λ. Тогда астрономический зенит Z — проекция отвесной линии на небесную сферу — имеет координаты: широту φ и долготу λ (рис. 3.5). Геодезический зенит Z' — проекция нормали (вектора $\mathbf{e}$) к референц-эллипсоиду (рис. 3.3) на небесную сферу — имеет координаты φ_s и λ_s. В силу малости уклонения отвесной линии (компоненты ξ и η редко превышают $10''$) из рис. 3.5 находим, что уклонения отвесной линии равны:

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi - \varphi_s, \\ \eta &= (\lambda - \lambda_s)\cos\varphi_s. \end{aligned} \tag{3.30}$$

На рис. 3.6 показаны топографическая поверхность (реальная поверхность Земли), а также геоид и референц-эллипсоид. Показаны также силовая линия, проходящая через точку P, в которой находится наблюдатель, направление силы тяжести и отвесной линии в этой точке. Дуга PP', как говорилось выше, называется ортометрической высотой H.

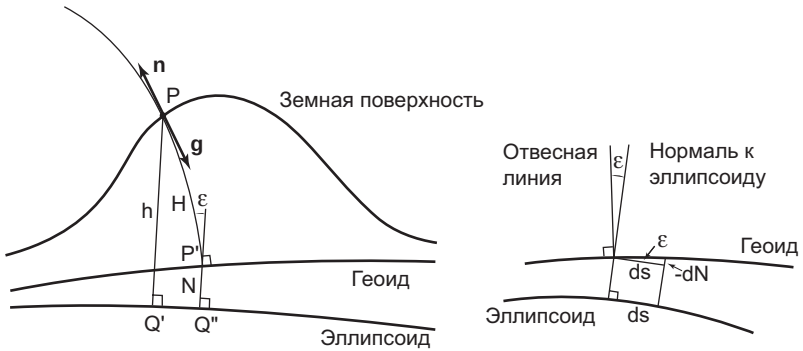


Рис. 3.6. Связь между высотой геоида и уклонением отвесной линии.

Опустим перпендикуляр из точки P на поверхность эллипсоида. Отрезок PQ', равный h, называется геодезической высотой точки P. Пусть силовая линия, проходящая через точку P, пересекает геоид в точке P'. Высотой N геоида над эллипсоидом называется отрезок $P'Q''$, перпендикулярный поверхности эллипсоида. С достаточной степенью точности (в пределах нескольких долей миллиметра) получим

$$N = h - H. \tag{3.31}$$

Легко найти соотношение между высотой геоида и уклонением отвесной линии на поверхности геоида. Если этот угол равен ε, то

$$dN = -\varepsilon ds,$$

где ds — элемент дуги на поверхности эллипсоида, или

$$\varepsilon = -\frac{dN}{ds}.$$

Знак минус выбран по соглашению. Обычно уклонение отвесной линии разлагают на две компоненты: ξ — по направлению север-юг

с положительным направлением отсчета от геодезического зенита к северному полюсу мира и η — по направлению восток-запад от геодезического зенита на запад. На сфере квадрат элемента дуги

$$ds^2 = R^2 d\varphi^2 + R^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2,$$

где R — радиус сферы. В первом приближении элемент дуги эллипсоида ds можно заменить элементом сферической дуги. Поэтому $ds_\varphi = Rd\varphi$ и $ds_\lambda = R\cos\varphi d\lambda$. Тогда уравнения

$$\xi = -\frac{dN}{ds_\varphi} = -\frac{1}{R}\frac{dN}{d\varphi}, \quad \eta = -\frac{dN}{ds_\lambda} = -\frac{1}{R\cos\varphi}\frac{dN}{d\lambda}$$

связывают уклонения отвесной линии с высотой геоида. С помощью соответствующих поправок уклонения отвесной линии на геоиде можно пересчитать для наблюдателя, находящегося на некоторой высоте над уровнем моря.

Геодезические координаты определяются направлением геодезической вертикали, которое нельзя найти из астрономических наблюдений. Поэтому геодезические координаты находятся из измерений расстояний и углов на поверхности Земли, т. е. из так называемой геодезической съемки. Координаты относятся либо к среднему, либо к местному эллипсоиду, в зависимости от того, какой эллипсоид положен в основу съемки. Геодезические координаты всегда связаны с конкретным эллипсоидом, основные параметры которого — большую полуось и сжатие — необходимо знать при пересчете координат из одной системы в другую. При пересчете координат в систему, связанную с местным эллипсоидом, требуется учесть также ориентацию его осей и смещение центра.

Астрономические координаты телескопа могут отличаться (до нескольких секунд дуги) от его геодезических координат, которые требуется знать для вычисления геоцентрических координат. Так как направление отвесной линии определяется локальным гравитационным полем, то уклонения ξ и η можно определить, зная ортометрические высоты в районе расположения телескопа. Из уравнений (3.30) следует, что уклонение отвесной линии влияет не только на широту, но и на астрономическую долготу места. Ниже будет показано, что местное время связано с долготой. Следовательно, без учета уклонения отвесной линии в определение времени из оптических астрометрических наблюдений вносится систематическая ошибка.

Уравнения (3.30) и (3.31) связывают геодезические и астрономические координаты через уклонение отвесной линии и высоту геоида. Геодезические координаты φ_s, λ_s, h и геоцентрические φ_g, λ_g, $OP = a\rho$ связаны с декартовыми посредством формул:

$$\begin{aligned} x = a\rho\cos\varphi_g\cos\lambda_g &= (aC + h)\cos\varphi_s\cos\lambda_s, \\ y = a\rho\cos\varphi_g\sin\lambda_g &= (aC + h)\cos\varphi_s\sin\lambda_s, \\ z = a\rho\sin\varphi_g &= (aS + h)\sin\varphi_s, \end{aligned}$$

где a — экваториальный радиус, ρ — геоцентрический радиус (в единицах экваториального радиуса), C, S — вспомогательные функции, зависящие от сжатия f и геодезической широты φ_s:

$$C = [\cos^2\varphi_s + (1-f)^2\sin^2\varphi_s]^{-1/2}, \qquad S = (1-f)^2 C.$$

Обратное преобразование от x, y, z к φ_s, λ_s, h не может быть выражено в замкнутой форме и обычно выполняется с помощью итерационного алгоритма (программа приведена в IERS Technical Note 21: <http://maia.usno.navy.mil/conventions/chapter3/geod.f>).

Отклонение геоида от эллипсоида обычно находится в пределах от ~ -110 до $\sim +80$ м (рис. 3.7). Сейчас на основе спутниковых наблюдений разработано несколько моделей геопотенциала, например, GRIM5 (Gravity Field Model), EGM96 (Earth Gravitational Model 1996). Модель геопотенциала EGM96 рекомендуется Международной службой вращения Земли для обработки астрометрических и геодезических наблюдений, и может быть найдена на сервере http:/www.nima.mil/GandG/wgs-84/egm96.html.

Геоид строится в настоящее время по спутниковым данным. Изменение элементов орбит спутников связано с коэффициентами $J_2, J_3, \ldots$ в выражении потенциала Земли (3.18), которые в свою очередь определяют геоид (через формулы 3.20 и 3.21). Интересно, что возвышения и впадины геоида не совпадают с топографией Земли. Это говорит о том, что существует компенсация масс (*изостазия*) в континентальных масштабах. Отклонение геоида от эллипсоида вращения значительно меньше, чем было бы, если бы материки, имеющие меньшую плотность, чем плотность мантии, плавали на эллипсоидальной Земле. Поэтому для объяснения результатов, показанных на рис. 3.7, была предложена теория изостазии: корни материков, представляющих блоки земной коры, глубоко вклиниваются в более плотную мантию, и за счет разности плотностей коры и

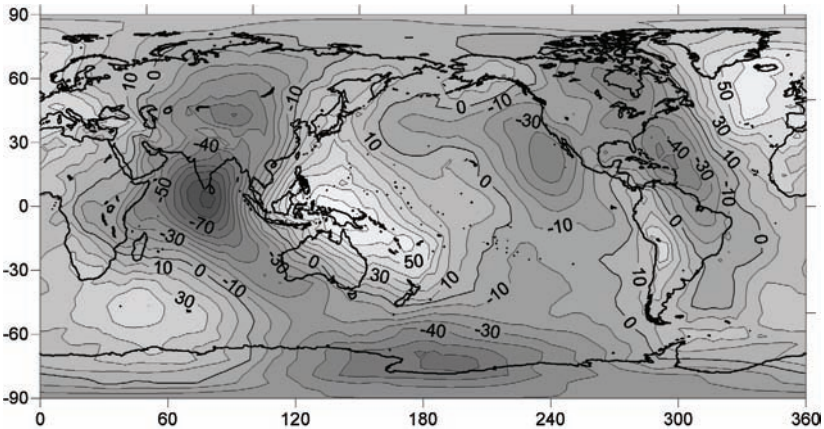


Рис. 3.7. Отклонение (в м) геоида (модель EGM96) от эллипсоида WGS84.

мантии осуществляется компенсация изменений силы тяжести. Таким образом изменение высот геоида связано с состоянием глубоких слоев мантии и, предполагается, определяется конвективными течениями в нижней мантии. Поэтому вопросу изучения формы геоида, ее изменений во времени уделяется большое внимание. В настоящее время осуществляется и планируется ряд космических проектов (CHAMP (Gravity And Magnetic Field Mission), аппарат запущен в 2001 г.; GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment Mission), запущен в 2002 г.; GOCE (Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Mission), запуск планируется в 2006 г., и др.), главной задачей которых будет изучение изменения силы тяжести (и, следовательно, геоида) в пространстве и во времени. Ожидается, что высоты геоида будут определены с погрешностью 1 см.

Поясним на примере необходимость введения трех систем координат: астрономической, геодезической и геоцентрической и преобразования координат вектора из одной системы в другую. Допустим, что на телескопе с горизонтальной установкой наблюдаются спутники Земли. Согласно определению, основной осью горизонтальной системы является ось, совпадающая с отвесной линией. Поэтому координаты спутников определяются в локальной топоцентрической горизонтальной системе. Если координаты телескопа выражены относительно принятого референц-эллипсоида (то есть заданы геодезические широта, долгота и высота телескопа над эллипсоидом), то

предварительно нужно найти координаты телескопа относительно среднего земного эллипсоида. Спутники обращаются относительно центра масс Земли, который совпадает с точкой O (рис. 3.3) или геоцентром, и эфемериды спутников вычисляются в геоцентрической системе относительно среднего эллипсоида. Следовательно, топоцентрические координаты спутников сначала должны быть преобразованы в геодезическую систему, а затем в геоцентрическую систему.

3.4. Земная система координат

Международная земная система отсчета (International Terrestrial Reference System, ITRS), по определению, есть геоцентрическая система с началом в центре масс Земли, включая океаны и атмосферу, вращающаяся вместе с Землей. Единицей длины является метр (СИ). Шкалой координатного времени является шкала геоцентрического координатного времени TCG, Geocentric Coordinate Time (см. § 4.5.2).

Ось Z системы ITRS в пределах ± 30 мс дуги совпадает с условным международным началом (Conventional International Origin, CIO). Это было сделано для того, чтобы избежать появления скачков в движении полюса при замене систем координат. По определению, условное международное начало есть среднее положение земного полюса по измерениям на интервале с 1900 г. по 1905 г., выполненным Международной службой широты (предшественницей МСВЗ), в состав которой входили пять обсерваторий, расположенных на широте $39°08'$.

Международная опорная земная система отсчета (International Terrestrial Reference Frame, ITRF) реализуется декартовыми координатами X, Y, Z и скоростями V_x, V_y, V_z ряда реперных точек. Скорости точек обусловлены тектоническими движениями плит земной коры.

История ITRF начинается в 1984 г., когда впервые были получены координаты реперных точек. Они были найдены на основе совместного уравнивания координат радиотелескопов, лазерных дальномеров и допплеровских приемников сигналов с искусственных спутников Земли. Совместное уравнивание позволило также привязать систему координат, определяемую на основе РСДБ наблю-

дений, к центру масс Земли. В основу уравнивания был положен принцип коллокации: предполагается, что скорости инструментов, расположенных в одном месте (коллокационном пункте), одинаковы. Для построения системы ITRF2000 в семидесяти коллокационных пунктах использовались инструменты двух разных типов (например, радиотелескоп и GPS-приемник), в 25 пунктах — три и в 4 пунктах — 6 различных инструментов.

За прошедшие 20 лет были получены десять версий ITRF, начиная с ITRF88 и заканчивая последней — ITRF2000. В «Стандартах МСВЗ» при всех астрометрических и геодезических работах рекомендуется использовать ITRF2000 (http://lareg.ensg.ign.fr/ITFR).

Преобразование прямоугольных координат вектора из одной опорной земной системы в другую выражается с помощью семи параметров $T_1, T_2, T_3, D, R_1, R_2, R_3$ и их первых производных $\dot{T}_1, \dot{T}_2, \dot{T}_3, \dot{D}, \dot{R}_1, \dot{R}_2, \dot{R}_3$:

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1 + \mathbf{T} + D\mathbf{X}_1 + R\mathbf{X}_1,$$
$$\dot{\mathbf{X}}_2 \approx \dot{\mathbf{X}}_1 + \dot{\mathbf{T}} + \dot{D}\mathbf{X}_1 + \dot{R}\mathbf{X}_1,$$

где $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ — радиусы-векторы одной и той же точки, выраженные в опорных земных системах (1) и (2), $\mathbf{T}$ — радиус-вектор начала отсчета системы (1) относительно (2), D — масштабный множитель, R — матрица вращения:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -R_3 & R_2 \\ R_3 & 0 & -R_1 \\ -R_2 & R_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Система ITRF2000 реализуется координатами и скоростями более чем 800 точек, жестко связанных с корой Земли, и расположенных примерно в 500 пунктах. Каждая из точек представляет собой либо особую точку инструмента (например, пересечение осей радиотелескопа), либо геодезический маркер.

Ориентация осей ITRF2000 и ее стабильность во времени обеспечивается соответствующим выбором реперных точек. Критерии выбора реперных точек следующие:
1) наблюдения должны быть непрерывными в течение не менее трех лет;

2) точки должны располагаться на значительном расстоянии от границ тектонических плит и от разломов внутри плит;
3) ошибка вычисления скорости точки (в решении ITRF2000) должна быть меньше 3 мм/год;
4) разброс в скорости точки по как минимум трем разным решениям (например, РСДБ, GPS и лазерным дальномерам) не должен превышать 3 мм/год.

Изменение в ориентации осей ITRF2000 связано с кинематической моделью движения плит земной коры NNR-NUVEL-1A. В соответствии с этой моделью вся поверхность Земли разбита на 16 плит, каждая из которых вращается, но суммарное вращение земной коры равно нулю. Обозначение NNR (no-net-rotation) говорит об отсутствии глобального вращения земной коры и, следовательно, системы ITRF2000, жестко связанной с корой.

Система ITRF2000 характеризуется следующими свойствами:
1) шкалой времени в ITRF2000 является шкала земного времени TT (Terrestrial Time) в отличие от ITRF97, в которой использовалось геоцентрическое координатное время TCG;
2) координаты и скорости пунктов приводятся на эпоху 1997.0;
3) масштабный множитель D при преобразовании между ITRF2000 и системой, задаваемой координатами радиотелескопов, равен нулю;
4) начало координат реализуется приравниваем нулю вектора $\mathbf{T}$ между ITRF2000 и системой, задаваемой координатами лазерных дальномеров.

Таким образом достигается совмещение начала координат ITRF2000 с центром масс Земли с ошибкой менее 10 мм. Особо отметим, что пространственные координаты в системе ITRF2000 согласованы со шкалой TT (см. также стр. 431). Решение об использовании в системе ITRF2000 в качестве временной координаты земного времени TT было принято потому, что все центры при обработке наблюдений используют время TT.

Точность наблюдений современными средствами настолько высока, что позволяет определить скорости пунктов, то есть изменение их координат из-за тектонических движений, в течение достаточно короткого промежутка времени (около года).

В качестве примера на рис. 3.8 показано изменение длины базы (расстояния между двумя радиотелескопами) в Ветзеле (Германия) и Вестфорде (США). Из рисунка видно, что метод РСДБ позволяет

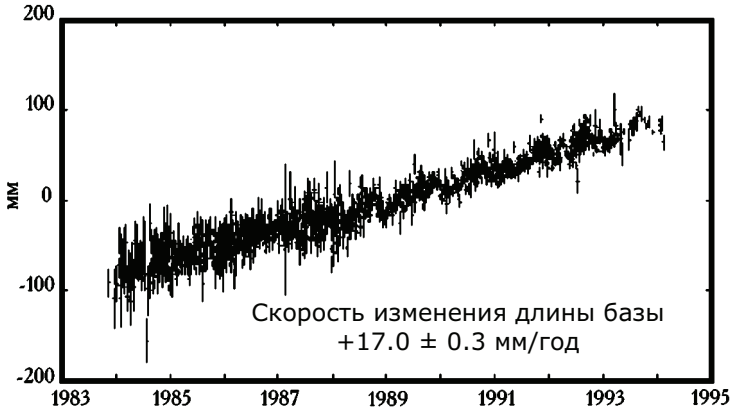


Рис. 3.8. Изменение длины базы (5998 км) Ветзель (Германия) – Вестфорд (США).

уверенно определять межконтинентальные расстояния с миллиметровой точностью.

Так как оси системы координат определяются координатами пунктов, то изменение последних может привести к повороту системы координат. Чтобы этого не было (непредсказуемое вращение системы координат может быть интерпретировано как изменение параметров вращения Земли), на скорости пунктов накладывается дополнительное условие: кора Земли не должна иметь вращения относительно земной системы координат. Математически это условие можно записать в виде:

$$\int_V \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} \right|^2 dM = \min, \tag{3.32}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор элемента массы dM в геоцентрической системе координат, $\mathbf{\Omega}$ — вектор мгновенной угловой скорости вращения Земли. Интегрирование проводится по объему V деформируемой части Земли. Во вращающейся системе имеем:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v},$$

где $\mathbf{v}$ — вектор скорости деформации. Уравнение (3.32) эквивалентно выражению:

$$\int_V |\mathbf{v}|^2 dM = \min. \tag{3.33}$$

Оси выбранной таким образом системы называются *осями Тиссерана*[2].

Рассмотрим, почему оси Тиссерана так важны при определении земной системы координат. Если тело не является абсолютно твердым, то движение элемента массы dM вокруг центра масс разделяется на вращение с линейной скоростью $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$ и остаточную деформацию со скоростью $\mathbf{v}$. Угловой момент тела, который по определению есть

$$\mathbf{H} = \int_V \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dM,$$

в нашем случае равняется

$$\mathbf{H} = \int_V \mathbf{r} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})\, dM + \mathbf{h},$$

где интеграл

$$\mathbf{h} = \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{v}\, dM$$

называется *относительным угловым моментом*. Используя определение тензора инерции $\overline{C}$, имеем

$$\mathbf{H} = \overline{C}\mathbf{\Omega} + \mathbf{h}.$$

Предположим, что $\mathbf{h} \neq 0$, и $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Это означает, что поле скоростей деформации создается вращением тела и

$$\mathbf{h} = \int_V \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\, dM = \overline{C}\boldsymbol{\omega}.$$

Таким образом, имеем:

$$\mathbf{H} = \overline{C}(\mathbf{\Omega} + \boldsymbol{\omega}),$$

то есть разложение движения тела на вращательное и деформационное движения неоднозначно. Если $\mathbf{h} = 0$, то $\boldsymbol{\omega} = 0$, то есть *поле скоростей деформации не содержит вращения*; измеряемый вектор мгновенной угловой скорости вращения Земли $\mathbf{\Omega}$ в этом случае не содержит добавок из-за деформации коры Земли.

Можно показать, что при выборе осей, в которых $\mathbf{h} = 0$, удовлетворяется условие (3.33). Таким образом, относительный угловой момент, вызываемый деформацией тела, в осях Тиссерана равен

[2]Тиссеран Франсуа (1845–1896) — французский астроном, директор Парижской обсерватории.

нулю. На практике при уравнивании наблюденных скоростей пунктов используется условие (3.33).

В разные моменты времени ориентация осей Тиссерана может быть различной, так как поле скоростей деформации меняется. Поэтому при определении системы ITRF обязательно указывается эпоха, к которой относятся координаты и скорости пунктов.

В осях Тиссерана вектор скорости пункта $\mathbf{v} = \mathbf{V}_0 + \delta\mathbf{v}$, где $\mathbf{V}_0$ — вектор скорости, определяемый тектоническим движением плиты, на которой располагается пункт наблюдения, $\delta\mathbf{v}$ — вектор остаточной скорости.

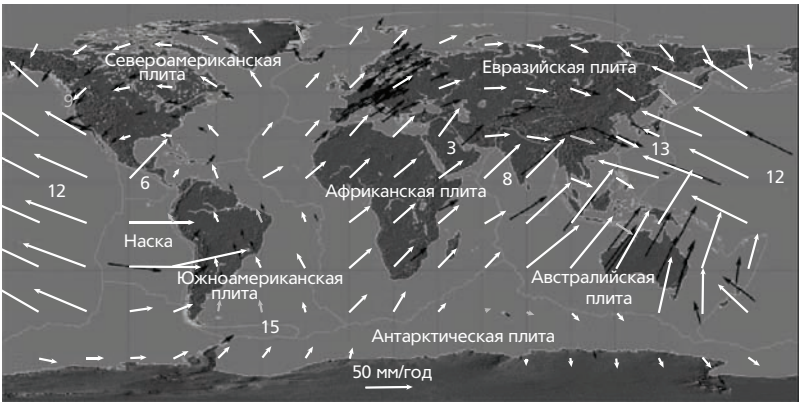


Рис. 3.9. Карта тектонических плит и скоростей пунктов.

На рис. 3.9 темными стрелками показаны измеренные с помощью GPS-приемников скорости пунктов, светлыми — скорости, вычисленные по модели движения плит NNR-NUVEL-1A. Из рисунка видно достаточно хорошее согласии модели движения плит и наблюдений, за исключением регионов на границах плит. Названия плит, номера которых указаны на рисунке, приводятся в таблице 3.2.

Изменение координат $\mathbf{R}_i = (X_i, Y_i, Z_i)$ i-го пункта наблюдения вычисляется по формуле:

$$\mathbf{R}_i(t) = \mathbf{R}_i^0 + \mathbf{V}_i^0(t - t_0) + \Delta\mathbf{R}_i(t), \tag{3.34}$$

где $\mathbf{R}_i^0, \mathbf{V}_i^0$—положение и скорость телескопа, расположенного в i-м пункте, на эпоху t_0 определения ориентации ITRF. Поправки $\Delta\mathbf{R}_i(t)$

к координатам пункта вычисляются на основе моделей приливов в твердой Земле (могут достигать ± 50 см) и океанических приливов (± 5 см), переменной атмосферной нагрузки на кору Земли (± 2 см), термического расширения телескопа и т.д.

В декартовых координатах изменение координат i-го пункта, расположенного на j-ой плите (3.34), записывается в виде:

$$\begin{aligned} X_i =& X_i^0 + (\omega_y^j Z_i^0 - \omega_z^j Y_i^0)(t - t_0) + \Delta X_i, \\ Y_i =& Y_i^0 + (\omega_z^j X_i^0 - \omega_x^j Z_i^0)(t - t_0) + \Delta Y_i, \\ Z_i =& Z_i^0 + (\omega_x^j Y_i^0 - \omega_y^j X_i^0)(t - t_0) + \Delta Z_i, \end{aligned}$$

где $\omega_x^j, \omega_y^j, \omega_z^j$—компоненты угловой скорости j-ой плиты. Угловые скорости плит (модель NNR-NUVEL-1A) приводятся в таблице 3.2.

Таблица 3.2. Угловые скорости вращения плит (в 10^{-9} рад/год)

	Плита	ω_x	ω_y	ω_z
1	Африканская	0,891	-3,099	3,922
2	Антарктическая	-0,821	-1,701	3,706
3	Аравийская	6,685	-0,521	6,760
4	Австралийская	7,839	5,124	6,282
5	Карибская	-0,178	-3,385	1,581
6	Кокос	-10,425	-21,605	10,925
7	Евразийская	-0,981	-2,395	3,153
8	Индийская	6,670	0,040	6,790
9	Хуан де Фука	5,200	8,610	-5,820
10	Наска	-1,532	-8,577	9,609
11	Североамериканская	0,258	-3,599	-0,153
12	Тихоокеаническая	-1,510	4,840	-9,970
13	Филиппинская	10,090	-7,160	-9,670
14	Ривера	-9,390	-30,960	12,050
15	Скотиа	-0,410	-2,660	-1,270
16	Южноамериканская	-1,038	-1,515	-0,870

3.5. Приливы и определение земной системы координат

Рассмотрим влияние приливов на определение земной системы координат.

Потенциал в точке наблюдения складывается из гравитационного потенциала внешних тел (Солнца, Луны и планет) и геопотенциала, возмущенного приливными деформациями. Внешний потенциал включает как зависящие от времени гармоники, так и постоянную во времени часть. Аналогично, и приливное смещение точки наблюдения содержит постоянную и переменную во времени компоненты.

В зависимости от способа учета приливов земная система координат может быть определена как система,

- связанная со «средней» корой,
- корой, свободной от приливов.

Геопотенциал также может быть представлен в системе,

- связанной со «средним» приливом,
- свободной от приливов,
- соответствующей «нулевому приливу».

Если из мгновенных координат пункта, жестко связанного с корой Земли, или из потенциала вычесть зависящие от времени приливные поправки, то результирующие координаты будут отнесены к «средней» коре; оставшиеся приливные поправки называются «средним приливом» (mean tide). Результирующий потенциал называется потенциалом, соответствующим «среднему приливу». *Постоянная часть приливной деформации, которая вызывается потенциалом, присутствует в «средней» коре; геопотенциал «среднего прилива» равен сумме постоянной части внешнего возмущающего и постоянной части возмущенного потенциалов.* «Средняя» кора соответствует реальным средним положениям пунктов на поверхности Земли. Геоидом, соответствующим «среднему приливу», был бы геоид, совпадающий со средней поверхностью океана в отсутствии негравитационных возмущений (течений и ветров). В общем случае,

величины, отнесенные к «средней» коре (такие как сжатие, динамический форм-фактор, экваториальный радиус), определяют размеры эллипсоида «средней» коры и форму геоида «среднего прилива».

Если теперь из координат пункта вычесть постоянную часть прилива, то координаты будут отнесены к коре, свободной от приливов (tide free). Удаление постоянной части *внешнего* потенциала из геопотенциала «среднего прилива» приводит к потенциалу «нулевого прилива» (zero tide). Постоянная часть возмущенного потенциала все еще присутствует в геопотенциале; удаление этой компоненты приводит к геопотенциалу, свободному от приливов (tide free). Важно заметить, что в отличие от потенциала термин «нулевой прилив», примененный к *коре* и связанным с ней величинам, является синонимом термина «средний прилив» (рис. 3.10).

Почему при вычислении смещения пунктов или геопотенциала особое внимание уделяется постоянному приливу? Дело в том, что

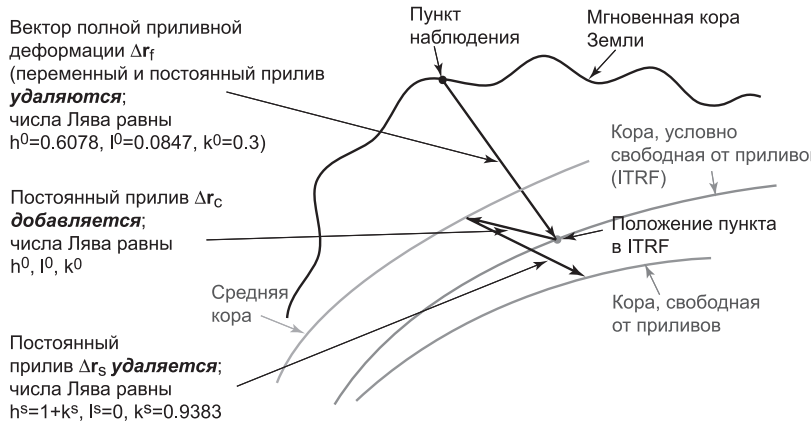


Рис. 3.10. Определение земной коры, «условно свободной от приливов», «свободной от приливов», и «средней» коры. Для определения положения пункта в системе ITRF из его мгновенного радиуса-вектора вычитается вектор $\Delta\mathbf{r}_f$ полной приливной деформации, причем постоянное смещение вычисляется с использованием принятых чисел Лява. Добавление вектора $\Delta\mathbf{r}_c$ постоянного смещения определяет координаты пункта в системе, связанной со «средней» корой. Если из полученного радиуса-вектора вычесть вектор $\Delta\mathbf{r}_s$ постоянного смещения, вычисленный для вековых чисел Лява h^s, l^s, то получим вектор пункта наблюдения в системе, «свободной от приливов».

Земля не является абсолютно твердым телом: под действием внешних сил расстояние между двумя произвольными точками изменяется. Земля не является и абсолютно упругим телом. Если действие внешних сил прекращается, то точки не возвращаются в первоначальное положение, т. е. Земля остается в деформированном состоянии. Для описания упругих деформаций Земли английский геофизик Ляв ввел безразмерные параметры k, h (позже японский ученый Шида определил число l), которые сейчас называются числами Лява. Числа Лява связаны с модулями упругости Земли (величинами, характеризующими упругие свойства материалов при малых деформациях). В настоящее время доказано, что упругие свойства Земли, и, следовательно, числа Лява зависят от частоты воздействующей на Землю силы. Для принятой модели строения Земли были рассчитаны числа Лява, на основе которых вычисляется приливное смещение пункта. Но вычисленная поправка к координатам пункта не является правильной из-за того, что для низких частот (или больших периодов) числа Лява известны с большими ошибками. Поэтому при вычислении коры, свободной от приливов, используются принятые числа Лява; значит, часть долгопериодических (или вековых) приливов, в том числе и постоянный прилив, остается в координатах пункта. Деформации Земли, вызываемые постоянным приливом, характеризуются вековым числом Лява, которое значительно отличается от принятого в модели. Если ошибка в величине числа Лява составляет лишь 5%, то ошибка в вертикальном смещении составит 6 мм, а в горизонтальном — 3 мм. Это значит, что в чистом виде кора, свободная от приливов, не может быть реализована.

Так как модель учета приливов неточна из-за незнания долгопериодических чисел Лява, то геопотенциал и земная система координат, основанные на использовании этой модели, называются «условно свободными от приливов» (conventional tide free). *Координаты станций, задающие земную систему координат ITRF2000, условно свободны от приливов*.

На это определение ITRF необходимо обратить особое внимание в связи с резолюцией 16 Генеральной Ассоциации Геодезии (1983). В резолюции записано, что «признавая необходимость единого подхода к учету приливных поправок к различным геодезическим величинам, таким как сила тяжести и координаты станций», рекомендуется «не удалять непрямой эффект, вызываемый постоянной де-

формацией Земли», т. е. постоянная часть возмущенного потенциала должна оставаться в геопотенциале. Из этой резолюции следует, что при обработке гравиметрических наблюдений должны использоваться величины, связанные с потенциалом «нулевого прилива», а при обработке геодезических наблюдений величины связываются со «средней» корой.

В действительности это решение до сих пор не учитывается при обработке наблюдений, в частности, при анализе данных космических навигационных систем. Координаты станций, используемые при анализе, заданы в системе, «условно свободной от приливов» (в ITRF2000). Чтобы перейти от координат в этой системе к координатам в системе, связанной со средней корой, необходимо к компонентам радиуса-вектора пункта в ITRF *добавить* радиальную Δr и тангенциальную поправки Δr_θ:

$$\Delta r = [-0,1206 + 0,0001 P_2(\sin\varphi)] P_2(\sin\varphi) \text{ [м]},$$
$$\Delta r_\theta = [+0,0252 + 0,0001 P_2(\sin\varphi)] \sin 2\varphi \text{ [м]},$$

где $P_2(\sin\varphi) = (3\sin^2\varphi - 1)/2$ — полином Лежандра, φ — широта пункта в системе ITRF. Поправка Δr на полюсах имеет величину примерно -12 см и $+6$ см на экваторе.

Глава 4

ШКАЛЫ ВРЕМЕНИ

Для изучения движения небесных тел, помимо знания координат необходимо знать момент времени наблюдения (его *эпоху*), а также промежуток времени между наблюдениями. Самые ценные и дорогостоящие наблюдения могут оказаться бесполезными, если не будет известно, к какому моменту времени их отнести.

Определение момента и промежутка времени требует введения шкалы времени, т. е. выбора некоторого периодического астрономического или физического процесса, построение теории этого процесса и задание единицы времени. Промежуток между событиями определяется разностью эпох, которая измеряется в принятых единицах времени. Единица времени назначается по соглашению как некоторое число периодов астрономического или физического процесса.

В зависимости от используемого периодического процесса в современной астрономии определены и используются шкалы:

1. Солнечного времени;
2. Звездного времени;
3. Динамического времени;
4. Атомного времени.

Вследствие вращения Земли вокруг своей оси через небесный меридиан периодически проходят звезды, Солнце, точки небесной сферы. Измерение времени сводится к измерению двугранного угла от плоскости небесного меридиана до круга склонений небесного тела,

т. е. часового угла. Если наблюдается Солнце, то время, определяемое из этих наблюдений, называется *солнечным временем*. Измерение часового угла точки весеннего равноденствия ♈ определяет момент наблюдения в шкале *звездного времени*. Длительность единицы времени определяется как часть промежутка времени между последовательными одноименными кульминациями Солнца или точки весеннего равноденствия. Так как обе шкалы определяются вращением Земли, то они связаны друг с другом точным соотношением. Основным недостатком этих шкал является их неравномерность: из-за изменения скорости вращения Земли длительность единицы времени является переменной величиной, причем точный закон ее изменения не известен.

Шкалы динамического времени определяются на основе теорий движения Земли и других тел Солнечной системы (шкала *эфемеридного времени* — в рамках ньютоновой механики, шкалы *барицентрического и земного времени* — в рамках теории относительности Эйнштейна). Эти шкалы используются, когда решаются задачи космической навигации, эфемеридной астрономии.

Шкала *атомного времени* основана на показаниях атомных часов, и единица атомного времени связана с частотой излучения или поглощения энергии при переходе атомов из одного квантового состояния в другое. Современная шкала времени, которая используется и в астрономии, и в повседневной жизни, является атомной шкалой.

Шкалы атомного и динамического времени независимы как друг от друга, так и от шкал солнечного и звездного времени, т. е. от вращения Земли. Так как повседневная жизнь человека определяется вращением Земли, то одной из важных задач астрометрии является определение связи атомного и солнечного времени. Эта задача может быть решена лишь с помощью регулярных наблюдений радиоисточников, звезд, тел Солнечной системы. Наблюдения проводятся с Земли, движущейся в переменном гравитационном поле Солнечной системы. Поэтому преобразование моментов наблюдений из атомной шкалы в динамические шкалы и обратно осуществляется в современной сферической астрономии на основе теории относительности Эйнштейна с учетом скорости Земли и гравитационного потенциала Солнечной системы.

Рассмотрим теперь вопрос определения шкал времени подробно и начнем со шкалы солнечного времени.

4.1. Солнечное время

В основе шкалы истинного солнечного времени лежат наблюдения Солнца. Местное *истинное солнечное время* $m_\odot$ равно геоцентрическому часовому углу центра видимого диска Солнца $t_\odot$, отсчитываемому относительно меридиана места наблюдения, плюс 12^h:

$$m_\odot = t_\odot + 12^h. \tag{4.1}$$

Момент верхней кульминации центра видимого диска Солнца на данном меридиане называется истинным полднем, а момент нижней кульминации — истинной полночью.

Определение 4.1.1. *Промежуток времени между последовательными одноименными кульминациями центра Солнца называется истинными солнечными сутками.*

За начало солнечных суток принимают истинную полночь. Истинное солнечное время неравномерно, так как часовой угол $t_\odot$ нелинейным образом зависит от угла поворота Земли вокруг оси. Это вызвано, во-первых, наклоном эклиптики к экватору, а во-вторых, эллиптичностью орбиты Земли. Из рис. 4.1.а видно, что около точек весеннего и осеннего равноденствий дуга эклиптики больше проекции этой дуги на экватор. Около точек летнего и зимнего солнцестояний (рис. 4.1.б) ситуация противоположна. В результате наклона эклиптики и неравномерности движения Солнца по эклиптике его часовой угол $t_\odot$, отсчитываемый по экватору, изменяется неравномерно в течение года.

Из-за неравномерности истинного солнечного времени оно малопригодно для практического применения. Вместо него используется *среднее солнечное время.*

Определение 4.1.2. *Среднее экваториальное солнце — это точка,* ***равномерно*** *движущаяся по экватору в ту же сторону, что и Солнце.*

Если n — среднее движение, L_0 — средняя долгота Солнца на определенный момент времени t_0, то средняя долгота на момент t равна:

$$L = L_0 + n(t - t_0).$$

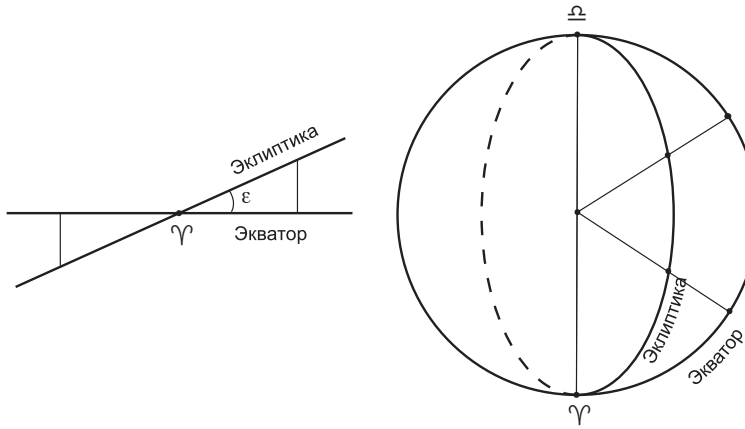


Рис. 4.1. Среднее и истинное Солнце.

За центр среднего экваториального солнца принимается точка, движущаяся по небесному экватору так, что ее прямое восхождение α_{mS} равняется средней долготе Солнца:

$$\alpha_{mS} = L = L_0 + n(t - t_0). \tag{4.2}$$

Полный оборот по экватору среднее экваториальное солнце делает за тот же промежуток времени, что и Солнце по эклиптике. Аналогично истинным суткам определяются средние солнечные сутки.

Определение 4.1.3. *Средние солнечные сутки — это промежуток времени между двумя последовательными одноименными кульминациями среднего экваториального солнца.*

За начало средних солнечных суток принимается средняя полночь (то есть момент нижней кульминации). Вместо слов «средние солнечные сутки» частот говорят «средние сутки».

Среднее солнечное время m на данном меридиане — это часовой угол t среднего экваториального солнца плюс 12^{h}:

$$m = t + 12^{\mathrm{h}}. \tag{4.3}$$

Среднее экваториальное солнце — это фиктивная точка, прямое восхождение которой вычисляется по формуле (4.2), координаты же истинного Солнца определяются на основе теории движения Земли

и планет. Разность η прямых восхождений (или часовых углов) истинного и среднего экваториального Солнца называется *уравнением времени*:

$$\eta = t_\odot - t = \alpha_{mS} - \alpha_\odot, \tag{4.4}$$

$\alpha_\odot$ — прямое восхождение центра истинного Солнца.

Значения $\eta + 12^{\mathrm{h}}$ на начало каждых суток публикуются в «Астрономическом ежегоднике» на стр. 10–24. Уравнение времени показано на рис. 4.2.

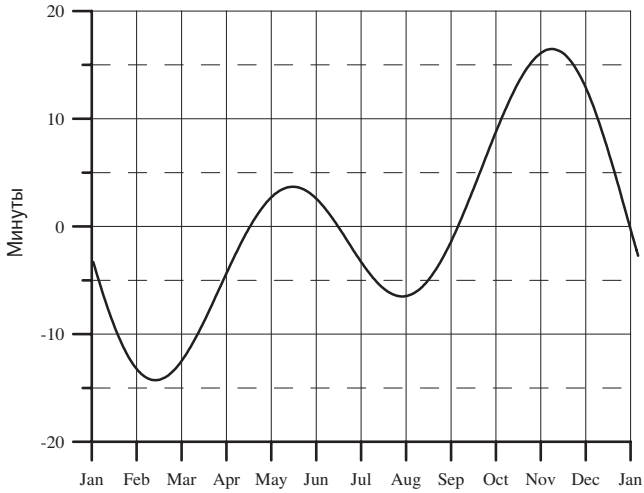


Рис. 4.2. Уравнение времени $\eta = t_\odot - t = \alpha_{mS} - \alpha_\odot$.

Выведем приближенную формулу для уравнения времени. Предположим, что Солнце движется по кеплеровской орбите. Тогда прямое восхождение центра истинного Солнца связано с его истинной долготой $L_\odot$ формулой:

$$\operatorname{tg}\alpha_\odot = \operatorname{tg}L_\odot \cos\varepsilon, \tag{4.5}$$

где ε — наклон эклиптики к экватору. Формулу (4.5) легко получить из прямоугольного сферического треугольника, если считать, что эклиптическая широта Солнца равна нулю.

Перепишем уравнение времени в виде:

$$\eta = \alpha_{mS} - \alpha_\odot = (L_\odot - \alpha_\odot) - (L_\odot - L),$$

где L — средняя долгота Солнца и $L = \alpha_{mS}$ (4.2). Используя формулу (2.54), получим $L = \omega + M$ (почему $\Omega = 0$?), $L_\odot = \omega + v$. Тогда $L_\odot - L = v - M$, где v — истинная аномалия. Перепишем формулу (4.5) следующим образом:

$$\mathrm{tg} L_\odot - \mathrm{tg}\,\alpha_\odot = (1 - \cos\varepsilon)\mathrm{tg} L_\odot.$$

После несложных преобразований получим:

$$\sin(L_\odot - \alpha_\odot) = 2\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\sin L_\odot \cos\alpha_\odot.$$

Так как разность $L_\odot - \alpha_\odot$ не превышает $15^{\mathrm{m}} \approx 0,07$ рад, то $\sin(L_\odot - \alpha_\odot) \approx L_\odot - \alpha_\odot$. Заменяя $\cos\alpha_\odot$ на $\cos[L_\odot - (L_\odot - \alpha_\odot)]$ и решая уравнение относительно $L_\odot - \alpha_\odot$, находим:

$$L_\odot - \alpha_\odot \approx \sin^2\frac{\varepsilon}{2}\sin 2L_\odot + 2\sin^4\frac{\varepsilon}{2}\sin 2L_\odot \sin^2 L_\odot.$$

Так как $\sin 2L_\odot \sin^2 L_\odot = (2\sin 2L_\odot - \sin 4L_\odot)/4$, то

$$L_\odot - \alpha_\odot \approx \left(\sin^2\frac{\varepsilon}{2} + \sin^4\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin 2L_\odot - \frac{1}{2}\sin^4\frac{\varepsilon}{2}\sin 4L_\odot.$$

Подставляя вместо $v - M$ выражение (2.70), запишем уравнение времени в виде ряда:

$$\eta = (L_\odot - \alpha_\odot) - (v - M) \approx \left(\sin^2\frac{\varepsilon}{2} + \sin^4\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin 2L_\odot$$
$$- \frac{1}{2}\sin^4\frac{\varepsilon}{2}\sin 4L_\odot - (2e\sin M + \frac{5e^2}{4}\sin 2M).$$

Выражая $L_\odot$ через L, получим:

$$\sin 2L_\odot \approx \sin(2L + 4e\sin M) \approx \sin 2L + 4e\sin M\cos 2L,$$
$$\sin 4L_\odot \approx \sin(4L + 8e\sin M) \approx \sin 4L + 8e\sin M\cos 4L,$$

Окончательно находим:

$$\eta \approx \left(\sin^2\frac{\varepsilon}{2} + \sin^4\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin 2L$$
$$+ 4e\left(\sin^2\frac{\varepsilon}{2} + \sin^4\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin M\cos 2L - \frac{1}{2}\sin^4\frac{\varepsilon}{2}\sin 4L$$
$$- 8e\frac{1}{2}\sin^4\frac{\varepsilon}{2}\sin M\cos 4L - 2e\sin M - \frac{5e^2}{4}\sin 2M$$

или, подставляя значения $\varepsilon \approx 23°26'$, $e = 0,0167$, получим

$$\eta = 590,^s8 \sin 2L + 39,^s5 \sin M \cos 2L - 11,^s7 \sin 4L$$
$$- 1,^s7 \sin M \cos 4L - 459,^s3 \sin M - 4,^s8 \sin 2M.$$

Из уравнения (4.6) следует, что приближенно уравнение времени складывается из двух основных синусоид с годичным и полугодичным периодами. Так как значения L, M изменяются от года к году, то ровно через год уравнение времени не повторяется.

Заметим, что в сферической астрономии используются пять *фундаментальных аргументов*, принятое обозначение которых l,l',F,D,Ω (см. стр. 377):
l — средняя аномалия Луны,
l' — средняя аномалия Солнца,
Ω — средняя долгота восходящего узла орбиты Луны,
$D = L - L'$ — средняя элонгация Луны от Солнца,
$F = L - \Omega$, где L, L' — средняя долгота Луны и Солнца.

Зная уравнение времени, можно перейти от среднего солнечного времени к истинному времени и обратно:

$$m = m_\odot - \eta;$$
$$m_\odot = m + \eta.$$

Определение 4.1.4. *Среднее солнечное время Гринвичского меридиана называется всемирным временем. Оно обозначается UT (Universal Time).*

Средние солнечные сутки делятся на 24 часа, в одном часе содержится 60 минут, в одной минуте — 60 секунд.

До 1960 г. средние солнечные сутки использовались для определения секунды. Секунда определялась как $1/86400$ часть средних солнечных суток. Это означает, что длительность секунды зависела от скорости вращения Земли. После появления кварцевых, а затем атомных часов, неравномерность вращения Земли была обнаружена. Это привело к отказу от средних солнечных суток как меры хранения времени и замене определения секунды. Сейчас всемирное время рассматривается как мера вращения Земли.

4.1.1. Системы всемирного времени и неравномерность вращения Земли

Всемирное время основывается на вращении Земли. Нерегулярности вращения Земли влияют, следовательно, на равномерность шкалы UT.

К неравномерности вращения Земли относят: а) изменение угловой скорости вращения и б) изменение положения оси вращения относительно твердой Земли, называемое движением полюса.

Вариации угловой скорости вращения разделяют на три типа: 1) периодические или квазипериодические, 2) вековые и 3) нерегулярные. Причиной вариаций скорости вращения Земли является как изменение тензора инерции Земли, так и изменение углового момента системы «твердая Земля + атмосфера + мировой океан». Тензор инерции Земли изменяется под воздействием лунно-солнечных сил притяжения, вызывающих приливы в коре и океанах, под действием нагрузки на кору Земли (рост и таяние ледников, изменение атмосферного давления). Вековое замедление скорости вращения Земли связано с существованием приливного трения в теле Земли и океанах. Изменение продолжительности суток составляет ~ 2 мс за 100 лет.

Найдем связь между всемирным временем UT, угловой скоростью вращения Земли Ω и продолжительностью суток.

Если ϕ есть угол, на который Земля поворачивается за промежуток атомного времени $t - t_0$, то угловая скорость Земли

$$\Omega(t) = \frac{d\phi}{dt}$$

или

$$\phi(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \Omega(\tau)\, d\tau.$$

Введем Ω_0 — среднюю угловую скорость вращения, тогда $\Omega(t) = \Omega_0 + \delta\Omega(t)$. Поправка $\delta\Omega(t)$ представляет неравномерность вращения Земли и вариацию всемирного времени UT, которую обозначим как $\delta\mathrm{UT}(t)$. Если бы Земля вращалась равномерно, то опре-

деление времени UT означало бы, что $\phi = \Omega_0 \cdot \mathrm{UT}$, $\delta\mathrm{UT}(t) = 0$. В действительности имеем:

$$\mathrm{UT}(t) = \frac{1}{\Omega_0} \int\limits_{t_0}^{t} \Omega(\tau)\, d\tau$$

и

$$\delta\mathrm{UT}(t) = \frac{1}{\Omega_0} \int\limits_{t_0}^{t} \delta\Omega(\tau)\, d\tau.$$

Дифференцируя последнее равенство, получим:

$$\frac{d}{dt}\delta\mathrm{UT}(t) = \frac{\delta\Omega(t)}{\Omega_0}.$$

Так как угловая скорость вращения Земли переменна, то переменной будет и продолжительность суток, обозначаемая как Lod (Lenght of Day). Угловая скорость, равная $\Omega = \Omega_0 + \delta\Omega$, означает поворот Земли на Ω радиан в секунду; значит число секунд в радиане равно $1/(\Omega_0 + \delta\Omega)$. Число секунд, необходимых для поворота Земли на 360° равно

$$\mathrm{Lod}(t) = \frac{2\pi}{\Omega(t)} \approx \frac{2\pi}{\Omega_0}\left(1 - \frac{\delta\Omega(t)}{\Omega_0}\right),$$

считая, что $\delta\Omega/\Omega_0 \ll 1$. Изменение продолжительности суток равно

$$\Delta\mathrm{Lod}(t) = \mathrm{Lod}(t) - \mathrm{Lod}_0 = -\mathrm{Lod}_0 \frac{\delta\Omega}{\Omega_0}, \tag{4.6}$$

где $\mathrm{Lod}_0 = 2\pi/\Omega_0 = 86400$ атомных секунд. Из (4.6) имеем:

$$\frac{\Delta\mathrm{Lod}}{\mathrm{Lod}_0} = -\frac{\delta\Omega}{\Omega_0}. \tag{4.7}$$

Всемирное время UT есть часовой угол среднего экваториального солнца относительно Гринвичского меридиана плюс 12^{h}. Поэтому UT может быть найдено из моментов пересечения центром Солнца местного небесного меридиана. Из-за неравномерности вращения Земли эти моменты, регистрируемые по атомным часам, будут различаться от дня ко дню. В реальности наблюдения Солнца с целью

определения UT не проводились из-за сложности и невысокой точности. Для этого использовались наблюдения звезд в меридиане. Более подробно с вопросом определения времени с помощью классических астрометрических инструментов можно ознакомиться по учебникам астрометрии.

Высокоточные наблюдения звезд с целью определения вариаций UT ведутся уже более 50 лет. Тем не менее, можно проследить за скоростью вращения Земли на несколько тысяч лет назад. В этом нам помогают записи, сделанные жрецами в Древнем Египте, Вавилоне, Греции, Китае, о времени солнечных и лунных затмений. Зная точные эфемериды Солнца, Луны и современную скорость вращения Земли, можно вычислить время затмений в Древнем мире. Разность между записанным и вычисленным временем объясняется замедлением вращения Земли.

Накопленная неравномерность UT за промежуток времени от t_1 до t_2 есть

$$\delta\mathrm{UT} = \frac{1}{\Omega_0}\int\limits_{t_1}^{t_2} \delta\Omega(\tau)\,d\tau. \tag{4.8}$$

Если скорость вращения изменяется линейно, то $\delta\Omega = -\delta\dot{\Omega}\,t$, где $\delta\dot{\Omega} = \mathrm{const}$. Знак минус соответствует увеличению продолжительности суток при замедлении скорости вращения. Интегрируя (4.8), получим:

$$\delta\mathrm{UT} = -\frac{\delta\dot{\Omega}}{\Omega_0}\cdot\frac{t_2^2 - t_1^2}{2}.$$

Из уравнения (4.7) имеем:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\Omega_0}\frac{d}{dt}(\delta\Omega) &= \frac{1}{\mathrm{Lod}_0}\frac{d}{dt}(\Delta\mathrm{Lod}) \\ &\approx \frac{2\ \text{мс}/100\ \text{лет}}{86400\ \text{с}} = 2\times 10^{-8}/100\ \text{лет}. \end{aligned}$$

За одно столетие накопленная неравномерность UT составит

$$\delta\mathrm{UT} = \frac{2\times 10^{-8}}{100\ \text{лет}}\times\frac{1}{2}(100\ \text{лет})^2 = 10^{-8}\times 100\ \text{лет} \approx 30\ \text{секунд},$$

а за 3000 лет:

$$\delta\mathrm{UT} = \frac{2\times 10^{-8}}{100\ \text{лет}}\frac{900}{2}(100\ \text{лет})^2 \approx 7,5\ \text{часов}.$$

Это означает, что 3000 лет назад затмения происходили на 7, 5 часов раньше, чем дают эфемериды на основе современной скорости вращения Земли. Другими словами, полоса затмения должна была бы проходить западнее на 7, 5 часов по долготе от места, где оно в действительности наблюдалось. Если бы замедления вращения Земли не было, то в месте, где жрецы наблюдали затмение, его нельзя было бы видеть.

Причиной векового замедления скорости вращения Земли является приливное трение в системе Земля–Луна.

Механизм, приводящий к диссипации приливной энергии, следующий. Сила притяжения Луны приводит к появлению приливного выступа. Если бы не было диссипации энергии, то выступ был бы направлен точно на Луну, и замедляющего момента сил не было бы. Так было бы в случае идеально упругой Земли с невязкими океанами и ядром. Но так как Земля не является упругим телом, то максимальный прилив происходит не в момент кульминации Луны, а спустя небольшой промежуток времени, равный $\sim$ 10 минутам. Луна при этом находится западнее меридиана на угол $\sim$ $0\overset{\circ}{,}1$. Можно сказать, что из-за вязкости тела Земли приливный выступ «зацепляется» за Землю, и так как угловая скорость вращения Земли больше среднего движения Луны, выносится вперед Луны. Поэтому, момент сил приводит, с одной стороны, к замедлению скорости вращения Земли, а с другой стороны, к уменьшению среднего движения Луны и ее удалению от Земли на $\sim$ 3 см в год.

Периодические вариации скорости с периодом от нескольких суток до нескольких лет вызываются изменением углового момента атмосферы. В основе этого вывода лежит один из законов сохранения: в отсутствие внешнего момента сил угловой момент (или момент количества движения) тела является постоянной величиной. Применительно к Земле можно утверждать, что суммарный угловой момент твердой Земли + атмосферы сохраняется. Это означает, что если атмосфера в целом начинает вращаться быстрее, то для сохранения углового момента системы Земля должна вращаться медленнее.

Источником циркуляции атмосферы является неравномерный нагрев из-за поглощения солнечного излучения, который приводит к появлению постоянных ветров, дующих с востока на запад в низких широтах и с запада на восток в средних и высоких широтах.

Момент сил, создаваемый воздушными течениями, передается коре Земле благодаря трению атмосферы о поверхность и из-за разности давления воздуха на противоположных сторонах горных цепей. Амплитуды наиболее значимых гармоник (двухнедельной, месячной, полугодовой и годовой) составляют 2–3 мс.

Аналогичный механизм действует и в океанах: энергия течений передается коре Земли. Кроме сезонных вариаций в угловой скорости вращения Земли обнаружены суточные и полусуточные вариации, которые объясняются приливами в океане.

Причиной нерегулярных вариаций могут быть различные процессы. Наиболее известно явление Эль-Ниньо (перемещение масс воздуха над тропическими частями Индийского и Тихого океанов в экваториальной зоне из-за аномального распределения температуры верхних слоев воды в океанах). Аномально большое изменение скорости вращения Земли в 1983 году вызвано как раз мощным явлением Эль-Ниньо.

К нерегулярным вариациям относят «декадные» вариации. Считается, что эти вариации с амплитудой 4–5 мс и периодом 20–30 лет связаны с взаимодействием жидкого ядра и мантии Земли из-за сложной топографии границы ядро–мантия, а также их магнитного сцепления.

На рис. 4.3 показано изменение продолжительности суток ΔLOD на интервале 1980–2000 г. по данным МСВЗ[1].

Продолжительность суток на интервале 1980–2000 г. превышает среднее значение, равное 86400 с, на ~ 2 мс (верхний рисунок). Причины этого будут объяснены при определении шкалы атомного времени и атомной секунды. Если из величины ΔLOD исключить зональные приливы (второй рисунок сверху), то в спектре останутся декадные и сезонные гармоники (третий и четвертый рисунок). Зональные приливы изменяют полярный момент инерции Земли, что приводит к изменению угловой скорости вращения.

В движении полюса также выделяют вековую и периодические компоненты. Вековое движение полюса происходит со скоростью $\sim 3,3$ мс дуги/год в направлении $\sim 75^{\circ}\!,7$ западной долготы и объясняется, согласно современным теориям, снятием ледовой нагруз-

[1] Полную информация о задачах МСВЗ, публикациях, стандартах, ряды параметров вращения Земли и др. можно найти на сайте МСВЗ: http://www.iers.org.

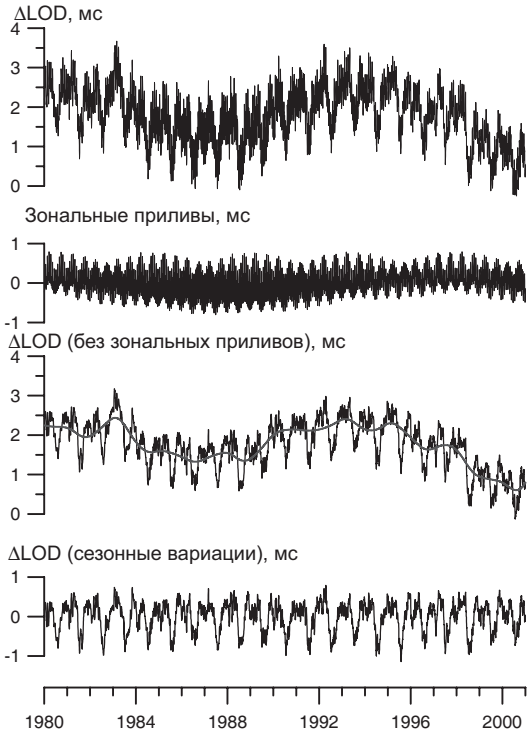


Рис. 4.3. Изменение продолжительности суток на интервале 1980–2000 г.

ки на кору Земли после последнего оледенения и изменением тензора инерции Земли. К основным периодическим компонентам относятся чандлеровская (с периодом $\sim 1,2$ года) и годичная гармоники. Если причины годичного движения полюса известны (это сезонные вариации атмосферного давления), то причины чандлеровского движения до сих пор не выяснены. В результате картина движения полюса выглядит как сворачивающаяся и разворачивающаяся спираль (с периодом ~ 6 лет, который кратен $1,2$ и 1 годам), центр которой смещается в направлении $\sim 75{,}^{\circ}7\ W$ относительно условного международного начала. Максимальный размер спирали не превышает 15 м (рис. 4.4).

Движение полюса приводит к смещению сетки астрономических широт и долгот на Земле. Следовательно, наблюдатель регистрирует момент кульминации звезды (центра Солнца или другой точки)

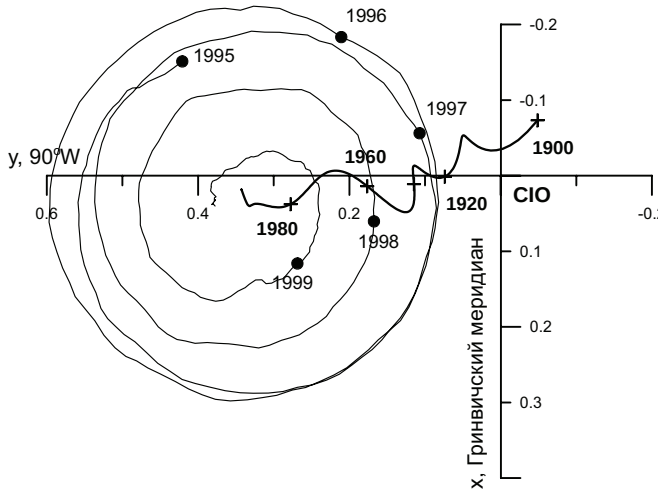


Рис. 4.4. Движение полюса на интервале 1900–2000 г. (вековой ход — жирная линия) и на интервале 1995–2000 г. Отсчет координат ведется от условного международного начала (CIO).

на мгновенном меридиане. Для исключения влияния движения полюса и частичного исключения изменений скорости вращения Земли на измерение времени были введены различные системы всемирного времени.

Различают следующие системы UT:

$$1)\ \text{время UT0} - \tag{4.9}$$

это всемирное время, полученное из наблюдений, то есть время на *мгновенном* гринвичском меридиане, соответствующем мгновенному полюсу Земли; определением времени UT0 занимались специальные организации — службы времени, которые проводили регулярные наблюдения звезд на специальных астрометрических инструментах (фотографических зенитных трубах, пассажных инструментах, астролябиях);

$$2)\ \text{время UT1} = \text{UT0} + \Delta\lambda - \tag{4.10}$$

это всемирное время *среднего* гринвичского меридиана, определяемого средним положением полюса Земли; оно получается исправ-

лением времени UT0 на изменение долготы $\Delta\lambda$ наблюдателя из-за смещения мгновенного полюса относительно среднего:

$$\Delta\lambda = -(x_p \sin\lambda + y_p \cos\lambda)\,\mathrm{tg}\,\varphi, \tag{4.11}$$

где x_p, y_p — координаты мгновенного полюса относительно условного международного начала, φ, λ — координаты пункта наблюдений;

$$\text{3) время UT2} = \text{UT1} + \Delta T_s = \text{UT0} + \Delta\lambda + \Delta T_s - \tag{4.12}$$

это всемирное время среднего гринвичского меридиана, исправленное за сезонные периодические вариации угловой скорости вращения Земли:

$$\begin{aligned}\Delta T_s = {} & 0{,}^{\mathrm{s}}0220 \sin 2\pi\theta - 0{,}^{\mathrm{s}}0120 \cos 2\pi\theta \\ & - 0{,}^{\mathrm{s}}0060 \sin 4\pi\theta + 0{,}^{\mathrm{s}}0070 \cos 4\pi\theta,\end{aligned}$$

где

$$\theta = 2000,0 + (\mathrm{JD} - 2451544,533)/365,2422,$$

JD — юлианская дата наблюдения (см. ниже).

Наиболее важна система UT1, отражающая действительное вращение Земли. Она определяет ориентацию среднего гринвичского меридиана, т. е. оси x земной системы координат. Шкалы UT0 и UT2 в настоящее время практически не используются. Причиной этого является метод вычисления времени UT1. Ранее время UT0 определялось службами времени независимо, затем UT0 каждой службы времени исправлялось за движение полюса (4.10) в центрах обработки. Сейчас основной вклад в измерение UT1 вносят радиоинтерферометры, т. е. используется группа обсерваторий. Преобразование мгновенных координат радиотелескопов и времени выполняется последовательностью поворотов матриц, в которые UT0 в явном виде не входит. Кроме этого, формула (4.11) и, следовательно, (4.10) верны лишь до линейных членов (см. § 6.6.3). Такая точность недостаточна.

Шкала UT2 также представляет главным образом исторический интерес. Шкала UT2 более стабильна, чем UT1, т. к. сезонная и годичная вариации в скорости вращения исключались из UT1. Первоначально, когда в конце 50-х годов появились первые атомные стандарты частоты и времени, шкала UT2 использовалась для подгонки под нее атомной шкалы времени.

Для точного вычисления звездного времени (4.97) требуется знать разницу UT1 – UTC, которая находится на основе наблюдений и табулируется МСВЗ на начало каждых суток (UTC — всемирное координированное время, см. ниже). Для обеспечения большей точности интерполяции разности UT1 – UTC на произвольный момент времени МСВЗ рекомендует сначала удалить из UT1 предсказуемые периодические вариации, вызываемые зональными приливами. После вычисления интерполированного значения UT1 – UTC к нему следует добавить эти вариации. В «Стандартах МСВЗ» 1996 г. определены три модели периодических вариаций UT1. Исключение из UT1 короткопериодических гармоник (с периодами от 5 до 35 суток) приводит к системе всемирного времени, обозначаемой UT1R. Если из UT1 вычесть гармоники с периодами от 5 суток до 18,6 лет, вызываемые как зональными, так и долгопериодическими океаническими приливами, то получим систему UT1S. Если из UT1 вычесть 4 близсуточных и 4 полусуточных гармоники, которые связаны с приливами в океанах, то получим систему UT1D.

В «Стандартах МСВЗ» 2003 г. (глава 8) приводится новая модель учета зональных вариаций во всемирном времени UT1, а также модель учета суточных и полусуточных вариаций в UT1 и в движении полюса, включающая 71 гармонику. Эти модели можно найти на сайте: <http://www.iers.org/documents/publications/tn/tn32/tn32>.

4.1.2. Всемирное координированное время UTC

Аббревиатура UTC образована из первых букв английского «Coordinated Universal Time» или французского названия «Temps Universel Coordonnė». Следуя рекомендациям Международного телекоммуникационного союза по обозначению шкал времени, было решено для краткого названия всемирного координированного времени использовать аббревиатуру UTC, а не CUT или TUC, чтобы она не зависела от языка. Аббревиатура UTC была одобрена на XIII Генеральной Ассамблее МАС в 1967 г.

Причиной появления всемирного координированного времени является необходимость учета потребностей двух групп пользователей. Первые — астрономы, геодезисты, а также бо̀льшая часть населения Земли — хотели бы, чтобы время определялось вращением Земли и измерялось часовым углом Солнца или точки весеннего равноденствия. Вторые, к которым относятся физики и инженеры,

разрабатывающие стандарты частоты и времени, хотели бы, чтобы время хранилось именно этими приборами.

Первоначально шкалы атомного времени, формируемые стандартами частоты в разных обсерваториях привязывались к разным шкалам времени. Например, шкала атомного времени Военно-морской обсерватории США (USNO) привязывались к эфемеридному времени ET, а шкала Национального бюро стандартов США — к UT2. Поэтому сигналы точного времени, передаваемые по радиосетям, относились к разным шкалам. Чтобы исправить это положение, Международному консультативному радиокомитету (CCIR) на Всемирном съезде радио (Женева, 1959 г.) было поручено разработать вопрос об организации единой для всех стран атомной шкалы, в которой передавались бы сигналы времени. Формировать такую шкалу было поручено Международному бюро времени, МБВ (Bureau International de l'Heure, BIH) в 1961 г.

Всемирное координированное время UTC, по определению, связано не с суточным вращением Земли, а с атомной шкалой TAI (по-французски, Temps Atomic International).

Вначале близость шкал всемирного времени UT2 и всемирного координированного времени UTC в пределах 0,1 с достигалась ступенчатыми сдвигами частоты. Начиная с 1 января 1972 г. частотные сдвиги шкалы UTC отменены и введено изменение показаний часов, функционирующих в системе UTC, на ± 1 с, для того, чтобы разность UT1 − UTC не превосходила $\pm 0,9$ с (рис. 4.5). Это изменение осуществляется путем прибавления секунды преимущественно 31 декабря и (или) 30 июня.

Таким образом, шкала UTC *является атомной шкалой*, отличаясь от TAI на целое число секунд: ΔAT = TAI − UTC. Изменение величины ΔAT приводится в табл. 4.1.

Таблица 4.1: Даты изменения ΔAT

Календарная	Юлианская JD	$\Delta AT =$ TAI − UTC, с
1961 JAN 1	2437300,5	$1,4228180$
		$+(MJD - 37300) \times 0,001296$
1961 AUG 1	2437512,5	$1,3728180$
		$+(MJD - 37300) \times 0.001296$
1962 JAN 1	2437665,5	$1,8458580$

Таблица 4.1. (продолжение)

Календарная	Юлианская	$\Delta AT = \mathrm{TAI} - \mathrm{UTC}$, с
		$+(MJD - 37665) \times 0,0011232$
1963 NOV 1	2438334,5	$1,9458580$
		$+(MJD - 37665) \times 0,0011232$
1964 JAN 1	2438395,5	$3,2401300$
		$+(MJD - 38761) \times 0,001296$
1964 APR 1	2438486,5	$3,3401300$
		$+(MJD - 38761) \times 0,001296$
1964 SEP 1	2438639,5	$3,4401300$
		$+(MJD - 38761) \times 0,001296$
1965 JAN 1	2438761,5	$3,5401300$
		$+(MJD - 38761) \times 0,001296$
1965 MAR 1	2438820,5	$3,6401300$
		$+(MJD - 38761) \times 0,001296$
1965 JUL 1	2438942,5	$3,7401300$
		$+(MJD - 38761) \times 0,001296$
1965 SEP 1	2439004,5	$3,8401300$
		$+(MJD - 38761) \times 0,001296$
1966 JAN 1	2439126,5	$4,3131700$
		$+(MJD - 39126) \times 0,002592$
1968 FEB 1	2439887,5	$4,2131700$
		$+(MJD - 39126) \times 0,002592$
1972 JAN 1	2441317,5	$10,0$
1972 JUL 1	2441499,5	$11,0$
1973 JAN 1	2441683,5	$12,0$
1974 JAN 1	2442048,5	$13,0$
1975 JAN 1	2442413,5	$14,0$
1976 JAN 1	2442778,5	$15,0$
1977 JAN 1	2443144,5	$16,0$
1978 JAN 1	2443509,5	$17,0$
1979 JAN 1	2443874,5	$18,0$
1980 JAN 1	2444239,5	$19,0$
1981 JUL 1	2444786,5	$20,0$
1982 JUL 1	2445151,5	$21,0$

Таблица 4.1. (продолжение)

Календарная	Юлианская	$\Delta AT = \mathrm{TAI} - \mathrm{UTC}$, с
1983 JUL 1	2445516,5	22, 0
1985 JUL 1	2446247,5	23, 0
1988 JAN 1	2447161,5	24, 0
1990 JAN 1	2447892,5	25, 0
1991 JAN 1	2448257,5	26, 0
1992 JUL 1	2448804,5	27, 0
1993 JUL 1	2449169,5	28, 0
1994 JUL 1	2449534,5	29, 0
1996 JAN 1	2450083,5	30, 0
1997 JUL 1	2450630,5	31, 0
1999 JAN 1	2451179,5	32, 0
2006 JAN 1	2453736,5	33, 0

Из таблицы видно, что дополнительная секунда прибавляется примерно раз в полтора года. Это означает, что за полтора года накапливается разница в 1 с между равномерным атомным временем и временем, задаваемым вращением Земли. Она связана с тем, что продолжительность средних солнечных суток в настоящее время приблизительно на 2 мс больше продолжительности суток, точно равных 86400 секунд СИ.

Аналогичная ситуация случается, когда мы подводим стрелки наручных часов. Если часы отстают за сутки на 2 с относительно атомного времени, то через месяц накопится ошибка, примерно равная 1 минуте. Эта минута может быть добавлена путем перевода минутной стрелки часов.

Так как исправить скорость вращения Земли мы не можем, то согласование шкал всемирного и атомного времени производится путем перестановки атомных стандартов частоты.

Система UT1 составляет основу измерения времени в повседневной жизни, так как с ней связана система UTC, сигналы которой передаются по радиовещательным сетям. Согласно решению МАС, шкала UTC должна быть переопределена. Для этого создана рабочая группа, которая должна представить рекомендации по новому определению времени UTC.

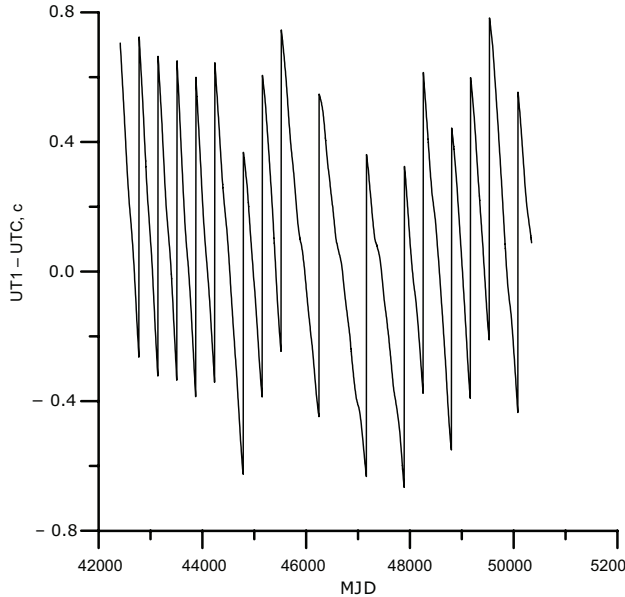


Рис. 4.5. Разность UT1-UTC; MJD — модифицированная юлианская дата

Главной причиной такого решения является широкое использование спутниковых навигационных систем, телекоммуникационных и компьютерных систем. С расширением услуг электронной связи для надежной работы приемо-передающих устройств требуется их точная временная синхронизация. В момент добавления секунды возможна рассинхронизация этих устройств и, как следствие, нарушение связи.

Нормальный режим работы счетчиков в электронных часах предполагает переход от пятьдесят девятой секунды к нулевой (началу следующей минуты). Добавление еще одной секунды означает изменение последовательности: после 59-й следует шестидесятая, а затем нулевая секунда. В результате работа многих компьютерных систем, имеющих внутренние часы, может быть нарушена.

Поэтому заинтересованность в новом определении времени UTC проявляют многие международные организации: Международный телекоммуникационный союз, Ассоциация геодезии, Союз радионаук, Бюро мер и весов, а также организации, решающие навигационные задачи.

Для точного координатно-временного обеспечения широко используются навигационные системы GPS (Global Positioning System) и ГЛОНАСС (ГЛОбальная НАвигационная Спутниковая Система). В основе всех измерений с использованием GPS лежит атомная шкала TAI(GPS) (см. ниже), которая не связана с UTC. Информация о шкале UTC вводится по командам с наземных пунктов, и приемник GPS вычисляет время UTC из TAI(GPS). В отличие от GPS система ГЛОНАСС использует в качестве шкалы времени шкалу UTC. Поэтому после добавления секунды часы на спутниках заново должны быть синхронизованы. В течение некоторого времени система фактически не функционирует.

В качестве возможных рекомендаций по определению шкалы UTC рассматриваются следующие.

1. Продолжать использовать сегодняшнюю процедуру вычисления UTC. Однако к 2050 г. необходимо будет дополнительно вводить $\sim 1,5$ с каждый год.

2. Исключить введение дополнительной секунды, т. е. отменить использование шкалы UTC. В этом случае к 2050 г. разность UT1 – UTC достигнет 1 мин.

3. Изменить масштаб, т. е. увеличить число $0,9$ с. Это самый простой способ, который уже использовался (ранее максимальная разница UT1 – UTC составляла $0,7$ с). Однако он не решает проблем.

4. Переопределить секунду времени.

5. Разработать новую модель вычисления UTC. В этом случае можно будет вводить дополнительные секунды в строго определенные даты (например, 29 февраля, т. е. один раз в четыре года). Предполагается, что число дополнительных секунд можно будет предварительно вычислить на основе теории вращения Земли.

Каждый из вариантов имеет достоинства и недостатки, хотя переопределение секунды времени, наверное, самый неудачный. Продолжение используемой процедуры или отмена шкалы UTC имеют примерно равные шансы на утверждение будущей Генеральной Ассамблеей МАС и другими заинтересованными организациями.

Такое внимание к шкале UTC объясняется просто: все измерения времени в гражданской жизни, а также регистрация моментов наблюдения в астрономии выполняются в шкале UTC.

4.1.3. Местное, поясное и декретное время

После рассмотрения используемых шкал UT перейдем к определению местного, поясного и декретного времени.

Для того, чтобы перейти от всемирного (гринвичского) времени к местному, необходимо знать долготу λ пункта наблюдений. В соответствии с решением МАС долгота считается положительной к востоку от Гринвича и измеряется от $0°$ до $360°$. Если UT — всемирное время, m — местное среднее время, то[2]

$$m = \mathrm{UT} + \lambda. \tag{4.13}$$

Очевидно, что местное время m меняется при изменении долготы, т. е. при движении с запада на восток (или обратно). Это означает, что при таком движении нужно непрерывно переводить стрелки часов. Чтобы устранить это неудобство, в XIX веке во многих странах была принята *поясная система счета времени*.

Земной шар был разбит на 24 пояса, каждый примерно по $15°$. Часовые пояса имеют номера от 0 до 23. В действительности ширина поясов не равняется $15°$. Границы поясов определяются государственными границами, административным делением внутри страны и т. д. Начальный меридиан нулевого пояса проходит через Гринвичскую обсерваторию. В настоящее время в первый часовой пояс (который определяет среднеевропеское время) входят Франция, Испания, Германия и др. (рис. 4.6). Время первого пояса отличается от времени нулевого пояса ровно на 1 час. Разность поясных времен равна разности номеров их часовых поясов (за исключением некоторых стран).

Поясное время в России введено в 1919 году. В 1930 г. на всей территории СССР к поясному времени был добавлен один час и было введено *декретное время*. Кроме того, ежегодно с последнего воскресенья марта до последнего воскресенья сентября (до 1996 г.) или октября (после 1996 г.) вводится *летнее время*, отличающееся на $+1$ час от декретного времени. На рис. 4.6 показана разница времени с

[2]Так как время UT0 не используется, то под названием UT понимают время UT1.

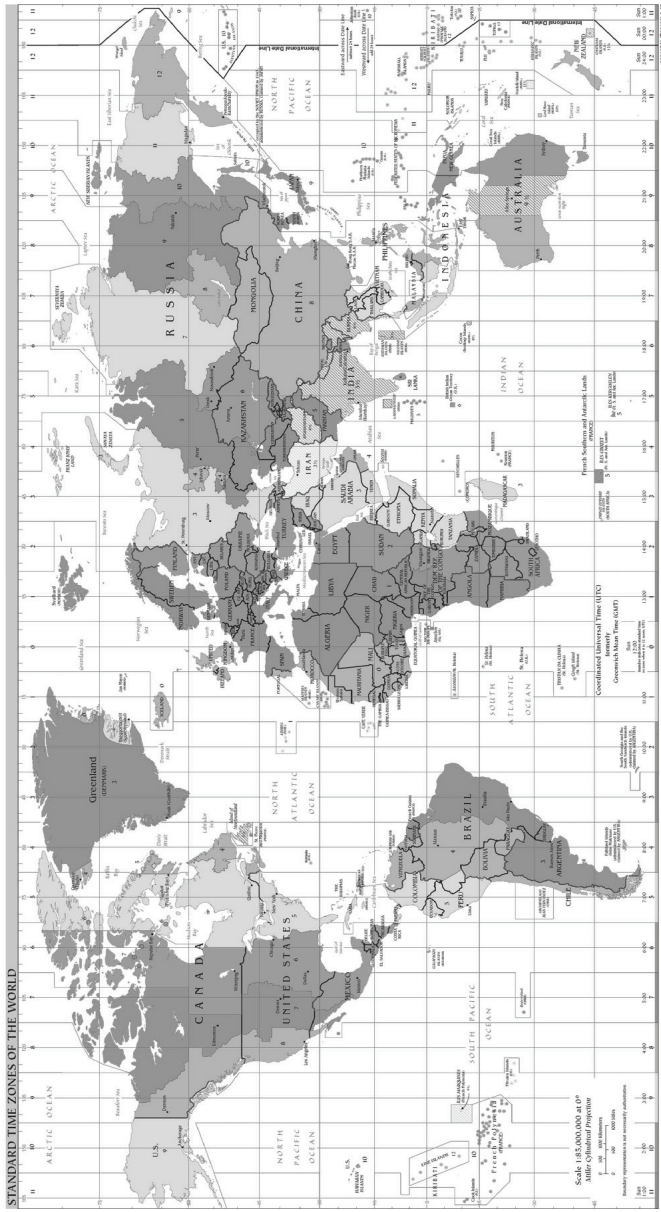


Рис. 4.6. Карта часовых поясов.

Гринвичем (с учетом декретного времени в России и без учета летнего времени).

От Гринвича к востоку от пояса к поясу время увеличивается, а к западу уменьшается. В 180° от Гринвича проходит *линия изменения даты* (точнее, эта линия проходит с учетом государственных границ). Новый день на Земле начинается на этой линии. При пересечении этой линии с востока на запад необходимо прибавить один день и, наоборот, при пересечении линии изменения дат с запада на восток — вычесть один день, т. е. считать одну дату дважды.

Определение 4.1.5. *В России декретное время второго часового пояса, в котором находится Москва, называется московским.*

Таким образом разница московского и всемирного времени равна трем часам.

Найдем связь среднего солнечного и декретного времени. Поясное время пункта с долготой λ

$$M_p = \mathrm{UT} + n = m - \lambda + n,$$

где m — среднее солнечное время, n — номер пояса. Декретное время

$$M_d = M_p + 1^{\mathrm{h}}.$$

Значит, $M_d = m - \lambda + n + 1^{\mathrm{h}}$. По этой формуле можно определить декретное время местного полдня, ($m = 12^{\mathrm{h}}$). Например, для Москвы $\lambda = 2^{\mathrm{h}}30^{\mathrm{m}}$, $n = 2$ получим $M_d = 12^{\mathrm{h}}30^{\mathrm{m}}$.

4.2. Звездное время

В качестве начала отсчета суток может быть выбрана кульминация не только конкретного светила, но и кульминация некоторой точки. Если в качестве такой точки выбрана точка весеннего равноденствия ♈, то шкала времени, основанная на измерении часовых углов точки ♈, называется *звездной*.

Определение 4.2.1. *Звездное время есть часовой угол точки весеннего равноденствия.*

Определение 4.2.2. *Промежуток времени между двумя последовательными одноименными кульминациями точки весеннего равноденствия называется звездными сутками.*

За начало звездных суток принимают момент верхней кульминации точки ♈. На рис. 4.7 показана плоскость небесного экватора, видимая с северного полюса мира P_N, а также небесный меридиан наблюдателя, Z — зенит. Согласно определению, звездное время s на

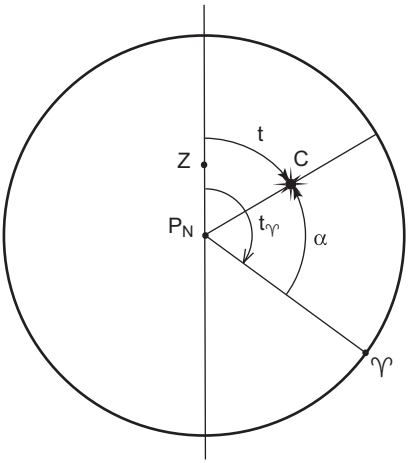


Рис. 4.7. К выводу уравнения: $s = \alpha + t$.

меридиане ZP_N равно часовому углу $t_{\Upsilon} = \angle ZP_N\Upsilon$, то есть

$$s = t_{\Upsilon}. \tag{4.14}$$

Если C — звезда, которая имеет прямое восхождение α и часовой угол t, то на основании рис. 4.7 сразу получим

$$s = \alpha + t. \tag{4.15}$$

Теорема. *Звездное время равно сумме прямого восхождения и часового угла звезды.*

Определение 4.2.3. *Звездное время на гринвичском меридиане называется звездным гринвичским временем (GST — Greenwich Sidereal Time).*

Как и местное среднее солнечное время m, местное звездное время s отличается от гринвичского на долготу:

$$s = GST + \lambda.$$

Когда звезда наблюдается в верхней кульминации, т. е. $t = 0$, получим

$$s = \alpha. \tag{4.16}$$

Для момента нижней кульминации справедливо уравнение:

$$s = \alpha + 12^h. \tag{4.17}$$

Уравнения (4.16) и (4.17) используются в астрометрии как для определения прямых восхождений звезд, так и для определения звездного времени.

Звездное время, также как и UT, зависит от вращения Земли, и, следовательно, шкала звездного времени является неравномерной.

4.3. Эфемеридное время

Попытка астрономов использовать всемирное и звездное время в качестве равномерных шкал оказалась неудачной. В качестве новой более точной шкалы времени было предложено использовать шкалу, определяемую периодическом движением тел в Солнечной системе.

В ньютоновской физике время t считается абсолютным и является аргументом в выражениях, которые определяют эфемериды планет, Солнца и Луны. Если теорию движения планет, Солнца и Луны считать безупречной, то на основе наблюдений можно построить строго равномерную (в ньютоновском приближении) шкалу времени. Такая шкала называется *эфемеридным временем* (ET). Эфемеридное время было независимой переменной в теории орбитального движения Земли, Луны и планет. Время ET было рекомендовано в 1952 г. MAC и использовалось до 1984 г. В более широком смысле эфемеридное время как аргумент динамической теории является *динамическим временем*. О современных шкалах динамического времени будет говориться ниже.

В основу шкалы эфемеридного времени были положены вычисления координат планет и Солнца, выполненные С. Ньюкомбом (1835–1909). Если время в выражениях геоцентрических эфемерид считать всемирным, то между наблюдаемыми и эфемеридными координатами планет, Солнца, Луны возникают расхождения. Такие расхождения были интерпретированы как неравномерность шкалы

UT по отношению к шкале ET. Накапливающаяся разность $\Delta T =$ ET $-$ UT объясняется главным образом вековым замедлением вращения Земли.

Введение эфемеридного времени привело к замене определения единицы времени. Прежнее определение секунды как $1/86400$ части средних солнечных суток в 1960 г. было заменено следующим: секунда есть $1/31556925,9747$ часть тропического года для эпохи 1900.0. Секунда была названа *эфемеридной*. Секунда ET более постоянна по величине, чем секунда, определяемая средними солнечными сутками, но ее гораздо труднее измерить и реализовать с помощью часов.

Рост точности наблюдений привел к отказу от эфемеридного времени. На Генеральной Ассамблее МАС (1976 г.) были определены новые шкалы: земное TDT (Terrestrial Dynamical Time) и барицентрическое динамическое время TDB (Barycentric Dynamical Time). Первое, TDT, является аргументом в уравнениях динамики, записанных в рамках общей теории относительности в геоцентрической системе координат. Время TDB используется как аргумент для вычисления эфемерид, отнесенных к барицентру Солнечной системы. TDB отличается от TDT только периодическими вариациями, амплитуда которых меньше $0\overset{s}{,}002$.

По решению МАС время TDT заменило эфемеридное время ET в 1984 г.

4.4. Атомное время

Шкала атомного времени TAI (по-французски, Temps Atomique International) была построена в середине XX века. Она основана на использовании квантовых стандартов частоты и повторяющимся с большой точностью естественном процессе: резонансном переходе атомов с одного энергетического уровня на другой. Шкала TAI равномерна на длительных промежутках времени и не зависит от вращения Земли. За единицу измерения времени принимается *атомная секунда* (секунда СИ), определяемая в соответствии с резолюцией XIII конференции Международного комитета мер и весов (1967 г.) как промежуток времени, в течение которого совершается 9192631770 колебаний, соответствующих частоте излучения атома ^{133}Cs при резонансном переходе между энергетическими уров-

нями сверхтонкой структуры основного состояния при отсутствии внешних магнитных полей на уровне моря. В основу этого определения атомной секунды были положены результаты эксперимента, проведенного Морской обсерваторией США и Национальной физической лабораторией (Англия) по определению номинальной частоты цезиевого стандарта. Длительность секунды TAI была выбрана такой, чтобы она соответствовала длительности секунды эфемеридного времени ET для 1900 г. Атомная секунда определена с точностью порядка $2 \cdot 10^{-9}$ относительно эфемеридной секунды.

Чтобы исключить неоднозначную трактовку термина «на уровне моря», в стандартах Международной службы вращения Земли (1996 г.) выбран геоид, соответствующий значению геопотенциала (3.6) $W_0 = 62636856,85$ м^{2}с$^{-2}$. С 2000 г. значение W_0 переопределено (см. ниже).

Каждый атомный стандарт частоты определяет собственную шкалу времени, которая находится интегрированием частоты, определяемой квантовым переходом между конкретными состояниями атомов цезия (Cs), водорода (H), рубидия (Rb), ртути (Hg) и др. Поэтому стандарты частоты бывают цезиевые, водородные, рубидиевые и др. Цезиевые и водородные стандарты составляют основу национальных эталонов времени и используются для формирования национальных и международной шкал атомного времени.

При интегрировании частоты начало шкалы времени не определено. Следовательно, нуль-пункты различных шкал атомного времени могут не совпадать. Кроме того разность нуль-пунктов шкал может изменяться из-за случайных и систематических погрешностей (или вариаций хода) атомных стандартов частоты. Со случайными и систематическими вариациями частоты связаны две важнейшие характеристики атомных часов: нестабильность и точность.

Нестабильность частоты определяется *дисперсией Аллана*.

В идеальном случае на выходе генератора частоты имеется синусоидальный сигнал вида:

$$V(t) = V_0 \cos 2\pi\nu_0 t, \tag{4.18}$$

ν_0 — номинальная частота генератора. Однако в действительности сигнал представляется выражением

$$V(t) = V_0 \cos[2\pi\nu_0 t + \varphi(t)], \tag{4.19}$$

где $\varphi(t)$ — фаза, меняющаяся со временем случайным образом. Здесь для простоты мы не рассматриваем флуктуации амплитуды сигнала.

Мгновенная частота генератора определяется производной по времени от аргумента $\Phi(t) = 2\pi\nu_0 t + \varphi(t)$ в выражении (4.19):

$$\nu(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\Phi}{dt} = \nu_0 + \frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi}{dt}.$$

Определим относительное отклонение частоты генератора от его номинальной частоты следующим образом:

$$y(t) = \frac{\nu(t) - \nu_0}{\nu_0} = \frac{1}{2\pi\nu_0}\frac{d\varphi}{dt}. \tag{4.20}$$

Для атомных стандартов частоты справедливо соотношение: $|\dot{\varphi}(t)/2\pi\nu_0| \ll 1$, т. е. относительное изменение частоты мало.

Так как время находится интегрированием частоты, то добавление к генератору счетчика (интегратора) количества периодов сигнала (4.19) превращает это устройство в часы. Значит интеграл

$$x_k(t) = \int\limits_{t_k}^{t_k+\tau} y(t')dt'$$

представляет собой величину, на которую уходят или отстают часы на промежутке времени от t_k до $t_k + \tau$, относительно идеального стандарта времени, в основе которого лежит генератор сигнала (4.18).

Среднее относительное отклонение частоты генератора на k-ом интервале, продолжительность которого равна τ, есть

$$\overline{y}_k = \frac{x_{k+1} - x_k}{\tau}. \tag{4.21}$$

Здесь мы предполагаем, что измерения выполняются с периодом τ, т. е. без потери информации между соседними интервалами.

Тогда дисперсия Аллана равна:

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2}\left\langle(\overline{y}_{k+1} - \overline{y}_k)^2\right\rangle, \tag{4.22}$$

где скобки $\langle\ldots\rangle$ обозначает усреднение в бесконечных пределах. Среднее значение произвольной функции F по определению:

$$\langle F\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} F(t)dt. \tag{4.23}$$

Используя уравнение (4.21), получим:

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2\tau^2} \left\langle (x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k)^2 \right\rangle . \qquad (4.24)$$

При увеличении τ до определенной величины случайные флуктуации частоты усредняются, и дисперсия Аллана уменьшается; однако при дальнейшем увеличении τ начинается систематическое увеличение шумов, приводящее к увеличению дисперсии Аллана.

Для более корректного представления поведения генератора при малых величинах τ (или для описания кратковременной нестабильности генератора) Аллан предложил использовать модифицированную дисперсию. Если τ_0 — минимальный интервал при интегрировании частоты, то для вычисления дисперсии при $\tau = n\tau_0$ используется формула:

$$\mathrm{Mod}\,\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2\tau^2} \left\langle \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_{k+2n} - 2x_{k+n} + x_k) \right]^2 \right\rangle . \qquad (4.25)$$

Ясно, что уравнение (4.25) совпадает с (4.24) при $n = 1$.

Для конечной последовательности N измерений x_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$ уравнение (4.25) может быть записано в виде:

$$\mathrm{Mod}\,\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2\tau^2 n^2 (N - 3n + 1)} \times \sum_{j=1}^{N-3n+1} \left[\sum_{k=j}^{n+j-1} (x_{k+2n} - 2x_{k+n} + x_k) \right]^2 . \qquad (4.26)$$

На рис. 4.8 показана дисперсии Аллана (или нестабильность) наиболее распространенных стандартов частоты, а также шкал времени (UT, TAI и пульсарной PSR).

Нестабильность лучших цезиевых стандартов достигает 10^{-14} при времени усреднения порядка нескольких суток. Водородные стандарты имеют лучшую из всех кратковременную нестабильность (до 10^{-15}) на интервале 100–1000 с. Недавно Парижская обсерватория объявила о разработке новых цезиевых часов, принцип действия которых основан на использовании цезиевого атомного фонтана. Ожидается, что нестабильность этих часов достигнет 10^{-16} на интервале усреднения порядка нескольких суток.

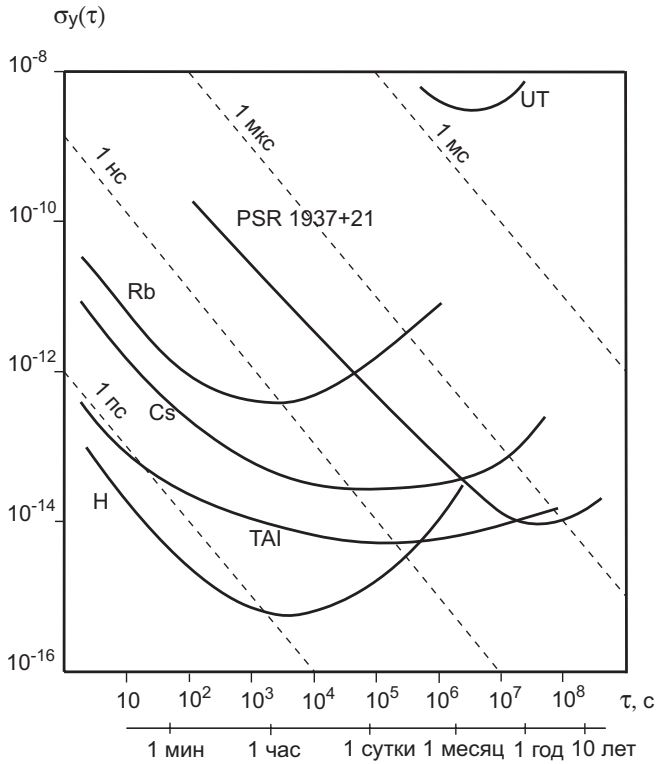


Рис. 4.8. Нестабильность стандартов частоты как функция времени.

Открытие пульсаров, разработка методов наблюдения и теории обработки наблюдений позволяют надеяться на построение новой шкалы пульсарного времени, которая принципиально отличается от шкалы атомного времени и превышает ее по стабильности на длительных интервалах времени.

В настоящее время нестабильность секунды TAI на интервалах времени от одного месяца до одного года равна или чуть меньше $1 \cdot 10^{-14}$. На бо́льших интервалах усреднения нестабильность увеличивается (до $\sim 5 \cdot 10^{-14}$).

Идеальный стандарт будет генерировать постоянную во времени частоту. Однако, если величина частоты будет отличаться от номинальной (9192631770 Гц), то шкала этого стандарта будет равномерно расходиться с TAI. Отличие реальной частоты стандарта от но-

минальной называется его *точностью*. Точность секунды TAI равна примерно $5 \cdot 10^{-14}$ (одна сигма). Это означает, что шкала TAI расходится с идеальной шкалой времени примерно на 1 мкс в год. Пунктирной линией на рис. 4.8 показано расхождение шкал времени на разных интервалах с идеальной равномерной шкалой.

Атомные стандарты частоты появились в нескольких лабораториях в середине 60-х годов. В 1971 г. атомная шкала Международного бюро времени (МБВ) была принята в качестве международной шкалы и стала называться TAI. Начало отсчета времени в шкале TAI было выбрано таким образом, чтобы показания часов в шкалах TAI и UT1 совпадали в момент 0^{h}UT 1 января 1958 г. Так как для этого момента разность $\Delta T = \mathrm{ET} - \mathrm{UT}$ равнялась $32\overset{\mathrm{s}}{,}184$, то связь атомной шкалы TAI с ET установлена соотношением

$$\mathrm{ET} = \mathrm{TAI} + 32\overset{\mathrm{s}}{,}184. \tag{4.27}$$

До конца 1968 г. шкала TAI формировалась путем усреднения частоты нескольких цезиевых стандартов, имевшихся в МБВ. С 1969 г. шкала TAI основывается на показаниях многих стандартов, расположенных в лабораториях разных стран. В формировании шкалы TAI принимают участие более 30 институтов и лабораторий, располагающих $\sim$ 200 атомными стандартами частоты. Показания часов сравниваются между собой с учетом релятивистских поправок и объединяются по специально разработанному алгоритму, позволяющему уменьшить ошибки при включении новых или удалении из обработки старых часов. Большое число водородных стандартов, используемых при вычислении TAI, обеспечивает высокую кратковременную стабильность шкалы, тогда как цезиевые стандарты гарантируют высокую точность, непрерывность шкалы и обеспечивают ее долговременную стабильность.

В настоящее время шкала TAI вычисляется по следующему алгоритму. Сначала каждому атомному стандарту, участвующему в выводе шкалы TAI, присваивается вес, который является функцией нестабильности частоты. Средняя относительная частота $\overline{y}_k$ $i-$х часов, определенная на k-ом двухмесячном интервале, используется для вычисления дисперсии Аллана:

$$\sigma_i^2(\tau) = \frac{(\overline{y}_{k+1} - \overline{y}_k)^2}{2},$$

где $\tau = 2$ месяца. Затем вычисляется дисперсия шести частот $\overline{y}_j$, где $(j = k, k+1, \ldots, k+6)$. Статистический вес стандарта w_i пропорционален обратной величине этой дисперсии. Эта процедура позволяет исключить кратковременную нестабильность часов. Среднее значение дисперсии Аллана $\sigma^2(\tau)$ для ансамбля часов $i = 1, \ldots, n$, вычисленное с учетом статистического веса часов w_i, служит оценкой нестабильности шкалы TAI.

Так как каждый из стандартов независим от остальных, то обозначим шкалу, формируемую i-м стандартом как TAI_i. Тогда по определению шкалы TAI имеем:

$$\mathrm{TAI} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \sum_{i=1}^{n} w_i [\mathrm{TAI}_i + a_i + b_i(t - t_0)], \qquad (4.28)$$

w_i — статистический вес i-го стандарта.

Константы a_i определяют смещение нуль-пунктов шкал времени TAI_i относительно TAI, а b_i определяют ход часов. Обычно константы a_i выбирают таким образом, чтобы в начальный момент времени t_0 значение $(\mathrm{TAI})_0$ совпадало с показаниями часов в используемой ранее шкале времени (для исключения скачков времени). Тогда из уравнения (4.28) при $t = t_0$ имеем:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i a_i = \sum_{i=1}^{n} w_i [(\mathrm{TAI})_0 - (\mathrm{TAI}_i)_0].$$

Отсюда находим, что

$$a_i = (\mathrm{TAI})_0 - (\mathrm{TAI}_i)_0.$$

Для определения величин b_i заметим, что уход частоты часов зависит от свойств самих часов (обозначим как b_i') и от релятивистских эффектов (b_i''), которые будут рассмотрены в следующем параграфе:

$$b_i = b_i' + b_i''.$$

Вычисление релятивистских поправок b''_i выполняется на основе теории относительности. Так как в большой совокупности часов величины b_i' могут быть и положительными, и отрицательными, обычно полагают, что

$$\sum_{i=1}^{n} w_i b_i' = 0.$$

Для вывода шкалы времени TAI показания атомных стандартов частоты должны сравниваться. Задача сравнения (синхронизации) часов сама по себе является сложной, и изложение теории и используемых методов выходит за рамки учебника. Скажем лишь несколько слов.

Для синхронизации часов используются два основных метода: первый основан на применении специальных радиосигналов, а второй — на перевозке часов.

До середины 80-х годов использовались специальные радиосигналы точного времени или навигационные системы типа LORAN-C. Сейчас для этой цели используются глобальные навигационные системы GPS и ГЛОНАСС. На спутниках GPS установлены высокостабильные стандарты частоты, на основе которых формируется собственная атомная шкала, которая называется TAI(GPS). Шкала GPS имеет постоянное смещение относительно TAI, равное 19 секундам, т. е.

$$\mathrm{TAI} = \mathrm{TAI(GPS)} + 19^{\mathrm{s}}.$$

Для синхронизации и сличения частот наземных часов используются радиосигналы, излучаемые спутниками. Корректируя момент приема на время распространения сигнала, можно определить показание наземных часов в шкале GPS, т. е. синхронизовать их.

Если в пункте, где расположен i-й стандарт частоты, принимается k сигналов точного времени, то после учета времени задержки на распространение радиосигналов можно записать k уравнений, связывающих показания стандарта частоты TAI_i и показания часов T_j на j—ом передатчике радиосигналов:

$$\mathrm{TAI}_i - \mathrm{T}_j = \Delta T_{ij}, \quad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Определим новые переменные x_i, y_i как

$$x_i = \mathrm{TAI} - \mathrm{TAI}_i,$$
$$y_i = \mathrm{TAI} - \mathrm{T}_j.$$

Тогда из системы уравнений

$$
\begin{aligned}
& y_j - x_i = \Delta T_{ij}, \\
& \sum_{i=1}^{n} w_i[-x_i + a_i + b_i(t - t_0)] = 0, \\
& a_i = (\mathrm{TAI})_0 - (\mathrm{TAI}_i)_0, \\
& \sum_{i=1}^{n} w_i b_i' = 0
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

можно найти величины x_i. Таким образом, *шкала TAI реализуется в виде поправок x_i к показаниям TAI_i конкретных атомных стандартов частоты*, участвующих в сравнении. Решение системы (4.29) выполняется в Международном бюро мер и весов (Bureau International des Poids et Mesures, BIPM). Поправки x_i для определенных дат публикуются в «Циркуляре T» BIPM (рис. 4.9).

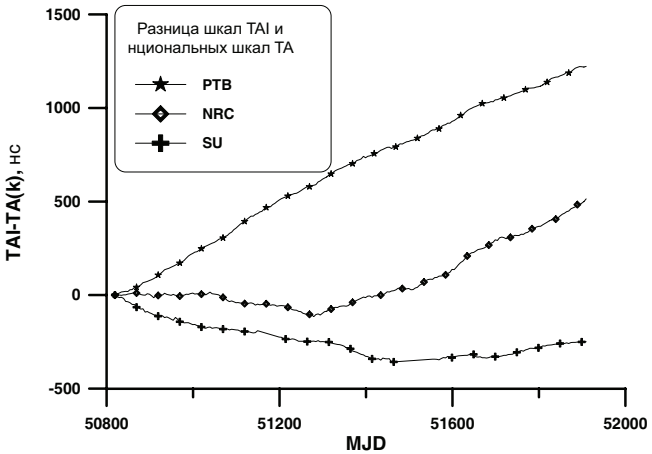


Рис. 4.9. Разность шкалы TAI и национальных шкал времени TA(k) (смещение нуль-пунктов исключено): SU — Институт метрологии времени и пространства, Менделеево, Россия; NRC — Национальный исследовательский совет, Оттава, Канада; PTB — Физико-технический институт, Брауншвейг, Германия.

Кроме этого, на сайте BIPM (http://www.bipm.fr) можно найти информацию о ходе всех часов, которые используются для вычисле-

ния шкалы TAI. В качестве примера на рис. 4.10 показаны результаты измерений хода четырех водородных стандартов частоты, принадлежащих разным организациям.

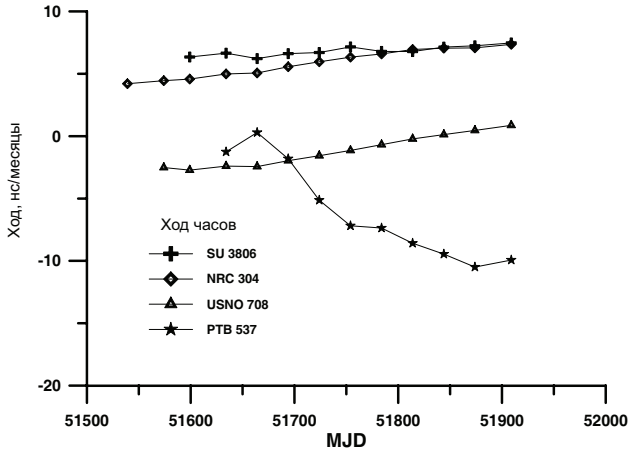


Рис. 4.10. Ход водородных стандартов частоты (номера соответствуют конкретным часам): USNO — Военно-морская обсерватория, Вашингтон, США.

4.5. Динамические шкалы времени

Шкала эфемеридного времени ET была первой шкалой *динамического времени*. Одним из её недостатков была задержка при вычислении поправки ΔT и сложность в практической реализации. Необходимо было провести наблюдения тел Солнечной системы и получить их координаты, затем сравнить их с теоретическими координатами. Лишь по прошествии минимум одного года определялась разница ΔT; точность вычисления ΔT ограничивалась точностью оптических наблюдений.

Повышение точности наблюдений и введение атомной шкалы привело к созданию новых динамических шкал времени. Такими шкалами являются шкалы *барицентрического и земного динамического времени* (TDB и TDT, соответственно), *барицентрического и геоцентрического координатного времени* (TCB и TCG, соответственно) и *земного времени* (TT).

На практике только изучение Солнечной системы может обеспечить нас точными динамическими шкалами. Однако построение идеальной равномерной шкалы времени ограничено неполнотой нашего знания строения Солнечной системы, точностью наблюдений тел и вычислений их положений, а также точностью определения моментов наблюдений.

Эфемеридное время ET являлось аргументом в уравнениях классической небесной механики (см. § 4.3). Пространство, в котором происходит движение тел солнечной системы, предполагается плоским (евклидовым), а время абсолютным. Переход к системе динамических времен TDB, TDT, TCB, TCG, TT означает, что преобразования координат и времени в евклидовом пространстве при переносе начала системы координат заменяются релятивистскими преобразованиями, т. е. трехмерное пространство заменяется четырехмерным. Свойства пространства–времени в каждой точке определяются согласно теории Эйнштейна распределением вещества в пространстве. Как следствие, пространство–время становится кривым.

Чтобы разобраться, для чего было определено столько шкал времени, какая между ними разница, необходимо обратиться к основам специальной и общей теорий относительности.

При обработке результатов наблюдений в рамках общей теории относительности необходимо различать два вида величин: собственные и координатные величины. Собственные величины определяются непосредственно в результате эксперимента или наблюдения в лаборатории без привлечения каких-либо соглашений о выборе системы отсчета, аксиом и т. д. Фундаментальными величинами являются собственное время и длина, в единицах которых измеряются промежутки времени и размеры тел в конкретной лаборатории. В общем случае промежуток времени между двумя событиями, измеряемый в разных лабораториях будет разным; разными будут и измеренные размеры одного и того же тела.

Координатные величины (например, время и длина) зависят от выбора системы отсчета, т. е. определяются на основе соглашения о свойствах системы отсчета.

В ньютоновской механике всегда можно определить координаты таким образом, что единицы измерения координат всегда будут равны собственным единицам во всем пространстве. Поэтому нет необходимости делать различие между координатными и собственными

величинами. В общей теории относительности из-за кривизны четырехмерного пространства–времени соотношение между координатными и собственными величинами не остается постоянным, а зависит от положения и скорости наблюдателя. Поэтому при переходе из одной точки пространства в другую единицы измерения собственных величин меняются. При измерениях времени это приводит к тому, что соотношение между координатным временным интервалом и собственным (измеренным) интервалом зависит от положения часов наблюдателя в пространстве. При уменьшении скорости наблюдателя до нуля относительно начала отсчета и удалении на бесконечно большое расстояние от массивных тел пространство для наблюдателя становится плоским (евклидовым), а собственное время — координатным.

4.5.1. Координатное и собственное время

Охарактеризуем *событие* местом (т. е. координатами x, y, z), где оно произошло, и временем t, когда оно произошло. Например, наблюдение некоторого объекта есть событие, которое происходит в четырехмерном пространстве, причем пространственные координаты определяют положение наблюдателя, а время определяет момент наблюдения. В четырехмерном пространстве событие изображается точкой, называемой *мировой точкой*. Изменение координат наблюдателя с течением времени означает движение точки по некоторой кривой, называемой *мировой линией*.

Если (x_1, y_1, z_1, t_1) и (x_2, y_2, z_2, t_2) — координаты двух событий, то величина

$$s_{12} = \left[c^2(t_2 - t_1) - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2\right]^{1/2}$$

называется *интервалом* между этими событиями, c — скорость света. Если событиями являются излучение и прием одного и того же светового сигнала, то $s_{12} = 0$. В силу постоянства скорости света и равноправности инерциальных систем отсчета $s_{12} = 0$ в любой системе отсчета. Значит, если есть две инерциальные системы отсчета L и L', то из обращения интервала в нуль в одной системе следует его обращение в нуль в другой (и обратно).

Для двух бесконечно близких событий интервал равен:

$$ds = (c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2)^{1/2}. \qquad (4.30)$$

Так как величины ds и ds' — бесконечно малые одного порядка, то в разных системах отсчета интервалы должны быть пропорциональны: $ds^2 = kds'^2$. Коэффициент k не должен зависеть ни от времени, ни от координат (пространство и время однородно, т. е. начала систем L и L' могут быть заданы произвольным образом), ни от направления относительной скорости систем отсчета (пространство изотропно, т. е. пространственные оси систем L и L' могут быть повернуты произвольным образом), т. е. k может зависеть только от абсолютной величины относительной скорости. Поэтому, если рассмотреть последовательные преобразования — сначала от системы L к L', а затем от L' к L, то коэффициент преобразования стал бы равняться k^2: $ds^2 = k^2 ds'^2$. Это означает, что $k = 1$ и $ds^2 = ds'^2$. Из равенства бесконечно малых интервалов следует равенство конечных интервалов: $s^2 = s'^2$.

Интервал между событиями одинаков во всех инерциальных системах отсчета, т. е. интервал является инвариантом по отношению к преобразованию от одной инерциальной системы отсчета к любой другой. Квадрат интервала может равняться, как мы видели, нулю (в этом случае интервал называется *светоподобным*), быть больше нуля (если рассматриваются события, произошедшие в одной и той же точке пространства, но в разное время — это *время-подобный* интервал), а также быть меньше нуля (*пространственноподобный* интервал между событиями, произошедших в одно и то же время в разных точках пространства).

Координаты события (ct, x, y, z) удобно считать компонентами x^i контравариантного четырехмерного вектора (или 4-вектора), причем индексы принимают значения $0, 1, 2, 3$:

$$x^0 = ct,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z,$$

т. е. время рассматривается как одна из координат в 4-пространстве. Поэтому t называется *координатным временем*.

Если интервал рассматривать как расстояние между двумя мировыми точками в четырехмерной системе координат, то преобразование координат из одной системы отсчета в другую должно сохранять все длины интервалов неизменными. Такими преобразованиями являются только параллельные переносы и вращения системы координат.

Пусть инерциальная система отсчета L' с осями x', y', z' движется относительно системы $L(x, y, z)$ со скоростью $\mathbf{v}$. Допустим, что оси x и x' направлены по $\mathbf{v}$, оси y и y', z и z' соответственно параллельны и начала координат O и O' совпадают при $t = t' = 0$. Преобразования координат из системы L в L' в этом случае называются *преобразованиями Лоренца*:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},\ y' = y,\ z' = z,\ t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{4.31}$$

так как $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$. В следующей главе будет показано, что преобразования Лоренца могут быть представлены в виде четырехмерной ортогональной матрицы, т. е. формулы (4.31) действительно представляют вращение в 4-пространстве.

Предположим теперь, что в некоторой инерциальной системе отсчета L расположены неподвижные часы, и мы измерили по ним промежуток времени Δt между какими-то двумя событиями. Спрашивается, какой промежуток времени $\Delta t'$ между этими же событиями покажут другие, точно такие же часы, которые покоятся относительно системы отсчета L', движущейся относительно L с постоянной скоростью v. За промежуток времени Δt координаты часов в L' относительно системы L изменятся на $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, т. е. часы пройдут расстояние $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$. Интервал в системе L равен, следовательно, $\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$. В системе отсчета L' за время $\Delta t'$ пространственные координаты часов не изменяются, т. е. $\Delta x' = \Delta y' = \Delta z' = 0$, и интервал в L' равен $\Delta s'^2 = c^2\Delta t'^2$. Из инвариантности интервала следует уравнение:

$$c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = c^2\Delta t'^2.$$

Так как

$$v^2 = \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}{\Delta t^2},$$

то

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{4.32}$$

Переходя к бесконечно малым величинам и интегрируя это выражение, найдем промежуток времени, измеренный движущимися отно-

сительно системы L часами, если по неподвижным часам проходит время $t_2 - t_1$:

$$\tau = t_2' - t_1' = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt. \tag{4.33}$$

Промежуток времени $\tau = t_2' - t_1'$, измеряемый часами, которые связаны с движущейся системой, называется промежутком *собственного времени*. Из уравнения (4.33) следует, что собственное время течет не быстрее, чем координатное время в неподвижной системе отсчета.

Определим теперь единицу времени в системе отсчета, связанной с наблюдателем, как секунду, и введем обозначение — $[\mathrm{s}_T]$. Единицу времени в неподвижной системе отчета также назовем секундой и обозначим ее как $[\mathrm{s}_B]$. Перепишем уравнение (4.32) в виде:

$$\widetilde{\Delta t}'\,[\mathrm{s}_T] = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,\widetilde{\Delta t}\,[\mathrm{s}_B], \tag{4.34}$$

где $\widetilde{\Delta t}'$, $\widetilde{\Delta t}$ представляют собой числа — показания движущихся и неподвижных часов в выбранных единицах измерения. Если используются одинаковые часы и $[\mathrm{s}_T] = [\mathrm{s}_B]$, то показания часов связаны известным соотношением

$$\widetilde{\Delta t}' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,\widetilde{\Delta t},$$

описывающим замедление времени движущихся часов.

С другой стороны, можно потребовать, чтобы показания часов в разных системах отсчета оставались неизменными: $\widetilde{\Delta t}' = \widetilde{\Delta t}$. Это требование означает, что единица времени в движущейся системе отсчета должна изменяться согласно уравнению:

$$1\,[\mathrm{s}_B] = 1\,[\mathrm{s}_T]/\eta, \tag{4.35}$$

где $\eta = \sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Оба определения, связывающие две шкалы времени, совершенно равноправны. При определении шкал динамического времени TDB и TDT в резолюциях МАС говорится, что между этими шкалами не должно быть векового (линейного) хода. Это означает, что Международный астрономический союз отдал предпочтение второму методу. Поэтому единицы времени шкал TDB и TDT должны быть

связаны уравнением (4.35). В обозначениях, принятых МАС, уравнение (4.35) записывается в виде: $< d\mathrm{TDT}/d\mathrm{TDB} >= 1$, где символ $<>$ обозначает усреднение в бесконечных пределах. Коэффициент η зависит не только от скорости часов, но и от гравитационного потенциала в точке, где расположены лабораторные часы, причем $\eta = 1 - L_B$, где $L_B = 1,55051976772 \times 10^{-8} \pm 2 \times 10^{-17}$. Коэффициент L_B, как будет показано ниже, определяется строением Солнечной системы.

Зная коэффициент преобразования η, можно по лабораторным часам определить барицентрическое время TDB. Согласно определению МАС, земное динамическое время TDT (Temps Dynamique Terrestrial) — это собственное время наблюдателя, измеряемое атомными часами, расположенными на поверхности геоида. Единицей времени является секунда СИ. Шкала TDT была введена с 1 января 1977 г. и заменила шкалу эфемеридного времени ET. В момент $0^{\mathrm{h}}0^{\mathrm{m}}0^{\mathrm{s}}$ TAI 1 января 1977 г. значение эпохи в TDT равняется $1,0003725^{\mathrm{d}}$ 1 января 1977 г. Так как $\mathrm{ET} - \mathrm{TAI} = 0,0003725^{\mathrm{d}} = 32\overset{\mathrm{s}}{,}184$, то для сохранения непрерывности шкалы TDT с эфемеридным временем принято считать, что

$$\mathrm{TDT} = \mathrm{TAI} + 32\overset{\mathrm{s}}{,}184. \tag{4.36}$$

Аргумент TDT используется в уравнениях движения для вычисления геоцентрических эфемерид.

Барицентрическое динамическое время TDB (Temps Dynamique Baricentrique) определяется на основе уравнения (4.35) и принятой метрики пространства–времени Солнечной системы. Шкала TDB определена МАС как координатное время, которое должно отличаться от TDT *только периодическими членами*. Однако из этого определения следует, что шкала TDB нереализуема. Причины этого понятны. При определении TDB требуется исключить вековое расхождение шкал времени. Так как в действительности операция усреднения осуществляется в течение конечного промежутка времени, то становится невозможным разделение долгопериодических членов от вековых. Другими словами, с практической точки зрения существует неоднозначность в удалении векового расхождения шкал, что делает определение TDB неоднозначным. Другая проблема связана с введением коэффициента η в преобразование шкалы TDT в TDB. Если принимается постулат о постоянстве скорости

света, то при использовании шкал TDT в TDB должны быть приняты различные значения констант в разных системах отсчета. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Определение единицы длины выполняется на основе аксиомы о независимости скорости света c от системы отсчета. Если $[\text{м}_T]$ и $[\text{м}_B]$ — единицы длины (метры) в движущейся и неподвижной системах отсчета, то

$$c = \widetilde{c}_T \frac{[\text{м}_T]}{[\text{s}_T]} = \widetilde{c}_B \frac{[\text{м}_B]}{[\text{s}_B]},$$

где $\widetilde{c}_T, \widetilde{c}_B$ — численные значения скорости света, $[\text{s}_T]$ и $[\text{s}_B]$ — секунды в движущейся и неподвижной системах отсчета. Используя соотношение (4.35), находим:

$$\widetilde{c}_T[\text{м}_T] = \eta \widetilde{c}_B[\text{м}_B], \tag{4.37}$$

Тогда, если численное значение скорости света одинаково в разных системах отсчета: $\widetilde{c}_T = \widetilde{c}_B$, то единицы длины удовлетворяют уравнению:

$$1\,[\text{м}_B] = 1\,[\text{м}_T]/\eta. \tag{4.38}$$

Если в качестве единицы массы в Солнечной системе принять массу Солнца $M_\odot$, то единица длины — астрономическая единица (а. е.) — может быть определена на основе третьего закона Кеплера. Большая полуось a орбиты связана с периодом обращения T и массами планеты M и Солнца $M_\odot$ согласно уравнению (2.50):

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM_\odot}{4\pi^2}\left(1 + \frac{M}{M_\odot}\right).$$

Запишем закон Кеплера для системы Земля–Луна ($M = M_\oplus + M_☾$) в следующем виде:

$$\frac{k^2}{4\pi^2} = \frac{a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{M_\odot + M_\oplus + M_☾},$$

где $M_\oplus$ — масса Земли, $M_☾$ — масса Луны. Гауссова гравитационная постоянная k является *определяющей* и связана с ньютоновской постоянной как

$$G = k^2. \tag{4.39}$$

Численное значение k было определено МАС в 1938 г.:

$$k = 0,01720209895\, M_\odot^{-1/2}(\text{а. е.})^{3/2}\ \text{сут.}^{-1},$$

сутки определяются как внесистемная единица времени, причем их длительность равна 86400 с. Так как k — определяющая постоянная, то считается, что её величина известна точно. Численно гауссова постоянная k равна среднему угловому движению n (в радианах в эфемеридные сутки) тела с нулевой массой[3] в поле Солнца на расстоянии в 1 а. е.:

$$k = \frac{2\pi}{T}\sqrt{\frac{a^3}{M_\odot + M}}. \tag{4.40}$$

При $M_\odot = 1, M = 0, a = 1$ и T, равному числу эфемеридных суток в сидерическом году, получим $k = n$.

Для определения величины астрономической единицы в принятых единицах длины (метрах) необходимы прямые измерения расстояний между телами Солнечной системы. Для этого сначала использовались измерения суточного горизонтального параллакса Солнца (стр. 323). Точность определения астрономической единицы резко повысилась с развитием радиоастрометрических методов наблюдений. Радиолокация планет и астероидов позволяет достичь микросекундной точности в определении параллакса Солнца, что соответствует нескольким десяткам метров в линейном масштабе. Используя измерения задержки между испущенным радиосигналом и сигналом, отраженным от тела солнечной системы, было определено время, за который радиосигнал проходит 1 а. е. В «Стандартах МСВЗ» оно равно (в TDB единицах):

$$\tau_A = 499,0047838061 \pm 2 \times 10^{-8} \text{ с/а. е.}$$

Фундаментальную роль в астрометрических измерениях играет значение скорости света в принятых единицах длины и времени. Скорость света является определяющей постоянной, значение которой равно:

$$c = 299792458 \text{ м/с}.$$

Зная значение скорости света в единицах СИ, можно выразить 1 а. е. в метрах. Так как одним из постулатов теории относительности является постоянство скорости света в любой системе отсчета,

[3]Тело с нулевой массой — математическая абстракция. В небесной механике для упрощения решения динамических уравнений предполагается, что подобное тело движется в гравитационном поле массивных тел, не оказывая при этом на их движение никакого влияния.

то уравнение (4.35) означает, что единицы длины в барицентрической и земной системах отсчета также должны различаться. Уравнение (4.35) приводит к тому, что некоторые астрономические постоянные будут зависеть от того, в какой системе — геоцентрической или барицентрической — они используются. Такими постоянными являются, например, геоцентрическая $GM_{\oplus}$ и солнечная $GM_{\odot}$ гравитационные постоянные. В таблице 4.2 приводятся значения некоторых постоянных в геоцентрической или барицентрической системе координат при использовании шкал времени TDT и TDB.

Таблица 4.2. Значения астрономических постоянных.

Постоянная	Значение в TDT	Значение в TDB	Разность	Ошибка
$GM_{\oplus}, \frac{\text{м}^3}{\text{с}^2}$	$3,986004415 \cdot 10^{14}$	$3,986004356 \cdot 10^{14}$	$6 \cdot 10^6$	$8 \cdot 10^5$
$GM_{\odot}, \frac{\text{м}^3}{\text{с}^2}$	$1,32712441983 \cdot 10^{20}$	$1,32712440018 \cdot 10^{20}$	$1,97 \cdot 10^{12}$	$0,26 \cdot 10^{12}$
1 а. е., м	149597873011	149597870691	2320	30
a_E, м	6378136,6	6378136,5	0,10	0,10

Как видно из таблицы 4.2, различия констант в геоцентрической и барицентрической системах значимы (кроме экваториального радиуса Земли a_E). Их разница значительно превышает ошибки измерений.

Поэтому в 1991 г. на Генеральной Ассамблее МАС было принято решение отказаться от использования шкал времени TDT и TDB и ввести новые шкалы времени TCB и TCG.

Для определения этих шкал рассмотрим, как собственное время определяется в общей теории относительности.

Допустим, что имеется неинерциальная система координат x', y', z', которая равномерно вращается со скоростью Ω относительно оси z. Преобразование координат к инерциальной системе может быть записано в виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_3(\varphi) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

где угол $\varphi = \Omega t$. Квадрат интервала $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ при $t = t'$ во вращающейся системе приобретет вид:

$$ds^2 = [c^2 - (x'^2 + y'^2)\Omega^2]dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 \\ + 2\Omega(y'dx' - x'dy')dt'. \qquad (4.41)$$

Дополнительные неквадратичные члены связаны с кориолисовыми и центробежными силами, которые появляются в неинерциальных системах отсчета. В общем виде интервал можно записать как:

$$ds^2 = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} g_{ij}dx^i dx^j \equiv g_{ij}dx^i dx^j, \qquad (4.42)$$

где g_{ij} — функции координат x^i, $i = 0 \div 3$. При записи этого выражения использовалось соглашение, по которому в выражении должно быть выполнено суммирование, если есть повторяющиеся индексы, а знак суммирования опускается.

Величины g_{ij} определяют геометрию системы координат (или *метрику* пространства-времени) и образуют тензор. В инерциальной системе при использовании декартовых координат величины g_{ij} равны:

$$g_{00} = 1,\ g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1,\ g_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j \qquad (4.43)$$

и определяют *метрику Минковского*. С помощью обратного преобразования

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_3^T(\varphi) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

величины g_{ij} в (4.41) могут быть преобразованы к значениям (4.43). Гравитационные поля в общей теории относительности проявляются в изменении метрики, но никакими преобразованиями координат ее невозможно привести к метрике Минковского.

Для определения собственного времени в общей теории относительности рассмотрим два бесконечно близких события, происшедших в одной и той же точке пространства и разделенных промежутком времени $d\tau$. Полагая, что $ds^2 = c^2d\tau^2$ и $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$, получим по (4.42):

$$c^2d\tau^2 = g_{00}(dx^0)^2,$$

откуда собственное время для данной точки пространства

$$\tau = \frac{1}{c}\int \sqrt{g_{00}}dx^0.$$

Собственное время в разных точках пространства связано с координатой $x^0 = ct$ посредством компоненты g_{00} метрического тензора. Если часы движутся, то временной интервал $\Delta\tau$ между двумя событиями 1 и 2, равный разности показаний часов $\tau_2 - \tau_1$, зависит от пути. Если мировые линии между событиями 1 и 2 различаются (назовем пути как A и B), то в общем случае $\Delta\tau_A \neq \Delta\tau_B$.

Гравитационное поле, как показал Эйнштейн, проявляется в изменении метрики пространства–времени, т. е. определяется величинами g_{ij}. Поэтому собственное время наблюдателей, расположенных в разных точках пространства и движущихся относительно друг друга, течет по-разному. Это означает, что единица времени будет разной для разных наблюдателей. Разной будет и единица собственной длины.

Если наблюдатель неподвижен относительно некоторой системы отсчета, то квадрат интервала между какими-нибудь событиями для него равен $s^2 = c\Delta t^2 > 0$. Мировая линия, по которой движется наблюдатель, является время-подобной, т. е. любая пара точек разделена время-подобным интервалом. Собственное время, таким образом, является временем, которое измеряется наблюдателем, находящимся на этой мировой линии. С большой точностью можно считать, что атомные часы показывают собственное время в точке их установки. С точки зрения общей теории относительности TAI является координатным временем, определенным в геоцентрической системе координат на поверхности геоида. Для вычисления шкалы TAI используется большое число часов, размещенных в разных точках Земли, и, строго говоря, TAI не может называться собственным временем.

4.5.2. Связь между динамическими шкалами времени

Итак, чтобы можно было преобразовать собственное время в координатное время или сравнить собственные времена разных наблюдателей, необходимо знать компоненту g_{00} метрического тензора. Метрический тензор определяется решением уравнений Эйнштейна для заданного распределения массы. В настоящее время получено много частных точных или приближенных решений этих

уравнений. Однако для практического использования в сферической астрономии особое значение имеет метрика Солнечной системы. Для простых вычислений хорошим приближением гравитационного поля Солнечной системы является поле точечной массы, так как $99,9\%$ массы Солнечной системы сосредоточено в Солнце.

Точное решение уравнений Эйнштейна для случая сферически симметричного невращающегося тела было найдено Шварцшильдом в 1916 г. Гравитационный потенциал точки с массой M на расстоянии r определяется формулой (3.1):

$$U = \frac{GM}{r}.$$

Тогда в сферических координатах решение Шварцшильда можно записать в виде:

$$c^2 d\tau^2 = c^2 \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2U}{c^2}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\lambda^2). \qquad (4.44)$$

Начало пространственных координат системы отсчета совпадает с центром масс тела.

Следовательно, $g_{00} = 1 - 2U/c^2$. Метрика Шварцшильда довольно точно описывает гравитационное поле Солнечной системы. При $r \to \infty$ метрика Швардшильда совпадает с метрикой плоского пространства — метрикой Минковского: $2U/c^2 \to 0$, $dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\lambda^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Следовательно, на бесконечно большом расстоянии от точечной массы связь собственного и координатного времени выражается преобразованиями Лоренца и уравнением (4.33). При $v = 0$ получим, что $\tau = t$, и *координатное время — это время, которое показывают часы, находящиеся на бесконечно большом расстоянии и покоящиеся относительно точечной массы.*

Гравитационное поле Солнечной системы определяется не только Солнцем, но и остальными телами. Поэтому потенциал в точке с барицентрическим радиусом-вектором $\mathbf{r}$ на поверхности Земли, где расположены часы, определяется выражением

$$U = \sum_p \frac{GM_p}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_p|},$$

и суммирование выполняется по всем телам p солнечной системы, радиусы-векторы которых равны $\mathbf{r}_p$. Координаты тел определяются относительно барицентра — центра масс Солнечной системы.

Более точное по сравнению с метрикой Шварцшильда выражение метрики Солнечной системы было получено с использованием так называемого пост-ньютоновского (PPN) формализма. Это приближенное решение уравнений поля, справедливое для слабого гравитационного поля и малых скоростей тел ($U/c^2 \sim v^2/c^2 \ll 1$) для нескольких гравитирующих, вращающихся, несферических тел. Выражение метрического тензора Солнечной системы было рекомендовано Генеральной Ассамблеей МАС в 1991 г. и уточнено в 2000 г. для решения астрометрических задач с микросекундной точностью. Для простоты мы рассмотрим выражения для g_{ij}, рекомендованные в 1991 г. Альтернативные теории гравитации не исключаются из рассмотрения путем введения в компоненты метрического тензора так называемых PPN-параметров.

Метрика пространства-времени Солнечной системы может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 - 2\phi + O(c^{-4}), \\ g_{0j} &= O(c^{-3}), \\ g_{ij} &= -\delta_{ij}(1 + 2\phi) + O(c^{-4}), \end{aligned} \tag{4.45}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, $\phi = U/c^2$. Из метрики (4.45) следует выражение для квадрата интервала:

$$c^2 d\tau^2 = [1-2\phi(\mathbf{r})](dx^0)^2 - [1+2\phi(\mathbf{r})][(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2], \tag{4.46}$$

где $\phi(\mathbf{r})$ — мгновенный «потенциал» в точке расположения часов. В дальнейшем опустим кавычки; будем называть функцию ϕ потенциалом и помнить, что в действительности эта функция равна гравитационному потенциалу U, деленному на квадрат скорости света.

Обозначая скорость атомных часов относительно барицентра Солнечной системы через $\mathbf{v}$, получим

$$v^2 = \left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^3}{dt}\right)^2. \tag{4.47}$$

Подставляя уравнение (4.47) в (4.46), найдем, что

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - 2\phi - (1 + 2\phi)\frac{v^2}{c^2}}$$

или, используя формулу Тэйлора ($\phi \sim 10^{-8}$),

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 - \left(\phi + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) + O\left(\frac{v^4}{c^4}\right). \tag{4.48}$$

Правая часть (4.48) изменяется во времени из-за движения Земли по орбите и вращения, так как меняется барицентрическая скорость часов и потенциал ϕ в точке расположения часов. Это значит, что промежуток в единицах собственного времени меняется по сравнению с промежутком в единицах координатного времени.

В уравнении (4.48) предполагается, что τ и t измеряются в одних и тех же единицах (например, секундах СИ). Однако можно считать, что τ и t измеряются в разных единицах (например, отношение этих единиц описывается уравнением (4.35)); в этом случае правая часть уравнения (4.48) должна быть умножена на коэффициент η. Интегрирование уравнения (4.48) дает:

$$\tau - t = (\eta - 1)(t - t_0) - \eta \int_{t_0}^{t} \left(\phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) dt, \tag{4.49}$$

причем предполагается, что две шкалы времени синхронизированы в момент времени t_0, так что $\tau = t$ в момент t_0.

Вычислим интеграл в уравнении (4.49). Для этого будем считать, что

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}_\oplus + \mathbf{r}', \qquad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}_\oplus + \dot{\mathbf{r}}' = \mathbf{V}_\oplus + \mathbf{w}, \tag{4.50}$$

где $\mathbf{R}_\oplus, \mathbf{V}_\oplus$ — векторы положения и скорости центра Земли, $\mathbf{r}', \mathbf{w}$ — векторы положения и скорости часов относительно центра Земли. Все векторы измеряются в барицентрической системе координат. Потенциал $\phi(\mathbf{r})$ является суммой потенциалов Земли $\phi_\oplus(\mathbf{r})$ и остальных тел Солнечной системы $\phi_c(\mathbf{r})$: $\phi(\mathbf{r}) = \phi_\oplus(\mathbf{r}) + \phi_c(\mathbf{r})$. Заметим, что потенциал $\phi_\oplus(\mathbf{r}) = \phi_\oplus(\mathbf{r}')$ для часов, расположенных на поверхности Земли, является почти постоянной величиной (если пренебречь движением полюса и неравномерностью вращения), тогда как потенциал $\phi_c(\mathbf{r})$ меняется из-за движения часов, вызванного вращением и орбитальным движением Земли. Подставляя выражения (4.50) в (4.48), получим:

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 - \left(\phi_\oplus(\mathbf{r}') + \phi_c(\mathbf{r}) + \frac{V_\oplus^2 + 2\mathbf{V}_\oplus \cdot \dot{\mathbf{r}}' + w^2}{2c^2}\right). \tag{4.51}$$

Члены, входящие в формулу (4.51), имеют следующий порядок: орбитальное движение Земли характеризуется членом $V_\oplus/c \sim 10^{-4}$; движение часов относительно центра Земли — $w/c \sim 10^{-6}$; гравитационный потенциал тел Солнечной системы на орбите Земли — $\phi_c \sim 10^{-8}$; потенциал на поверхности Земли — $\phi_\oplus \sim 10^{-8}$.

Разлагая потенциал $\phi_c(\mathbf{r}) = \phi_c(\mathbf{R}_\oplus + \mathbf{r}')$ при $|\mathbf{R}_\oplus| \gg |\mathbf{r}'|$ в ряд Тейлора относительно центра Земли и сохраняя только линейные члены, получим:

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_\oplus(\mathbf{r}') + \phi_c(\mathbf{R}_\oplus) + \operatorname{grad}\phi_c(\mathbf{R}_\oplus)\cdot\mathbf{r}'. \tag{4.52}$$

Здесь учтено, что потенциал Земли в ее центре равен нулю. Градиент вычисляется в центре Земли, причем с точностью $O(c^{-2})$ ускорение центра Земли совпадает с ньютоновским ускорением: $\operatorname{grad}\phi_c(\mathbf{R}_\oplus) = \ddot{\mathbf{R}}_\oplus/c^2 = \dot{\mathbf{V}}_\oplus/c^2$.

Используя разложение потенциала (4.52), можно представить интеграл в (4.49) в виде суммы двух интегралов или двух поправок к собственному времени, одна из которых $\Delta t_\oplus$ является общей для всех часов, расположенных на поверхности Земли, другая — $\Delta t'$ зависит от координат часов:

$$\Delta t_\oplus = \int_{t_0}^{t}\left(\phi_c(\mathbf{R}_\oplus) + \frac{V_\oplus^2}{2c^2}\right)dt, \tag{4.53}$$

$$\begin{aligned}\Delta t' &= \int_{t_0}^{t}\left[\phi_\oplus(\mathbf{r}') + \frac{w^2}{2c^2} + \frac{1}{c^2}(\mathbf{V}_\oplus\cdot\dot{\mathbf{r}}' + \dot{\mathbf{V}}_\oplus\cdot\mathbf{r}')\right]dt = \\ &= \int_{t_0}^{t}\left[\phi_\oplus(\mathbf{r}') + \frac{w^2}{2c^2}\right]dt + \frac{\mathbf{V}_\oplus\cdot\mathbf{r}'}{c^2} = \\ &= \left(\phi_\oplus(\mathbf{r}') + \frac{w^2}{2c^2}\right)(t - t_0) + \frac{\mathbf{V}_\oplus\cdot\mathbf{r}'}{c^2}.\end{aligned} \tag{4.54}$$

При интегрировании предполагалось, что для данной точки на поверхности Земли $\phi_\oplus(\mathbf{r}')$ и w^2 практически постоянны.

Квазипериодический член $\mathbf{V}_\oplus\cdot\mathbf{r}'/c^2$ в (4.54) имеет величину примерно 2 мкс. Основной период равен суткам. Эта поправка объясняется в рамках специальной теории относительности: одновременные события в неподвижной барицентрической системе отсчета не являются одновременными в движущейся геоцентрической системе.

Уравнение (4.49) показывает, как собственное время атомных часов, фиксированных на поверхности Земли, зависит от их положения и скорости в барицентрической системе отсчета и координатного времени. В частности, это уравнение показывает, что при сравнении часов, находящихся в разных местах, следует учитывать разность их собственных времен. Для этого атомные часы должны периодически сравниваться, и разность показаний двух часов i и j будет определяться разностью $\tau_i - \tau_j$, причем τ_i, τ_j вычисляются по формуле (4.49). Таким образом уравнение (4.49) может быть использовано для понимания проблемы синхронизации часов.

Поправка $\Delta t_\oplus$ является общей для всех часов, расположенных на Земле. Поэтому она одинакова для всех часов, и ее можно не учитывать при синхронизации. Однако при преобразовании между собственным и координатным временем член $\Delta t_\oplus$ является основным.

Релятивистская поправка $\Delta t'$ различна для разных часов. Это означает, что в результате релятивистских эффектов шкалы атомных часов расходятся. Это расхождение выражается в виде линейного дрейфа и малых квазипериодических вариаций. Линейный член в (4.54) определяется гравитационным потенциалом и скоростью часов относительно центра масс Земли. Так как часы расположены не точно на поверхности геоида, то различие их положения по высоте на Δh приводит к изменению гравитационного потенциала на величину:

$$\delta\phi_\oplus(\Delta h) = \frac{GM_\oplus}{c^2}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}_g + \boldsymbol{\Delta h}|} - \frac{1}{|\mathbf{r}_g|}\right),$$

$\mathbf{r}_g$ — вектор от центра Земли до часов, находящихся на геоиде. Для часов, расположенных на поверхности Земли, $\Delta h \ll r_g$, где $\Delta h = |\boldsymbol{\Delta h}|$ — ортометрическая высота часов, $r_g = |\mathbf{r}_g|$, и с большой точностью предыдущее выражение можно записать как

$$\delta\phi_\oplus(\Delta h) = \frac{g_0 \Delta h}{c^2},$$

где g_0 — ускорение силы тяжести на геоиде. Релятивистская теория предсказывает, следовательно, изменение хода часов при изменении высоты с коэффициентом $\sim 1,1 \times 10^{-13}\Delta h$ [км].

Таким образом, если $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_g + \boldsymbol{\Delta h}$, то $\phi_\oplus(\mathbf{r}') = \phi_\oplus(\mathbf{r}_g) + \delta\phi_\oplus(\Delta h)$.

Квадрат скорости w^2 можно представить в виде $w^2 = w_g^2 + \Delta w^2$, причем Δw зависит от высоты Δh. Тогда

$$\phi_\oplus(\mathbf{r}') + \frac{w^2}{2c^2} = \left(\phi_\oplus(\mathbf{r}_g) + \frac{w_g^2}{2c^2}\right) + \left(\frac{g_0 \Delta h}{c^2} + \frac{\Delta w^2}{2c^2}\right). \qquad (4.55)$$

Первая скобка в правой части (4.55), которую обозначают через L_G, представляет собой гравитационный потенциал на геоиде W_0, деленный на c^2:

$$L_G = W_0/c^2 = \phi_\oplus(\mathbf{r}_g) + \frac{w_g^2}{2c^2}.$$

Это величина постоянная, значение которой считается по определению равным $6,969290134 \cdot 10^{-10}$. Заметим, что константы, значения которых назначаются, называются *определяющими*. Так как константы L_G и c известны, можно найти геопотенциал на геоиде: $W_0 = 62636856,0005\,\text{м}^2\text{с}^{-2}$ и таким образом задать геоид.

Вторая скобка в правой части (4.55) представляет собой релятивистскую поправку в ход часов, которая различна для разных часов, но может быть точно вычислена по теории. После учета этой поправки все часы оказываются «расположенными» на геоиде. Полученная шкала времени называется *земным временем* TT (Terrestrial Time):

$$\text{TT} = \tau - \left(\frac{g_0 \Delta h}{c^2} + \frac{\Delta w^2}{2c^2}\right),$$

где τ — собственное время атомных часов (4.49).

Шкала TT была введена в 1991 г. резолюциями МАС и заменила шкалу TDT. Шкалу TT следует использовать при вычисления геоцентрических эфемерид. Единица измерения TT равна секунде СИ на геоиде. В момент времени 1997, январь 1, $0^\text{h}0^\text{m}0^\text{s}$ TAI значение времени TT равно 1997, январь 1, $0^\text{h}0^\text{m}32{,}^\text{s}184$. Таким образом (см. выражения (4.27) и (4.36))

$$\text{TT} = \text{TDT} = \text{TAI} + 32{,}^\text{s}184.$$

Так как часы не располагаются на геоиде, поправка (второй член в правой части (4.55)) учитывается при синхронизации часов и выводе шкалы TAI. Следовательно, шкала TAI является *реализацией* TT и в настоящее время из-за ошибок синхронизации часов и вычисления имеет малое линейное смещение (~ 1 мкс/год) относительно идеальной шкалы TT (рис. 4.8).

Рассмотрим теперь, как вычислить интеграл (4.53) и найти поправку $\Delta t_{\oplus}$.

Интеграл в (4.53) вычислить достаточно просто, если считать орбиты планет кеплеровскими невозмущенными гелиоцентрическими орбитами. Если $M_{\odot}$ — масса Солнца, M_p — масса планеты P, $\mathbf{R}_{\odot}$ — барицентрический радиус-вектор Солнца, $\mathbf{r}_p$ — гелиоцентрический радиус-вектор планеты, то уравнение для радиуса-вектора центра масс Солнечной системы может быть записано в виде:

$$M_{\odot}\mathbf{R}_{\odot} + \sum_p M_p(\mathbf{R}_{\odot} + \mathbf{r}_p) = 0.$$

Это соотношение следует из определения центра масс и того, что в барицентрической системе начало координат находится в центре масс.

Решая это уравнение относительно $\mathbf{R}_{\odot}$ и сохраняя лишь члены порядка $M_p/M_{\odot}$, получим:

$$\mathbf{R}_{\odot} = -\sum_p \frac{M_p}{M_{\odot}}\mathbf{r}_p. \tag{4.56}$$

Для простоты будем далее учитывать влияние только Юпитера и Сатурна.

Если гелиоцентрический радиус-вектор центра Земли равен $\mathbf{r}_{\oplus}$, то $\mathbf{R}_{\oplus} = \mathbf{R}_{\odot} + \mathbf{r}_{\oplus}$. Взаимное расположение Солнца, Земли, Луны и планеты показано на рис. 4.11.

Так как $V_{\oplus}^2 = (\dot{\mathbf{R}}_{\odot} + \dot{\mathbf{r}}_{\oplus})(\dot{\mathbf{R}}_{\odot} + \dot{\mathbf{r}}_{\oplus})$, то

$$\frac{V_{\oplus}^2}{2} = \frac{|\dot{\mathbf{R}}_{\odot}|^2}{2} + \frac{|\dot{\mathbf{r}}_{\oplus}|^2}{2} + \dot{\mathbf{R}}_{\odot}\cdot\dot{\mathbf{r}}_{\oplus} \approx \frac{|\dot{\mathbf{r}}_{\oplus}|^2}{2} - \sum_p \frac{M_p}{M_{\odot}}\dot{\mathbf{r}}_p\cdot\dot{\mathbf{r}}_{\oplus}. \tag{4.57}$$

Барицентрической скоростью Солнца можно пренебречь по сравнению со скоростью Земли (см. стр. 123).

Гравитационный потенциал в центре Земли можно найти по формуле:

$$U_c(\mathbf{R}_{\oplus}) = \frac{GM_{\odot}}{|\mathbf{r}_{\oplus}|} + \frac{GM_{☾}}{|\mathbf{r}_{☾}|} + \sum_p \frac{GM_p}{|\mathbf{r}_{\oplus} - \mathbf{r}_p|}, \tag{4.58}$$

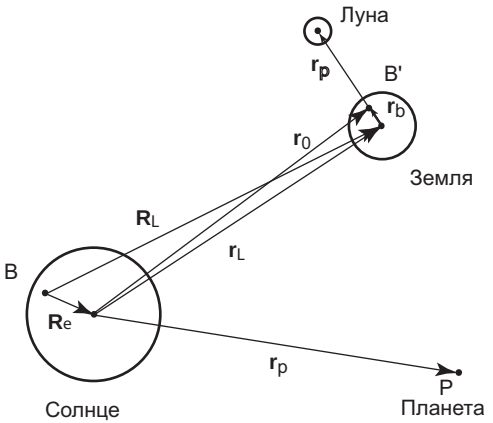


Рис. 4.11. Определение радиусов-векторов тел Солнечной системы; B — барицентр Солнечной системы, B' — барицентр системы Земля+Луна.

где $M_{☾}$, $\mathbf{r}_{☾}$ — масса Луны и ее геоцентрический радиус-вектор. Так как $|\mathbf{r}_\oplus| \ll |\mathbf{r}_p|$, то

$$\sum_p \frac{GM_p}{|\mathbf{r}_\oplus - \mathbf{r}_p|} \approx \sum_p \left(\frac{GM_p}{|\mathbf{r}_p|} + \frac{GM_p}{|\mathbf{r}_p|^3} \mathbf{r}_\oplus \cdot \mathbf{r}_p \right).$$

Значит

$$\phi_c(\mathbf{R}_\oplus) + \frac{V_\oplus^2}{2c^2} = \frac{1}{c^2} \Big[\frac{|\dot{\mathbf{r}}_\oplus|^2}{2} + \frac{GM_\odot}{|\mathbf{r}_\oplus|} + \frac{GM_{☾}}{|\mathbf{r}_{☾}|} + \\ + \sum_p \frac{M_p}{M_\odot} \left(\frac{GM_\odot}{|\mathbf{r}_p|} + \frac{GM_\odot}{|\mathbf{r}_p|^3} \mathbf{r}_p \cdot \mathbf{r}_\oplus - \dot{\mathbf{r}}_p \cdot \dot{\mathbf{r}}_\oplus \right) \Big]. \quad (4.59)$$

Упростим это выражение, воспользовавшись вторым законом Ньютона:

$$\ddot{\mathbf{r}}_p = -\frac{G(M_\odot + M_p)}{|\mathbf{r}_p|^3} \mathbf{r}_p \approx -\frac{GM_\odot}{|\mathbf{r}_p|^3} \mathbf{r}_p$$

и уравнением (2.63), которое перепишем в виде:

$$\frac{|\dot{\mathbf{r}}_p|^2}{2} = \frac{GM_\odot}{|\mathbf{r}_p|} - \frac{GM_\odot}{2a_p}, \quad (4.60)$$

a_p — большая полуось орбиты планеты. Так как

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_p \cdot \dot{\mathbf{r}}_p) = \frac{1}{2} \mathbf{r}_p \cdot \ddot{\mathbf{r}}_p + \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{r}}_p|^2 = -\frac{GM_\odot}{2|\mathbf{r}_p|} + \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{r}}_p|^2,$$

то

$$\frac{|\dot{\mathbf{r}}_p|^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_p \cdot \dot{\mathbf{r}}_p) + \frac{GM_\odot}{2|\mathbf{r}_p|}. \tag{4.61}$$

Приравнивая уравнения (4.60) и (4.61), получим после приведения подобных членов:

$$\frac{GM_\odot}{|\mathbf{r}_p|} = \frac{GM_\odot}{a_p} + \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_p \cdot \dot{\mathbf{r}}_p). \tag{4.62}$$

В результате упрощения уравнение (4.59) примет вид:

$$\phi_c(\mathbf{R}_\oplus) + \frac{V_\oplus^2}{2c^2} = \frac{1}{c^2}\Big\{\frac{|\dot{\mathbf{r}}_\oplus|^2}{2} + \frac{GM_\odot}{|\mathbf{r}_\oplus|} + \frac{GM_☾}{|\mathbf{r}_☾|} + \\ + \sum_p \frac{M_p}{M_\odot}\left(\frac{GM_\odot}{a_p} + \frac{d}{dt}\left[\dot{\mathbf{r}}_p \cdot (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_\oplus)\right]\right)\Big\}. \tag{4.63}$$

Выразим теперь радиус-вектор $\mathbf{r}_\oplus$ через $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}_☾$. По определению радиус-вектор $\mathbf{r}_0$ центра тяжести (барицентра) системы Земля+Луна равен:

$$(M_\oplus + M_☾)\mathbf{r}_0 = M_\oplus \mathbf{r}_\oplus + M_☾\,(\mathbf{r}_\oplus + \mathbf{r}_☾)$$

или

$$\mathbf{r}_\oplus = \mathbf{r}_0 - \mu \mathbf{r}_☾\,, \quad \mu = \frac{M_☾}{M_\oplus + M_☾}.$$

Здесь $\mathbf{r}_☾$ — геоцентрический радиус-вектор Луны. Так как $|\mathbf{r}_0| \gg |\mathbf{r}_☾|$, то

$$\frac{|\dot{\mathbf{r}}_\oplus|^2}{2} + \frac{GM_\odot}{|\mathbf{r}_\oplus|} = \frac{|\dot{\mathbf{r}}_0 - \mu\dot{\mathbf{r}}_☾|^2}{2} + \frac{GM_\odot}{|\mathbf{r}_0 - \mu\mathbf{r}_☾|} \approx \\ \approx \frac{|\dot{\mathbf{r}}_0|^2}{2} + \frac{GM_\odot}{|\mathbf{r}_0|} - \mu\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_☾ \cdot \dot{\mathbf{r}}_0). \tag{4.64}$$

Первые два члена в (4.64) преобразуем следующим образом. Перепишем уравнение (2.63) для барицентра системы Земля+Луна:

$$|\dot{\mathbf{r}}_0|^2 = \frac{2GM_\odot}{|\mathbf{r}_0|} - \frac{GM_\odot}{a_0},$$

a_0 — большая полуось орбиты системы Земля + Луна. Тогда

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}_0) = \mathbf{r}_0 \cdot \ddot{\mathbf{r}}_0 + |\dot{\mathbf{r}}_0|^2 =$$
$$= -\frac{GM_\odot}{|\mathbf{r}_0|} + \frac{2GM_\odot}{|\mathbf{r}_0|} - \frac{GM_\odot}{a_0} = \frac{GM_\odot}{|\mathbf{r}_0|} - \frac{GM_\odot}{a_0}.$$

В результате получим:

$$\frac{|\dot{\mathbf{r}}_0|^2}{2} + \frac{GM_\odot}{|\mathbf{r}_0|} = \frac{GM_\odot}{|\mathbf{r}_0|} - \frac{GM_\odot}{2a_0} + \frac{GM_\odot}{a_0} + \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}_0) =$$
$$= \frac{3GM_\odot}{2a_0} + 2\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}_0). \qquad (4.65)$$

И, наконец, член $GM_☾/|\mathbf{r}_☾|$ в уравнении (4.63) выразим через большую полуось орбиты Луны $a_☾$ и параметр μ, воспользовавшись формулой (4.62). Для этого достаточно заменить $GM_\odot$ на $G(M_\oplus + M_☾)$, a_p на $a_☾$, $\mathbf{r}_p$ на $\mathbf{r}_☾$:

$$\frac{G(M_\oplus + M_☾)}{|\mathbf{r}_☾|} = \frac{G(M_\oplus + M_☾)}{a_☾} + \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_☾ \cdot \dot{\mathbf{r}}_☾).$$

После простого преобразования находим:

$$\frac{GM_☾}{|\mathbf{r}_☾|} = \frac{GM_☾}{a_☾} + \mu\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_☾ \cdot \dot{\mathbf{r}}_☾). \qquad (4.66)$$

Подставляя в (4.63) выражения (4.64), (4.65), (4.66), получим окончательное выражение:

$$\phi_c(\mathbf{R}_\oplus) + \frac{V_\oplus^2}{2c^2} = \frac{1}{c^2}\Big\{\frac{3GM_\odot}{2a_0} + \frac{GM_☾}{a_☾} + \sum_p \frac{GM_p}{a_p} +$$
$$+ \frac{d}{dt}\big[2\mathbf{r}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}_0 + \mu\mathbf{r}_☾ \cdot (\dot{\mathbf{r}}_☾ - \dot{\mathbf{r}}_0) + \sum_p \frac{M_p}{M_\odot}\dot{\mathbf{r}}_p \cdot (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_\oplus)\big]\Big\} =$$
$$= L_C + \frac{1}{c^2}\frac{dP}{dt}. \qquad (4.67)$$

Правая часть уравнения (4.67) есть сумма постоянных и переменных (в квадратных скобках) членов. Величина постоянного члена L_C зависит от масс и параметров орбит тел Солнечной системы. В настоящее время принятое МАС значение

$$L_C = 1,48082686741 \times 10^{-8} \pm 2 \times 10^{-17}.$$

Максимальный по величине переменный член есть $2\mathbf{r}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}_0$. Его появление обусловлено обращением Земли и Луны вокруг Солнца. Следовательно, его амплитуда определяется параметрами орбиты системы Земля+Луна, а периодичность изменения кратна году. Для оценки амплитуды используем уравнения (2.56), (2.57), (2.62). Тогда

$$2\mathbf{r}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}_0 = 2na^2 e \sin E,$$

где n — среднее движение барицентра системы Земля+Луна, e — эксцентриситет орбиты. Так как $e \ll 1$, то $\sin E$ можно выразить через среднюю аномалию M по формуле (2.69):

$$\sin E \approx \sin M + \frac{e}{2} \sin 2M.$$

Подставляя численные значения n, e, a, найдем

$$\frac{1}{c^2} 2\mathbf{r}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}_0 \approx 1656,67 \sin M + 13,84 \sin 2M \text{ [мкс]}.$$

Таким образом, амплитуда максимального релятивистского солнечного члена не превышает 2 мс; период равен одному году. Вклад Юпитера и Сатурна можно оценить аналогичным образом; он составляет $\sim 22,4$ и $4,7$ мкс, соответственно.

Для вычисления P с ошибкой в несколько наносекунд необходимо использовать разложение на гармоники, включающее около 800 членов.

Проинтегрировав уравнение (4.67), перепишем (4.49) следующим образом:

$$\begin{aligned} t - \mathrm{TT} = \eta \left[L_C(t - t_0) + \frac{1}{c^2} \mathbf{V}_\oplus \cdot \mathbf{r}' + P \right] \\ + \eta L_G (t - t_0) - (\eta - 1)(t - t_0), \end{aligned} \tag{4.68}$$

В зависимости от выбора величины η уравнение (4.68) выражает связь шкалы времени TT и одной из шкал координатного времени t, равного TCB или T_{eph} (см. ниже).

4.5.3. Барицентрическая и геоцентрическая небесные системы отсчета

Шкалы координатного времени TCG и TCB были введены резолюциями Генеральной Ассамблеи МАС в 1991 г. как временные

координаты в системах отсчета с началом в центрах масс Земли и Солнечной системы, соответственно. В резолюциях Генеральной Ассамблеи МАС в 2000 г. эти системы названы как геоцентрическая (GCRS) и барицентрическая (BCRS) небесные системы отсчета.

Для решения астрометрических задач достаточно иметь небесную и земную системы отсчета ICRS и ITRS и их реализации: ICRF и ITRF. Однако для связи ICRS и ITRS необходимо ввести еще одну локальную геоцентрическую систему, направления пространственных осей которой совпадают с направлениями осей ICRS. Но шкалой времени в этой системе является шкала TCG, как и в ITRS. Эта система и называется геоцентрической небесной системой отсчета (GCRS). Она является промежуточной между системой ITRS и барицентрической небесной системой отсчета BCRS, которая отождествляется с ICRS.

Координаты события в BCRS обозначаются как $(t, \mathbf{x})$ с временной координатой $t = \mathrm{TCB}$. Начало пространственных координат находится в барицентре Солнечной системы, причем оси BCRS неподвижны относительно удаленных внегалактических радиоисточников. Потенциал Солнечной системы определяется выражением:

$$U(t, \mathbf{x}) = \sum_p \frac{GM_p}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_p|},$$

в котором суммирование выполняется по всем телам.

Координаты события в GCRS обозначаются как $(T, \mathbf{X})$ с временной координатой $T = \mathrm{TCG}$. Начало пространственных координат находится в центре масс Земли, оси GCRS не вращаются относительно удаленных внегалактических радиоисточников. Таким образом, GCRS — система кинематически не вращающаяся относительно ICRS.

Так как наблюдения проводятся с Земли, то они являются событиями с координатами $(T, \mathbf{X})$ в GCRS. Оси GCRS фиксированы относительно квазаров, но сама геоцентрическая небесная система отсчета движется вокруг барицентра Солнечной системы. В искривленном пространстве вектор в GCRS при параллельном переносе вдоль некоторого замкнутого контура не возвращается, в общем случае, в первоначальное положение относительно BCRS. Само явление изменения направления вектора называется *геодезической прецессией и нутацией*, хотя их причины существенно отличаются от

причин классической прецессии и нутации. В результате, в преобразовании координат вектора из GCRS в BCRS появляются дополнительные члены, которые согласно «Стандартам МСВЗ» должны быть учтены.

Угловая скорость геодезического вращения в эйнштейновской теории тяготения дается выражением:

$$\mathbf{\Omega} = \frac{3}{2c^2}\mathbf{V}_\oplus \times \mathbf{A}_\oplus,$$

где $\mathbf{V}_\oplus, \mathbf{A}_\oplus$ — скорость и ускорение центра Земли. Если предположить, что Земля движется по кеплеровской орбите в плоскости эклиптики Oxy, то геодезическое вращение происходит вокруг оси, перпендикулярной к эклиптике. Только z-компонента угловой скорости $\mathbf{\Omega}$ в этом случае отлична от нуля; используя выражения для скорости (2.62) и ускорения (2.64) при кеплеровском движении, получим:

$$\Omega_z = \frac{3}{2c^2}\frac{n^3a^5}{r^3}\sqrt{1-e^2},$$

где n — среднее движение, a — большая полуось и e — эксцентриситет орбиты.

Угол геодезического поворота θ можно найти, проинтегрировав скорость Ω_z по времени t:

$$\theta = \int\limits_{t_1}^{t_2} \Omega_z dt,$$

причем t_1 — это момент прохождения Земли через перигелий. Выражая r через истинную аномалию v и делая замену переменной t на v,

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}, \quad dt = \frac{r^2}{a^2}\frac{dv}{n\sqrt{1-e^2}},$$

получим:

$$\theta = \frac{3}{2}\left(\frac{na}{c}\right)^2\frac{1}{1-e^2}\int\limits_0^v (1+e\cos v)dv.$$

Интегрирование дает:

$$\theta = \frac{3}{2}\left(\frac{na}{c}\right)^2\frac{1}{1-e^2}(v+e\sin v).$$

Заменим истинную аномалию v средней аномалией M, воспользовавшись уравнением центра (2.70):

$$v = M + 2e\sin M + \frac{5e^2}{4}\sin 2M + \ldots.$$

Тогда

$$\sin v = \sin M + e\sin 2M + \ldots.$$

В окончательном виде получим:

$$\theta = \frac{3}{2}\left(\frac{na}{c}\right)^2 \frac{1}{1-e^2}\left(M + 3e\sin M + \frac{9e^2}{4}\sin 2M + O(e^3)\right). \quad (4.69)$$

Средняя аномалия барицентра системы Земля+Луна равна средней аномалии Солнца, которая в стандартных обозначениях есть l' (§ 6.5). Подставляя значения средних орбитальных элементов системы Земля+Луна, получим:

$$\theta = \theta_0 + 1''\!,\!919T + [0,153\sin l' + 0,002\sin 2l'] \text{ мс дуги},$$

где T измеряется в юлианских столетиях по 36525 суток от эпохи J2000.0, θ_0 — начальное значение угла.

Если вековую часть геодезического вращения Земли назвать геодезической прецессией p_g, а периодическую часть — геодезической нутацией $\Delta\psi_g$, то

$$\begin{aligned} p_g &= +1''\!,\!919 \text{ в столетие},\\ \Delta\psi_g &= +0,153\sin l' + 0,002\sin 2l' \text{ [мс дуги]},\\ \Delta\varepsilon_g &= 0. \end{aligned}$$

Угол θ измеряется вдоль эклиптики, и в результате геодезического вращения Земли изменения наклона эклиптики к экватору не происходит; поэтому $\Delta\varepsilon_g = 0$.

В кинематической невращающейся системе ICRS геодезическое вращение Земли происходит навстречу классическому прецессионно-нутационному движению. Следовательно, поправки за геодезическую прецессию и нутацию должны быть *вычтены* из значений прецессионных и нутационных углов.

После определения систем отсчета BCRS и GCRS допустим, что $\eta = 1$ в выражении (4.68). Тогда, по определению, $t =$ TCB. Матема-

тическое соотношение между шкалами времени можно представить как

$$\mathrm{TCB} - \mathrm{TT} = (\mathrm{TCB} - \mathrm{TCG}) + (\mathrm{TCG} - \mathrm{TT}).$$

Используя выражение (4.68), определим разности шкал времени TCB – TCG и TCG – TT следующим образом:

$$\mathrm{TCB} - \mathrm{TCG} = L_C(t - t_0) + \frac{1}{c^2}\mathbf{V}_\oplus \cdot \mathbf{r}' + P, \tag{4.70}$$

$$\mathrm{TCG} - \mathrm{TT} = L_G(t - t_0). \tag{4.71}$$

Напомним, что P — это периодические члены, определяемые в выражении (4.67), $\mathbf{V}_\oplus$ — вектор скорости центра Земли, $\mathbf{r}'$ — вектор положения часов относительно центра Земли. Все векторы измеряются в барицентрической системе координат. Начальным моментом времени t_0 является $0^{\mathrm{h}}0^{\mathrm{m}}0^{\mathrm{s}}$ TAI 1 января 1977 г.

Так как $t - t_0 = \Delta_{\mathrm{TCB}} = \Delta_{\mathrm{TCG}} + L_C\Delta_{\mathrm{TCB}}$+периодические члены, то изменение промежутка времени Δ_{TCG} относительно Δ_{TCB} равно

$$\left\langle \frac{\Delta_{\mathrm{TCG}}}{\Delta_{\mathrm{TCB}}} \right\rangle = 1 - L_C, \tag{4.72}$$

где символ $\langle\rangle$ обозначает усреднение по бесконечно большому промежутку времени, проводимому в геоцентре. Используя это обозначение, получим соотношения между TT и TCG, TCB и TDB в виде:

$$\left\langle \frac{\Delta_{\mathrm{TT}}}{\Delta_{\mathrm{TCG}}} \right\rangle = 1 - L_G, \left\langle \frac{\Delta_{\mathrm{TT}}}{\Delta_{\mathrm{TCB}}} \right\rangle = 1 - L_B, \left\langle \frac{\Delta_{\mathrm{TDB}}}{\Delta_{\mathrm{TCB}}} \right\rangle = 1 - L_B, \tag{4.73}$$

где $1 - L_B = (1 - L_C)(1 - L_G) \approx 1 - (L_C + L_G)$.

Шкала TT отличается от шкалы TCG только линейным дрейфом. Так как на геоиде потенциал $W_0 = \mathrm{const}$, то TT может быть названо координатным временем на геоиде.

Определение TT является строгим, так как задана метрика системы GCRS, следовательно, определена шкала TCG и известна константа L_G. Согласно резолюции A4 Генеральной Ассамблеи МАС 1991 г. «единица измерения TT выбирается таким образом, чтобы она согласовывалась с секундой СИ на геоиде».

Атомное время TAI, как говорилось выше, является реализацией земного времени TT, но также может считаться и реализацией TCG,

поскольку отличается лишь смещением на начальный момент и линейным дрейфом.

Выбор параметра $\eta = 1$ в выражении (4.68) приводит к тому, что длительность секунды в BCRS приравнивается к длительности секунды в GCRS. При таком выборе η величины астрономических постоянных не меняются. Однако из-за зависимости течения времени от положения наблюдателя шкалы времени TT и TCB имеют довольно большой линейный дрейф ($\sim 0,5$ с/год) и периодические вариации (~ 2 мс).

В качестве второго варианта рассмотрим случай, когда в выражении (4.68) $\eta = 1 + L_G + L_C$. Тогда

$$\mathrm{T} - \mathrm{TT} = \frac{1}{c^2}\mathbf{V}_\oplus \cdot \mathbf{r}' + P. \tag{4.74}$$

Время T было названо эфемеридным временем T_{eph}. Оно служит аргументом при вычислении эфемерид тел Солнечной системы DE405/LE405. Несмотря на название, $\mathrm{T}_{eph} \neq \mathrm{ET}$. Эфемеридное время T_{eph} физически и математически эквивалентно TCB, отличаясь от TCB только линейным дрейфом и началом отсчета. Так как из (4.74) следует, что $\left\langle \Delta_{\mathrm{T}_{eph}}/\Delta_{\mathrm{TT}} \right\rangle = 1$, то из уравнений (4.73) находим, что $\left\langle \Delta_{\mathrm{T}_{eph}}/\Delta_{\mathrm{TCB}} \right\rangle = 1 - L_B$.

Из выражения (4.74) следует, что разность $\mathrm{T}_{eph} - \mathrm{TT}$ не превышает 2 мс. Линейное смещение двух шкал исключается при вычислении эфемерид соответствующим подбором параметра η. Таким образом, шкала T_{eph} близка к TDB, но $\mathrm{T}_{eph} \neq \mathrm{TDB}$. Отличие заключается в том, что при определении шкалы TDB не задана величина параметра L_B, а при определении шкалы T_{eph} этот параметр автоматически вычисляется на основании принятой модели Солнечной системы и времени интегрирования.

В заключение приведем общепринятые обозначения и соотношения между различными шкалами времени:

$$\begin{aligned} \Delta T &= \mathrm{ET} - \mathrm{UT}, \\ \Delta\mathrm{UT} &= \mathrm{UT1} - \mathrm{UTC}, \\ \Delta\mathrm{AT} &= \mathrm{TAI} - \mathrm{UTC}, \end{aligned} \tag{4.75}$$

$$\mathrm{TT} = \mathrm{TDT} = \mathrm{ET} = \mathrm{TAI} + 32{,}^{\mathrm{s}}184, \tag{4.76}$$

$$\mathrm{TDB} = \mathrm{TDT} + \frac{1}{c^2}\mathbf{V}_\oplus \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R}_\oplus) + P, \tag{4.77}$$

$$\mathrm{TCG} = \mathrm{TT} + L_G(t - t_0), \tag{4.78}$$

$$\mathrm{TCB} = \mathrm{TDB} + L_B(t - t_0),$$

$$\mathrm{TCB} = \mathrm{TCG} + L_C(t - t_0) + \frac{1}{c^2}\mathbf{V}_\oplus \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R}_\oplus) + P, \tag{4.79}$$

$$\mathrm{T}_{eph} = \mathrm{TT} + \frac{1}{c^2}\mathbf{V}_\oplus \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R}_\oplus) + P, \tag{4.80}$$

где $t - t_0 = (\mathrm{MJD(TAI)} - 43144,0) \cdot 86400^s$,

$$L_G = 6,969290134 \times 10^{-10},$$
$$L_B = 1,55051976772 \times 10^{-8} \pm 2 \times 10^{-17},$$
$$L_C = 1,48082686741 \times 10^{-8} \pm 2 \times 10^{-17},$$

$\mathbf{r}, \mathbf{R}_\oplus$ — барицентрические радиусы-векторы часов и центра Земли. Начальным моментом времени t_0 является $0^{\mathrm{h}}0^{\mathrm{m}}0^{\mathrm{s}}$ TAI 1 января 1977 г. Модифицированная юлианская дата этого момента равна: $\mathrm{MJD(TAI)} = 43144,0$.

Заметим, что разность моментов барицентрического координатного времени $t - t_0$ может быть заменена разностью моментов атомного времени. Ошибка вычисления разности собственного и координатного времени будет порядка 10^{-18}.

Программы для вычисления разности TCB – TCG (4.79) есть на сайте: http://tai.bipm.org/iers/conv2003/conv2003_c10.html.

Для наглядности разности между шкалами времени показаны на рис. 4.12, величина периодических членов P увеличена в 200 раз.

Если наблюдения проводятся с поверхности Земли, то процедура преобразования момента времени некоторого события из локальной топоцентрической системы координат в барицентрическую систему координат выглядит следующим образом. Напомним, что регистрация момента выполняется в шкале UTC.

1) Используя уравнение (4.75), находим момент события в шкале TAI;

2) из шкалы TAI переходим в шкалу TT (или TDT) (4.76);

3) если используются эфемериды DE200/LE200, то необходимо вычислить момент события в шкале TDB согласно уравнению (4.77), для этого необходимо вычислить периодические члены P и малые квазипериодические члены;

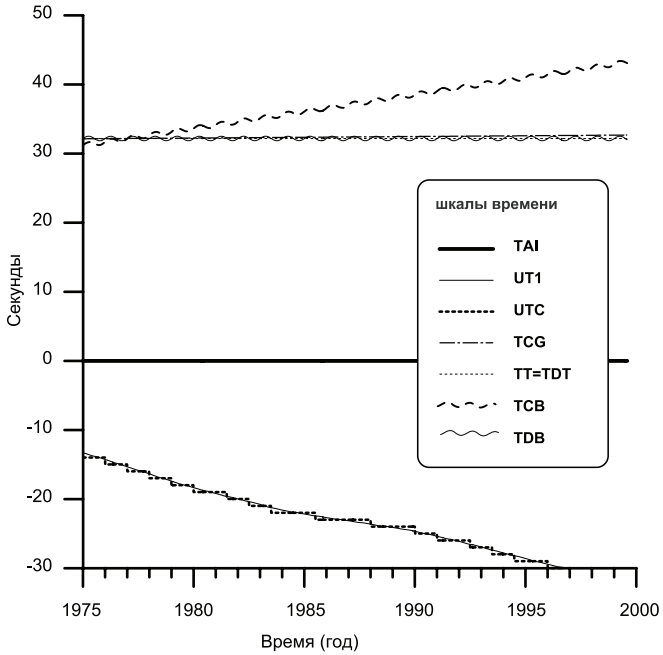


Рис. 4.12. Соотношение между шкалами времени.

4) если используются более новые эфемериды, то необходимо сначала перейти из шкалы TT в шкалу TCG, согласно (4.78);

5) и, наконец, используя (4.79), находим момент в шкале TCB;

6) при использовании эфемерид DE405/LE405 необходимо использовать шкалу T_{eph} (4.80).

Эфемериды DE200/LE200, DE405/LE405 и другие, построенные в Лаборатории реактивного движения (JPL) (США), можно найти на сайте JPL: ftp://navigator.jpl.nasa.gov/pub/ephem/export/ascii/.

4.6. Пульсарная шкала времени

Еще одной динамической шкалой времени является пульсарная шкала времени. В основе этой шкалы лежит периодичность излучения уникальных небесных тел — *пульсаров* (по-английски, Pulsating Sources of Radioemission, PSR).

Открытие пульсаров было сделано в 1967 г. группой кембриджских радиоастрономов под руководством Э. Хьюиша. За открытие нового класса звезд Э. Хьюиш и М. Райл были удостоены в 1974 г. Нобелевской премии по физике. Необычные свойства пульсаров стимулировали не только работы в теоретической области, но и экспериментальные методы исследования пульсаров. Это привело к быстрому накоплению наблюдательных данных и появлению многочисленных теорий, объясняющих свойства пульсаров. В результате поиска, организованного на телескопах всего мира, в настоящее время известны более тысячи пульсаров.

Согласно современным представлениям, пульсары — это нейтронные звезды, образовавшиеся в результате гравитационного коллапса звезд с массой порядка массы Солнца ($M \approx 1,2M_{\odot}$). При коллапсе возникает компактная (при массе $\sim 1M_{\odot}$ диаметр ~ 20 км), быстровращающаяся звезда. Плотность вещества внутри таких звезд достигает $\sim 10^{14}$ г/см^3. Колоссальное давление внутри звезды приводит к тому, что протоны и электроны сливаются в стабильные нейтроны, и звезда представляет собой как бы одно громадное атомное ядро.

Периодичность радиоизлучения пульсаров объясняется их быстрым вращением (периоды известных пульсаров лежат в интервале от нескольких миллисекунд до ~ 4 с). Считается, что пульсары имеют сильное дипольное магнитное поле с магнитной осью, не совпадающей с осью вращения пульсара. В области магнитных полюсов происходит истечение заряженных частиц, которые в магнитном поле звезды излучают либо в пределах узкого конуса , либо веером, перпендикулярно магнитной оси (рис. 4.13). При вращении звезды наблюдатель, периодически попадающий внутрь направленного пучка радиоволн, будет фиксировать импульсное излучение с периодом вращения звезды. Энергия излучения пульсара черпается из кинетической энергии его вращения. Потери энергии, вызванные радиоизлучением, приводят к уменьшению скорости вращения звезды и увеличению периода P пульсара. Из-за огромного углового момента пульсара наблюдаемая скорость изменения периода $\dot{P}$ очень мала и составляет около 10^{-15} за 1 с.

Таким образом, пульсары удовлетворяют всем требованиям, предъявляемым к стандартам частоты. Для построения шкалы времени, основанной на периодическом приходе излучения пульсаров,

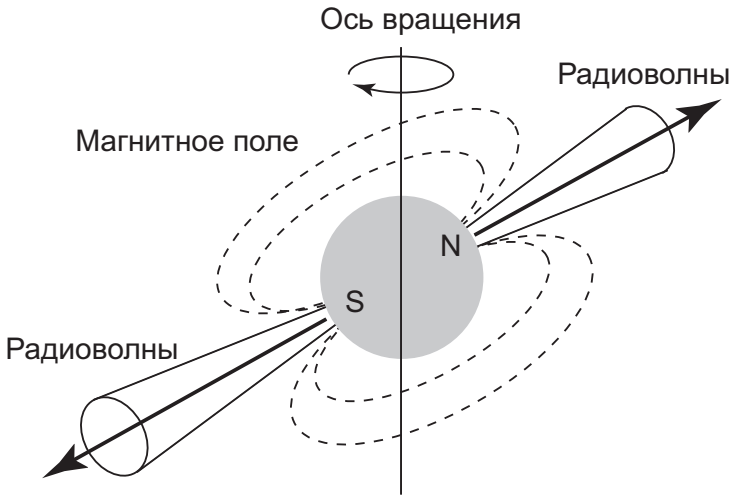


Рис. 4.13. Схема излучения пульсара.

остается определить моменты прихода импульсов по наземным часам. Тогда пульсарная шкала времени будет реализована в виде поправок к показаниям этих часов.

Определение эпохи прибытия отдельных импульсов называется хронометрированием пульсаров или пульсарным таймингом. Точность определения моментов прихода импульсов является высокой (для пульсара PSR1937+21 $\sim 0,3$ мкс). Время прихода импульса зависит от множества причин: от положения и собственного движения пульсара на небесной сфере, от орбитального и вращательного движения Земли, от гравитационного потенциала тел Солнечной системы в точке наблюдения и скорости наблюдателя. Если пульсар является одной из звезд в двойной системе, то при вычислении моментов прихода импульсов необходимо учесть параметры его орбиты. Для ближайших пульсаров необходимо знать параллаксы (или расстояния), так как при движении Земли по орбите расстояния будут меняться с годичным периодом. Включение расстояния до пульсара в модель вычисления моментов прихода импульсов важно и по причине явления, называемого межзвездной дисперсией.

На рис. 4.14 показаны сигналы от пульсара PSR0329+54, который наблюдался на радиотелескопе РТ-64 в Калязине на разных частотах.

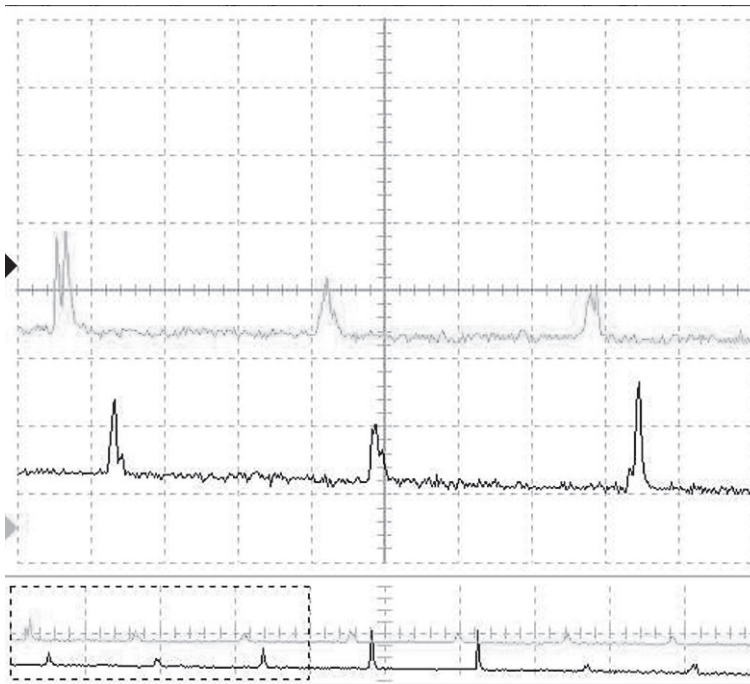


Рис. 4.14. Сигналы от пульсара PSR0329+54, полученные на радиотелескопе РТ-64 в Калязине на частотах 1400 МГц (верхняя линия) и 600 МГц (средняя линия). Период пульсара равен 714 мс. В верхней части рисунка сигналы показаны в увеличенном масштабе (размер клетки по горизонтали равен 200 мс). В нижней части рисунка размер клетки равен 500 мс. (С разрешения Ю. П. Илясова).

Задержка импульсов одной последовательности относительно другой вызвана *дисперсией радиосигнала* — разной фазовой скоростью радиоволн разных частот в ионизованной межзвездной среде. Так как величина дисперсии зависит от расстояния до пульсара, то она должна быть известна заранее, до начала хронометрирования. Для ее определения используется одновременный прием сигналов от пульсара на двух частотах. Межзвездная дисперсия аналогична дисперсии радиоволн в ионосфере Земли; учет этого эффекта будет рассмотрен позже при изучении радиорефракции.

Из рисунка видно, что импульсы имеют сложное строение; их амплитуда и форма изменяется в широких пределах. Однако форма

среднего, или суммарного импульса, который получается при сложении многих импульсов синхронно с периодом пульсара, очень стабильна и индивидуальна для каждого пульсара. При подобном усреднении увеличивается отношение сигнал-шум, что необходимо, так как пульсары являются слабыми источниками радиоизлучения. В качестве примера на рис. 4.15 показаны средние импульсы от пульсаров PSR0329+54 и PSR0613-02, полученные в Калязине (частота наблюдений равна 600 МГц).

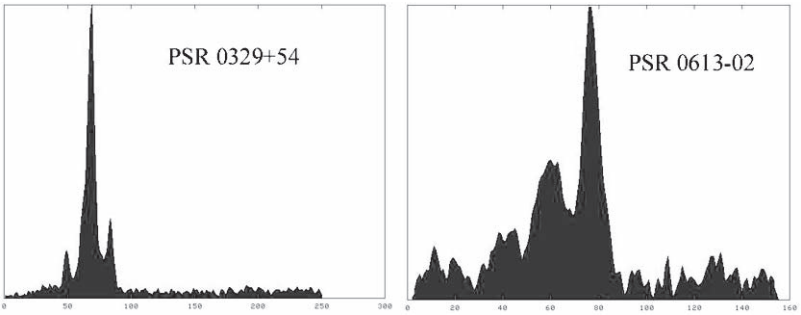


Рис. 4.15. Профили средних импульсов пульсаров PSR0329+54 и PSR0613-02. По горизонтали — номера частотных каналов. (С разрешения Ю. П. Илясова).

Период первого пульсара равен 714 мс, второго — 3,06 мс. Пульсар PSR0329+54 является одним из самых мощных (поток $S = 1,3$ ян)[4]. Поэтому время накопления для получения среднего импульса равнялось 3 мин, т. е. было сложено ~ 250 импульсов. Пульсар PSR0613-02 имеет поток $S = 0,01$ ян. Для получения высокого отношения сигнал-шум потребовалось накапливать сигнал 2 часа, т. е. сложить $\sim 2,5$ миллиона импульсов.

При сложении импульсов необходимо учесть межзвездную дисперсию. Так как на разных частотах задержка импульса различна, то прием ведется в узких частотных каналах (на рис. 4.15 по оси абсцисс отложены номера каналов). ЭВМ при помощи специальной программы компенсирует дисперсионную задержку в каждом кана-

[4] 1 ян $= 10^{-26}$ Вт/(м$^2 \cdot$ Гц) — единица измерения спектральной плотности потока радиоисточников. Названа в честь американского инженера Карла Янского, который открыл внеземное радиоизлучение.

ле и суммирует импульсы синхронно с периодом пульсара. После суммирования и определения средней формы импульса вычисляется момент его прихода по показаниям наземного стандарта частоты. Это делается путем вписывания в средний импульс эталонного профиля и вычисления максимума корреляционной функции.

Преобразование момента прихода среднего импульса из шкалы местного стандарта частоты в шкалу TAI выполняется с учетом сличения показаний стандарта со шкалой UTC и затем добавлением целого числа секунд ΔAT (4.75). Переход из шкалы TAI к одной из шкал барицентрического времени описан выше. В результате вычисляется момент прихода импульса t_{obs} в шкале барицентрического времени TDB или TCB в точку с барицентрическими координатами $\mathbf{r}_{obs}$, где находится наблюдатель.

Если наблюдателя поместить теперь в барицентр Солнечной системы, то по моменту прихода импульса он может вычислить его номер:

$$N(t) = f_0 \Delta t + \frac{1}{2}\dot{f}\Delta t^2 + \frac{1}{6}\ddot{f}\Delta t^3 + \ldots, \tag{4.81}$$

где $\Delta t = t - t_0$, t_0 — начальная эпоха наблюдения, определяемая из каталога пульсаров, t — время прихода импульса с номером $N(t)$ в барицентр Солнечной системы в шкале барицентрического времени TDB или TCB, $f_0, \dot{f}, \ddot{f}$ — частота вращения пульсара и ее производные по времени на эпоху t_0 (эти значения берутся из каталога).

Момент прихода t импульса в барицентр связан с моментом прихода t_{obs} в точку, радиус-вектор которой равен $\mathbf{r}_{obs}$, соотношением:

$$t - t_{obs} = \frac{1}{c}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_{obs} - \frac{1}{2cR}|\mathbf{k}\times\mathbf{r}_{obs}|^2 + \sum_p \frac{2GM_p}{c^3}\ln[r_{obs,p} + (\mathbf{r}_{obs,p}\cdot\mathbf{k})] + \Delta t_{disp} + \Delta t_{ion} + \Delta t_{trop}, \tag{4.82}$$

где $\mathbf{k}$ — единичный вектор в направлении пульсара в момент t, $\Delta t_{disp}, \Delta t_{ion}$ — задержки из-за дисперсии радиосигнала в межзвездной среде и ионосфере Земли, Δt_{trop} — задержка в тропосфере Земли.

Первый член в (4.82) называется задержкой Рёмера. Он вызван движением Земли по орбите. Второй член вызван сферичностью фронта волны, приходящей от пульсара, расположенного на расстоянии R от наблюдателя. Третий член называется гравитацион-

ной задержкой или задержкой Шапиро, которая объясняется искривлением траектории радиосигнала в гравитационном поле Солнечной системы. Для ее вычисления необходимо знать радиусы-векторы $\mathbf{r}_p$ планет Солнечной системы. Тогда $\mathbf{r}_{obs,p} = \mathbf{r}_{obs} - \mathbf{r}_p$, $r_{obs,p} = |\mathbf{r}_{obs,p}|$ (4.82). Радиус-вектор $\mathbf{r}_p$ планеты P Солнечной системы должен быть вычислен в момент t_p наибольшего сближения траектории радиосигнала с планетой:

$$t_p = t + \frac{1}{c}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{obs,p}).$$

Формула (4.81) устанавливает взаимную и однозначную связь между номером импульса и временем t прихода его в барицентр. Поэтому выражение (4.81) может быть названо определением пульсарной шкалы времени. Ход этой шкалы относительно местного стандарта частоты может быть определен сравнением моментов времени t, получаемых по формулам (4.81) и (4.82). На рис. 4.8 показана нестабильность шкалы времени, которая определяется вращением пульсара PSR1937+21. Ожидается, что использование пульсаров в двойных системах позволит реализовать шкалы времени, более стабильные на длительных интервалах (от двух до нескольких лет), чем шкала TAI.

После краткого изложения метода хронометрирования пульсаров рассмотрим, какие еще задачи могут быть решены с его помощью. Как уже говорилось, на моменты прихода импульсов влияют множество причин, среди которых выделим изменение положения и собственного движения пульсара и наблюдателя, гравитационного потенциала тел Солнечной системы в точке наблюдения и гравитационной задержки сигнала. Последние два эффекта учитываются на основе эфемерид тел Солнечной системы. Поэтому данные хронометрирования пульсаров могут быть использованы для изучения связи различных эфемерид друг с другом.

К сожалению, в ближайшем будущем подобный анализ не приведет к улучшению эфемерид. Наиболее подходящий для этих целей пульсар PSR 1937+21 имеет шум хронометрирования $\sim 0,3$ мкс, что эквивалентно ошибке в положении наблюдателя, равной $\sim$ 100 м. Для сравнения укажем, что результаты определения расстояний Земля — Марс, Земля — Венера во время межпланетных полетов космических аппаратов имеют погрешность $\sim$ 10 м, а расстояние до

Луны измеряется в настоящее время с ошибкой в несколько сантиметров.

Одно из главных преимуществ хронометрирования пульсаров заключается в возможности точного определения ориентации осей динамических систем отсчета относительно друг друга и относительно кинематической системы отсчета. Эта ориентация плохо определяется современными методами, которые основываются на измерении топоцентрических расстояний до тел Солнечной системы на базах, длина которых сравнима с радиусом Земли. Пульсарные измерения позволяют использовать базы с длиной ~ 1 а. е. и, следовательно, имеют потенциальную точность 100 м/1 а. е. $\sim 0,1$ мс дуги. Однако для достижения подобной точности координаты пульсаров должны быть известны с аналогичной точностью до хронометрирования. Для решения этой задачи используются наблюдения пульсаров на РСДБ, которые в настоящее время регулярно выполняются на базе Калязин (Россия) — Кашима (Япония).

4.7. Системы счета дней

После определения шкал времени рассмотрим системы счета дней, используемые в астрономии и повседневной жизни.

4.7.1. Юлианские даты и юлианская эпоха

Для облегчения вычислений в астрономии используется непрерывный счет суток, начиная с 12 часов UT первого января 4713 г. до н. э.

Определение 4.7.1. *Число средних солнечных суток с 12 часов UT первого января 4713 г. до н. э. до эпохи наблюдений, называется юлианской датой JD (Julian Date).*

Система юлианских дат была введена в XVI в. французским ученым Джозефом Скалигером (1540–1609) и названа в честь его отца Юлия. В этой системе первый день был определен Скалигером как день, в который начинаются три цикла. Первый цикл имеет период равный 28 годам и определяется повторяемостью юлианского календаря (так как число $365,25 \times 28$ точно делится на 7, то через 28 лет все даты приходятся на те же самые дни недели). Вторым циклом был Метонов цикл, по прошествии которого фазы Луны повторяют-

ся. Третьим циклом был 15-летний цикл, связанный с системой сбора налогов в Римской империи. Причины, по которым Скалигер выбрал эти циклы, автору неизвестны; однако идея непрерывного счета дней, начиная с некоторого начального момента, оказалась очень полезной.

Система юлианских дат первоначально была определена для шкалы UT. Однако начиная с 1998 г. МАС рекомендует относить юлианские даты к земному времени (TT); длительность юлианского дня равна 86400 секундам СИ. В случае необходимости использования других шкал требуется указывать, в какой именно шкале вычисляется юлианская дата, например JD(TAI). С такой ситуацией мы уже сталкивались при преобразовании шкал координатных времен (стр. 226). Юлианская дата упоминавшейся ранее стандартной эпохи J2000.0 равна:

$$\mathrm{J2000.0} = 2000,\ \text{январь}\ 1, 12^{\mathrm{h}}\mathrm{TT} = 2451545,0.$$

В приложении А приводятся юлианские даты на начало года (1 января 0^h UT) для столетнего промежутка времени.

Часто удобнее использовать *модифицированную юлианскую дату* MJD, также рекомендованную МАС:

$$\mathrm{MJD} = \mathrm{JD} - 2400000,5. \tag{4.83}$$

Юлианская дата произвольного момента времени выражается в виде целого числа (номера юлианского дня) и дробной части, равной доле суток, прошедшей от полудня до рассматриваемого момента. Обратим на это особое внимание: *юлианские даты отсчитываются от полудня, а модифицированные юлианские даты — от полуночи.*

Например, юлианская дата момента времени 1978, январь 1, 0^{h}UT равна $2443509,5$, а $\mathrm{MJD} = 43509,0$, для момента времени 1978, июль $1, 15^{\mathrm{h}}$UT получим $\mathrm{JD} = 2443711,125$, значит $\mathrm{MJD} = 43710,625$.

Существует много алгоритмов вычисления юлианской даты по календарной и наоборот. В приложении А приводятся программы на языке Фортран, которые написаны К. В. Куимовым на основе алгоритма, предложенного Меёсом. Программа позволяет вычислять юлианские даты по григорианскому календарю. Программа Time1 не работает для отрицательных номеров года.

В онлайновом режиме можно, например, использовать программу для пересчета дат, разработанную в Военно-морской обсерватории США (USNO):
http://aa.usno.navy.mil/data/docs/JulianDate.html.

Юлианская эпоха для известной юлианской даты JD определяется формулой:

$$\text{Юлианская эпоха} = 2000.0 + \frac{\text{JD} - 2451545,0}{365,25}.$$

4.7.2. Тропический и звездный год

Для измерения длительных промежутков времени, кроме суток (средних солнечных или звездных) была введена еще одна единица времени — год, которая связана с движением Солнца относительно звезд.

Дадим следующие определения.

Определение 4.7.2. *Промежуток времени, за который среднее экваториальное солнце последовательно проходит через среднюю точку весеннего равноденствия, называется тропическим годом.*

Следовательно, продолжительность тропического года определяется средней долготой Солнца L (это следует из уравнения (4.2)), отсчитываемой по эклиптике от средней точки весеннего равноденствия даты. Выражение для L Ньюкомб вывел в 1895 г. на основе анализа $\sim$ 40000 наблюдений Солнца, проведенных в течение 140 лет, и привел в «Tables of the Sun»:

$$L = 279^\circ 41' 48'',04 + 129602768'',13T + 1'',089T^2, \tag{4.84}$$

где T измеряется в юлианских столетиях по 36525 средних солнечных суток от фундаментальной эпохи «Tables of the Sun» (JD(ET) $2415020.0 = 1900$, январь $0,12^{\text{h}}$ET).

По определению, движение среднего экваториального солнца по среднему экватору, которое задает систему среднего солнечного времени, должно быть строго равномерным. В любой момент времени прямое восхождение α_{mS} этой фиктивной точки должно равняться средней долготе Солнца (4.2). Однако из-за наличия квадратичного члена в выражении прецессии по прямому восхождению (см. (6.12)

и (6.10)) в долготе (4.84) появляется член $1''\!,089T^2$, и требование равномерности движения среднего экваториального солнца не выполнимо. Выражение для α_{mS}, полученное Ньюкомбом и согласованное с (4.84), имеет вид:

$$\alpha_{mS} = 18^{\mathrm{h}}38^{\mathrm{m}}45\!,^{\mathrm{s}}836 + 8640184\!,^{\mathrm{s}}542T + 0\!,^{\mathrm{s}}0929T^2. \qquad (4.85)$$

Ньюкомб определил среднее экваториальное солнце в системе отсчета, заданной прецессионными параметрами, принятыми в начале 1890-х годов. При переходе на систему астрономических постоянных 1897 г. он не заменил квадратичный член в α_{mS}, так как считал, что это приведет к пренебрежимо малым изменениям в α_{mS} по сравнению с точностью наблюдений. Поэтому выражение Ньюкомба для прямого восхождения среднего экваториального солнца, строго говоря, не представляло ни среднее движение Солнца, ни равномерное движение фиктивной точки на среднем экваторе.

В 1982 г. из-за ревизии астрономических констант коэффициенты формулы Ньюкомба для α_{mS} были изменены. Новое выражение для прямого восхождения среднего экваториального солнца (4.92) сохраняет непрерывность всемирного времени UT1. Разность выражений (4.84) и (4.92) остается пренебрежимо малой на протяжении нескольких столетий.

Используя выражение (4.84) найдем продолжительность тропического года. Начало шкалы эфемеридного времени соответствует моменту времени, когда средняя долгота Солнца L, отсчитываемая от среднего равноденствия даты, равнялась $279°41'48''\!,04$. Так как в течение тропического года средняя долгота Солнца изменяется ровно на $360° = 1296000''$, то выражая скорость изменения L, равную dL/dT в сек дуги/с, получим продолжительность тропического года в секундах:

$$T_{tr} = \frac{1296000'' \times 36525 \times 86400^s}{dL/dT} \approx$$
$$\approx 31556925\!,^{\mathrm{s}}9747 - 0\!,^{\mathrm{s}}53032T.$$

При $T = 0$ находим T_{tr} на эпоху 1900, январь 0, 12^{h} ET. Она равна $31556925\!,^{\mathrm{s}}9747$. Доля года, обратная этому числу, была названа эфемеридной секундой (МАС, Гамбург, 1964 г.).

Вследствие зависимости L от квадратичного члена $1''\!,089T^2$ продолжительность тропического года медленно меняется и равна (в эфемеридных сутках)

$$T_{tr} = 365\overset{\mathrm{d}}{,}242198781 - 0\overset{\mathrm{d}}{,}000006138T. \qquad (4.86)$$

Определение 4.7.3. *Время, за которое Солнце совершает полный оборот по эклиптике относительно направления, неподвижного в инерциальной системе отсчета, называется звездным (сидерическим) годом.*

Название этого промежутка времени «звездным годом» связано с тем, что звезды до XVIII века считались неподвижными. Из-за возмущений, вызываемых в движении Солнца планетами, звездный год слегка меняет величину. Средняя его продолжительность равна примерно 365,25636 средних солнечных суток. Причиной, из-за которой тропический год оказывается короче звездного, является прецессия оси вращения Земли (см. главу 6).

Подчеркнем, что звездный год определяется обращением Солнца относительно неподвижных звезд, а звездные сутки — обращением Земли относительно точки весеннего равноденствия.

В качестве единицы времени звездный год не употребляется.

После того, как задана продолжительность года, любое событие может быть определено номером года и дробной частью, например 1999,2435. Заметим, что сейчас в системе счета лет используется юлианский год, а до 1976 г. использовался *бесселев год*.

По предложению Ф. Бесселя (1784–1846), в честь которого год и был назван, за начало года принимается эпоха, в которую прямое восхождение среднего экваториального солнца α_{mS} с учетом аберрации или средняя долгота L (4.84), уменьшенная на величину постоянной аберрации и отсчитываемая от точки среднего весеннего равноденствия, точно равны 280° или

$$\alpha_{mS} = L = 18^{\mathrm{h}}40^{\mathrm{m}}.$$

Начало бесселева года, таким образом, всегда близко к началу тропического года.

Продолжительность бесселева года определяется промежутком времени, за который прямое восхождение среднего экваториального Солнца увеличивается ровно на 24^{h}, и всего на $0\overset{\mathrm{s}}{,}148T$ (T — чис-

ло столетий от эпохи 1900.0) короче продолжительности тропического года. Если пренебречь малой вековой разницей и принять продолжительность бесселева года за $365^{\mathrm{d}},2422$, то с каждым следующим простым годом начало бесселева года будет смещаться на $0^{\mathrm{d}},2422$ вперед, а в високосный — на $0^{\mathrm{d}},7578$ назад, т. е. начало бесселева года приходится на разные дни. Смещение начала бесселева года для фундаментальной эпохи «Tables of the Sun» Ньюкомба можно найти следующим образом. На эпоху JD(ET) $2415020.0 = 1900$, январь $0,12^{\mathrm{h}}$ ET прямое восхождение среднего экваториального Солнца равно по вычислениям Ньюкомба $\alpha_{mS} = 18^{\mathrm{h}}38^{\mathrm{m}}45^{\mathrm{s}},836$ (4.85), а скорость изменения α_{mS} в сутки, как будет показано ниже, равна (4.95), т. е. $\sim 236^{\mathrm{s}},55536$. Следовательно, от фундаментальной эпохи до начала бесселева года 1900.0, когда $\alpha_{mS} = 18^{\mathrm{h}}40^{\mathrm{m}}$, прошло

$$\frac{18^{\mathrm{h}}40^{\mathrm{m}} - 18^{\mathrm{h}}38^{\mathrm{m}}45^{\mathrm{s}},836}{236^{\mathrm{s}},55536} = 0^{\mathrm{d}},31352$$

или $0,81352$ суток, если считать календарные сутки от полуночи.

Если требуется вычислить бесселеву эпоху для известной юлианской даты JD, то можно воспользоваться формулой, рекомендованной МАС:

$$\text{Бесселева эпоха} = 1900.0 + \frac{\mathrm{JD} - 2415020,31352}{365,242198781}.$$

В этом выражении продолжительность бесселева года в эпоху $B1900.0$ (юлианская дата $\mathrm{JD}2415020,31352$) равна продолжительности тропического года $365^{\mathrm{d}},242198781$.

К началу бесселева года было принято приводить наблюдения звезд в XIX и XX веках, и в качестве стандартных эпох, на которые определялось положение среднего экватора и равноденствия, использовались эпохи $B1900.0$, $B1950.0$. Символ «B» в этой записи указывает на момент начала соответствующего бесселева года.

4.8. Летосчисление

Для счета промежутков времени используется *календарь*. В Древнем мире не было единой системы счета времени. Каждый народ использовал либо лунный, либо лунно-солнечный, либо солнечный календарь. Известны календарные системы, созданные в древнем Египте, Китае, Риме и т. д.

В основе каждой из систем лежат такие периодические процессы, как смена дня и ночи, смена фаз Луны и смена времен года. Именно эти процессы лежат в основе определения промежутков времени, известных как сутки, месяц и год. В каждой системе необходимо согласовать продолжительность календарного года и календарного месяца, состоящих из целого числа суток, с продолжительностью астрономических промежутков времени: тропического года и синодического месяца[5]. Кроме этого и число месяцев в календарном году должно быть целым числом.

В основе солнечного календаря лежит продолжительность тропического года (4.86). Следовательно, календарный год может содержать либо 365, либо 366 суток. Календарь должен реализовать правило чередования простых (по 365 суток) и високосных (по 366 суток) годов таким образом, чтобы средняя продолжительность календарного года за цикл была как можно ближе к продолжительности тропического года.

Первым солнечным календарем был календарь, созданный в Древнем Египте. Год состоял из 365 дней и делился на двенадцать 30-дневных месяцев и 5 дополнительных дней. Благодаря ряду уникальных совпадений (в месте наблюдения на широте Мемфиса, древнеегипетской столицы, изменение взаимного положения Солнца и Сириуса в момент его первого восхода вблизи летнего солнцестояния на протяжении тысячелетий было малым) календарь был очень точным и, главное, простым (см., например, *Климишин И. А.* Календарь и хронология. М.: Наука. 1990).

Календарь, используемый древними греками и основанный на движении Луны, известен как Метонов календарь. Этот календарь был основан на наблюдениях Метона из Афин, который показал, что 235 лунных месяцев почти точно равняются 19 тропическим годам. Впоследствии 19-летний цикл был назван Метоновым циклом. Позже Каллипп и Гиппарх усовершенствовали Метонов календарь, однако широкого распространения египетский и греческий календари не получили.

Древнеримский календарь (до 46 года до н. э.) состоял из десяти месяцев общей продолжительностью 304 дня, названия которых остались и в современном календаре (март, апрель, май, июнь). Если

[5]Синодический месяц — промежуток времени между двумя последовательными одноименными фазами Луны. Равен приблизительно 29,53058812 средних суток.

первые месяцы получили свои названия по имени богов, то седьмой, восьмой, девятый и десятый месяцы были названы соответствующими числительными (сентябрь, октябрь, ноябрь и декабрь).

Реформу древнеримского календаря провел в 46 году до н. э. Юлий Цезарь (100–44 гг. до н. э.). До этого Юлий Цезарь неоднократно бывал в Египте и знал принципы построения египетского календаря. Разработка нового календаря была поручена группе александрийских астрономов под руководством Созигена. Впоследствии этот календарь стал называться *юлианским*.

Счет по юлианскому календарю был начат с 1 января 45 г. до н. э.

Продолжительность года равнялась 365 средним солнечным суткам, а каждый четвертый високосный год — 366 суткам. Таким образом, средняя продолжительность года в юлианском календаре равна 365,25 суткам. Год в юлианском календаре, равный 365,25 средних солнечных суток, называется *юлианским годом*[6]. Следовательно, одно *юлианское столетие* содержит ровно 36525 средних солнечных суток. В связи с заменой определения секунды времени, как части средних солнечных суток на атомную секунду, было изменено определение юлианского года. Сейчас юлианский год равен 365,25 атомных суток. Юлианское столетие принято в качестве одной из основных единиц времени в астрометрии и используется в фундаментальных формулах учета прецессии, формулах, связывающих звездное и всемирное время и т. д.

Тропический год короче юлианского года на 0,0078 средних солнечных суток. Поэтому примерно за 128 лет расхождение юлианского календаря с тропическим годом составляет одни сутки. Это означает, что момент прохождения Солнца через точку весеннего равноденствия передвигается за это время на одни сутки назад — к началу марта. За 400 лет смещение этого момента составит трое суток. Это было замечено уже английским схоластом Беде, жившем в конце VII в., который указывал, что равноденствие наступило на три дня раньше ожидаемого (т. е. 18 марта).

В 325 г. римский император Константин (ок. 285–337) созвал в г. Никее церковный собор, на котором обсуждался вопрос о дате празднования пасхи. На соборе были приняты правила, из кото-

[6] Заметим здесь, что определение юлианских дат не имеет никакого отношения к Юлию Цезарю.

рых следует, что для расчета даты пасхи следует сначала рассчитать дату первого полнолуния, происшедшего после весеннего равноденствия. Затем нужно определить число месяца, на которое приходится первое после этого полнолуния воскресенье. Так как в юлианском календаре через каждые 28 лет дни недели приходятся на те же числа месяцев, то достаточно было сопоставить числа марта–апреля с днями недели на указанный отрезок времени. Так как в начале IV века весеннее равноденствие приходилось на 21 марта, то из расчетов следовало, что пасха приходится на дни с 22 марта по 25 апреля.

Но к концу VII в. весеннее равноденствие сдвинулось на трое суток, что и заметил церковный историк Беде, а к концу XVI века — уже на 10 суток.

Реформа календаря была проведена папой Григорием XIII (1502–1585) в 1582 году. Концепцию реформы предложил итальянский врач и математик Л. Лилио. Активное участие в разработке нового календаря принимал немецкий астроном Х. Клавий (1537–1612), именем которого назван кратер на Луне.

Для компенсации расхождения начала солнечного и тропического годов после 4 октября 1582 года было указано считать не 5, а 15 октября. В булле папа говорит: «Было заботою нашею не только восстановить равноденствие на издревле назначенном ему месте, от которого со времени Никейского собора оно отступило на десять дней приблизительно, ... но и установить также способ и правила, которыми будет достигнуто, чтобы в будущем равноденствие и XIV луна (церковное обозначение полнолуния — *В. Ж.*) со своих мест никогда не сдвигались». Таким образом, весеннее равноденствие было передвинуто на 21 марта. Чтобы ошибка в дальнейшем не накапливалась, было изменено правило, по которому определяются високосные годы. В григорианском календаре високосными считаются годы, номер которых делится на 4 без остатка, кроме годов, номер которых делится на 100. Если же номер года кратен 400, то год считается високосным. В результате 2000-й год является високосным, тогда как годы 1900 и 2100 таковыми не являются. Это правило применяется и к годам, которые предшествовали моменту реформы Григория XIII. В этом случае нулевой год, который делится и на 4, и на 100, и на 400, является високосным.

Григорианский календарь основан на 400-летнем цикле, в котором 146097 суток. Деля 146097 на 400, получаем среднюю про-

должительность года, равную 365,2425 средних солнечных суток. Она больше продолжительности тропического года на $0,0003$ суток, т. е. всего на 26 секунд. Таким образом, в григорианском календаре ошибка в одни сутки накапливается за $1/0,0003 \approx 3300$ лет.

Григорианский календарь иногда называют системой «нового стиля» (н. ст.). В отличие от нее за юлианским календарем укрепилось название: «старый стиль» (с. ст.).

Найдем разницу между юлианским и григорианским календарем. В XVI в. эта разница составляла 10 суток. В обоих календарях по правилу счета високосных лет 1600-й год был високосным, а 1700 г. в юлианском календаре был високосным, а в григорианском — простым. Поэтому в XVIII в. разница между старым и новым стилями увеличилась до 11 суток. Годы 1800-й и 1900-й также являются простыми, поэтому в XIX в. юлианский календарь отставал от григорианского на 12 суток, в XX в. — на 13 суток. Так как 2000 г. является високосным в обоих календарях, то эта разница сохранится до 2100 г.

Если требуется найти дату какого-либо события, имевшего место до введения григорианского календаря, то нужно к дате по юлианскому календарю прибавить разницу между старым и новым стилями. Например, Николай Коперник родился 19 февраля 1473 г. по юлианскому календарю. Так как в XV в. разница между календарными системами составляла 9 суток, то день рождения Н. Коперника по новому стилю приходится на 28 февраля 1473 г.

Сделаем теперь несколько замечаний о начале дней, лет, веков.

Сегодня практически во всем мире летосчисление ведется от «рождества Христова». Эта эра была введена в 525 г. римским монахом Дионисием Малым. Часто нумерация лет от рождения Христа обозначается буквами A. D., что на латинском языке означает Anno Domini — «год Господа», но чаще говорят «такой-то год нашей эры».

В XVIII веке нумерация лет, введенная Дионисием, была исправлена и для счета лет до рождества Христова. В настоящее время широко используется аббревиатура B. C. (по-английски, «before Christ») или «год до нашей эры» (до н. э.). Было принято также, что номера годов до н. э. возрастают по мере удаления в прошлое, но месяцы, числа дней в них считаются вперед, как и годах н. э.

Интересно, что понятие нуля не было широко распространено в

Европе в раннем средневековье. Видимо поэтому, год 1 до н. э. непосредственно предшествует году 1 н. э. Это вносит неудобства при вычислениях. Поэтому Ж. Кассини (1677–1756) предложил астрономическую систему счета лет. Счет лет в астрономической системе — непрерывный, в частности первому году предшествовал нулевой, перед которым был –1 (минус первый) и т. д. (рис. 4.16). В астрономических таблицах иногда употребляется нулевое число месяца. Его следует понимать как дату предшествующего дня. Например, 0 января 2001 г. — это 31 декабря 2000 г.

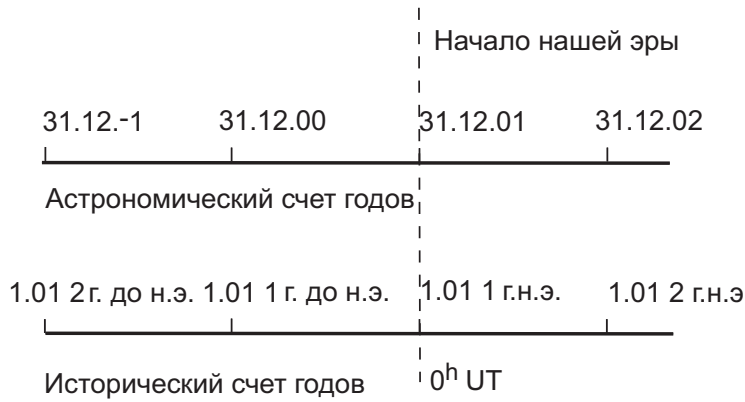


Рис. 4.16. Исторический и астрономический счет годов.

В астрономии принято календарную дату и момент наблюдений относить к всемирному координированному времени UTC. Например, если положение небесного тела измерено в 2^h30^m 21 января 2006 г. по московскому времени, то при публикации следует указать момент 23^h30^m 20 января 2006 г. в шкале UTC.

Вопрос о годе начала века обострился несколько лет назад в связи с приближением 2000 г.

Если мы считаем, что началом первого века (нашей эры) является 0^h UT 1 января 1 года нашей эры, то следует считать, что XXI век наступил ровно через 20 веков или 2000 лет, т. е. в 0^h UT 1 января 2001 года. Если же мы считаем, что I век начался 1 января 1 г. до н. э., то XXI век начался 1 января 2000 года, т. е. опять через 20 веков.

Поскольку название «нулевой год» в обычной жизни не используется, а вместо него употребляется 1 г. до н. э. (рис. 4.16), естественнее считать началом I века 1 января 1 года н. э. В этом случае XXI век наступил 1 января 2001 года.

Заметим, что слова «2006 г. от рождества Христова» неточны, поскольку рождество Христово относится к 25 декабря 1 г. до н. э. Сказанное показывает условность понятия «начала века». Поэтому в астрономических вычислениях это понятие не используется.

4.9. Связь всемирного и звездного времени

Рассмотрим теперь вопрос о связи всемирного и звездного времени.

Всемирное и звездное время определяются вращением Земли относительно Солнца и относительно точки весеннего равноденствия, соответственно. Следовательно, в уравнение связи входят параметры движения Солнца по небесной сфере. Если эти параметры известны точно, то можно найти точное уравнение, которое связывает всемирное и звездное время.

В данном параграфе мы получим формулы, связывающие всемирное и звездное время. Описание методов наблюдений, целью которых является определение времени UT1 и других параметров вращения Земли, не входит в задачи курса. Однако при описании основ редукции РСДБ наблюдений эта тема будет затронута.

Всемирное время UT1 является мерой вращения Земли. Вращение Земли неравномерно, причем эта неравномерность не может быть предсказана с высокой точностью. Для определения UT1 можно воспользоваться результатами наблюдений, обобщаемыми Международной службой вращения Земли и систем отсчета. На сайте МСВЗ можно найти разности всемирного UT1 и всемирного координированного времени UTC, т. е. величины $\Delta\mathrm{UT} = \mathrm{UT1} - \mathrm{UTC}$. Прибавив поправку $\Delta\mathrm{UT}$ к UTC, получим UT1.

По определению звездное время на меридиане Гринвича GST (Greenwich Siderial Time) равно часовому углу t_{Υ} точки весеннего равноденствия относительно Гринвича:

$$\mathrm{GST} = t_{\Upsilon}. \tag{4.87}$$

В уравнении (4.87) точка Υ всегда относится к *равноденствию да-*

ты, но нутация может учитываться или нет. Если предполагается, что нутация учитывается, т. е. наблюдения относятся к *истинному равноденствию* , то звездное время называется *истинным*. Если точка Υ обозначает *среднее равноденствие*, то уравнение (4.87) определяет *среднее звездное время*. Обычно его обозначают как GMST (Greenwich Mean Sidereal Time), тогда как истинное время как GAST (Greenwich Apparent Sidereal Time).

Разность между истинным и средним звездными временами называется *уравнением равноденствий* (по-английски, «equation of the equinoxes» или кратко «eq eq»). Ниже будет показано (в главе 6) как можно получить уравнение равноденствий. Пока запишем, что

$$\mathrm{GAST} = \mathrm{GMST} + eq\,eq.$$

Для вывода уравнения связи всемирного и звездного времени используем определение тропического года. Для любого светила (в том числе и Солнца) справедливо уравнение (4.15). Запишем его относительно гринвичского меридиана для среднего экваториального солнца:

$$\mathrm{GMST} = t_{\odot} + \alpha_{mS}.$$

Еще раз подчеркнем, что α_{mS} — прямое восхождение среднего экваториального солнца, отсчитываемое от среднего равноденствия. Используя (4.3), получим:

$$\mathrm{GMST} = \mathrm{UT1} - 12^{\mathrm{h}} + \alpha_{mS}. \tag{4.88}$$

Будем отсчитывать часовой угол среднего экваториального солнца $t_{\odot}$, его прямое восхождение α_{mS} и среднее гринвичское звездное время GMST непрерывно от некоторого момента, например, от эпохи, соответствующей $\mathrm{JD} = 2451545.0$ (1 января 2000 г., $\mathrm{UT1} = 12^{\mathrm{h}}$). Значит, если α_0 — прямое восхождение среднего экваториального солнца на начальную эпоху, то

$$\alpha_{mS} = \alpha_0 + \beta' \left[\mathrm{JD(UT1)} - 2451545.0\right]. \tag{4.89}$$

В течение тропического года прямое восхождение среднего экваториального солнца увеличивается ровно на 24^{h}. Следовательно, за сутки прямое восхождение увеличивается на $24^{\mathrm{h}}/T_{tr} \approx 3^{\mathrm{m}}56{,}^{\mathrm{s}}555$, где T_{tr} — продолжительность тропического года в средних солнечных сутках. Значит $\beta' = 24^{\mathrm{h}}/T_{tr}$.

Если всемирное время UT1 также отсчитывается непрерывно от эпохи $\mathrm{JD} = 2451545.0$, то

$$\mathrm{UT1} = [\mathrm{JD(UT1)} - 2451545.0] \cdot 24^{\mathrm{h}}.$$

Тогда, используя (4.89), найдем связь прямого восхождения среднего экваториального солнца и всемирного времени:

$$\alpha_{mS} = \alpha_0 + \beta\,\mathrm{UT1}, \tag{4.90}$$

где $\beta = 1/T_{tr}$.

Подставляя (4.90) в выражение (4.88), получим:

$$\mathrm{GMST} = (\alpha_0 - 12^{\mathrm{h}}) + (1+\beta)\mathrm{UT1}. \tag{4.91}$$

Это и есть точное уравнение, связывающее среднее гринвичское звездное время со средним солнечным. Предполагается, что α_{mS} в (4.90) возрастает равномерно с UT. Это естественно, так как это и есть определение среднего солнечного времени.

Выражение для α_{mS} (4.85) было получено Ньюкомбом. В 1982 г. коэффициенты формулы Ньюкомба были изменены из-за ревизии астрономических констант (система MAC 1976 г.):

$$\begin{aligned}\alpha_{mS} = {} & 18^{\mathrm{h}}41^{\mathrm{m}}50{,}^{\mathrm{s}}54841 + 8640184{,}^{\mathrm{s}}812866t \\ & + 0{,}^{\mathrm{s}}093104t^2 - 6{,}^{\mathrm{s}}2 \cdot 10^{-6}t^3,\end{aligned} \tag{4.92}$$

где

$$t = \frac{\mathrm{JD(UT1)} - 2451545,0}{36525}. \tag{4.93}$$

Перепишем выражение для t (4.93) следующим образом:

$$t = \frac{\mathrm{JD}(0^{\mathrm{h}}\mathrm{UT1}) - 2451545,0}{36525} + \frac{\mathrm{UT1}/24^{\mathrm{h}}}{36525} = t' + \frac{\mathrm{UT1}/24^{\mathrm{h}}}{36525}.$$

Здесь $\mathrm{JD}(0^{\mathrm{h}}\mathrm{UT1})$ — юлианская дата в момент, когда $\mathrm{UT1} = 0^{\mathrm{h}}$,

$$t' = \frac{\mathrm{JD}(0^{\mathrm{h}}\mathrm{UT1}) - 2451545,0}{36525}.$$

Тогда, используя (4.88), получим:

$$\begin{aligned}\mathrm{GMST}\Big|_{0^h\,\mathrm{UT1}} = {} & 6^h41^m50{,}^{\mathrm{s}}54841 + 8640184{,}^{\mathrm{s}}812866t' + \\ & + 0{,}^{\mathrm{s}}093104t'^2 - 6{,}^{\mathrm{s}}2 \cdot 10^{-6}t'^3.\end{aligned} \tag{4.94}$$

Из (4.94) найдем изменение среднего звездного времени за средние солнечные сутки:

$$\left.\frac{d(\mathrm{GMST})}{dt'}\right|_{0^{\mathrm{h}}\mathrm{UT1}} = \frac{8640184{,}^{\mathrm{s}}812866 + 0{,}^{\mathrm{s}}186208t' - 18{,}^{\mathrm{s}}6 \cdot 10^{-6}t'^2}{36525} =$$
$$= 236{,}^{\mathrm{s}}55536790872 + 0{,}^{\mathrm{s}}50980972 \cdot 10^{-5}t' - 0{,}^{\mathrm{s}}509 \cdot 10^{-9}t'^2. \tag{4.95}$$

Очевидно, что изменение звездного времени в гринвичскую полночь за одни средние солнечные сутки равно ежесуточному увеличению прямого восхождения среднего солнца. Если, например, 21 марта среднее солнце и точка весеннего равноденствия кульминировали на каком-либо меридиане одновременно, то за средние сутки солнце сместится относительно звезд навстречу суточному вращению небесной сферы, т. е. к востоку, и будет кульминировать позднее точки весеннего равноденствия. Чтобы произошла кульминация среднего солнца, Земля должна совершить дополнительный поворот. Этот поворот совершается за $3^{\mathrm{m}}56^{\mathrm{s}},555$ в звездном времени. Иначе говоря, средние солнечные сутки, выраженные в звездном времени, на $3^{\mathrm{m}}56^{\mathrm{s}},555$ длиннее звездных (рис. 4.17).

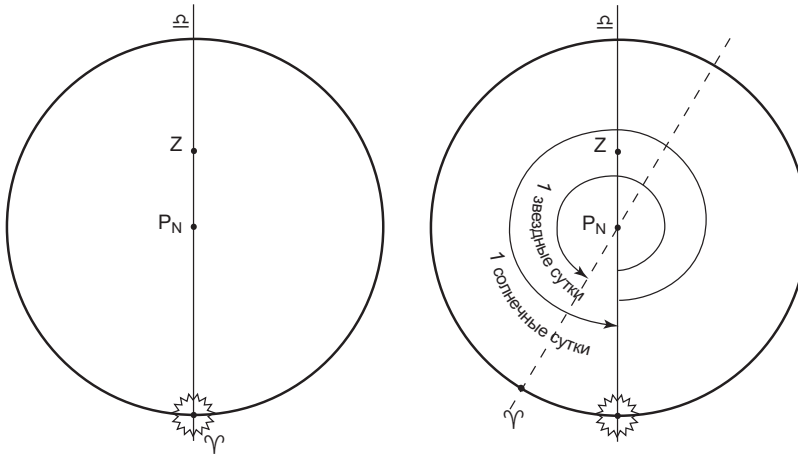


Рис. 4.17. Разница средних солнечных и звездных суток.

С учетом (4.95) получим:

$$1 \text{ средние солнечные сутки} = 86400 \text{ средних солн. сек.} =$$
$$(86636,55536790872 + 0,50980972 \cdot 10^{-5}t' - 0,509 \cdot 10^{-5}t'^2) \cdot$$
$$1 \text{ звездную секунду.}$$

Отношение продолжительностей средних солнечных и средних звездных суток равно:

$$\begin{aligned} r &= \frac{86400 \text{ солнечных секунд}}{86400 \text{ звездных секунд}} \\ &= \frac{(86636,55536790872 + 0,50980972 \cdot 10^{-5}t' - 0,509 \cdot 10^{-5}t'^2) \cdot 1 \text{ зв.сек.}}{86400 \text{ звездных секунд}} \\ &= 1,002737909350795 + 0,59005755 \cdot 10^{-10}t' - 0,589 \cdot 10^{-14}t'^2. \end{aligned} \tag{4.96}$$

Пусть $\mathrm{GMST}_0 = \mathrm{GMST}\big|_{0^h\mathrm{UT1}}$. Используя выражения (4.94),(4.96), перепишем (4.91) в рекомендуемом Международной службой вращения Земли виде:

$$\mathrm{GMST(UT1)} = \mathrm{GMST}_0 + r\Big[(\mathrm{UT1} - \mathrm{UTC}) + \mathrm{UTC}\Big]. \tag{4.97}$$

Из выражения (4.97) следует, что среднее звездное гринвичское время, как и всемирное UT1, не может быть определено на основе теории. Поэтому часто при невысокой точности редукции наблюдений пренебрегают разностью UT1 − UTC. В этом случае GMST является функцией только атомного времени UTC. При редукции с высокой точностью (например, РСДБ наблюдений) приходится использовать публикуемые МСВЗ значения UT1 − UTC и интерполировать или экстраполировать их на момент наблюдения.

Для приближенных вычислений среднего гринвичского звездного времени перепишем выражение (4.97) в следующем виде:

$$\mathrm{GMST(UT1)} = \mathrm{GMST}_0 + \mathrm{UT1} + \mu\mathrm{UT1}, \tag{4.98}$$

где $\mu = r - 1 = 0,002737909350795$. Значения среднего гринвичского времени на начало суток (GMST_0) приводятся на стр. 6–9 «Астрономического ежегодника». Значения μUT1 (без учета вековых членов) также приводятся в «Астрономическом ежегоднике» (таблица IIa или IIIa). Всемирное время UT1 может быть найдено из поясного или декретного, пренебрегая разностью UT1 – UTC. Необходимо, конечно же, учитывать, введено ли в данный момент летнее время.

После того, как найдено гринвичское звездное время GMST, местное среднее звездное время на долготе λ получается по формуле (4.13): $s = \mathrm{GMST} + \lambda$.

Из (4.98) легко получить обратную зависимость: переход от звездного времени к солнечному

$$(1+\mu)\mathrm{UT1} = \mathrm{GMST(UT1)} - \mathrm{GMST}_0,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{UT1} &= \frac{\mathrm{GMST(UT1)} - \mathrm{GMST}_0}{1+\mu} \\ &\approx \mathrm{GMST(UT1)} - \mathrm{GMST}_0 - \nu(\mathrm{GMST(UT1)} - \mathrm{GMST}_0).\end{aligned}$$

Здесь использовано разложение в ряд Тейлора по параметру μ

$$(1+\mu)^{-1} \approx 1 - \mu + \frac{\mu^2}{2} - \cdots = 1 - \nu,$$

где $\nu = 0,0027304336\ldots$

В заключение главы приведем пример перевода всемирного в звездное время, используя «Астрономический ежегодник» 2000 г. Найдем среднее звездное время, соответствующее $13^{\mathrm{h}}15^{\mathrm{m}}10^{\mathrm{s}},5$ московского времени для точки с долготой $\lambda = 2^{\mathrm{h}}30^{\mathrm{m}}05^{\mathrm{s}},1$ 10 мая 2000 г.

Так как $M_d = 13^{\mathrm{h}}15^{\mathrm{m}}10^{\mathrm{s}},5$ и 10 мая используется летнее время, то $\mathrm{UT1} \approx M_d - 4^{\mathrm{h}} = 9^{\mathrm{h}}15^{\mathrm{m}}10^{\mathrm{s}},5$. Среднее гринвичское время на 0^{h} всемирного времени 10 мая 2000 г. выписываем из «Астрономического ежегодника» (с. 6). Имеем:

$$\begin{aligned}\mathrm{UT1} &= 9^{\mathrm{h}}15^{\mathrm{m}}10^{\mathrm{s}},50 \\ \mathrm{GMST}_0 &= 15^{\mathrm{h}}12^{\mathrm{m}}24^{\mathrm{s}},47 \\ \mu\mathrm{UT1} &= +1^{\mathrm{m}}31^{\mathrm{s}},20 \\ &\ * * * * * * * * \\ \mathrm{GMST} &= 0^{\mathrm{h}}29^{\mathrm{m}}06^{\mathrm{s}},17 \\ \lambda &= 2^{\mathrm{h}}30^{\mathrm{m}}05^{\mathrm{s}},10 \\ &\ * * * * * * * * \\ s = \mathrm{GMST} + \lambda &= 2^{\mathrm{h}}59^{\mathrm{m}}11^{\mathrm{s}},27\end{aligned}$$

Вычисление поправок μUT1 производится при помощи табл. IIIa «Астрономического ежегодника» (с. 622).

Глава 5

ЭФФЕКТЫ, ИСКАЖАЮЩИЕ ПОЛОЖЕНИЕ ЗВЕЗД НА НЕБЕСНОЙ СФЕРЕ

5.1. Рефракция

При прохождении атмосферы Земли лучи света от звезды попадают в среду с изменяющимся показателем преломления. На больших расстояниях от поверхности Земли (в безвоздушном пространстве) показатель преломления n равен 1 и скорость света равна скорости света в вакууме. В атмосфере показатель преломления уже не равен 1 и меняется в зависимости от плотности воздуха. В результате путь света от звезды в атмосфере не является прямой линией (рис. 5.1).

Из-за рефракции наблюдатель видит звезду на зенитном расстоянии ζ, тогда как её реальное зенитное расстояние (при отсутствии атмосферы) равно z. Под астрономической рефракцией понимают смещение небесного объекта на угол ϱ относительно его истинного положения при прохождении света через атмосферу Земли,

$$\varrho = z - \zeta.$$

Показатель преломления зависит от плотности воздуха, меняющейся вдоль траектории луча света. Так как точный закон изменения плотности с высотой неизвестен, то точное определение величины рефракции невозможно. В оптическом диапазоне рефракция является одним из главных факторов, ограничивающих точность пози-

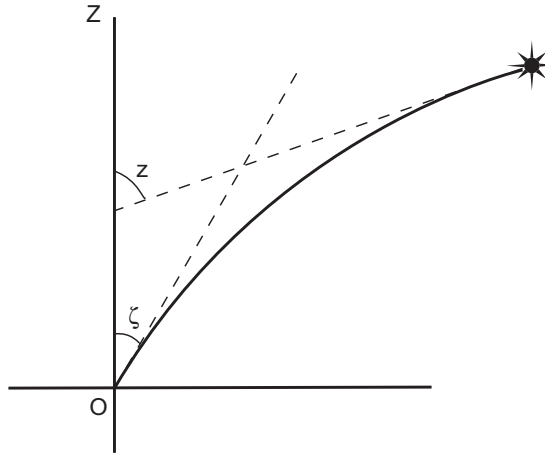


Рис. 5.1. Явление рефракции.

ционных наблюдений. Единственным способом решения проблемы является вынос оптических телескопов за пределы земной атмосферы. Успешное завершение проекта HIPPARCOS, результатом которого стал высокоточный каталог $\sim$ 118000 звезд, является подтверждением этого вывода. Если наблюдения проводятся в радиодиапазоне (на радиоинтерферометрах со сверхдлинными базами или путём приема сигналов со спутников), то применяются специальные методы учета радиорефракции. Так как РСДБ и глобальные навигационные системы GPS и ГЛОНАСС составляют основу современных астрометрических и геодезических сетей, методам учёта радиорефракции мы уделим особое внимание.

5.1.1. Учет рефракции в оптическом диапазоне

Простые формулы для учета рефракции можно получить, если рассмотреть плоскопараллельную модель атмосферы Земли. В этой модели атмосфера разбивается на плоскопараллельные слои, причем показатель преломления n считается постоянным в слое и меняется скачкообразно на границах слоев (рис. 5.2). Показатель преломления у поверхности Земли равен n_0.

Запишем закон Снелля для $(i+1)$-ого и i-ого слоёв:

$$n_{i+1} \sin z_{i+1} = n_i \sin z_i,$$

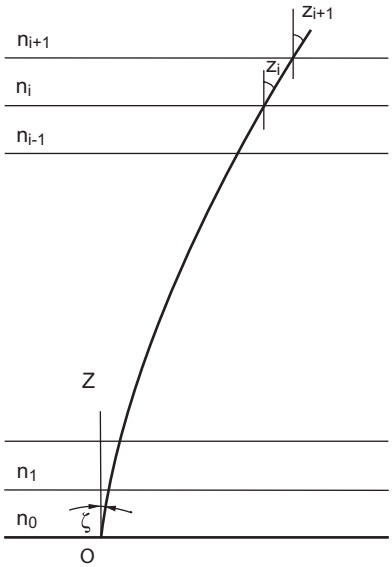


Рис. 5.2. Рефракция в атмосфере, состоящей из плоскопараллельных слоев.

для i-ого и $(i-1)$-ого слоёв:

$$n_i \sin z_i = n_{i-1} \sin z_{i-1},$$

т. е.

$$n_{i+1} \sin z_{i+1} = n_{i-1} \sin z_{i-1}. \tag{5.1}$$

Если в самом верхнем слое с номером N показатель преломления n равен 1, и зенитное расстояние равно z, то, продолжая цепочку уравнений (5.1), имеем:

$$1 \cdot \sin z = n_0 \sin \zeta.$$

Так как показатель преломления у поверхности земли $n_0 > 1$, всегда $\zeta < z$. Это означает, что *рефракция приводит к смещению звезды к зениту*.

Если показатель преломления n не зависит от азимута, то луч света не выходит из вертикальной плоскости, и, следовательно, азимут рефракцией не искажается. Так как $z = \varrho + \zeta$, получим:

$$\sin(\varrho + \zeta) = n_0 \sin \zeta.$$

Учитывая, что величина рефракции не превышает нескольких минут дуги, и, следовательно, $\sin\varrho \approx \varrho$, $\cos\varrho \approx 1$, получим величину рефракции в радианах:

$$\varrho \approx (n_0 - 1)\,\mathrm{tg}\,\zeta. \tag{5.2}$$

Величина рефракции зависит, таким образом, от зенитного расстояния звезды и от показателя преломления у поверхности Земли. Упрощение строения атмосферы Земли приводит к простому выводу: для вычисления рефракции требуется знать лишь показатель преломления в точке наблюдения.

Значение показателя преломления n_0 у поверхности Земли зависит от местных метеорологических параметров. При нормальных условиях (давление равно 760 мм рт. ст. и температура $0°C$) $n_0 = 1,0002926$. Если ввести обозначение $k_0 = n_0 - 1$, то при нормальных условиях и длине волны $\lambda = 0,575$ микрон $k_0 = 0,0002926$, что в градусной мере равно $60''\!,343$; иногда коэффициент k_0 называется *постоянной рефракции*. Если условия отличаются от нормальных, то показатель преломления может быть найден по закону Гладстоуна–Дэйла, согласно которому величина $n - 1$, которая иногда называется индексом рефракции, пропорциональна плотности воздуха ρ: $n - 1 = s\rho$, $s = k_0/\rho_0 \approx 0,266$. Если выразить плотность воздуха через давление и температуру, то закон изменения показателя преломления от давления и температуры определяется формулой:

$$n - 1 = k_0 \frac{P}{760} \cdot \frac{273°}{t° + 273°}, \tag{5.3}$$

где P — приземное атмосферное давление в мм рт. ст., $t°$ — температура воздуха в градусах Цельсия.

В действительности показатель преломления n_0 у поверхности Земли зависит не только от приземного давления и температуры, но также и от состава воздуха (главным образом, от количества водяного пара) и от длины волны света. Влияние водяного пара на рефракцию в оптическом диапазоне довольно мало (по сравнению с точностью формулы (5.2)), а в радиодиапазоне, напротив, довольно значительно. Забегая вперед, укажем, что невозможность точного определения содержания водяного пара в нижних слоях тропосферы вдоль луча по направлению к радиоисточнику является основной причиной, которая ограничивает точность радиоастрометриче-

ских наблюдений. Зависимость показателя преломления n_0 от длины волны λ существенна даже в оптике. Приведенное выше значение $n_0 = 1,0002926$ соответствует центру V-полосы (для длины волны $\lambda = 0,575$ мкм), используемой для определения визуальной звездной величины звезды. В общем виде зависимость $n_0 - 1$ от длины волны λ может быть представлена в виде:

$$n_0 - 1 = a\left(1 + \frac{b}{\lambda^2}\right),$$

где $a = 2,871 \cdot 10^{-4}, b = 0,00567$, а длина волны λ выражена в микрометрах. Величина $n_0 - 1$ изменяется примерно на 2% в диапазоне видимого спектра, что приводит к изменению постоянной рефракции. В результате свет звезды будет разлагаться в спектр вдоль вертикального круга, причем красный конец спектра будет ближе к горизонту. Это означает, что при наблюдении звезд разных классов (или звезд одного класса, но с разными фильтрами) возможны систематические ошибки при определении координат, вызванные зависимостью n_0 от λ.

Формула (5.2) является очень грубой и верна лишь в предположении плоскопараллельного строения атмосферы. Более точная формула, учитывающая сферичность атмосферы, будет получена ниже. Формулой (5.2) можно пользоваться, если зенитное расстояние мало. При $z > 70°$ формула (5.2) уже неприменима, даже если не требуется высокой точности. Значительно более точный учет рефракции можно выполнить, если рассмотреть сферически-симметричную атмосферу.

Допустим, что свет от звезды распространяется в плоскости страницы. Разделим атмосферу на тонкие сферические слои (рис. 5.3), центром которых является центр Земли (точка O).

Плотность воздуха и, следовательно, показатель преломления будет зависеть лишь от высоты (от расстояния до центра Земли). По закону преломления света имеем на границе i-ого и $(i-1)$-ого слоёв:

$$\frac{\sin z_i}{\sin r_i} = \frac{n_{i-1}}{n_i}.$$

Разность углов z_i и r_i обозначим через $\Delta\varrho_i$:

$$\Delta\varrho_i = z_i - r_i.$$

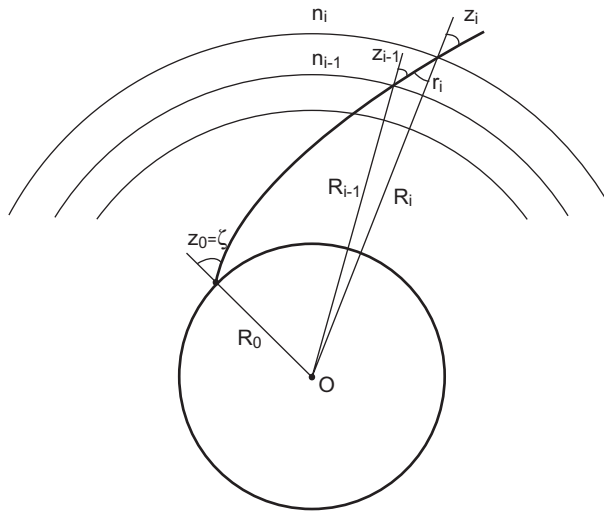


Рис. 5.3. Рефракция в сферически-симметричной атмосфере.

Если $\Delta n_i = n_i - n_{i-1}$, то

$$n_i \sin z_i = (n_i - \Delta n_i) \sin(z_i - \Delta\varrho_i).$$

Учитывая малость величины $\Delta\varrho_i$, получим:

$$n_i \sin z_i \approx (n_i - \Delta n_i) \sin z_i - (n_i - \Delta n_i) \cos z_i \Delta\varrho_i.$$

Пренебрегая членом второго порядка малости $\Delta\varrho_i \Delta n_i$, получим:

$$\Delta\varrho_i = -\frac{\Delta n_i}{n_i} \operatorname{tg} z_i.$$

Суммируя по всем слоям от 0 до N, получим значение полной рефракции:

$$\sum_{i=0}^{N} \Delta\varrho_i = -\sum_{i=0}^{N} \frac{\Delta n_i}{n_i} \operatorname{tg} z_i.$$

При уменьшении толщины каждого слоя ($\Delta n_i \to dn_i$) и увеличении число слоёв ($N \to \infty$) сумма стремится к интегралу, то есть

$$\varrho = -\int_{n_0}^{n_N} \operatorname{tg} z \frac{dn}{n}.$$

Интегрирование проводится от поверхности земли, где $n = n_0$ до верхнего слоя N атмосферы, где $n = 1$. Меняя пределы интегрирования, получим:

$$\varrho = \int\limits_1^{n_0} \operatorname{tg} z \frac{dn}{n}. \tag{5.4}$$

Так как значение z вдоль пути луча неизвестно, вполне естественно заменить $\operatorname{tg} z$ на функцию, зависящую от видимого зенитного расстояния ζ. Это легко сделать, используя закон синусов:

$$\frac{R_i}{R_{i-1}} = \frac{\sin(180^\circ - z_{i-1})}{\sin r_i}.$$

Но $\sin r_i = \frac{n_i}{n_{i-1}} \sin z_i$. Значит

$$\frac{R_i}{R_{i-1}} = \frac{n_{i-1}}{n_i} \cdot \frac{\sin z_{i-1}}{\sin z_i}.$$

Продолжая цепочку уравнений от $(i-1)$-го слоя до поверхности Земли, получим:

$$R_i n_i \sin z_i = R_{i-1} n_{i-1} \sin z_{i-1} = \ldots = R_0 n_0 \sin \zeta \tag{5.5}$$

или

$$\sin z_i = \frac{R_0 n_0}{R_i n_i} \sin \zeta.$$

Уменьшая толщину слоев, получим формулу, связывающую z с ζ:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\frac{R_0 n_0}{Rn} \sin \zeta}{\sqrt{1 - \left(\frac{R_0 n_0}{Rn} \sin \zeta\right)^2}}.$$

Значит, рефракция в сферически-симметричной атмосфере равна:

$$\varrho = \int\limits_1^{n_0} \frac{\sin \zeta}{\sqrt{\left(\frac{Rn}{R_0 n_0}\right)^2 - \sin^2 \zeta}} \frac{dn}{n}. \tag{5.6}$$

Формула (5.6) — точная. Интеграл (5.6) называется интегралом рефракции. Если бы функция $n = n(R)$ была известна, то рефракцию ϱ можно было бы вычислить численным интегрированием.

5.1.2. Формула Лапласа для вычисления рефракции

На практике интеграл в (5.6) вычисляется, если разложить в ряд параметр $(R/R_0)^2$ с использованием соотношения: $R/R_0 = 1 + p$, $p \ll 1$. Это справедливо, если считать, что толщина атмосферы составляет 100–150 км. Выше этого уровня плотность воздуха очень мала, и оптическая рефракция практически отсутствует.

Перепишем формулу (5.6) в виде:

$$\varrho = R_0 n_0 \sin\zeta \int\limits_1^{n_0} \frac{1}{\left(R^2 n^2 - R_0^2 n_0^2 \sin^2\zeta\right)^{1/2}} \frac{dn}{n}. \tag{5.7}$$

Знаменатель подинтегрального выражения может быть разложен в ряд:

$$\frac{1}{R_0}\left[n^2(1+p)^2 - n_0^2\sin^2\zeta\right]^{-1/2} \approx \frac{1}{R_0}\left[n^2 - n_0^2\sin^2\zeta + 2n^2 p\right]^{-1/2}$$
$$\approx \frac{1}{R_0}\left(n^2 - n_0^2\sin^2\zeta\right)^{-1/2} \times$$
$$\left[1 - \frac{n^2 p}{n^2 - n_0^2\sin^2\zeta} + \frac{3}{8}\left(\frac{2n^2 p}{n^2 - n_0^2\sin^2\zeta}\right)^2 - \ldots\right].$$

Следовательно, интеграл (5.7) может быть представлен в виде суммы:

$$\varrho = \varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3 - \ldots, \tag{5.8}$$

где

$$\varrho_1 = n_0 \sin\zeta \int\limits_1^{n_0} \frac{1}{\left(n^2 - n_0^2\sin^2\zeta\right)^{1/2}} \frac{dn}{n},$$
$$\varrho_2 = n_0 \sin\zeta \int\limits_1^{n_0} \frac{n^2 p}{\left(n^2 - n_0^2\sin^2\zeta\right)^{3/2}} \frac{dn}{n} \text{ и т. д.}$$

Разложение в ряд (5.8) справедливо, если только $2n^2 p \ll n^2 - n_0^2\sin^2\zeta$. Так как n, n_0 близки к единице, то это условие выполняется, когда ζ не превосходит 70°, т. е $\sin\zeta$ значительно отличается от единицы.

Вычислим интегралы в (5.8). Первый интеграл ϱ_1 является табличным и имеет вид:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}.$$

Следовательно,

$$\varrho_1 = n_0 \sin\zeta \int\limits_1^{n_0} \frac{1}{\left(n^2 - n_0^2 \sin^2\zeta\right)^{1/2}} \frac{dn}{n}$$
$$= \arccos(\sin\zeta) - \arccos(n_0 \sin\zeta).$$

Так как отличие показателя преломления n_0 у поверхности Земли от единицы мало, то считаем, что $n_0 = 1 + k, k \ll 1$. Разлагая ϱ_1 как функцию k в ряд Тэйлора и пренебрегая членами, содержащими k^2, k^3 и т. д., получим:

$$\varrho_1 \approx k \operatorname{tg}\zeta \text{ или } \varrho_1 = (n_0 - 1)\operatorname{tg}\zeta. \tag{5.9}$$

Для интеграла ϱ_2 воспользуемся законом Гладстоуна–Дэйла, на основании которого можем записать, что $dn = sd\rho$, $s \approx 0,226$. Тогда

$$\varrho_2 = sn_0 \sin\zeta \int\limits_0^{\rho_0} \frac{npd\rho}{\left(n^2 - n_0^2 \sin^2\zeta\right)^{3/2}},$$

ρ_0 — плотность воздуха у поверхности Земли. Так как величина p мала и $n_0 \approx n = 1$, то

$$\varrho_2 \approx s \sin\zeta \int\limits_0^{\rho_0} \frac{pd\rho}{\left(1 - \sin^2\zeta\right)^{3/2}} = s \operatorname{tg}\zeta \sec^2\zeta \int\limits_0^{\rho_0} pd\rho.$$

Интегрируя по частям, получим:

$$\int\limits_0^{\rho_0} pd\rho = p\rho|_0^{\rho_0} - \int\limits_{h_{atm}}^{0} \rho dp = p\rho|_0^{\rho_0} + \int\limits_0^{h_{atm}} \rho dp,$$

где h_{atm} — верхняя граница атмосферы, на которой $\rho = 0$. Так как при $\rho = \rho_0$ (у поверхности Земли) $h = 0$, то $p\rho|_0^{\rho_0} = 0$. Интеграл

$$R_0 \int\limits_0^{h_{atm}} \rho dp = \int\limits_0^{h_{atm}} \rho d(R_0 p)$$

представляет собой массу столба воздуха от поверхности Земли до верхней границы атмосферы h_{atm}. Если обозначить величину ($s/R_0 \times$ массу столба воздуха) как B, то рефракция

$$\varrho = (n_0 - 1)\operatorname{tg}\zeta - B \operatorname{tg}\zeta \sec^2\zeta$$

или

$$\rho = A \operatorname{tg} \zeta - B \operatorname{tg}^3 \zeta, \tag{5.10}$$

где $A = (n_0 - 1) - B$. Формула (5.10) называется *формулой Лапласа*.

Коэффициенты A и B зависят от давления, температуры у поверхности в месте наблюдения, длины волны, высоты обсерватории над уровнем моря. При $P = 1013,25$ мбар, $t = 15°C$, $\lambda = 0,590$ мкм, $p = 0$ — коэффициенты A и B в формуле Лапласа: $A = 57''\!,085$; $B = 0''\!,0666$.

Формула Лапласа лежит в основе теории Гильдена, развитой им для вычисления «*Пулковских таблиц рефракции*». Эти таблицы впервые были изданы в 1870 г., затем переиздавались в 1905 г., 1930 г., 1956 г. В таблицах приводится рефракция для средних метеорологических условий ($t = 9,3°C$, $P = 751,5$ мм. рт. ст., парциальное давление водяного пара $e = 6$ мм. рт. ст.) с поправками, учитывающими отклонение условий наблюдения от средних. Последнее (пятое) издание таблиц вышло в 1985 г. В новых таблицах сохранена традиционная форма представления рефракции в виде:

$$\lg \varrho = \lg \varrho_0 + \lambda\gamma + AB + C + D + F + H,$$

где $\lg \varrho_0$ — логарифм средней рефракции, $\lambda\gamma$ — поправка за температуру воздуха, AB, C, D, F, H — поправки за влажность воздуха, длину волны излучения, широту и высоту места наблюдения. Таким образом, в новых таблицах учитывается хроматическая рефракция.

При наблюдениях на больших зенитных расстояниях ($z > 75°$) и вблизи горизонта следует использовать более точную формулу.

Приведем формулу для вычисления рефракции, которая сообщена автору К. В. Куимовым. Она может быть использована до видимого зенитного расстояния ζ, равного 90°. Напомним, что величина рефракции равна разности истинного и видимого зенитного расстояний: $\varrho = z - \zeta$.

Используем формулу, предложенную А. Данжоном:

$$\varrho = k\Big(1 - \frac{k}{2}\Big)\sqrt{\frac{2}{\alpha}} \sin \zeta \cdot \Phi(x),$$

где $k = n - 1$ — индекс рефракции. Входящие в выражение величины и функцию $\Phi(x)$ можно вычислить по следующим формулам, исход-

ными параметрами для которых являются температура воздуха t (в градусах Цельсия) и давление P (в Па) в точке наблюдения:

$$\alpha = \beta - \frac{k}{2}, \quad \beta = \frac{RT}{g_0 M_d R_\oplus}, \quad x = \frac{\cos\zeta}{\sqrt{2\alpha}},$$

где $R = 8314,41$ Дж/(кмоль · К) — универсальная газовая постоянная, $T = t + 273{,}^\circ 15$ — температура воздуха в градусах Кельвина, $M_d = 28,9645$ кг/кмоль — молекулярная масса сухого воздуха (см. табл. 5.2), $g_0 = 9,80665$ м/с^2 — ускорение силы тяжести, $R_\oplus = 6371000$ м — средний радиус Земли.

Индекс рефракции может быть вычислен по эмпирическим формулам Оуэнса:

$$k = \Big[\Big(2371,34 + \frac{683939,7}{130-\lambda^2} + \frac{4547,3}{38,9-\lambda^2}\Big)\cdot D_d + \Big(6487,31 + \frac{58,058}{\lambda^2} - \frac{0,71150}{\lambda^4} + \frac{0,08851}{\lambda^6}\Big)\cdot D_w\Big]\cdot 10^{-8},$$

где λ — длина волны света в микрометрах. Коэффициенты D_d и D_w зависят от температуры, давления сухого воздуха P_d и парциального давления водяного пара P_w:

$$D_d = \frac{P_d}{T}\left[1 + P_d\Big(57,90\cdot 10^{-8} - \frac{9,3250\cdot 10^{-4}}{T} + \frac{0,25844}{T^2}\Big)\right],$$

$$D_w = \frac{P_w}{T}\Big[1 + P_w\big(1 + 3,7\cdot 10^{-4}P_w\big)\cdot \Big(-2,37321\cdot 10^{-3} + \frac{2,23366}{T} - \frac{710,792}{T^2} + \frac{7,75141\cdot 10^4}{T^3}\Big)\Big],$$

причем $P_d = (P - P_w)/100$ (в миллибарах). Парциальное давление водяного пара P_w (в миллибарах) может быть найдено по эмпирической формуле:

$$P_w = \nu R_w T e^{\Psi(t)}/100,$$

где ν — относительная влажность воздуха ($0 \le \nu \le 1$), R_w — удельная газовая постоянная водяного пара (5.42),

$$\Psi(t) = -5,32917 + t\Big[0,0688825 + t(-2,9815\cdot 10^{-4} + 1,39\cdot 10^{-6}t)\Big].$$

Функцию $\Phi(x)$ можно вычислить по формулам:

$$
\begin{aligned}
y = {} & ((((((((((((((+3,328130055126039 \cdot 10^{-10}u \\
& - 5,718639670776992 \cdot 10^{-10})u - 4,066088879757269 \cdot 10^{-9})u \\
& + 7,532536116142436 \cdot 10^{-9})u + 3,026547320064576 \cdot 10^{-8})u \\
& - 7,043998994397452 \cdot 10^{-8})u - 1,822565715362025 \cdot 10^{-7})u \\
& + 6.575825478226343 \cdot 10^{-7})u + 7,478317101785790 \cdot 10^{-7})u \\
& - 6,182369348098529 \cdot 10^{-6})u + 3,584014089915968 \cdot 10^{-6})u \\
& + 4,78983822669598 \cdot 710^{-5})u - 1,524627476123466 \cdot 10^{-4})u \\
& - 2,553523453642242 \cdot 10^{-5})u + 1,802962431316418 \cdot 10^{-3})u \\
& - 8,220621168415435 \cdot 10^{-3})u + 2,414322397093253 \cdot 10^{-2},
\end{aligned}
$$

где

$$u = 1 - \frac{7,5}{|x| + 3,75}.$$

Тогда функция $\Phi(x)$ равна:

$$\Phi(x) = \frac{v}{2}\sqrt{\pi},$$

где

$$
\begin{aligned}
v = {} & (((((y \cdot u - 5,480232669380236 \cdot 10^{-2})u \\
& + 1,026043120322792 \cdot 10^{-1})u - 1,635718955239687 \cdot 10^{-1})u \\
& + 2,260080669166197 \cdot 10^{-1})u - 2,734219314954260 \cdot 10^{-1})u \\
& + 1,455897212750385 \cdot 10^{-1}.
\end{aligned}
$$

Результаты вычислений приводятся в таблице 5.1.

5.1.3. Восход и заход светил с учетом рефракции

В момент восхода и захода рефракция традиционно полагается равной $34'$. Следовательно, в момент восхода и захода зенитное расстояние звезды равно, $z = 90^\circ + 34'$. При наблюдениях Солнца или Луны момент восхода или захода относится к верхнему краю, т. е. зенитное расстояние центра Солнца или Луны равно $z = 90^\circ + 34' + R$, где R — видимый радиус диска Солнца (меняется в течение года от $15'45''$ до $16'16''$) или Луны (меняется в течение месяца от $14'45''$ до $16'30''$).

Таблица 5.1. Рефракция ϱ для разных видимых зенитных расстояний ζ при $P = 1013,25$ мбар, $t = 0°C$, $\lambda = 0,575$ мкм и разной относительной влажности воздуха ν.

ζ, градусы	ϱ, сек дуги		
	$\nu = 0,3$	$\nu = 0,6$	$\nu = 0,9$
0	0	0	0
10	10,63	10,62	10,62
20	21,93	21,93	21,92
30	34,79	34,78	34,77
40	50,54	50,52	50,51
50	71,72	71,70	71,68
60	104,05	104,02	104,00
70	164,25	164,21	164,16
80	330,80	330,71	330,62
90	2271,16	2270,48	2269,79

Время восхода или захода небесного тела при учете рефракции вычисляется из уравнения:

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t,$$

при $z = 90°34'$ (для звезд, планет) или $z = 90° + 34' + R$ (для верхнего края Солнца или Луны). Рефракция изменяет время восхода-захода на несколько минут; продолжительность дня, когда Солнце находится над горизонтом, увеличивается приблизительно на 10 минут.

5.1.4. Влияние рефракции на прямое восхождение и склонение звезды

Вычислим влияние рефракции на экваториальные координаты звезды. Для этого рассмотрим параллактический треугольник P_nZS (рис. 5.4), причем будем считать, что S — истинное положение звезды. Зенитное расстояние звезды (дуга $\widehat{ZS}$) равно z. В результате рефракции изображение звезды смещается в точку S' вдоль вертикального круга по направлению к зениту наблюдателя. Проведем через точку S параллель и опустим перпендикуляры из точки S' на па-

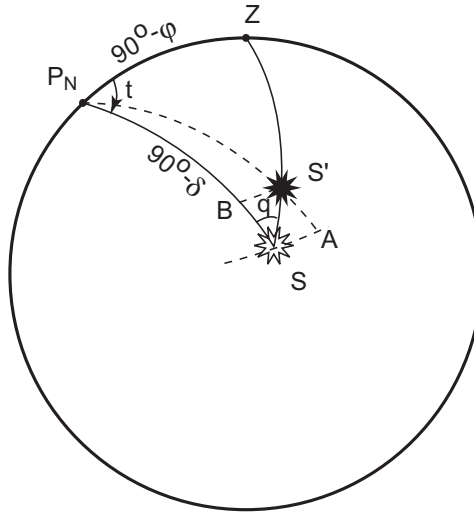


Рис. 5.4. Изменение координат из-за рефракции.

раллель — $S'A$ и на круг склонений — $S'B$. Учитывая, что дуга $\widehat{SS'}$ равна Δz и равна рефракции ρ, а треугольники $S'SB$ и $S'SA$ можно считать плоскими, получим:

$$SB = \Delta\delta = \Delta z \cos q,$$
$$SA = \Delta\alpha \cos\delta = \Delta z \sin q.$$

Значения $\sin q$ и $\cos q$ получим из формул параллактического треугольника:

$$\sin z \sin q = \cos\varphi \sin t,$$
$$\cos z = \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos t,$$
$$\sin z \cos q = \cos\delta \sin\varphi - \sin\delta \cos\varphi \cos t.$$

Тогда

$$\Delta\delta = \frac{\Delta z}{\sin z}(\cos\delta \sin\varphi - \sin\delta \cos\varphi \cos t), \tag{5.11}$$

$$\Delta\alpha \cos\delta = \frac{\Delta z}{\sin z} \cos\varphi \sin t. \tag{5.12}$$

Используя уравнение (5.2): $\rho = \Delta z = (n_0 - 1)\operatorname{tg}\zeta \approx (n_0 - 1)\operatorname{tg} z$, получим окончательные выражения:

$$\Delta\delta = (n_0 - 1)\frac{\cos\delta\sin\varphi - \sin\delta\cos\varphi\cos t}{\sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos t}, \tag{5.13}$$
$$\Delta\alpha\cos\delta = (n_0 - 1)\frac{\cos\varphi\sin t}{\sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos t}.$$

При наблюдениях в меридиане $\sin t = 0$, и изменение координат из-за рефракции равно:

$$\Delta\delta = (n_0 - 1)\operatorname{tg}(\varphi - \delta) = (n_0 - 1)\operatorname{tg} z = \rho,$$
$$\Delta\alpha\cos\delta = 0.$$

Значит при меридианных наблюдениях рефракцию нужно учитывать только при определении склонений звезд.

5.1.5. Рефракция при наблюдениях в радиодиапазоне

Изложенная в предыдущем параграфе теория рефракции применяется при наблюдениях в оптическом диапазоне. Рассмотрим теперь особенности радиорефракции. В отличие от света преломление радиоволн различно при их распространении в ионизованной среде (в космической плазме, ионосфере Земли) или в нейтральной среде (в тропосфере Земли). Поэтому для учета влияния атмосферы на точные позиционные наблюдения в радиодиапазоне необходимо учесть вклад ионосферы и тропосферы в распространение лучей.

Одним из основных методов наблюдений в современной астрометрии является радиоинтерферометрия со сверхдлинными базами (РСДБ). Два радиотелескопа, находящиеся на большом расстоянии друг от друга, одновременно наблюдают радиоисточник на циклической частоте $\omega = 2\pi f$. База (расстояние между телескопами) может равняться нескольким тысячам километров. Поэтому состояние ионосферы и тропосферы в местах размещения телескопов может различаться существенно, и влияние радиорефракции в результате может быть значительным.

Если обозначить один из телескопов первым, а другой — вторым, то вектор $\mathbf{B}$ (рис. 5.5), равный $\mathbf{B} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$, называется вектором базы, где $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$— радиусы-векторы телескопов. Если вектор $\mathbf{B}$ из-

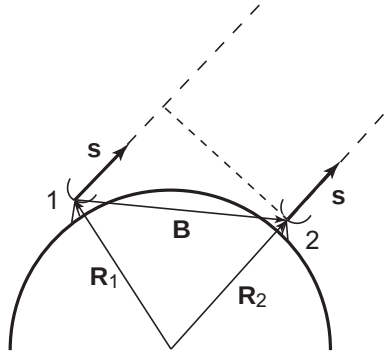


Рис. 5.5. Схема радиоинтерферометра.

вестен точно, а $\mathbf{s}$ — единичный вектор в направлении наблюдаемого источника с известными координатами, то

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{s} = c\tau_g, \tag{5.14}$$

где c — скорость света, τ_g — геометрическая задержка сигнала.

Сигналы, принятые телескопами, записываются на магнитные ленты, которые впоследствии перевозятся в центр обработки, где выполняется корреляционный анализ. В результате обработки лент вычисляется кросскорреляционная функция сигналов[1]. Производная фаза кросскорреляционного сигнала Φ_0 по отношению к циклической частоте ω

$$\tau_{gr} = \frac{d\Phi_0}{d\omega}$$

называется *групповой задержкой* сигнала. Если бы координаты телескопов и источника были известны точно, отсутствовала бы атмосфера, то групповая задержка τ_{gr} точно равнялась бы геометрической задержке τ_g (5.14): $\tau_{gr} = \tau_g$. В действительности уравнение (5.14) имеет вид:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{s} = c(\tau_g + \Delta\tau), \tag{5.15}$$

[1]Для комплексных сигналов $s_1(t)$, $s_2(t)$ кросскорреляционная функция определяется выражением:

$$B(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} s_1(t) s_2^*(t+\tau) dt,$$

где * означает операцию комплексного сопряжения. Корреляционная функция определяет связь между двумя функциями $s_1(t)$, $s_2(t)$ в зависимости от сдвига τ: действительная часть $\mathrm{Re}[B(\tau)]$ равна амплитуде, а мнимая часть $\mathrm{Im}[B(\tau)]$ — фазе.

где поправка $c\Delta\tau$ включает ошибки координат телескопов и источника, ошибки теории прецессии и нутации и т. д., в том числе задержку сигнала в атмосфере $\Delta\tau_{atm}$. Основы теории редукции наблюдений на РСДБ мы рассмотрим более подробно в главе 7.

В данном параграфе изучим влияние рефракции.

Рефракция в радионаблюдениях сводится не только к изменению направления на источник (т. е. направления вектора $\mathbf{s}$), но и к изменению длины пути луча в атмосфере (или, по-другому, к набегу фазы). Дополнительный набег фазы зависит от состояния ионосферы и тропосферы в пунктах 1 и 2, которое определяется временем года и суток, локальными условиями. Отсутствме сведений о количестве свободных электронов на пути волны в ионосфере и содержании водяного пара в нижних слоях атмосферы приводит к погрешностям вычисления задержки $\Delta\tau_{atm}$. Именно эти погрешности ограничивают точность позиционных наблюдений на РСДБ.

Рассмотрим монохроматическую плоскую радиоволну с частотой f и длиной волны λ, распространяющуюся в пространстве в направлении x. Уравнение бегущей в направлении x волны можно записать в виде:

$$u(x,t) = A\cos(\omega t - kx), \tag{5.16}$$

где $\omega = 2\pi f$, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число. Волновое число k — это число волн на единицу длины в пространстве. Оно характеризует колебания в пространстве, тогда как циклическая частота ω — колебания во времени. Фаза волны $\phi(x,t) = \omega t - kx$. Беря полный дифференциал от $\phi(x,t)$ и полагая его равным нулю, легко найти соотношение между координатой x и временем t для точек постоянной фазы:

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial t}dt + \frac{\partial\phi}{\partial x}dx = \omega dt - kdx.$$

Приравнивая $d\phi$ нулю, имеем:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}. \tag{5.17}$$

Так как $\omega = 2\pi f$, $k = 2\pi/\lambda$, получим

$$v_{ph} = v_x = \lambda f. \tag{5.18}$$

Скорость v_{ph} перемещения плоскости постоянной фазы волны ($\varphi = \mathrm{const}$) называется *фазовой скоростью*.

Если направление ξ составляет с x угол α ($\xi = x/\cos\alpha$) (рис. 5.6), скорость перемещения фазы в этом направлении превышает v_x, поскольку $v_\xi = v_x/\cos\alpha$. Фазовая скорость не является векторной величиной в обычном смысле и может превышать скорость распространения света c.

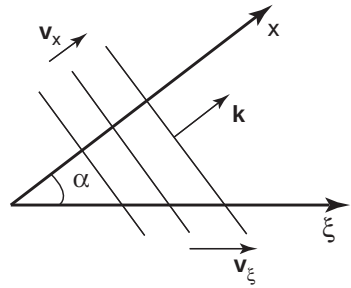


Рис. 5.6. Фазовая скорость волны.

Зависимость фазовой скорости v_{ph} от частоты ω определяет *дисперсию волн*. При наличии дисперсии волны разных частот распространяются с разными фазовыми скоростями.

Рассмотрим теперь набор, или пакет, гармонических волн с частотами в интервале $\omega_0 - \Delta\omega < \omega < \omega_0 + \Delta\omega$. Если среда, через которую распространяются волны, не обладает дисперсией, то все гармонические волны распространяются с одной и той же фазовой скоростью, и пакет волн ведет себя как монохроматическая волна — его групповая скорость равна фазовой. Гармоническая волна постоянной амплитуды и частоты не может нести какую-либо информацию (кроме того, что мы знаем о существовании передатчика, излучающего эту волну). Каждый период волны является точной копией предыдущего периода. Чтобы передать определенную информацию, необходимо волну промодулировать, т. е. изменить какой-либо её параметр — амплитуду, частоту или фазу – в соответствии с передаваемой информацией.

Для простоты рассмотрим волну $u(x,t)$ как суперпозицию (сумму) двух волн одинаковой амплитуды с частотами $\omega_1 = \omega_0 - \Delta\omega$ и $\omega_2 = \omega_0 + \Delta\omega$:

$$u(x,t) = A\cos(\omega_1 t - k_1 x) + A\cos(\omega_2 t - k_2 x).$$

Складывая косинусы, получим:

$$u(x,t) = A_{mod}(x,t)\cos\Big(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t - \frac{k_1+k_2}{2}x\Big),$$

где амплитуда модулированного сигнала

$$A_{mod}(x,t) = 2A\cos\Big(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t - \frac{k_1-k_2}{2}x\Big).$$

Скорость распространения модулированного сигнала $A_{mod}(x,t)$ легко найти из условия постоянства амплитуды (например, сохранения ее максимального значения). Для этого необходимо, чтобы аргумент $(\omega_1-\omega_2)t/2-(k_1-k_2)x/2$ оставался постоянным, т. е.

$$d\Big(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t - \frac{k_1-k_2}{2}x\Big) = 0.$$

Это условие означает, что мы отслеживаем постоянную фазу сигнала. Если условие удовлетворяется, то скорость перемещения модулированного колебания равна:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega_1-\omega_2}{k_1-k_2}.$$

В пределе (при $\omega_1 \to \omega_2$) получим скорость распространения модуляции или *групповую скорость* v_{gr} сигнала:

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = -\lambda^2\frac{df}{d\lambda}. \tag{5.19}$$

Соотношение между фазовой и групповой скоростью получим, вычислив полный дифференциал от (5.18):

$$dv_{ph} = \lambda df + f d\lambda.$$

Деля на $d\lambda$, находим:

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda}\frac{dv_{ph}}{d\lambda} - \frac{1}{\lambda}. \tag{5.20}$$

Подставляя (5.20) в (5.19), получим:

$$v_{gr} = -\lambda\frac{dv_{ph}}{d\lambda} + f\lambda$$

или в окончательном виде:

$$v_{gr} = v_{ph} - \lambda \frac{dv_{ph}}{d\lambda}. \tag{5.21}$$

Это уравнение называется *уравнением Рэлея*.

Если фазовая скорость не зависит от длины волны (то есть среда не является диспергирующей), то

$$v_{gr} = v_{ph}.$$

Для радиоволн, распространяющихся в вакууме, групповая и фазовая скорости равны скорости света

$$c = 299792458 \text{ м/с}.$$

При распространении света через среду с показателем преломления n скорость волны

$$v = \frac{c}{n}.$$

Применяя эту формулу к фазовой и групповой скорости, получим:

$$v_{gr} = \frac{c}{n_{gr}}, \quad v_{ph} = \frac{c}{n_{ph}}. \tag{5.22}$$

n_{gr}, n_{ph} — соответствующие показатели преломления. Дифференцируя по λ фазовую скорость, получим:

$$\frac{dv_{ph}}{d\lambda} = -\frac{c}{n_{ph}^2} \frac{dn_{ph}}{d\lambda}. \tag{5.23}$$

Подставляя (5.22) и (5.23) в (5.21), получим:

$$\frac{c}{n_{gr}} = \frac{c}{n_{ph}} + \lambda \frac{c}{n_{ph}^2} \frac{dn_{ph}}{d\lambda}. \tag{5.24}$$

Преобразуем (5.24) следующим образом:

$$n_{gr} = n_{ph} \left(1 + \lambda \frac{1}{n_{ph}} \frac{dn_{ph}}{d\lambda}\right)^{-1}$$

или, ограничиваясь только линейными членами:

$$n_{gr} \approx n_{ph} \left(1 - \lambda \frac{1}{n_{ph}} \frac{dn_{ph}}{d\lambda}\right) = n_{ph} - \lambda \frac{dn_{ph}}{d\lambda}.$$

Так как $c = \lambda f$ и $d\lambda f + \lambda df = 0$, то

$$n_{gr} = n_{ph} + f\frac{dn_{ph}}{df}. \tag{5.25}$$

Используем полученные уравнения для учета распространения радиоволн через ионосферу Земли. Ионосферу образуют верхние слои земной атмосферы, в которой газы частично ионизованы под влиянием ультрафиолетового и рентгеновского солнечного излучения. Ионосфера является электрически нейтральной плазмой, т. е. она содержит равное количество положительных и отрицательных частиц. Число электронов N_e в кубическом метре (плотность электронов) меняется по высоте сложным образом, достигая максимума на высотах от 250 до 400 км, где N_e равно примерно 10^{12} м$^{-3}$. Распределение плотности электронов зависит от времени суток, времени года, уровня солнечной активности. Величина N_e в одно и то же время от точки к точке ионосферы может меняться на порядок.

От плотности свободных электронов зависит частота колебаний плазмы:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi N_e e^2}{m}},$$

где e и m — заряд и масса электрона. Частота ω_p называется ленгмюровской или плазменной частотой. Для ионосферы она находится в пределах от 3–5 до 10 МГц и равна:

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = 8,978\sqrt{N_e}\ [\text{Гц}].$$

Под действием радиоволны в ионосфере могут возникать как вынужденные колебания электронов и ионов, так и различные виды коллективных собственных колебаний (плазменные колебания). В зависимости от частоты радиоволны ω основную роль играют те или другие из них и поэтому электрические свойства ионосферы различны для разных диапазонов радиоволн. Волны с частотами $\omega \leq \omega_p$ не могут распространяться в ионосфере и отражаются от нее. Волны с частотами $\omega > \omega_p$ проходят через ионосферу, но фазовые скорости сильно зависят от частоты.

Приближенное дисперсионное соотношение для радиоволн в ионосфере можно получить, если воспользоваться определениями показателя преломления (5.22) и волнового числа (5.17). Имеем:

$$n_{ph}^2 = \frac{c^2k^2}{\omega^2}.$$

С другой стороны, показатель преломления $n = \sqrt{\mu\varepsilon}$, где μ — магнитная проницаемость, ε — диэлектрическая постоянная среды. Теория колебания для ионосферы дает следующее выражение для n_{ph} (при $\mu = 1$):

$$n_{ph}^2 = \varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}.$$

Таким образом, для синусоидальной волны в ионосфере дисперсионное соотношение имеет вид:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2, \tag{5.26}$$

где c — скорость волны в вакууме, $k = \omega/v_{ph}$ — волновое число. Значит фазовая скорость v_{ph} в ионосфере

$$v_{ph} = \sqrt{c^2 + \frac{\omega_p^2}{k^2}} \geq c.$$

Дифференцирование (5.26) по k дает:

$$2\omega\frac{d\omega}{dk} = 2kc^2,$$

или

$$\left(\frac{\omega}{k}\right) \cdot \left(\frac{d\omega}{dk}\right) = v_{ph} \cdot v_{gr} = c^2,$$

так как $d\omega/dk = v_{gr}$ (5.19). Следовательно, групповая скорость

$$v_{gr} = c \cdot \frac{c}{v_{ph}} \leq c.$$

Показатель преломления n_{ph} в ионосфере по (5.22) равен:

$$n_{ph} = \frac{c}{v_{ph}} = \left(1 + \frac{\omega_p^2}{c^2k^2}\right)^{-1/2} = \left(1 + \frac{f_p^2}{f^2}\right)^{-1/2}. \tag{5.27}$$

Если $f \gg f_p$, то, разлагая (5.27) в ряд по малому параметру f_p^2/f^2, получим:

$$n_{ph} = 1 + \frac{c_2}{f^2} + \frac{c_3}{f^3} + \frac{c_4}{f^4} + \ldots. \tag{5.28}$$

Коэффициенты c_2, c_3, c_4 не зависят от частоты, но зависят от плотности электронов N_e. Обычно в (5.28) оставляют лишь два члена:

$$n_{ph} = 1 + \frac{c_2}{f^2}, \tag{5.29}$$

причем $c_2 = -f_p^2/2 = -40,3N_e$ [Гц^2]. Дифференцируя (5.29), получим:

$$dn_{ph} = -\frac{2c_2}{f^3}df, \tag{5.30}$$

и, подставляя (5.29) и (5.30) в (5.25), находим:

$$n_{gr} = 1 - \frac{c_2}{f^2}. \tag{5.31}$$

Таким образом, фазовый и групповой показатели преломления отличаются от 1 на одинаковую величину, но разного знака:

$$n_{ph} - 1 = \frac{c_2}{f^2} < 0, \qquad n_{gr} - 1 = -\frac{c_2}{f^2} > 0.$$

Назовем интеграл от показателя преломления n

$$s = \int\limits_{s_1}^{s_2} nds,$$

взятый вдоль траектории между точками ионосферы, радиусы-векторы которых $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$, оптической длиной пути (рис. 5.7); ds — элемент дуги, соединяющей точки A и B.

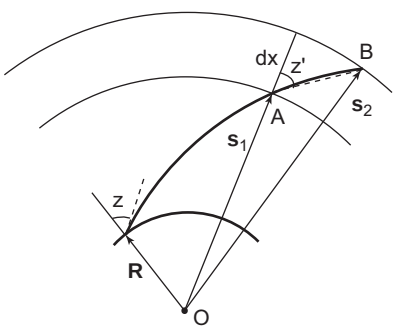


Рис. 5.7. Ионосферная рефракция.

Геометрическое расстояние между концами векторов $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$ равно:

$$|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2| = s_0 = \int\limits_{s_1}^{s_2} ds_0,$$

где ds_0 — элемент прямой линии, соединяющей точки A и B (рис. 5.7).

Определение 5.1.1. *Разность $s - s_0 = \rho^{ion}$ называется задержкой радиосигнала в ионосфере (или ионосферной рефракцией):*

$$\rho^{ion} = s - s_0 = \int\limits_{s_1}^{s_2} n ds - \int\limits_{s_1}^{s_2} ds_0.$$

Для фазовой скорости ионосферная рефракция равна:

$$\rho_{ph}^{ion} = \int\limits_{s_1}^{s_2} \left(1 + \frac{c_2}{f^2}\right) ds - \int\limits_{s_1}^{s_2} ds_0. \tag{5.32}$$

Аналогичное выражение можно написать для групповой скорости:

$$\rho_{gr}^{ion} = \int\limits_{s_1}^{s_2} \left(1 - \frac{c_2}{f^2}\right) ds - \int\limits_{s_1}^{s_2} ds_0. \tag{5.33}$$

Таким образом, задержка монохроматического сигнала в ионосфере отрицательна $\rho_{ph}^{ion} < 0$, так как его фазовая скорость больше скорости света, а задержка пакета гармонических волн — положительна ($\rho_{gr}^{ion} > 0$).

Чтобы упростить выражения (5.32) и (5.33), предполагают, что $ds = ds_0$, то есть интегрирование по кривой заменяют интегрированием по прямой линии, соединяющей точки A и B. В этом случае имеем: $ds_0 = dx/\cos z'$, где dx — приращение высоты, z' — зенитное расстояние источника в точке A (рис. 5.7). Используя эту аппроксимацию, получим, что задержка в ионосфере равна:

$$\rho_{ph}^{ion} = \int\limits_{s_1}^{s_2} \sec z' \frac{c_2}{f^2} dx, \qquad \rho_{gr}^{ion} = -\int\limits_{s_1}^{s_2} \sec z' \frac{c_2}{f^2} dx. \tag{5.34}$$

При наблюдении источника в зените ($z' = 0$) находим

$$\rho_{ph}^{ion} = -\frac{40,3}{f^2}\text{TEC}, \qquad \rho_{gr}^{ion} = \frac{40,3}{f^2}\text{TEC},$$

где

$$\text{TEC} = \int\limits_{s_1}^{s_2} N_e dx \tag{5.35}$$

есть полное содержание электронов (total electron content) в зените. Обычно TEC измеряется в единицах 10^{16} электронов/м^2.

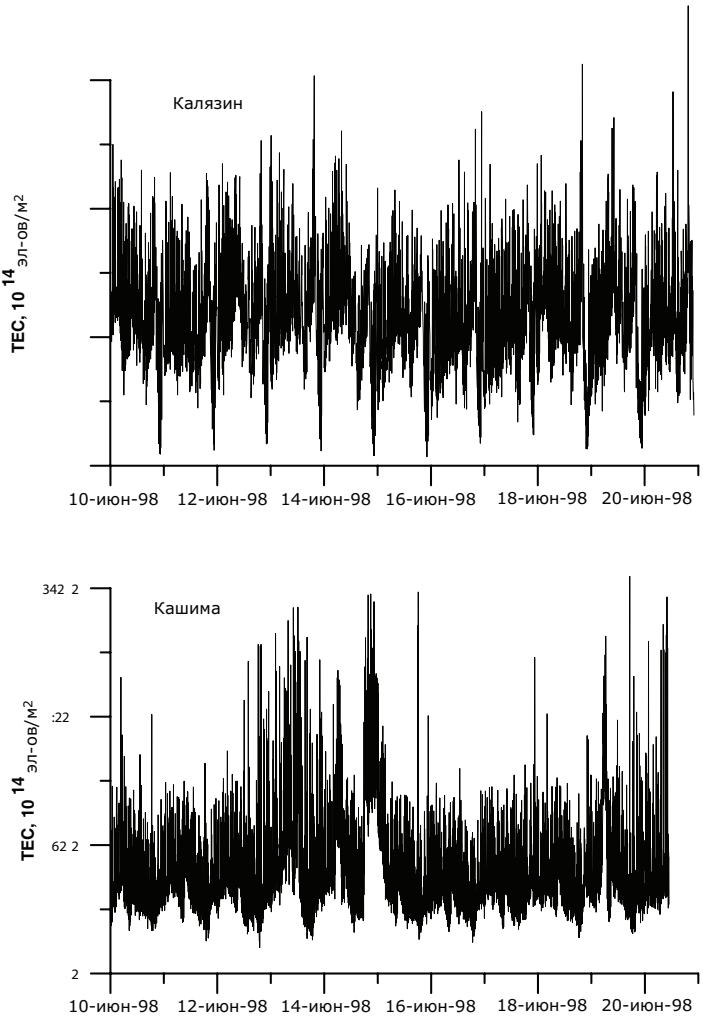


Рис. 5.8. Изменение содержания электронов в ионосфере (с разрешения Ю.П.Илясова).

В качестве примера на рис. 5.8 показано изменение TEC в течение полутора недель. Измерения сделаны в Калязине и Кашиме (Япония) с 10 по 21 июня 1998 г. Хорошо видна суточная периодичность содержания электронов, а также случайные изменения TEC. Средней величине TEC $= 3 \cdot 10^{16}$ эл-в/м^2 на частоте 1,4 ГГц соот-

ветствует задержка сигнала в ионосфере $\Delta\tau_{ion} = \rho_{gr}^{ion}/c = 2,1$ нс, а на частоте 2,2 ГГц — 1 нс. Неучёт поправки $\Delta\tau_{ion}$ в виде синусоиды с периодом в сутки и амплитудой, равной 1 нс, приведет к суточным вариациям координат радиоисточника на величину $\sim 0''\!,01$ при наблюдении на интерферометре с базой 7000 км. Очевидно, что без учета ионосферной задержки высокой точности при наблюдениях на РСДБ достигнуть нельзя.

В случае наблюдений в одном частотном диапазоне ионосферная задержка может быть представлена в виде модели:

$$\rho_{gr}^{ion} \approx \frac{40,3}{f^2}\mathrm{TEC} \cdot \Phi(z). \tag{5.36}$$

Интегрирование в (5.32) и (5.33) проводится по прямой линии. Поэтому, пренебрегая изменением зенитного расстояния z' вдоль траектории луча, т. е. считая, что $z \approx z'$, получим выражение для функции $\Phi(z)$ в виде:

$$\Phi(z) = \frac{\sqrt{R^2\cos^2 z + h_2^2 + 2Rh_2} - \sqrt{R^2\cos^2 z + h_1^2 + 2Rh_1}}{h_2 - h_1}$$

где R — средний радиус Земли, h_1, h_2 — высота нижней и верхней границы ионосферы.

Из рис. 5.8 видно, что кроме регулярных изменений TEC имеются случайные вариации. Они приводят к нерегулярным изменениям задержки τ_{ion}, которые могут достигать ~ 3 нс. Это очень большая величина для РСДБ. Аппроксимация задержки моделью (5.36) позволяет лишь частично учесть эти вариации. Поэтому для исключения ионосферной рефракции применяется особый прием: наблюдения проводятся одновременно на двух частотах, например X и S диапазонов ($f_X = 8,4$ ГГц, $f_S = 2,2$ ГГц). Тогда задержка сигнала в этих диапазонах равна:

$$\tau_x = \tau_0 + \tau_{ion}^x,$$
$$\tau_s = \tau_0 + \tau_{ion}^s,$$

где τ_0 — задержка сигнала, не зависящая от ионосферы. Вычитая из одного уравнения другое, получим:

$$\tau_x - \tau_s = \tau_{ion}^x - \tau_{ion}^s = \frac{b}{f_x^2} - \frac{b}{f_s^2} = \tau_{ion}^x \frac{f_s^2 - f_x^2}{f_s^2}, \tag{5.37}$$

где $b = 40,3\,\text{ТЕС}/c$. Задержки τ_x, τ_s определяются при корреляционной обработке магнитных лент. Тогда ионосферная задержка в X-диапазоне может быть найдена из уравнения:

$$\tau_{ion}^{x} = (\tau_x - \tau_s)\frac{f_s^2}{f_s^2 - f_x^2}. \tag{5.38}$$

Проводя наблюдения на двух далеко разнесенных частотах, можно определить ионосферную задержку с ошибкой менее 10 пкс.

Помимо ионосферы, радиоволна распространяется через межзвездное пространство, которое также является плазмой. Поэтому уравнение (5.37) в общем виде выражает дисперсию радиосигнала при его прохождении от источника до наблюдателя. При рассмотрении теории пульсарного тайминга мы уже встречались с этим явлением (рис. 4.14).

5.1.6. Рефракция и задержка радиосигнала в тропосфере

Влияние нейтральной атмосферы (т. е. неионизованной части атмосферы) на распространение радиоволн приводит к тропосферной рефракции и задержке сигнала. Нейтральная атмосфера является недисперсионной средой для радиоволн с частотой до 15 ГГц, и, следовательно, распространение волн не зависит от частоты, если частота наблюдений ниже 15 ГГц. Рефракция и задержка сигнала в тропосфере определяется составом газов в ней. Основную неопределенность в вычисление этих величин вносит, главным образом, наше незнание количества водяного пара в столбе тропосферы в направлении источника.

Рассмотрим этот вопрос подробно, так как именно ошибка вычисления задержки в тропосфере ограничивает точность современных систем, таких как РСДБ и GPS. Наблюдения на этих системах проводятся в сантиметровом и дециметровом диапазонах и часто на больших зенитных углах. Поэтому подынтегральное выражение в (5.4) путем замены переменной следует преобразовать таким образом, чтобы интеграл был хорошо определен при приближении z к 90°.

По определению оптическая длина пути между точками O и B равна интегралу

$$D = \int_O^B n\,ds,$$

вычисляемому вдоль траектории распространения света, где n — показатель преломления среды на участке ds. Будем считать, что в точке O находится наблюдатель, а в точке B — источник. Пусть $\mathbf{R}_O$ и $\mathbf{R}_B$ — геоцентрические радиусы-векторы, проведенные в точки O и B, соответственно.

Разность оптической длины пути и расстояния между точками O и B по прямой линии равна:

$$\Delta D = D - |\mathbf{R}_O - \mathbf{R}_B|,$$

которую обычно представляют в виде двух слагаемых:

$$\Delta D = \int\limits_O^B (n-1)\,ds + \int\limits_O^B ds - |\mathbf{R}_O - \mathbf{R}_B|.$$

Введем обозначения:

$$\delta D = \int\limits_O^B (n-1)\,ds; \quad \delta l = \int\limits_O^B ds - |\mathbf{R}_O - \mathbf{R}_B|.$$

Значит $\Delta D = \delta D + \delta l$. Величина δD определяется отличием скорости света V в среде от скорости в вакууме c, так как $n = c/V$, а δl — кривизной траектории распространения света. В атмосфере Земли величина δl значительно меньше δD, и далее мы ее учитывать не будем.

Как говорилось выше, V является фазовой скоростью волны, и, поэтому, величину δD часто называют фазовым набегом. В случае немонохроматического света, строго говоря, мы должны использовать групповую скорость и соответствующий ей групповой показатель преломления. Однако тропосфера не вносит дополнительной задержки в групповую скорость сигнала, и, поэтому, мы не будем в этом параграфе делать различия между фазовым и групповым показателями преломления воздуха. Задержка сигнала в тропосфере $\Delta\tau_{tr} = \Delta D/V \approx \delta D/V$.

В подинтегральное выражение (5.4) входит функция dn/n. Так как показатель преломления n вещества согласно формуле Лоренц–Лорентца (если молекулы являются неполярными)

$$\frac{n^2-1}{n^2+2} = \alpha\frac{\rho}{M} \tag{5.39}$$

или формуле Ланжевена–Дебая (для вещества с полярными молекулами)[2] зависит от отношения ρ/M, то нашей задачей является вывод выражения, связывающего n с плотностью составляющих воздух газов. В формуле Лоренц–Лорентца (5.39) ρ — плотность, M — молекулярная масса, α — так называемая молекулярная рефракция.

В основе вычисления фазового набега лежит уравнение состояния влажной атмосферы, находящейся в гидростатическом равновесии. Для его вывода предположим, что воздух состоит из смеси сухих газов (табл. 5.2) и небольшого количества водяного пара.

Таблица 5.2. Состав сухого воздуха у земной поверхности.

Газ	Объемное содержание*, r, %	Молекулярная масса, M, кг/кмоль	Плотность отн-но воздуха
Азот	78,084	28,0134	0,967
Кислород	20,946	31,9988	1,105
Аргон	0,934	39,948	1,379
Углек. газ	0,0314	44,00995	1,529
Неон	$1{,}818\cdot10^{-3}$	20,183	0,095
Гелий	$5{,}239\cdot10^{-4}$	4,0026	0,138
Криптон	$1{,}14\cdot10^{-4}$	83,800	2,868
Водород	$5\cdot10^{-5}$	2,01594	0,070
Ксенон	$8{,}7\cdot10^{-6}$	131,300	4,524
Озон	$10^{-6} \div 10^{-5}$	47,9982	1,624
Сух. воздух	100	28,9645	1,000

* Отношение объема (в %), занимаемое данной газовой составляющей, к общему объему смеси при условии приведения их к одинаковым давлениям и температурам.

[2] В полярных молекулах «центр тяжести» электронного облака не совпадает с «центром тяжести» положительных зарядов ядер атомов, в отличие от неполярных молекул. К последним относятся молекулы простых веществ (H_2, N_2) и др. Молекулы сложных веществ могут быть как полярными, так и неполярными. В частности, молекулы CO_2 — неполярны, а воды (H_2O) — полярны.

Состояние каждого из атмосферных газов зависит от трех параметров: температуры T, давления p и плотности ρ. Для идеального газа эти величины связаны уравнением состояния:

$$p = \frac{\rho RT}{M}, \tag{5.40}$$

где R — универсальная газовая постоянная, M — молекулярная масса. Численное значение $R = 8314,41(26)$ Дж/(кмоль · К).

В атмосфере Земли основные газы, входящие в состав воздуха, ведут себя практически как идеальные газы. Поэтому уравнение состояния какого-либо газа имеет вид (5.40):

$$p_i = \frac{\rho_i RT}{M_i}. \tag{5.41}$$

Для водяного пара уравнение (5.40), строго говоря, неприменимо, так как удельная газовая постоянная $R_w = R/M_w$ пара зависит от температуры и его парциального давления. Однако для интервала температур от 0 до 40°C свойства водяного пара близки к свойствам идеального газа. Принятое значение молекулярной массы водяного пара равно $M_w = 18,0152$ кг/кмоль. Тогда уравнение Клапейрона для пара имеет вид:

$$p_w v_w = R_w T, \tag{5.42}$$

где p_w — парциальное давление пара, v_w — его удельный объем. Если в удельном объеме влажного воздуха v содержится m кг водяного пара и $(1-m)$ кг сухого воздуха, то $v_w = v/m$. Удельный объем сухого воздуха равен $v_d = v/(1-m)$. Напомним, что удельный объем — это объем газа, приходящийся на единицу массы.

По закону Дальтона общее давление смеси газов равно сумме парциальных давлений. Поэтому

$$p = p_d + p_w, \tag{5.43}$$

где индексы d, w обозначают сухую и влажную составляющие воздуха. Так как давление сухого воздуха $p_d = p - p_w$, то имеем:

$$p_d v_d = R_d T, \tag{5.44}$$

где $R_d = R/M_d$, $M_d = 28,9645$ кг/кмоль. Складывая (5.42) и (5.44), получим уравнение состояния влажного воздуха:

$$pv = R_d T \left[1 + m\Big(\frac{M_d}{M_w} - 1\Big)\right],$$

которое, учитывая что $v = 1/\rho, v_w = 1/\rho_w$, перепишем в виде:

$$p = \frac{\rho R T_v}{M_d}, \tag{5.45}$$

где T_v — так называемая виртуальная температура:

$$T_v = \left[1 + \frac{\rho_w}{\rho}\left(\frac{M_d}{M_w} - 1\right)\right] T. \tag{5.46}$$

Из формулы (5.43) и уравнения состояния (5.41) выразим плотность влажного воздуха через плотность его составляющих:

$$\frac{\rho}{M} = \frac{\rho_d}{M_d} + \frac{\rho_w}{M_w}. \tag{5.47}$$

Содержание водяного пара в атмосфере характеризуется очень большой изменчивостью (рис. 5.9). На рисунке показано количество осажденной влаги у поверхности Земли для января и июля; оно близко к нулю в высоких широтах и может достигать 60 кг/м^2 (или 4% по объему) в экваториальной зоне. Количество водяного пара очень быстро уменьшается с высотой. В слое воздуха от 0 до 2 км содержится около 55% всего его количества, в нижней тропосфере (в слое 0–5 км) — уже 90%. В верхней тропосфере (от 5 до 11 км) водяного пара менее 10%, а в стратосфере его количество составляет десятые или даже сотые доли процента. Это обстоятельство мы используем в дальнейшем: при расчете вклада водяного пара в задержку радиосигнала мы будем полагать, что воздух, начиная с высоты тропопаузы, равной 11 км, состоит из смеси только сухих газов.

Получим теперь дифференциальное уравнение для влажной атмосферы, находящейся в гидростатическом равновесии. Это предположение означает выполнение условия:

$$dp = -g\rho dh. \tag{5.48}$$

Изменение давления dp происходит не только из-за изменения высоты dh, но и из-за зависимости ускорения силы тяжести g от высоты. Чтобы упростить уравнение (5.48) и исключить зависимость dp от g, вводят так называемую шкалу динамических или геопотенциальных высот y согласно уравнению:

$$gdh = g_0 dy,$$

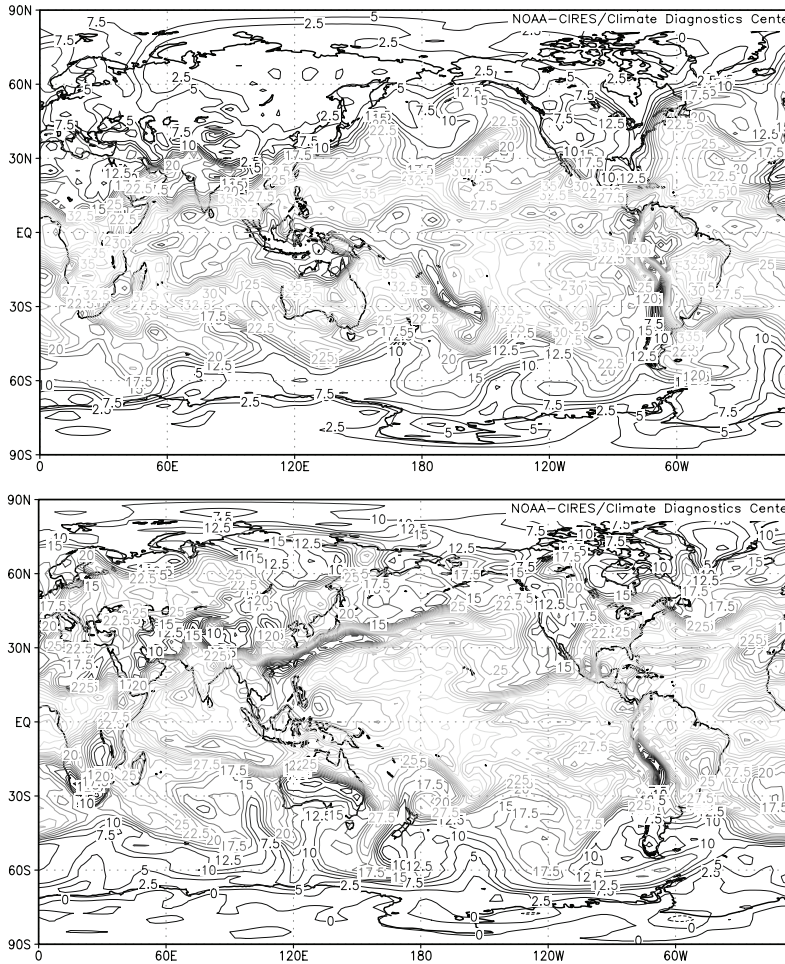


Рис. 5.9. Интегральное влагосодержание атмосферы (в кг/м^2) у поверхности Земли: вверху — в январе, внизу — в июле.

где g_0 — ускорение силы тяжести при $y = 0$. Пусть поверхность $y = 0$ имеет радиус S_0. Тогда из закона притяжения Ньютона следует, что

$$g_0 S_0^2 = gS^2,$$

где g — ускорение силы тяжести на поверхности с радиусом S. Сле-

довательно, уравнение, связывающее динамические и геометрические высоты, имеет вид:

$$dy = \frac{S_0^2}{S^2}dh \quad \text{или} \quad dy = \frac{S_0^2}{(S_0+h)^2}dh, \tag{5.49}$$

причем высоты h отсчитываются вдоль радиусов и, следовательно, $dh = dS$. Это значит, что здесь мы предполагаем, что гравитационное поле Земли является сферически симметричным. Интегрируя, получим следующую формулу:

$$y = S_0^2\left(-\frac{1}{S} + \frac{1}{S_0}\right) = \frac{S_0 h}{S_0 + h}.$$

При интегрировании мы предположили, что динамической высоте $y = 0$ соответствует геометрическая высота $h = 0$, а динамической высоте y — геометрическая высота h. Перепишем последнее выражение следующим образом:

$$\frac{S_0}{S} = 1 - \frac{y}{S_0} \tag{5.50}$$

и подставим в (5.49):

$$dh = \left(1 - \frac{y}{S_0}\right)^{-2} dy. \tag{5.51}$$

В шкале динамических высот условие гидростатического равновесия (5.48) принимает вид:

$$dp = -g_0 \rho dy. \tag{5.52}$$

Выражая теперь плотность влажного воздуха из уравнения (5.45) и подставляя в (5.52), получим:

$$\frac{dp}{p} = -g_0 \frac{M_d}{RT_v} dy.$$

Найдем логарифмическую производную от (5.45):

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT_v}{T_v},$$

и из последних двух выражений получим:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{1}{T_v}\left(dT_v + g_0 \frac{M_d}{R} dy\right) = 0. \tag{5.53}$$

Исключим из (5.53) виртуальную температуру T_v. Для этого вычислим логарифмическую производную от (5.46):

$$\frac{dT_v}{T_v} = \frac{T}{T_v}\Big(\frac{M_d}{M_w} - 1\Big)\frac{\rho_w}{\rho}\Big(\frac{d\rho_w}{\rho_w} - \frac{d\rho}{\rho}\Big) + \frac{dT}{T}.$$

После несложных преобразований получим:

$$dT_v - dT = (T_v - T)\Big(\frac{d\rho_w}{\rho_w} - \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T}\Big)$$

или

$$T_v\frac{d\rho}{\rho} + dT_v = T\frac{d\rho}{\rho} + dT + \left(\frac{M_d}{M_w} - 1\right)\left(\frac{dT}{T} + \frac{d\rho_w}{\rho_w}\right)\frac{\rho_w}{\rho}T,$$

которое и подставим в (5.53). В результате получим уравнение состояния для влажной атмосферы, находящейся в гидростатическом равновесии:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{1}{T}\left(dT + \frac{g_0 M_d}{R}dy\right) + \left(\frac{M_d}{M_w} - 1\right)\left(\frac{dT}{T} + \frac{d\rho_w}{\rho_w}\right)\frac{\rho_w}{\rho} = 0. \quad (5.54)$$

Теперь нужно выразить показатель преломления влажного воздуха n через плотность ρ. Из формулы (5.39) следует, что показатель преломления n в общем виде может быть представлен как:

$$(n-1)\times 10^6 = N = K_1\frac{p_d}{T} + K_2\frac{p_w}{T} + K_3\frac{p_w}{T^2} + K_4\frac{p_c}{T},$$

где K_1, K_2, K_3, K_4 — постоянные, p_c — парциальное давление CO_2. Обычно последним членом пренебрегают, так как его вклад составляет $\sim 0,03\%$, тогда как точность коэффициентов равна $0,5\%$. Сами коэффициенты определяются из лабораторных измерений диэлектрической проницаемости воздуха в оптическом и радиодиапазоне.

Перепишем последнюю формулу в виде:

$$n - 1 = \beta_d\rho_d + \beta_w\rho_w, \quad (5.55)$$

где

$$\beta_d = K_1 R_d \cdot 10^{-6}, \quad \beta_w = \Big(K_2 + K_3\frac{1}{T}\Big)R_w \cdot 10^{-6}.$$

Для радиоволн значения коэффициентов (по данным Тэйера):

$$K_1 = 77,60 \pm 0,014 \text{ К/мбар},$$
$$K_2 = 64,80 \pm 0,08 \text{ К/мбар},$$
$$K_3 = (3,776 \pm 0,004)\times 10^5 \text{ К}^2/\text{мбар}.$$

По данным других авторов $K_2 = 71 \div 72$, $K_3 = (3,75 \pm 0,03) \times 10^5$. Тогда

$$\beta_d = 2,2275 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{кг},$$
$$\beta_w = 2,9907 \cdot 10^{-4} + 1,7427 \times T^{-1} \text{ м}^3/\text{кг}.$$

Напомним, что фазовый набег в атмосфере равен:

$$\delta D = \int\limits_O^B (n-1)\, ds. \tag{5.56}$$

В сферически симметричной атмосфере: $ds = \sec z\, dh$, где z — зенитное расстояние. Тогда

$$\delta D = \int\limits_{|\mathbf{R}_O|}^{|\mathbf{R}_B|} (n-1) \sec\theta\, dh = \int\limits_{|\mathbf{R}_O|}^{|\mathbf{R}_B|} (\beta_d \rho_d + \beta_w \rho_w) \sec z\, dh =$$
$$= \beta_d \int\limits_{|\mathbf{R}_O|}^{|\mathbf{R}_B|} \rho_d\, dh + \beta_d \int\limits_{|\mathbf{R}_O|}^{|\mathbf{R}_B|} \rho_d (\sec z - 1)\, dh +$$
$$+ \int\limits_{|\mathbf{R}_O|}^{|\mathbf{R}_B|} \beta_w \rho_w\, dh + \int\limits_{|\mathbf{R}_O|}^{|\mathbf{R}_B|} \beta_w \rho_w (\sec z - 1)\, dh.$$

Первый и третий интегралы есть не что иное, как фазовый набег сигнала в зените; обозначим эти интегралы как Z_d и Z_w, а второй и четвертый — как L_d и L_w. Тогда полный набег δD может быть записан в виде:

$$\delta D = Z_d F_d(z) + Z_w F_w(z), \tag{5.57}$$

где $F_d(z)$ и $F_w(z)$ — так называемые картирующие функции. В нашем случае они равны:

$$F_d(z) = 1 + \frac{L_d(z)}{Z_d}, \quad F_w(z) = 1 + \frac{L_w(z)}{Z_w}.$$

Очевидно, что в зените (при $z = 0°$) $F_d = 1$ и $F_w = 1$, а $L_d = L_w = 0$.

В настоящее время при обработке РСДБ и GPS наблюдений используются различные картирующие функции. Они зависят от мно-

жества параметров: давления, плотности, влажности воздуха, широты и высоты антенны и т. д. и обычно представляются в виде:

$$F_{d,w}(z) = \frac{1}{\cos z + \dfrac{A_{d,w}}{\operatorname{ctg} z + B_{d,w}}},$$

где $A_{d,w}, B_{d,w}$ — коэффициенты для учета сухой (d) и влажной (w) компонент воздуха. Очевидно, что при $z = 0^\circ$ $F_{d,w}(0) = 1$. Как показывают наблюдения РСДБ и GPS, ни одна из используемых функций не дает необходимой точности для вычисления задержки ($\sim$ 1 пкс). Поэтому часто «влажная» задержка является одним из неизвестных параметров и оценивается из наблюдений.

Для достижения высокой точности наблюдений используются СВЧ-радиометры, измеряющие содержание водяного пара вдоль пути распространения радиоволны по яркостной температуре неба на частоте 22,235 ГГц[3]. Несмотря на то, что СВЧ-радиометры достаточно дорогие приборы, сейчас они устанавливаются не только рядом с радиотелескопами, но и рядом с GPS антеннами[4]. В качестве примера на рис. 5.10 показано изменение «сухого» и «влажного» набега в зените за 21 и 22 октября 2004 г. в Брюсселе. Задержка радиосигнала в сухой атмосфере может достигать $\sim 7,7$ нс (в линейной мере $2,3 \div 2,4$ м); наличие водяного пара в атмосфере приводит к задержке равной $0,5 \div 0,8$ нс (или фазовому набегу $0,15 \div 0,25$ м).

Вычислим сначала фазовый набег в зените. Имеем:

$$Z_d = \beta_d \int\limits_{|\mathbf{R}_O|}^{|\mathbf{R}_B|} \rho_d \, dh, \quad Z_w = \int\limits_{|\mathbf{R}_O|}^{|\mathbf{R}_B|} \beta_w \rho_w \, dh.$$

По определению, молекулярная масса газа, состоящего из нескольких компонент, равна сумме произведений молекулярных масс M_i на объемное содержание r_i всех компонент. В частности, для сухого воздуха (по данным из таблицы 5.2) находим, что

$$M_d = \sum_{i=1}^{10} M_i r_i, \quad \text{причем} \sum_{i=1}^{10} r_i = 1.$$

[3]Частота 22,235 ГГц (длина волны примерно 1,35 см) соответствует частоте излучения в одной из спектральных линий молекулы воды H_2O.

[4]См., например, сайт Королевской обсерватории Бельгии (Брюссель): http://gpsatm.oma.be/Tropospheric-Products/

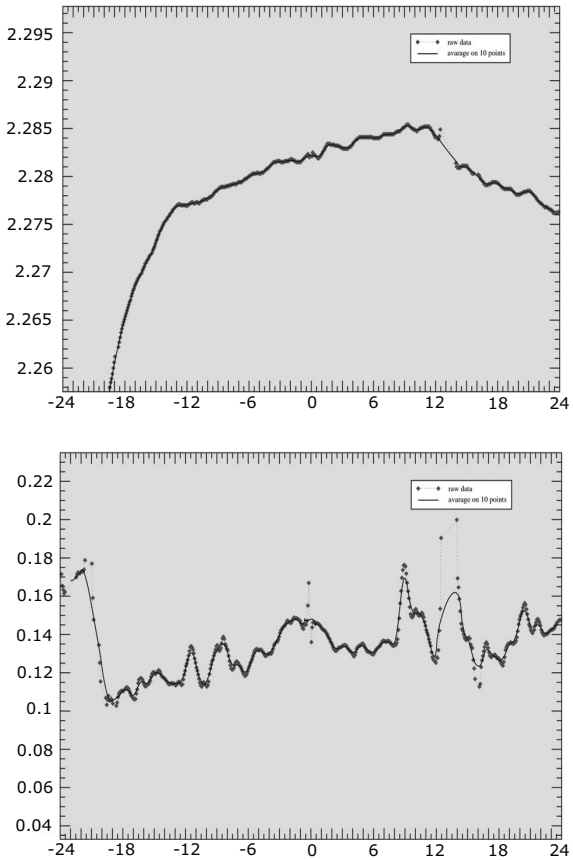


Рис. 5.10. Изменение «сухого» (а) и «влажного» (б) фазового набега в зените за 21 и 22 октября 2004 г. (Брюссель). Нулю часов на оси абсцисс соответствует 0^{h} 22.10.2004 г.

При добавлении к смеси сухих газов водяного пара с парциальным давлением p_w объемное содержание компонент изменится таким образом, что

$$M = \sum_{i=1}^{10} M_i r'_i + M_w r'_w, \quad \text{причем} \sum_{i=1}^{10} r'_i + r'_w = 1.$$

Очевидно, что

$$r'_i = \frac{r_i}{1 + r_w}, \quad r'_w = \frac{r_w}{1 + r_w}.$$

По определению, объемное отношение смеси сухого воздуха и водяного пара — это отношение числа молей водяного пара к числу молей сухого воздуха, с которым водяной пар перемешан. Значит

$$r_w = \frac{p_w}{p - p_w} = \frac{p_w}{p_d}. \tag{5.58}$$

Таким образом, молекулярная масса влажного воздуха

$$M = \frac{M_d p_d + M_w p_w}{p}, \tag{5.59}$$

и из закона состояния (5.40) получим выражение:

$$\rho = \rho_d + \rho_w, \tag{5.60}$$

которое является аналогом (5.47), но проще его.

Используя (5.60), получим:

$$Z_d + Z_w = \beta_d \int\limits_{|\mathbf{R}_O|}^{|\mathbf{R}_B|} \rho\, dh + \int\limits_{|\mathbf{R}_O|}^{|\mathbf{R}_B|} (\beta_w - \beta_d)\rho_w\, dh = Z'_d + Z'_w. \tag{5.61}$$

Для вычисления интегралов предположим, что атмосфера состоит из двух слоев: тропосферы, в которой температура линейно уменьшается до тропопаузы, и изотермической стратосферы. Относительная влажность в тропосфере постоянна и равна ν, т. е. влажности в месте наблюдения, а в стратосфере водяного пара нет.

В соответствии со стандартной атмосферой[5] температурный градиент в тропосфере равен

$$\frac{dT}{dy_s} = \alpha_s = -6,5\text{К/км},$$

динамическая высота тропопаузы y_T равна 11 км, причем шкала высот относится к силе тяжести g_s на уровне моря. Температура на

[5]Стандартная атмосфера — это модели изменения температуры, давления, плотности и других характеристик воздуха с высотой, хорошо описывающие среднее статическое состояние атмосферы. Вертикальные профили этих трех величин получены на основе уравнений статики атмосферы и состояния идеального газа. Поэтому для их вычисления достаточно задать вертикальное распределение температуры и давление воздуха на уровне моря.

уровне моря и на границе тропопаузы (при $y_T = 11$ км) равны, соответственно: $T_s = 288,15$К и $T_T = 216,65$К.

Используя простую двухслойную модель атмосферы, выражение (5.61) перепишем следующим образом:

$$Z'_d + Z'_w = \left[\beta_d \int\limits_{|\mathbf{R}_O|}^{|\mathbf{R}_B|} \rho \, dh \right] + \left[\int\limits_{|\mathbf{R}_O|}^{|\mathbf{R}_T|} (\beta_w - \beta_d) \rho_w \, dh \right], \qquad (5.62)$$

где $|\mathbf{R}_T|$ — расстояние до границы тропопаузы от центра Земли. Выше, как мы считаем, водяного пара нет, т. е. $p_w = 0$.

Переходя от геометрических высот dh к динамическим dy согласно выражению (5.49), а затем к давлению по формуле (5.52), получим, используя соотношение $dh = -(S/S_0)^2 dp/(g_0 \rho)$:

$$Z'_d = -\frac{\beta_d}{g_0 S_0^2} \int\limits_{p_0}^{p_B} S^2 \, dp. \qquad (5.63)$$

где g_0 — ускорение силы тяжести, которое может быть найдено по формуле (3.26), p_0 — полное давление воздуха в точке O, S_0 — геоцентрическое расстояние точки O, от которой отсчитываются динамические высоты y. Так как мы считаем, что источник B находится вне атмосферы, то верхний предел в интеграле равен нулю ($p_B = 0$).

Интегрируя по частям (5.63), получим:

$$\frac{\beta_d}{g_0 S_0^2} \int\limits_0^{p_0} S^2 \, dp = \frac{\beta_d}{g_0 S_0^2} \left[S_0^2 p_0 - 2 \int\limits_{|\mathbf{R}_B|}^{|\mathbf{R}_O|} S p \, dS \right] = \frac{\beta_d p_0}{g_0} \left[1 + 2 I_1 \right],$$

$$I_1 = \frac{1}{S_0^2} \int\limits_{|\mathbf{R}_O|}^{|\mathbf{R}_B|} \frac{p}{p_0} S \, dS.$$

Для вычисления I_1 требуется знать закон изменения давления с высотой. При использовании модели двухслойной атмосферы в шкале высот, отсчитываемой от точки O, имеем:

$$T = T_0 + \alpha y, \quad 0 \le y \le y'_T$$
$$T = T_T = 216,65^\circ K, \quad y \ge y'_T,$$

где $\alpha = (g_0/g_s)\alpha_s$.

Высота границы тропопаузы $y'_T = (y_T - y_{sO})g_s/g_0$, y_{sO} — динамическая высота точки O над эллипсоидом. Решением уравнения

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g_0 M}{RT} dy$$

будут функции:

$$p = p_0 \left(\frac{T_0 + \alpha y}{T_0} \right)^{-\beta} \qquad (0 \le y \le y'_T),$$
$$p = p_T e^{-\frac{g_0 M}{RT_T}(y - y'_T)} \quad (y \ge y'_T),$$

где p_T — давление на границе тропопаузы,

$$p_T = p_0 \left(\frac{T_T}{T_0} \right)^{-\beta}, \quad \beta = \frac{g_0 M}{R\alpha} = \frac{g_s M}{R\alpha_s},$$

В результате для модели двухслойной атмосферы получим:

$$I_1 = \frac{1}{p_0 S_0^2} \int\limits_{|\mathbf{R}_O|}^{|\mathbf{R}_B|} pS\, dS = \frac{1}{p_0 S_0} \int\limits_0^{y_B} p \left(1 - \frac{y}{S_0} \right)^{-3} dy =$$
$$= \frac{1}{S_0} \int\limits_0^{y'_T} \left(\frac{T_0 + \alpha y}{T_0} \right)^{-\beta} \left(1 - \frac{y}{S_0} \right)^{-3} dy +$$
$$+ \frac{1}{p_0 S_0} \int\limits_{y'_T}^{y'_B} p_T e^{-\frac{g_0 M}{RT_T}(y - y'_T)} \left(1 - \frac{y}{S_0} \right)^{-3} dy.$$

Интегралы легко вычислить, используя систему аналитических вычислений MAPLE. Первый интеграл может быть представлен в виде ряда:

$$\frac{y'_T}{S_0} + \frac{1}{S_0} \left(\frac{3}{2} \frac{1}{S_0} - \frac{1}{2} \frac{\beta\alpha}{T_0} \right) (y'_T)^2 \approx$$
$$0,0017246 - 0,1568 \times 10^{-6} h + 49,7790 \frac{\alpha}{T_0}.$$

Здесь мы предположили, что $y'_T \approx y_T - h$, $S_0 = 6378140$ м. При вычислении M использовалась формула (5.59), в которой мы положили $p_d = 1000$ мбар, $p_w = 13$ мбар, и, значит, $M = 28,8213$. Второй интеграл при этих предположениях равен $0,0002266$.

В результате имеем:

$$Z'_d = \frac{0,022275 p_0}{g_0}\left[1,003902 - 0,3136 \times 10^{-6} h + 99,558 \frac{\alpha}{T_0}\right], \quad (5.64)$$

где g_0 — ускорение силы тяжести (3.26) (в м/с^2), p_0 — давление в миллибарах в точке O, h — высота точки O над эллипсоидом в метрах. Величина фазового набега в зените Z'_d находится в метрах.

Если требуется бо́льшая точность, то первый интеграл в (5.62) может быть оценен численно. Для этого плотность влажного воздуха в точке наблюдения находится из решения уравнения (5.54).

Количество водяного пара может определяться с помощью различных характеристик влажности воздуха. В частности, часто используемая величина — относительная влажность (в %) — по определению равна отношению парциального давления водяного пара p_w к давлению насыщенного при данной температуре пара E:

$$\nu = \frac{p_w}{E} \cdot 100\%. \quad (5.65)$$

Для расчета E в справочнике «Атмосфера» рекомендуется использовать формулу:

$$E = a \cdot 10^{bt/(c+t)}.$$

Тогда парциальное давление водяного пара может быть вычислено по формуле:

$$p_w = A \cdot e^{F(T)}, \quad (5.66)$$

где

$$F(T) = \frac{B(T - 273^\circ\!,16)}{C + (T - 273^\circ\!,16)},$$

$$A = 610,2900 \cdot \frac{\nu\%}{100}; \quad B = 17,6998; \quad C = 243^\circ\!,7864.$$

Коэффициенты A, B, C найдены по данным таблицы 5.1.1 из справочника «Атмосфера».

Зная парциальное давление водяного пара, можно найти его плотность:

$$\rho_w = \frac{p_w M_w}{RT}. \quad (5.67)$$

Для вычисления ρ перепишем уравнение (5.54), используя (5.67) и соотношения:

$$dp_w = p_w dF(T),$$
$$d\rho_w = \rho_w \left(dF(T) - \frac{dT}{T} \right).$$

Значит

$$\frac{d\rho}{\rho} - \mu \frac{dT}{T} = \left(\frac{M_d}{M_w} - 1 \right) \frac{d\rho_w}{\rho} dF(T),$$

где $T = T_0 + \alpha y$, $\mu = -1 - \frac{g_0 M_d}{R\alpha}$, или

$$\frac{d\rho}{dT} - \mu\rho \frac{1}{T} = -\left(\frac{M_d}{M_w} - 1 \right) \frac{dF(T)}{dT} \rho_w. \tag{5.68}$$

Это уравнение легко решается по методу Лагранжа; решение имеет вид:

$$\rho(y) = \rho_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\mu} -$$
$$- \alpha \left(\frac{M_d}{M_w} - 1 \right) \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\mu} \int\limits_0^y \frac{dF(T)}{dT} \rho_w \left(\frac{T}{T_0} \right)^{-\mu} dy. \tag{5.69}$$

Плотность влажного воздуха в точке наблюдения находится из закона состояния:

$$\rho_0 = \frac{M_d p_0 + (M_w - M_d)(p_w)_0}{RT_0},$$

а $(p_w)_0$ по формуле (5.66) при $T = T_0$.

Значение второй скобки в выражении (5.62), которую запишем в виде:

$$Z'_w = \int\limits_0^{y'_T} (\beta_w - \beta_d) \rho_w \left(1 - \frac{y}{S_0} \right)^{-2} dy, \tag{5.70}$$

может быть оценено численно на основе (5.67).

На этом вычисление тропосферной задержки в направлении зенита заканчивается.

Для обхода особенности при $z = 90°$ используем следующий прием. Полная задержка в тропосфере

$$\delta D = Z_d + L_d + Z_w + L_w = Z'_d + L'_d + Z'_w + L'_w,$$

где

$$L'_d + L'_w = \left[\beta_d \int\limits_{|\mathbf{R}_O|}^{|\mathbf{R}_B|} \rho(\sec z - 1)\, dh\right] + \left[\int\limits_{|\mathbf{R}_O|}^{|\mathbf{R}_T|} (\beta_w - \beta_d)\rho_w(\sec z - 1)\, dh\right].$$

Покажем, что

$$dh = -\left(1 + \frac{d\ln n}{d\ln S}\right)^{-1} S\,\mathrm{ctg} z.$$

Для сферически симметричной атмосферы имеется инвариант (5.5), который запишем в виде:

$$Sn\sin z = \mathrm{const} \tag{5.71}$$

и в дифференциальной форме:

$$dSn\sin z + Sdn\sin z + Sn\cos z\, dz = 0.$$

Деля на $Sn\sin z$, получим:

$$d\ln S + d\ln n + \mathrm{ctg} z\, dz = 0.$$

Поделив теперь на $d\ln S$, найдем:

$$\frac{d\ln n}{d\ln S} = -\left(1 + \frac{\mathrm{ctg} z\, dz}{d\ln S}\right)$$

или

$$1 + \frac{d\ln n}{d\ln S} = -\frac{\mathrm{ctg} z\, dz}{d\ln S} \text{ и } d\ln S = -\frac{\mathrm{ctg} z\, dz}{1 + \frac{d\ln n}{d\ln S}}.$$

Отсюда

$$\frac{dS}{dz} = -S\left(1 + \frac{d\ln n}{d\ln S}\right)^{-1} \mathrm{ctg} z. \tag{5.72}$$

Так как $dh = dS$ и $\sec z - 1 = (1 - \cos z)/\sin z$, сделаем следующую замену переменной:

$$(\sec z - 1)dh = -S\left(1 + \frac{d\ln n}{d\ln S}\right)^{-1} \mathrm{tg}\,\frac{z}{2}\, dz$$
$$= 2S\left(1 + \frac{d\ln n}{d\ln S}\right)^{-1} d\ln\cos\frac{z}{2}$$

и найдем, что

$$L'_d = 2\int_{\ln\cos z_0/2}^{\ln\cos z_1/2} \beta_d\rho\cdot S\frac{1}{1+\frac{d\ln n}{d\ln S}}d\ln\cos\frac{z}{2}, \tag{5.73}$$

$$L'_w = 2\int_{\ln\cos z_0/2}^{\ln\cos z_1/2} (\beta_w-\beta_d)\rho_w\cdot S\frac{1}{1+\frac{d\ln n}{d\ln S}}d\ln\cos\frac{z}{2}, \tag{5.74}$$

z_0, z_1 — зенитное расстояние источника в точке O и на границе атмосферы.

Отношение $d\ln n/d\ln S$ можно преобразовать. Имеем:

$$d\ln n = -(d\ln S + \mathrm{ctg}z\,dz) = -\left(\frac{-1}{1+\frac{d\ln n}{d\ln S}}+1\right)\mathrm{ctg}z\,dz$$

или

$$d\ln n = -\frac{d\ln n}{d\ln S}\left(1+\frac{d\ln n}{d\ln S}\right)^{-1}\mathrm{ctg}z\,dz. \tag{5.75}$$

Так как

$$d\ln n = \frac{dn}{n} = \frac{dn}{dT}\frac{dT}{dy}\frac{dy}{n},$$

и $d\ln S = dS/S$, то

$$\frac{dy}{dS} = \frac{S_0^2}{S^2}, \quad \frac{dy}{dS}S = \frac{S_0^2}{S} = S_0 - y$$

или

$$\frac{dy}{d\ln S} = S_0 - y.$$

Отсюда находим, что

$$\frac{d\ln n}{d\ln S} = \frac{\alpha}{n}(S_0-y)\frac{dn}{dT}. \tag{5.76}$$

Так как $dn = \beta_d d\rho + (\beta_w-\beta_d)d\rho_w + \rho_w d\beta_w$, то исключая $d\rho$ в (5.68), получим:

$$\frac{dn}{dT} = \frac{\mu}{T}(n-1)$$
$$-\left\{\frac{\mu+1}{T}(\beta_w-\beta_d) + \left(\frac{M_d}{M_w}\beta_d - \beta_w\right)\frac{dF}{dT} - \frac{d\beta_w}{dT}\right\}\rho_w, \tag{5.77}$$

где $n-1 = \beta_d\rho + (\beta_w-\beta_d)\rho_w$, и плотность ρ находится по формуле (5.69).

Над тропосферой, где $\rho_w = 0$:

$$d \ln n = \frac{n-1}{n} \frac{d\rho}{\rho}.$$

Для изотермической стратосферы из (5.53) при $dT = 0$ и $T_v = T_T$ найдем:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{g_0 M_d}{RT_T} dy$$

и, следовательно,

$$\frac{d \ln n}{d \ln S} = -\frac{n-1}{n} \frac{g_0 M_d}{RT_T} (S_0 - y).$$

Для атмосферы выполняется соотношение: $\frac{d \ln n}{d \ln S} \gg -1$, следовательно, подынтегральные выражения в (5.73-5.74) определены при всех зенитных расстояниях.

Ошибка вычислений по формулам (5.73) и (5.74) равна $1,5 \div 2$ см. Обычно эту ошибку относят к «влажной» задержке, так как мы не знаем распределение водяного пара вдоль пути распространения радиоволны. Поэтому часто «влажная» задержка включается в число неизвестных параметров и оценивается из наблюдений.

Используя полученные выше выражения, легко преобразовать интеграл рефракции, чтобы исключить особенность при $z = 90°$. Перепишем интеграл (5.4) следующим образом:

$$\varrho = \int_1^{n_0} \operatorname{tg} z \frac{dn}{n} = \int_0^{d \ln n_0} \operatorname{tg} z \, d \ln n.$$

Заменяя $d \ln n$ выражением (5.75) и считая, что показателю преломления $n = 1$ соответствует зенитное расстояние z_1 при входе луча в атмосферу, а показателю преломления n_0 у поверхности земли видимое зенитное расстояние z_0, получим интеграл рефракции в виде:

$$\varrho = \int_{z_0}^{z_1} \frac{d \ln n}{d \ln S} \left(1 + \frac{d \ln n}{d \ln S}\right)^{-1} dz.$$

Это преобразование, найденное Ауэром и Стэндишем, показывает, что интеграл рефракции определен при $z = 90°$ и может быть найден численным интегрированием.

5.1.7. Задержка оптического сигнала в тропосфере

Лазерные дальномерные системы являются инструментами, используемыми Международной службой вращения Земли и систем отчета для решения двух основных задач: определения параметров вращения Земли и построения земной системы координат. Измеряемым параметром является расстояние до Луны или до искусственного спутника Земли (ИСЗ).

Сердцем дальномера является лазер, генерирующий короткие импульсы света в видимом или инфракрасном диапазонах спектра. С помощью телескопа они излучаются в направлении Луны или специализированных ИСЗ. С помощью этого же телескопа принимаются отраженные сигналы. Регистрируя момент излучения импульса t_1 и момент приема отраженного сигнала t_2, можно найти расстояние до спутника: $D = (t_2 - t_1) \cdot c/2$. Промежуток времени $t_2 - t_1$ и, следовательно, расстояние необходимо скорректировать за счет введения различных поправок, т. е. учесть задержку сигнала на пути от лазера до телескопа и от телескопа до регистрирующего устройства, а также задержку в атмосфере Земли.

Последняя в соответствии со «Стандартами МСВЗ» может быть вычислена по следующей формуле:

$$\Delta R = \frac{f(\lambda)}{f(\varphi_s, H)} \cdot \frac{A + B}{\sin E + \dfrac{B/(A+B)}{\sin E + 0,01}}, \tag{5.78}$$

где E — высота спутника над горизонтом,

$$A = 0,002357 P_0 + 0,000141 e_0, \tag{5.79}$$

$$B = (1,084 \times 10^{-8}) P_0 T_0 K + (4,734 \times 10^{-8}) \frac{P_0^2}{T_0} \frac{2}{(3 - 1/K)}, \tag{5.80}$$

$$K = 1,163 - 0,00968 \cos 2\varphi - 0,00104 T_0 + 0,00001435 P_0. \tag{5.81}$$

Поправка к расстоянию до спутника ΔR (5.78) измеряется в метрах. Для вычисления коэффициентов A, B, K (5.79-5.81) необходимо знать давление P_0 (в миллибарах), температуру воздуха T_0 (в градусах Кельвина) в пункте, где установлен лазерный дальномер. Парциальное давление водяного пара e_0 можно вычислить, используя измерения относительной влажности ν(%), по формуле:

$$e_0 = \frac{\nu}{100} \times e_s f_w,$$

где e_s — давление насыщенного водяного пара:

$$e_s = 0,01\exp(1,2378847 \times 10^{-5}T_0^2 - 1,9121316 \times 10^{-2}T_0 \\ + 33,93711047 - 6,3431645 \times 10^3 T_0^{-1}).$$

Функция f_w вычислена Джиакомо,

$$f_w = 1,00062 + 3,14 \times 10^{-6}P_0 + 5,6 \times 10^{-7}(T_0 - 273,15)^2.$$

Функция $f(\lambda)$ зависит от частоты лазера,

$$f(\lambda) = 0,9650 + \frac{0,0164}{\lambda^2} + \frac{0,000228}{\lambda^4}.$$

Для рубинового лазера $f(\lambda) = 1$, т. е. $f(0,6943) = 1$, тогда как $f(\lambda_G) = 1,02579$ и $f(\lambda_{IR}) = 0,97966$ для света в зеленом и инфракрасном диапазонах спектра.

Функция $f(\varphi_s, H)$ зависит от геодезической широты φ_s и высоты H (в километрах) над геоидом,

$$f(\varphi_s, H) = 1 - 0,0026\cos 2\varphi_s - 0,00031H.$$

5.2. Аберрация

Наблюдения проводятся с поверхности Земли, которая вращается вокруг своей оси. Кроме этого Земля движется по орбите вокруг Солнца и вместе с Солнцем обращается вокруг центра Галактики. Каждое из этих движений, в которых вместе с Землей участвует наблюдатель, приводит к изменению наблюдаемого положения небесных объектов: звезд, радиоисточников, тел Солнечной системы.

Как говорилось выше, топоцентрическая система координат не является инерциальной из-за вращения Земли вокруг оси и обращения вокруг Солнца. Поэтому результаты наблюдений, выполненных в топоцентрической системе, преобразуют сначала в геоцентрическую, а затем в барицентрическую системы координат, которая реализуется координатами внегалактических источников и, поэтому, близка к инерциальной системе. Преобразование наблюденных координат в инерциальную систему отсчета включает учет скорости движения топоцентрической системы и перенос начала системы координат, т. е. перенос наблюдателя в барицентр Солнечной системы.

Изменение положения небесных тел на небесной сфере, обусловленное конечностью скорости света и движением наблюдателя называется *аберрацией*. Вращение Земли вокруг оси приводит к *суточной* аберрации, обращение Земли вокруг Солнца — к *годичной* аберрации и перемещение Солнечной системы в пространстве — к *вековой* аберрации.

Перемещение наблюдателя в другую точку пространства (перенос начала системы координат) также приводит к изменению направления на небесное тело. Этот эффект называется *параллактическим смещением*. Очевидно, что чем дальше будет небесное тело от наблюдателя, тем меньше будет его параллактическое смещение. Параллактическое смещение называется суточным, если наблюдатель перемещается с поверхности Земли в ее центр, годичным, если наблюдатель перемещается с центра Земли в барицентр Солнечной системы. Перемещение Солнечной системы в пространстве приводит к вековому параллактическому смещению.

Небесные тела, также как и наблюдатель, движутся относительно инерциальной системы отсчета. Поэтому смещение тела на небесной сфере, которое видит наблюдатель, связано не только с движением наблюдателя, но и с движением самого тела. Аберрация складывается из двух частей: первая, не зависящая от движения небесного тела и определяющаяся только скоростью наблюдателя, называется *звездной аберрацией*; вторая, не зависящая от скорости наблюдателя, определяется смещением тела за время распространения света от тела к наблюдателю. В сумме эти две части дают *планетную аберрацию*, которая равна углу между направлением на тело в момент излучения фотона света и направлением на тело в момент приема этого фотона наблюдателем.

Параллактическое смещение также можно разделить на две части: первая часть соответствует изменению направления на небесный объект при перемещении наблюдателя в другую точку пространства; вторая часть связана с перемещением самого объекта в пространстве за некоторый промежуток времени. По традиции проекция вектора этого перемещения на картинную плоскость называется *собственным движением*.

Рассмотрим сначала явление аберрации.

Аберрация была объяснена Джеймсом Брадлеем в 1728 г. С 1725 г. он проводил наблюдения ряда звезд, в частности, γ Драко-

на. После учета необходимых поправок Брадлей обнаружил, что эта звезда, кульминация которой происходит около зенита, совершает кажущееся движение по почти круговой траектории с диаметром $\sim 40''$. Для других звезд он наблюдал эллиптическое движение.

О причине аберрации Брадлей догадался во время прогулки на паруснике по Темзе. Он заметил, что каждый раз, когда парусник менял курс, флюгер на его мачте поворачивался, как будто изменялось направление ветра. На вопрос Брадлея матросы ответили, что ветер не меняет направление, а кажущееся изменение вызвано переменой направления движения парусника. Это случайное наблюдение привело Брадлея к объяснению аберрации.

Аберрацию проще всего объяснить, проведя аналогию между распространением света и падением дождевых капель. При безветренной погоде капли падают вертикально, и человек не промокнет, если будет стоять неподвижно под зонтиком. Если же он побежит, то, чтобы не промокнуть, он должен наклонить зонт в сторону движения. Относительно движущегося человека дождевые капли уже падают не вертикально, а имеют горизонтальную составляющую скорости $-V$, если V — скорость человека относительно земли. Если c — вертикальная скорость движения капель, то угол φ, на который нужно наклонить зонт, определяется уравнением $\operatorname{tg}\varphi = V/c$.

Фактически наблюдения Брадлея показали, что наблюдатель движется вместе с Землей вокруг Солнца, так как непосредственно обнаруживается происходящее в течение года изменение направления скорости Земли относительно звезд.

Допустим, что истинное положение звезды задается единичным вектором $\mathbf{s}_0$, и неподвижный наблюдатель, находящийся в положении B, наблюдает ее в телескоп OB (рис. 5.11). Для бо́льшей точности наблюдатель наводит на звезду перекрестье нитей. Если наблюдатель движется со скоростью $\mathbf{V}$, то в системе координат, связанной с ним, свет имеет составляющую скорости $-\mathbf{V}$. Чтобы звезда осталась в перекрестье нитей, наблюдатель должен наклонить телескоп в положение $O'B$ (так же, как бегущий под дождем человек наклоняет зонт).

Будем считать, что видимое положение звезды задается единичным вектором $\mathbf{s}'$. Если c — скорость света, то

$$c\mathbf{s}' = c\mathbf{s}_0 + V\mathbf{n},$$

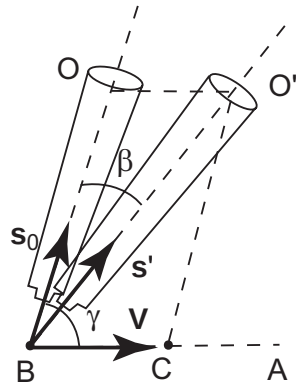


Рис. 5.11. Явление аберрации.

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении точки A, называемой *апексом* движения наблюдателя. Значит разность истинного и видимого направлений на звезду:

$$\mathbf{s}' - \mathbf{s}_0 = \frac{V}{c}\mathbf{n}. \tag{5.82}$$

Из уравнения (5.82) следует, что вектор $\mathbf{s}'$ лежит в плоскости, определяемой векторами $\mathbf{s}$ и $\mathbf{n}$. В результате аберрации звезда смещается со своего истинного положения по большому кругу к той точке небесной сферы A, в которую направлен в данный момент вектор скорости наблюдателя.

Умножим теперь уравнение (5.82) дважды векторно на $\mathbf{s}_0$ и, так как $\mathbf{s}_0 \times \mathbf{s}_0 = 0$, получим:

$$\mathbf{s}_0 \times (\mathbf{s}_0 \times \mathbf{s}') = \frac{V}{c}\mathbf{s}_0 \times (\mathbf{s}_0 \times \mathbf{n}).$$

Преобразуя левую часть по правилу $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$, получим:

$$\mathbf{s}_0 \cdot (\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{s}') - \mathbf{s}' = \frac{V}{c} \cdot \mathbf{s}_0 \times (\mathbf{s}_0 \times \mathbf{n}).$$

Если $V \ll c$, можно записать, что $(\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{s}') \approx 1$. Таким образом, видимое направление на звезду определяется выражением

$$\mathbf{s}' \approx \mathbf{s}_0 - \frac{V}{c}\mathbf{s}_0 \times (\mathbf{s}_0 \times \mathbf{n}) = \mathbf{s}_0 + \frac{1}{c}[\mathbf{V} - \mathbf{s}_0 \cdot (\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{V})], \tag{5.83}$$

где $\mathbf{V} = V\mathbf{n}$. Эта формула будет использована позже для вычисления изменения экваториальных координат звезды из-за годичной аберрации.

Приближенное значение аберрации можно определить из треугольника BCO' (рис. 5.11). По теореме синусов имеем:

$$\sin\beta = \frac{BC}{CO'}\sin(\gamma - \beta).$$

Если $BC = V\tau, CO' \approx BO = c\tau$, ($\tau$ — промежуток времени, за который свет проходит расстояние от объектива телескопа до глаза наблюдателя), то

$$\sin\beta = \frac{V}{c}(\sin\gamma\cos\beta - \cos\gamma\sin\beta).$$

Деля обе части на $\cos\beta$ и приводя подобные члены, получим:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\frac{V}{c}\sin\gamma}{1 + \frac{V}{c}\cos\gamma}.$$

Так как член $(V/c)\cos\gamma$ мал, с точностью до членов V/c получим:

$$\operatorname{tg}\beta \approx \frac{V}{c}\sin\gamma.$$

По той же причине ($V/c \ll 1$) $\operatorname{tg}\beta \approx \beta$ и $\beta \approx \frac{V}{c}\sin\gamma$.

Из вышесказанного следует, что положение звезды вследствие аберрации меняется по следующим законам:

1. Аберрация приводит к смещению положения звезды по большому кругу, проведенному через звезду и апекс, в сторону апекса.

2. Аберрационное смещение пропорционально синусу углового расстояния между направлением на звезду и апекс движения наблюдателя.

5.2.1. Изменение координат звезды из-за рефракции или аберрации

Как мы видели выше, рефракция и аберрация приводят к изменению координат всех звезд по направлению к фиксированной точке

небесной сферы. Рефракция приводит к смещению видимого изображения звезды к зениту по вертикалу. Аберрация приводит к смещению изображения также вдоль большого круга, проходящего через звезду и апекс, в сторону апекса. Общие закономерности смещения позволяют получить формулы, подходящие для этих и других эффектов, которые рассматриваются ниже. Предположим, что звезда S с координатами α, δ смещается в точку S' с координатами α', δ', причем $\alpha' = \alpha + \Delta\alpha$, $\delta' = \delta + \Delta\delta$ (рис. 5.12).

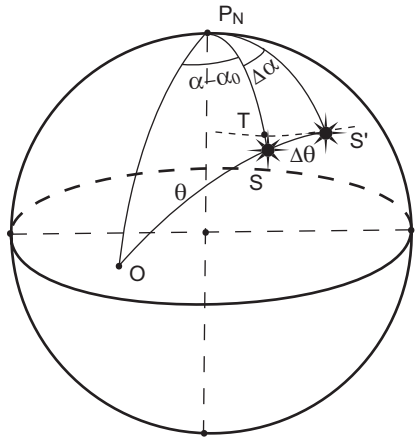


Рис. 5.12. Изменение положения звезды из-за рефракции или аберрации.

Смещение происходит по дуге большого круга, проходящего через звезду S и некоторую фиксированную точку O с координатами α_0, δ_0. Пусть длина дуги $\widehat{OS} = \theta$, а дуги $\widehat{SS'} = \Delta\theta$, причем

$$\Delta\theta = k \sin\theta, \tag{5.84}$$

где k — некоторый коэффициент. Проведем через точку S' параллель. Дуга параллели $\widehat{S'T}$ равна согласно (1.22):

$$\widehat{S'T} = \Delta\alpha \cos\delta'. \tag{5.85}$$

Будем считать, что смещение, т. е. дуга $\widehat{SS'}$ является малой величиной. Это означает, что при раскрытии скобки и перемножении

членов в (5.85) мы будем пренебрегать величинами второго порядка малости (типа $\Delta\alpha\Delta\delta$):

$$\widehat{S'T} = \Delta\alpha\cos(\delta + \Delta\delta) \approx \Delta\alpha\cos\delta.$$

Обозначим угол OSP_N через ψ. Так как треугольник TSS' — малый, то будем считать, что он плоский. Тогда:

$$\widehat{ST} = \Delta\delta = \widehat{S'S}\cos(180^\circ - \psi) = -\Delta\theta\cos\psi,$$
$$\widehat{S'T} = \Delta\alpha\cos\delta = \Delta\theta\sin(180^\circ - \psi) = \Delta\theta\sin\psi$$

или

$$\Delta\alpha\cos\delta = k\sin\theta\sin\psi,$$
$$\Delta\delta = -k\sin\theta\cos\psi.$$

Исключим $\sin\psi$ и $\cos\psi$, используя формулы синусов и подобия для треугольника OP_NS:

$$\sin\theta\sin\psi = \sin(90^\circ - \delta_0)\sin(\alpha - \alpha_0),$$
$$\sin\theta\cos\psi = \cos(90^\circ - \delta_0)\sin(90^\circ - \delta) -$$
$$- \sin(90^\circ - \delta_0)\cos(90^\circ - \delta)\cos(\alpha - \alpha_0).$$

В результате подстановки в уравнения (5.86), получим:

$$\begin{aligned}\Delta\alpha\cos\delta &= k\cos\delta_0\sin(\alpha - \alpha_0),\\ \Delta\delta &= k[\sin\delta\cos\delta_0\cos(\alpha - \alpha_0) - \cos\delta\sin\delta_0].\end{aligned} \tag{5.86}$$

Чтобы применить уравнения (5.86) к конкретному случаю, необходимо подставить в (5.86) коэффициент k и координаты точки O. В частности для рефракции имеем $\theta = z$, $k = -(n_0 - 1)/\cos z$. Рефракция поднимает звезду над горизонтом, зенитное расстояние при этом уменьшается. Поэтому коэффициент k отрицателен. Точка O является зенитом наблюдателя. Значит $\alpha_0 = s$, где s — местное звездное время, $\delta_0 = \varphi$, где φ — астрономическая широта. В результате подстановки этих значений в формулу (5.86) получим:

$$\Delta\alpha\cos\delta = (n_0 - 1)\frac{\cos\varphi\sin t}{\cos z},$$
$$\Delta\delta = (n_0 - 1)\frac{\cos\delta\sin\varphi - \sin\delta\cos\varphi\cos t}{\cos z},$$

которые совпадают с формулами (5.11).

Вместо экваториальной системы можно использовать эклиптическую систему, и уравнения (5.86) могут быть записаны относительно переменных (β, λ) простой заменой переменных: $\alpha \to \lambda$, $\delta \to \beta$.

Используем теперь уравнения (5.86) для вычисления изменения координат звезды из-за суточной и годичной аберрации.

5.2.2. Суточная аберрация

Суточная аберрация является следствием вращения Земли вокруг оси. Движение наблюдателя, вызванное вращением Земли, приводит к смещению звезды, истинное направление на которую определяется единичным вектором $\mathbf{s}_0$. Смещение $\Delta\mathbf{s}$ определяется уравнением (5.83):

$$\Delta\mathbf{s} = \mathbf{s}' - \mathbf{s}_0 = -\frac{V}{c} \cdot \mathbf{s}_0 \times (\mathbf{s}_0 \times \mathbf{n}). \tag{5.87}$$

Для вычисления суточной аберрации необходимо вычислить вектор скорости наблюдателя $\mathbf{V} = V\mathbf{n}$.

Допустим, что наблюдатель находится в точке с геоцентрической широтой φ_g и геоцентрическом расстоянии r (рис. 3.3). Тогда вектор скорости наблюдателя равен:

$$\mathbf{V} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r},$$

где $\mathbf{\Omega}$ — угловая скорость вращения Земли. Если наблюдатель встанет лицом к северу, то обнаружит, что вектор $\mathbf{V}$ всегда будет направлен вправо, то есть апексом является точка востока.

Вычислим изменение координат из-за суточной аберрации. Дуга θ на рис. 5.12 эквивалентна углу γ (рис. 5.11) между направлением на звезду и апекс. Следовательно, коэффициент k в (5.84) равен $-V/c$ (дуга θ уменьшается из-за аберрации). Координаты апекса равны: $\alpha_0 = s + 6^h$, где s — местное звездное время на меридиане наблюдателя, $\delta_0 = 0°$ (вектор $\mathbf{V}$ параллелен экватору). Так как

$$V = r\Omega \cos\varphi_g,$$

то из (5.86), получим:

$$\Delta\alpha\cos\delta = -\frac{r\Omega\cos\varphi_g}{c}\sin(\alpha - s - 90^\circ) = \frac{r\Omega\cos\varphi_g}{c}\cos t,$$
$$\Delta\delta = -\frac{r\Omega\cos\varphi_g}{c}\sin\delta\cos(\alpha - s - 90^\circ) = \frac{r\Omega\cos\varphi_g}{c}\sin\delta\sin t,$$

где $t = s - \alpha$ — часовой угол.

Если пренебречь разницей между геоцентрической широтой φ_g и астрономической широтой φ, получим:

$$\begin{aligned}\Delta\alpha\cos\delta &= 0\overset{s}{,}0213\cos\varphi\cos t,\\ \Delta\delta &= 0\overset{''}{,}320\cos\varphi\sin\delta\sin t,\end{aligned} \tag{5.88}$$

где $\Omega = 2\pi$ за звездные сутки, т. е.

$$\Omega \approx \frac{2\pi}{86164\text{ с}} \approx 7,292\cdot 10^{-5}\text{ рад/с}.$$

Уравнения (5.88) дают разницу между координатами звезды для наблюдателя на поверхности Земли и неподвижного наблюдателя в центре Земли.

5.2.3. Формулы учета годичной аберрации низкой точности

Помимо вращения вокруг оси Земля перемещается относительно барицентра Солнечной системы, и скорость движения Земли по орбите $\sim$ 30 км/с. Отношение (V/c) в этом случае $\sim 10^{-4}$, значит в угловой мере годичная аберрация $\sim 20''$. Эффекты второго порядка, пропорциональные $(V/c)^2$, имеют величину $\sim 10^{-8}$, что соответствует $0\overset{''}{,}002$. При современной точности наблюдений $\sim 0\overset{''}{,}0001$ члены второго порядка малости обязательно должны учитываться. Точные формулы для годичной аберрации будут получены в следующем параграфе.

Формулы низкой точности (порядка $O(V/c)$) могут быть получены, если пренебречь различием между барицентром Солнечной системы и центром Солнца. В этом случае можно считать, что Земля движется по эллиптической орбите относительно центра Солнца и вектор скорости Земли $\mathbf{V}_\oplus$ лежит в плоскости эклиптики. Апексом является точка с эклиптической широтой φ_A, равной 0°, и долготой λ_A, равной $\lambda_\odot + 90^\circ - 180^\circ$ (рис. 5.13), так как $\mathbf{V}_\oplus = -\mathbf{V}_\odot$, где $\lambda_\odot$ и $\mathbf{V}_\odot$ — эклиптическая долгота и скорость Солнца.

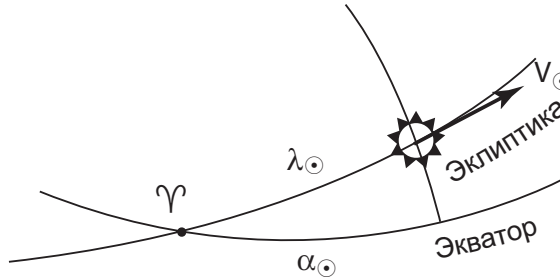


Рис. 5.13. Учет годичной аберрации.

Применяя формулы (5.86), получим:

$$\Delta\lambda\cos\beta = -\frac{V_\oplus}{c}\sin(\lambda - \lambda_\odot + 90^\circ) = -\kappa\cos(\lambda - \lambda_\odot),$$
$$\Delta\beta = \kappa\sin\beta\sin(\lambda - \lambda_\odot),$$

где $\kappa = \frac{V_\oplus}{c} \approx 20''{,}5$ есть *постоянная аберрации*. Из этих уравнений легко получить формулу

$$\left(\frac{\Delta\lambda\cos\beta}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\beta}{\kappa\sin\beta}\right)^2 = 1,$$

которая является уравнением эллипса. Это означает, что в течение года видимое (искаженное аберрацией) положение звезды описывает на небесной сфере эллипс с большой полуосью κ, перпендикулярной кругу широты, и малой полуосью $\kappa\sin\beta$, лежащей в плоскости круга широты. Для звезды в полюсе эклиптики эллипс превращается в окружность с радиусом κ. Если звезда находится в плоскости эклиптики, то эллипс превращается в дугу эклиптики длиной 2κ.

Чтобы найти изменение экваториальных координат звезды из-за годичной аберрации, воспользуемся уравнением (5.87). Если $\mathbf{V}_\oplus = V_\oplus\mathbf{n} = \dot{\mathbf{R}}$, где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор Земли относительно барицентра Солнечной системы, то из (5.87) получим:

$$\Delta\mathbf{s} = -\frac{1}{c}\mathbf{s}_0 \times (\mathbf{s}_0 \times \dot{\mathbf{R}}) = \frac{1}{c}\left[\dot{\mathbf{R}} - \mathbf{s}_0(\mathbf{s}_0 \cdot \dot{\mathbf{R}})\right]. \qquad (5.89)$$

Компоненты векторов $\dot{\mathbf{R}}$ и $\mathbf{s}$:

$$\dot{\mathbf{R}} = (\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}),$$
$$\mathbf{s}_0 = (\cos\delta\cos\alpha, \cos\delta\sin\alpha, \sin\delta),$$

где $\dot{X}$, $\dot{Y}$, $\dot{Z}$ — компоненты барицентрической скорости центра Земли в декартовой системе координат, α, δ — экваториальные координаты звезды в ICRS. В компонентах уравнение (5.89) имеет вид:

$$\begin{aligned} -\sin\delta\cos\alpha\Delta\delta - \cos\delta\sin\alpha\Delta\alpha &= \frac{1}{c}\left[\dot{X} - (\mathbf{s}_0 \cdot \dot{\mathbf{R}})\cos\delta\cos\alpha\right], \\ -\sin\delta\sin\alpha\Delta\delta + \cos\delta\cos\alpha\Delta\alpha &= \frac{1}{c}\left[\dot{Y} - (\mathbf{s}_0 \cdot \dot{\mathbf{R}})\cos\delta\sin\alpha\right], \\ \cos\delta\Delta\delta &= \frac{1}{c}\left[\dot{Z} - (\mathbf{s}_0 \cdot \dot{\mathbf{R}})\sin\delta\right]. \end{aligned} \quad (5.90)$$

Из третьего уравнения сразу получим:

$$\begin{aligned} \Delta\delta &= \frac{1}{c}\left[\frac{\dot{Z}}{\cos\delta} - \dot{X}\sin\delta\cos\alpha - \dot{Y}\sin\delta\sin\alpha - \dot{Z}\frac{\sin^2\delta}{\cos\delta}\right] \\ &= \frac{1}{c}\left[\dot{Z}\cos\delta - \dot{X}\sin\delta\cos\alpha - \dot{Y}\sin\delta\sin\alpha\right]. \end{aligned}$$

Исключая $\Delta\delta$ из первых двух уравнений (5.90), имеем:

$$\Delta\alpha\cos\delta = \frac{1}{c}\left[-\dot{X}\sin\alpha + \dot{Y}\cos\alpha\right].$$

Скорость света c должна быть выражена в тех же самых единицах, что и компоненты скорости $\dot{X}$, $\dot{Y}$, $\dot{Z}$. Так как компоненты скорости в астрономических ежегодниках выражаются в астрономических единицах в сутки (а. е./сутки), то

$$c = 173,1446327 \text{ а. е./сутки}.$$

Компоненты скорости $\dot{X}$, $\dot{Y}$, $\dot{Z}$ можно найти из матричного уравнения (2.65), предполагая, что Земля движется по кеплеровской орбите, или, если требуется бо́льшая точность, используя эфемериды DE200 или DE405.

5.2.4. Точные формулы учета годичной аберрации

Точный учет влияния аберрации на положение объектов на небесной сфере выполняется в рамках специальной теории относительности.

Если инерциальная система $O'x'y'z'$, которую назовем L', движется относительно инерциальной системы $Oxyz$ (или L), то преобразования координат тела и шкалы времени из одной системы в другую выполняются с помощью формул Лоренца. Обычно предполагают, что оси двух систем попарно параллельны, в некоторый момент времени начала систем совпадали, а скорость V движения системы L' совпадает с направлением осей Ox и $O'x'$. Для удобства переобозначим координаты так, что $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x'_1 = x'$, $x'_2 = y'$, $x'_3 = z'$. В этом случае преобразования длин и промежутков времени (преобразования Лоренца) из нештрихованной в штрихованную систему имеют вид:

$$x'_1 = \gamma(x_1 - Vt),\ x'_2 = x_2,\ x'_3 = x_3,\ t' = \gamma(t - Vx_1/c^2), \qquad (5.91)$$

где $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$, $\beta = V/c$, $V = V_1$. В качестве четвертой координаты определим величину $x_0 = ict$, $i = \sqrt{-1}$. При таком определении интервал записывается в виде:

$$s^2 = -(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

Тогда

$$x'_1 = \gamma\Big(x_1 - V\frac{x_0}{ic}\Big) = \gamma(x_1 + i\beta x_0),$$

$$t' = \frac{x'_0}{ic} = \gamma\Big(\frac{x_0}{ic} - \frac{V}{c^2}x_1\Big) \quad \text{или} \quad x'_0 = \gamma(x_0 - i\beta x_1).$$

Теперь, используя матричные обозначения, преобразования Лоренца (5.91) запишем в виде:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_0 \end{pmatrix}, \qquad (5.92)$$

Матричное уравнение (5.92) описывает поворот четырехмерной системы координат x_1, x_2, x_3, x_0 в плоскости x_1x_0. Это легко проверить: матрица M является ортогональной ($M^TM = MM^T = I$).

Допустим, что в начальный момент времени t начало штрихованной системы отсчета имеет координаты (X, Y, Z) относительно L. Очевидно, что преобразования Лоренца, учитывающие параллельный перенос осей координат системы L в точку X, Y, Z, могут быть записаны в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_0' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 - X \\ x_2 - Y \\ x_3 - Z \\ ict \end{pmatrix}. \tag{5.93}$$

Для того, чтобы вычислить изменение экваториальных координат из-за годичной аберрации, необходимо получить общие формулы Лоренца. Вектор скорости $\mathbf{V}$ штрихованной системы координат в общем случае может не совпадать ни с одной из осей. Кроме этого, в нулевой момент времени начала систем L и L' могут не совпадать.

Пусть компоненты вектора скорости $\mathbf{V}$ начала отсчета системы L' в системе отсчета L равны (V_1, V_2, V_3). Сначала повернем систему L так, чтобы ось Ox совпала с вектором $\mathbf{V}$. Затем выполним преобразование Лоренца (5.92) и, наконец, выполним обратное вращение системы L, чтобы оси системы вернулись в исходное положение. Результатом этого преобразования будут формулы Лоренца, записанные в векторном виде.

Применительно к нашей задаче будем считать, что система отсчета $L(x, y, z)$ — это ICRS, т. е. начало находится в барицентре Солнечной системы, ось Ox направлена в точку весеннего равноденствия, а ось Oz — в северный полюс мира. Барицентрический радиус-вектор центра Земли, в котором находится наблюдатель, равен $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$, и наблюдения проводятся в момент барицентрического координатного времени t.

Предположим, что вектор $\mathbf{V}$ направлен в точку с экваториальными координатами (α, δ). Для совмещения оси Ox с направлением на апекс необходимо выполнить два вращения: первое — относительно оси Oz на угол α, второе — относительно оси Oy на угол $-\delta$, т. е. вычислить матрицу $R_2'(-\delta)R_3'(\alpha)$. Повороты системы координат L вычисляются в четырехмерном пространстве x, y, z, t; при этом ход вре-

мени не меняется. Следовательно, матрицы R_2', R_3' имеют размерность 4×4:

$$R_2'(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$R_3'(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

После вращения системы L, описываемого матрицей $R_2'(-\delta)R_3'(\alpha)$, направление оси Ox совпадает с направлением вектора скорости $\mathbf{V}$. Следовательно, можно применить уравнение (5.93) и затем выполнить обратный поворот: $R_3'(-\alpha)R_2'(\delta)$. В результате общее преобразование Лоренца имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_0' \end{pmatrix} = R_3'(-\alpha)R_2'(\delta)MR_2'(-\delta)R_3'(\alpha) \begin{pmatrix} x_1 - X \\ x_2 - Y \\ x_3 - Z \\ ict \end{pmatrix}. \qquad (5.94)$$

Пусть $K = R_3'(-\alpha)R_2'(\delta)MR_2'(-\delta)R_3'(\alpha)$. Умножение пяти матриц размером 4×4 — занятие довольно утомительное. Для экономии времени можно, например, воспользоваться пакетом MAPLE. Программирование произведения матриц в (5.94) занимает несколько минут. После приведения подобных членов (также с помощью MAPLE), учета того, что $V_1 = V\cos\delta\cos\alpha$ и т. д., $V = |\mathbf{V}|$, элементы матрицы приобретают компактный вид:

$$K = \begin{pmatrix} \frac{V_1^2}{V^2}(\gamma-1)+1 & \frac{V_1V_2}{V^2}(\gamma-1) & \frac{V_1V_3}{V^2}(\gamma-1) & i\beta\gamma\frac{V_1}{V} \\ \frac{V_1V_2}{V^2}(\gamma-1) & \frac{V_2^2}{V^2}(\gamma-1)+1 & \frac{V_2V_3}{V^2}(\gamma-1) & i\beta\gamma\frac{V_2}{V} \\ \frac{V_1V_3}{V^2}(\gamma-1) & \frac{V_2V_3}{V^2}(\gamma-1) & \frac{V_3^2}{V^2}(\gamma-1)+1 & i\beta\gamma\frac{V_3}{V} \\ -i\beta\gamma\frac{V_1}{V} & -i\beta\gamma\frac{V_2}{V} & -i\beta\gamma\frac{V_3}{V} & \gamma \end{pmatrix}. \qquad (5.95)$$

Легко проверить, что при $X = Y = Z = 0, t = 0, V_1 = V, V_2 = V_3 = 0$ матрица K (5.95) совпадает с матрицей в (5.92), и общее преобразование (5.94) становится частным (5.91).

Если x_1', x_2', x_3' — координаты вектора $\mathbf{r}'$ в системе L', измеренные в момент t', x_1, x_2, x_3, t — координаты того же события, обозначаемые вектором $\mathbf{r}(t)$, в системе L, то матричное уравнение (5.94) можно записать в векторном виде:

$$\mathbf{r}'(t') = \mathbf{r}(t) - \mathbf{R}(t) + (\gamma - 1)\Big[[\mathbf{r}(t) - \mathbf{R}(t)] \cdot \mathbf{V}\Big]\frac{\mathbf{V}}{V^2} - \gamma \mathbf{V} t, \qquad (5.96)$$

$$t' = \gamma\Big[t - \frac{1}{c^2}[\mathbf{r}(t) - \mathbf{R}(t)] \cdot \mathbf{V}\Big]. \qquad (5.97)$$

Если в момент времени $t = 0$ вектор $\mathbf{R} = 0$, то

$$\mathbf{r}'(t') = \mathbf{r}(t) + (\gamma - 1)\Big(\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{V}\Big)\frac{\mathbf{V}}{V^2} - \gamma \mathbf{V} t, \qquad (5.98)$$

$$t' = \gamma\Big[t - \frac{1}{c^2}\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{V}\Big]. \qquad (5.99)$$

Обратное преобразование из системы L' в систему L можно найти, вычислив матрицу $R_3'(\alpha) \cdot R_2'(-\delta) \cdot M \cdot R_2'(\delta) \cdot R_3'(-\alpha)$ или обратную (5.95), например, с помощью MAPLE. Тогда:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t') + (\gamma - 1)\Big(\mathbf{r}'(t') \cdot \mathbf{V}\Big)\frac{\mathbf{V}}{V^2} + \gamma \mathbf{V} t', \qquad (5.100)$$

$$t = \gamma\Big[t' + \frac{1}{c^2}\mathbf{r}'(t') \cdot \mathbf{V}\Big]. \qquad (5.101)$$

Пусть скорость фотонов, регистрируемых наблюдателем, в барицентрической системе равна $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, а в штрихованной — $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Вектор $\mathbf{u}$ определяет направление на видимое положение источника, и, следовательно, разность векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ является аберрационным смещением. Мировая линия фотона, регистрируемого наблюдателем, в барицентрической системе L как функция координатного времени t может быть представлена уравнениями:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t) + \mathbf{v} t, \qquad (5.102)$$

причем

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right).$$

В штрихованной системе координат мировая линия фотона определяется уравнениями:

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{u} \cdot t', \tag{5.103}$$

и

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'} \right).$$

Скорость фотона в обеих системах координат должна равняться скорости света: $c = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$, однако проекции скорости в разных системах различаются; эти различия определяются законом преобразования (5.94). Для того, чтобы выразить вектор $\mathbf{u}$ через $\mathbf{v}$, выразим $\mathbf{r}(t) - \mathbf{R}(t)$ из (5.102) и подставим в (5.96):

$$\mathbf{r}'(t') = \left[\mathbf{v} + (\gamma - 1)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}) \frac{\mathbf{V}}{V^2} - \gamma \mathbf{V} \right] t.$$

Из последнего уравнения можно исключить t, используя (5.97):

$$t = \frac{t'}{\gamma(1 - \frac{1}{c^2}\mathbf{v} \cdot \mathbf{V})}$$

и дифференцируя $\mathbf{r}'(t')$ по t', получим в векторном виде:

$$\mathbf{u} = \left[\frac{\mathbf{v}}{\gamma} - \mathbf{V} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}) \frac{\mathbf{V}}{V^2} \right] \Big/ \left(1 - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{V} \right). \tag{5.104}$$

Пусть $\mathbf{s}'$ — единичный вектор в направлении видимого положения источника, $\mathbf{s}_0$ — единичный вектор источника для наблюдателя, находящегося в покое относительно барицентрической системы в точке O', а $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении апекса. Тогда $\mathbf{v} = -c\mathbf{s}_0$, $\mathbf{u} = -c\mathbf{s}'$, $\mathbf{V} = V\mathbf{n}$ и (5.104) имеет вид:

$$\mathbf{s}' = \frac{1}{1 + \frac{V}{c}\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{n}} \left[\frac{\mathbf{s}_0}{\gamma} + \frac{V}{c}\mathbf{n} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} (\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \right]. \tag{5.105}$$

Эта формула определяет точное направление на источник из точки O'. Так как предполагалось, что источник фотонов неподвижен относительно системы L, то формула (5.105) дает величину *звездной аберрации*.

Если ограничиться членами порядка V^2/c^2, то

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}, \quad \frac{1}{\gamma} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}.$$

Подставляя эти выражения в (5.105), находим, что

$$\mathbf{s}' = \left[1 - \frac{V}{c}\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{n} + \frac{V^2}{c^2}(\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{n})^2\right] \times \\ \times \left[\mathbf{s}_0\left(1 - \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}\right) + \frac{V}{c}\mathbf{n} + \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}(\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}\right].$$

После несложных преобразований получим, что (сравните с (5.83))

$$\mathbf{s}' - \mathbf{s}_0 = -\frac{V}{c}\mathbf{s}_0 \times (\mathbf{s}_0 \times \mathbf{n}) + \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}\left[2(\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{n})^2\mathbf{s}_0 - \mathbf{s}_0 - (\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}\right].$$

Рассмотрим теперь вековую аберрацию. Выше мы предполагали, что звезды находятся в покое относительно барицентрической системы координат ICRF. Это, конечно же, не так. Звезды движутся относительно центра Галактики. Так как для большей части звезд радиальная компонента скорости движения неизвестна, то наблюдатель может измерить лишь проекцию скорости на плоскость, перпендикулярную к лучу зрения и касательную к небесной сфере (картинную плоскость). Как говорилось выше, это движение называется собственным движением звезд. Исправляя видимое положение звезды за суточную и годичную аберрацию и параллакс, наблюдатель не получит реального положения звезды в пространстве, так как за время распространения света τ от звезды к наблюдателю звезда сместится. Чтобы получить истинное положение звезды на момент наблюдения, необходимо учесть это смещение, т. е. умножить собственное движение на τ. Кроме этого, Солнечная система обращается вокруг центра Галактики со скоростью примерно 220 км/с и за время τ переместится в другую точку пространства.

Оба эффекта имеют вековой характер и потому обычно называются *вековой аберрацией*. Однако на практике учет вековой аберрации не производится, так как, с одной стороны, велика неопределенность расстояний до звезд и, следовательно, величины τ. С другой стороны, направление скорости Солнечной системы практически не меняется на коротких промежутках времени, и, значит, вековая аберрация постоянна. Она приводит к постоянному смещению звезд на небесной сфере. Если Солнечная система движется со скоростью 220 км/с, то вековая аберрация составляет $2,5'$.

Применяя формулы (5.86), получим, что вековая аберрация приводит к следующему изменению галактических координат b, l звезды:

$$\Delta l \cos b = \kappa \cos b_0 \sin(l - l_0),$$
$$\Delta b = \kappa[\sin b \cos b_0 \cos(l - l_0) - \cos b \sin b_0],$$

где $\kappa = -V/c$, b_0, l_0 — координаты апекса. Если $b_0 = 0°, l_0 = 90°$, то постоянная часть вековой аберрации равна:

$$\Delta l \cos b = -k \cos l,$$
$$\Delta b = +k \sin b \sin l.$$

Как говорилось выше, этот эффект приводит к постоянному смещению звезд на небесной сфере и поэтому измерить его невозможно. Если мы предположим, что Солнце движется вокруг центра Галактики по круговой орбите, то годичное изменение направления на апекс (или поворот вектора скорости Солнца за год) $dl_0/dt = n$, где $n = 2\pi/T \approx 2,6 \cdot 10^{-8}$ год$^{-1}$ — среднее движение, $T = 240 \cdot 10^6$ лет — период обращения. Тогда изменение координат звезды за год вследствие изменения апекса равно:

$$\delta(\Delta l \cos b) = -\kappa n \sin l,$$
$$\delta(\Delta b) = +\kappa n \sin b \cos l.$$

Коэффициент $\kappa n \sim 4$ мкс дуги. Максимальное изменение галактической долготы l будет наблюдаться для звезд с $b \approx 0°$, $l \approx \pm 90°$. Максимальное изменение галактической широты b будет иметь место для звезд с координатами: $b \approx \pm 90°$ и $l \approx 0°$ или $180°$.

В настоящее время измерить годичное изменение координат из-за вековой аберрации невозможно. Однако в будущем при построении высокоточных каталогов по проектам GAIA и других, когда координаты звезд будут измеряться с микросекундной точностью, учитывать вековую аберрацию обязательно будет нужно.

Подчеркнем, что величина коэффициента $\kappa n = 4$ мкс дуги соответствует годичному изменению вековой аберрации. За 25-летний промежуток наблюдений коэффициент будет равняться уже 100 мкс дуги, и, в принципе, обращение Солнца относительно центра Галактики можно попытаться обнаружить уже сейчас на основе имеющейся базы РСДБ наблюдений.

Непосредственное измерение обращения Солнечной системы вокруг центра Галактики — это фундаментальный результат, который станет возможным на основе высокоточных астрометрических измерений.

5.2.5. Планетная аберрация

Если в качестве объекта наблюдения рассматривается тело (планета, астероид и т. п.) в Солнечной системе, то его видимое положение в момент наблюдения t отличается от истинного положения в этот момент из-за: 1) движения тела по орбите за время распространения света от тела до Земли и 2) движения Земли по орбите. *Планетная аберрация* включает, таким образом, годичную аберрацию и поправку, зависящую от движения тела.

Допустим, что в момент времени t взаимное расположение планеты P и центра Земли E относительно барицентра B задается векторами $\mathbf{r}_P, \mathbf{r}_E$. Пусть $\mathbf{R}$ — радиус-вектор между точками P и E (рис. 5.14). Если $\mathbf{R} = R\mathbf{s}$, где $\mathbf{s}$ — единичный вектор, то для момента времени t можно записать векторное равенство:

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_E + R\mathbf{s}.$$

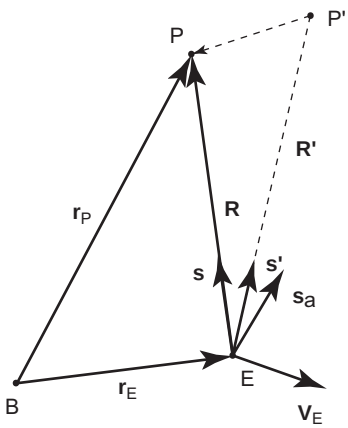


Рис. 5.14. Планетная аберрация.

В действительности, наблюдаемые в момент t фотоны пришли от планеты, когда она находилась в точке P' в момент $t - \tau$, причем радиус-вектор равен $\mathbf{R}' = R'\mathbf{s}'$. Если скорость Земли равна $\mathbf{V}_E = \dot{\mathbf{r}}_E$, то видимое положение планеты, исправленное за годичную аберрацию, определяется единичным вектором $\mathbf{s}_a$, который согласно (5.87) равен:

$$\mathbf{s}_a - \mathbf{s}' = -\frac{1}{c}\mathbf{s}' \times (\mathbf{s}' \times \dot{\mathbf{r}}_E). \tag{5.106}$$

Если пренебречь ускорением планеты за промежуток времени τ, то $\overrightarrow{PP'} = \tau\dot{\mathbf{r}}_P$. Тогда

$$R'\mathbf{s}' = R\mathbf{s} - \tau\dot{\mathbf{r}}_P$$

или

$$\mathbf{s}' = \frac{R}{R'}\mathbf{s} - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{r}}_P, \tag{5.107}$$

так как $R' = c\tau$. Умножая векторно последнее уравнение дважды на $\mathbf{s}$, получим:

$$\mathbf{s} \cdot (\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}') - \mathbf{s}' = -\frac{1}{c}\mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \dot{\mathbf{r}}_P).$$

Так как $\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}' \approx 1$, то:

$$\mathbf{s}' - \mathbf{s} = \frac{1}{c}\mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \dot{\mathbf{r}}_P). \tag{5.108}$$

Складывая (5.106) и (5.108), получим:

$$\mathbf{s}_a - \mathbf{s} = \frac{1}{c}\left[\mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \dot{\mathbf{r}}_P) - \mathbf{s}' \times (\mathbf{s}' \times \dot{\mathbf{r}}_E)\right].$$

Подставим вместо $\mathbf{s}'$ выражение (5.107). С точностью до 10^{-4} ($R \approx R', \dot{r}_P/c \sim 10^{-4}$) получим:

$$\mathbf{s}_a - \mathbf{s} \approx \frac{1}{c}\mathbf{s} \times [\mathbf{s} \times (\dot{\mathbf{r}}_P - \dot{\mathbf{r}}_E)]. \tag{5.109}$$

Аберрационное смещение положения планеты зависит только от относительной скорости Земли и планеты.

5.3. Параллакс

Если источник S находится на конечном расстоянии от наблюдателя, то при перемещении наблюдателя из одной точки пространства в другую, направление на источник меняется (рис. 5.15).

Видимое направление на источник для наблюдателя O задается единичным вектором $\mathbf{s}'$, а направление на источник относительно системы отсчета, центр которой находится в точке B, единичным вектором $\mathbf{s}$. Тогда $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{R}$, где $\mathbf{R}$— радиус-вектор наблюдателя. Разность в направлениях векторов $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}$ называется *параллаксом* источника S. Иногда говорят, что при перемещении наблюдателя из точки O в точку B имеет место параллактическое смещение источника. Вводя единичные векторы $\mathbf{s}$, $\mathbf{s}', \mathbf{n}$, так что $\mathbf{r} = r\mathbf{s}$, $\mathbf{r}' = r'\mathbf{s}'$, $\mathbf{R} = R\mathbf{n}$, получим:

$$r'\mathbf{s}' = r\mathbf{s} - R\mathbf{n}.$$

Дважды умножая векторно на $\mathbf{s}$, находим:

$$\mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{s}') = -\frac{R}{r'}\mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{n})$$

или

$$\mathbf{s} \cdot (\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}') - \mathbf{s}' = -\frac{R}{r'}\mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{n}).$$

Так как $R \ll r'$, можно считать, что $\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}' \approx 1$. Считая также, что $r' \approx r$, находим приближенную формулу для параллактического смещения:

$$\Delta\mathbf{s} = \mathbf{s}' - \mathbf{s} = \frac{R}{r}\mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{n}). \qquad (5.110)$$

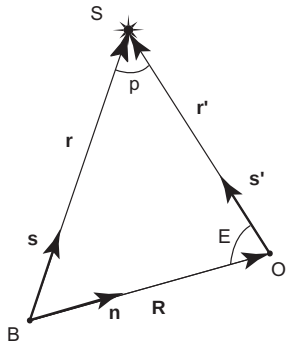


Рис. 5.15. Параллактическое смещение звезды.

Предположим теперь, что точка B совпадает с барицентром Солнечной системы, а точка O с геоцентром. Тогда $\mathbf{R}$ —это барицентрический радиус-вектор центра Земли. Определим *годичный параллакс* p как угол между векторами $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}$. Тогда

$$\sin p = \frac{R}{r} \sin E, \tag{5.111}$$

где $E = \angle BOS$. Если $E = 90°$, то используя стандартное обозначение π вместо p, получим:

$$\sin \pi = \frac{R}{r}. \tag{5.112}$$

Величина π называется *тригонометрическим параллаксом*.

Параллакс ближайших звезд не превышает $1''$, $\sin \pi \approx \pi$ и

$$\pi = \frac{R}{r}. \tag{5.113}$$

Таким образом определение параллакса эквивалентно определению расстояния до звезды. Совместно с измерениями координат звезд на небесной сфере это дает трехмерную картину распределения звезд в пространстве. Поэтому тригонометрический параллакс является одним из важнейших астрометрических параметров. Он является основой для всех остальных способов определения расстояний во Вселенной.

Определение 5.3.1. *Если R равно 1 астрономической единице (1 а. е.), то расстояние до звезды, равное 1 парсеку, соответствует параллаксу π равному* $1''$.

Парсек — расстояние до объекта, тригонометрический параллакс которого равен $1''$: 1 парсек $= 206264,8$ а. е. $= 3,0857 \cdot 10^{13}$ км $= 3,2616$ световых лет.

Если точку B, в которую перемещается наблюдатель, назвать апексом, то можно сформулировать следующие правила изменения координат звезды.

1. Параллактическое смещение происходит по большому кругу, проведенному через апекс движения наблюдателя и звезду S;

2. Параллактическое смещение приводит к кажущемуся движению звезды от апекса; это ясно из изменения направления векторов $\mathbf{s}'$ и $\mathbf{s}$ (рис. 5.15);

3. Параллактическое смещение пропорционально синусу угла между направлениями на звезду и апекс (5.111).

5.3.1. Оценка расстояния до звезд Ньютоном

Парсек является одной из основных единиц измерения расстояний во Вселенной. Величина парсека определяется величиной астрономической единицы. Следовательно, ошибка в определении астрономической единицы приводит к ошибке, большей в $\sim 2 \cdot 10^5$ раз, в величине парсека. Повышение точности определения астрономической единицы (помимо увеличения точности масштаба во Вселенной) имеет гораздо бо̀льшее значение при изучении динамики Солнечной системы, так как для вычисления точных эфемерид необходимо знать масштаб расстояний. До появления радиолокационных методов измерения расстояний до планет Солнечной системы в основе определения астрономической единицы были измерения экваториального *горизонтального параллакса* Солнца (см. ниже).

Как говорилось во «Введении», еще Аристарх Самосский предполагал, что обращение Земли вокруг Солнца должно приводить к параллактическому смещению, но из-за большого расстояния до звезд и низкой точности наблюдений это смещение не наблюдается. Первые достоверные измерения параллаксов звезд были выполнены Бесселем, Струве и Гендерсоном лишь в середине XIX века. Тем не менее, правильную оценку расстояния до звезд сделал еще Ньютон.

Как Ньютон оценил расстояние до звезд? Он использовал тот факт, что освещенность в фокальной плоскости телескопа, создаваемая Сатурном, близка к освещенности от некоторых звезд. Предположив, что эти звезды похожи на Солнце, он проделал следующие вычисления. Он считал, что на диск Сатурна падает около $1/2,1 \cdot 10^9$ части солнечного света. Расстояние от Солнца до Сатурна Ньютон вычислил с помощью третьего закона Кеплера. Радиус Сатурна можно было вычислить, зная его угловые размеры. В действительности, отношение площади полусферы Сатурна к площади сферы с радиусом R (R — расстояние до Сатурна от Солнца) равно $\theta = \pi r^2/4\pi R^2$, где r — радиус Сатурна. При $r = 60000$ км

и $R = 9,539$ а. е. получим $\theta = 1/2,263 \cdot 10^9$, что очень близко к оценке Ньютона. Далее Ньютон предположил, что Сатурн отражает $1/2$ падающего на него солнечного света, что в точности соответствует современной оценке. Тогда отраженный полусферой Сатурна свет будет составлять $1/4,2 \cdot 10^9$ часть света, испущенного Солнцем. Уменьшение количества приходящего к наблюдателю света пропорционально квадрату расстояния от светящегося тела. Если бы Солнце было на расстоянии в $\sqrt{4,2 \cdot 10^9} \approx 6,5 \cdot 10^4$ раз большем от Земли, чем Сатурн, оно имело бы такую же яркость, как Сатурн, и светило примерно как звезда первой величины. Таким образом, расстояние, с которого Солнце светило бы как звезда, близкая по яркости к Сатурну, приблизительно в $6,5 \cdot 10^4$ раз больше расстояния до Сатурна, т. е. равнялось бы $\sim 6 \cdot 10^5$ а. е. или ~ 3 парсекам. Параллакс Солнца был бы равен $\sim 0''\!,3$.

5.3.2. Изменение координат звезды из-за параллактического смещения

Из-за движения Земли вокруг Солнца направление на звезду (вектор $\mathbf{s}'$ на рис. 5.15) постоянно меняется. Это означает, что координаты звезды вследствие годичного движения Земли будут изменяться. Приблизительные формулы влияния параллакса на экваториальные координаты звезд можно получить, используя уравнение (5.110). Получим из (5.110):

$$\Delta\mathbf{s} = \mathbf{s}' - \mathbf{s} \approx \pi\mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{R}) = \pi(\mathbf{s} \cdot (\mathbf{R} \cdot \mathbf{s}) - \mathbf{R}).$$

Компоненты векторов $\mathbf{s}$ и $\mathbf{R}$ в прямоугольной системе координат:

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= (\cos\delta\cos\alpha, \cos\delta\sin\alpha, \sin\delta), \\ \mathbf{R} &= (X, Y, Z), \end{aligned} \tag{5.114}$$

где X, Y, Z — барицентрические координаты Земли (в а. е.). Дифференцируя (5.114) по α и δ, получим:

$$\begin{aligned} \sin\delta\cos\alpha\Delta\delta - \cos\delta\sin\alpha\Delta\alpha &= \pi\left[(\mathbf{R} \cdot \mathbf{s})\cos\delta\cos\alpha - X\right], \\ \sin\delta\sin\alpha\Delta\delta + \cos\delta\cos\alpha\Delta\alpha &= \pi\left[(\mathbf{R} \cdot \mathbf{s})\cos\delta\sin\alpha - Y\right], \\ \cos\delta\Delta\delta &= \pi\left[(\mathbf{R} \cdot \mathbf{s})\sin\delta - Z\right]. \end{aligned}$$

Из третьего уравнения сразу получается величина $\Delta\delta$:

$$\Delta\delta = \pi(X\sin\delta\cos\alpha + Y\sin\delta\sin\alpha - Z\cos\delta). \tag{5.115}$$

Умножив первое уравнение на $-\sin\alpha$, а второе — на $\cos\alpha$, затем сложив их, исключим члены с $\Delta\delta$. В результате, после преобразований получим:

$$\Delta\alpha\cos\delta = \pi(X\sin\alpha - Y\cos\alpha). \tag{5.116}$$

Формулы (5.115) и (5.116) отражают влияние годичного параллакса на прямое восхождение и склонение звезд в секундах дуги, если параллакс выражен в секундах дуги, а X, Y, Z — в а. е.

Найдем теперь изменение эклиптических координат звезды из-за параллакса. В этом случае векторы $\mathbf{s}$ и $\mathbf{R}$ имеют компоненты:

$$\begin{aligned}\mathbf{s} &= (\cos\beta\cos\lambda, \cos\beta\sin\lambda, \sin\beta),\\ \mathbf{R} &= (X, Y, 0).\end{aligned}$$

Мы предполагаем, что эклиптическая широта Земли равна нулю и, следовательно, $Z = 0$. Дифференцируя эти уравнения по λ и β и выполняя вычисления, аналогичные сделанным выше, получим:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\beta}{\pi\sin\beta} &= X\cos\lambda + Y\sin\lambda,\\ \frac{\Delta\lambda\cos\beta}{\pi} &= X\sin\lambda - Y\cos\lambda.\end{aligned}$$

Возводя оба уравнения в квадрат и складывая, найдем, что видимое положение звезды описывает на небесной сфере эллипс с большими полуосями, соответственно равными π и $\pi\sin\beta$:

$$\left(\frac{\Delta\lambda\cos\beta}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\beta}{\pi\sin\beta}\right)^2 = X^2 + Y^2 = 1.$$

5.3.3. Суточный параллакс

Будем считать теперь, что точка B на рис. 5.15 является центром Земли, а точка O — местом расположения наблюдателя на поверхности Земли. В этом случае формула (5.110) описывает явление *суточного параллакса*, т. е. изменение направления на небесное тело при перемещении наблюдателя с поверхности в центр Земли или обратно. Векторы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{r}$ являются геоцентрическими радиусами-векторами наблюдателя и небесного тела, соответственно. Если наблюдатель перемещается из центра Земли в точку на земной поверхности, то апексом является геоцентрический зенит; при обратном переходе апексом является геоцентрический надир.

Пусть зенитное расстояние небесного тела S для наблюдателя, находящегося в точке O, равно z. Если z_0 — зенитное расстояние тела S относительно геоцентра, то $z = z_0 + p$ (рис. 5.16).

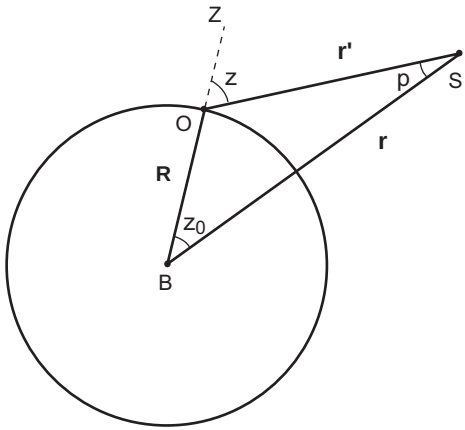


Рис. 5.16. Суточный параллакс.

По теореме синусов получим:

$$\sin p = \frac{R}{r} \sin z = \frac{R}{r'} \sin z_0.$$

Если $z = 90°$ (наблюдения небесного тела выполняются в горизонте), то

$$\sin p = \frac{R}{r},$$

и p называется *суточным горизонтальным параллаксом*. Так как расстояние R до центра Земли из-за ее сжатия зависит от широты, то наибольший горизонтальный параллакс будет наблюдаться на экваторе. Часто именно экваториальный параллакс (назовем его P) называется горизонтальным параллаксом:

$$\sin P = \frac{a}{r}, \tag{5.117}$$

где a — экваториальный радиус Земли. Параллакс для наблюдателя, находящегося не на экваторе можно найти по формуле:

$$\sin p = \frac{R}{a} \sin P \sin z.$$

Наибольший горизонтальный параллакс имеет Луна. Из-за изменения расстояния до Луны параллакс изменяется от $54'$ до $61'$. В «Астрономическом ежегоднике» параллакс Луны приводится для каждого дня, а расстояние до Луны можно найти по формуле (5.117).

Суточный параллакс планет значительно меньше. Найдем, например, параллакс Венеры. Минимальное расстояние до Венеры от Земли равно примерно 40 млн. км. В этом случае

$$P \approx \sin P \approx \frac{6378 \text{ км}}{40 \cdot 10^6 \text{ км}} \cdot 2'' \cdot 10^5 \approx 32''.$$

5.3.4. Суточный параллакс Солнца

Очень важным параметром в астрометрии является суточный горизонтальный параллакс Солнца, традиционно обозначаемый $\pi_\odot$, т. к. до начала радиолокации планет он определял астрономическую единицу. Из (5.117) получим: 1 а. е.[м] $= a$[м]$/\sin\pi_\odot$. До 1964 г., когда Международным астрономическим союзом была принята вторая система фундаментальных астрономических постоянных (см. главу 8), горизонтальный параллакс Солнца $P_\odot$ считался равным $8''\!,80$. Используя принятое тогда значение экваториального радиуса Земли $a = 6378388$ м, получим, что 1 а. е. $= 149504200,612$ км, что примерно на 90 тысяч км меньше принятого в настоящее время значения.

В 1964 г. в качестве основной постоянной вместо параллакса Солнца $\pi_\odot$ выбрана астрономическая единица. Это вызвано тем, что точность определения астрономической единицы резко повысилась с развитием радиоастрометрических методов наблюдений. Радиолокация планет и астероидов позволяет достичь микросекундной точности определения параллакса Солнца, что соответствует нескольким километрам в линейном масштабе. Использование радиолокации дает непосредственно расстояние между Землей и небесными телами в световых секундах (время запаздывания радиосигнала, умноженное на скорость света).

На практике поступают следующим образом: измеренное расстояние R_o (в световых секундах) сравнивается с расстоянием R_c, вычисленным на основании эфемерид. В результате одного наблюде-

ния получается условное уравнение относительно элементов орбиты планеты:

$$R_o - R_c = \sum_{k=1}^{6} \frac{\partial R_c}{\partial p_k} \Delta p_k + \varepsilon,$$

где Δp_k, $k = 1, \ldots, 6$ — поправки к элементам орбиты p_k, ε — невязки уравнений. Полученную систему уравнений для разных моментов времени решают методом наименьших квадратов и находят поправки Δp_k. Далее полагают, что поправка $\Delta p_1 = \Delta a$ к большой полуоси орбиты планеты вызвана неточностью астрономической единицы (в метрах).

Относительная точность определения астрономической единицы еще более повысилась после размещения на Луне уголковых отражателей и начала измерения расстояния до Луны с помощью лазерной дальнометрии. В настоящее время погрешность измерения расстояния до Луны составляет единицы сантиметров, а погрешность величины астрономической единицы равна 6 м.

В связи с новым подходом к определению астрономической единицы и уточнением масс Солнца, Земли и Луны ($M_\odot, M_\oplus, M_☾$) и продолжительности звездного года T, необходимо было бы изменить величину гауссовой гравитационной постоянной k, чтобы значение большой полуоси орбиты системы Земля+Луна оставалось единицей. Однако это признано нецелесообразным, так как пришлось бы перевычислять многие эфемериды. Поэтому при сохранении величины постоянной k были изменены величины полуосей орбит планет. Так как

$$k = \frac{2\pi}{T} \sqrt{\frac{R^3}{M_\odot + M}} \tag{5.118}$$

где $M = M_\oplus + M_☾$, то при $M_\odot = 1, M = 0, R = 1$ постоянная k равна среднему угловому движению тела с нулевой массой в поле Солнца. Звездный год T равен по (5.118) 365,256898 эфемеридных суток. Если учесть массу системы Земля+Луна и исправить значение T ($T = 365,256366$ суток для 2000 г.), то R должно быть $\approx 1,000000042$ а. е. Расхождение составляет примерно 6 км.

5.3.5. Влияние суточного параллакса на экваториальные координаты

Для вывода формул, выражающих изменение экваториальных координат α, δ звезды из-за суточного параллакса, используем общие формулы (5.86). Так как изменение зенитного расстояния

$$\Delta z = p = z - z_0 \approx \frac{R}{r} \sin z,$$

R — радиус Земли, r — расстояние до небесного тела, то параметр k в уравнениях (5.86) равен R/r. Параллактическое смещение приводит к смещению звезды от апекса, поэтому параметр k положителен.

Как говорилось выше, апексом движения при перемещении наблюдателя в геоцентр является геоцентрический надир, при обратном переходе — геоцентрический зенит (рис. 5.16). Геоцентрический зенит находится в верхней кульминации, значит его прямое восхождение равно звездному времени s, а склонение равно геоцентрической широте места. Таким образом, для перемещения наблюдателя из центра Земли в точку на ее поверхности имеем

$$\alpha_0 = s,\ \delta_0 = \varphi_g,$$

а для перемещения в центр Земли из точки на ее поверхности

$$\alpha_0 = s + 12^{\mathrm{h}},\ \delta_0 = -\varphi_g.$$

Изменение экваториальных координат небесного тела при перемещении в центр Земли получим, подставляя последние значения в уравнения (5.86). Учитывая, что часовой угол $t = s - \alpha$, имеем:

$$\Delta\alpha \cos\delta = \frac{R}{r} \cos\phi_g \sin t,$$
$$\Delta\delta = \frac{R}{r}(-\cos\phi_g \cos\delta \cos t + \sin\phi_g \cos\delta).$$

Формулы справедливы до первого порядка малости R/r. Поэтому при вычислении координат Луны или космических аппаратов должны использоваться более точные формулы. Из формулы $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{R}$ легко найти экваториальные координаты, например, Луны α', δ', ис-

правленные за горизонтальный параллакс P. Если компоненты векторов $\mathbf{r}'$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{R}$ равны

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}' &= r'(\cos\delta'\cos\alpha', \cos\delta'\sin\alpha', \sin\delta'),\\
\mathbf{r} &= \frac{a}{\sin P}(\cos\delta\cos\alpha, \cos\delta\sin\alpha, \sin\delta),\\
\mathbf{R} &= R(\cos\varphi_g\cos s, \cos\varphi_g\sin s, \sin\varphi_g),
\end{aligned}$$

где a — экваториальный радиус Земли, то, решая систему уравнений

$$\begin{aligned}
r'\cos\delta'\cos\alpha' &= \frac{a}{\sin P}\cos\delta\cos\alpha - R\cos\varphi_g\cos s,\\
r'\cos\delta'\sin\alpha' &= \frac{a}{\sin P}\cos\delta\sin\alpha - R\cos\varphi_g\sin s,\\
r'\sin\delta' &= \frac{a}{\sin P}\sin\delta - R\sin\varphi_g
\end{aligned}$$

относительно r', α', δ', можно найти исправленные за параллакс координаты Луны.

5.4. Собственное движение звезд

Рассмотренные эффекты: рефракция, аберрация, параллактическое смещение приводят к кажущемуся изменению координат звезд из-за преломления света в атмосфере или из-за движения наблюдателя. В действительности, координаты звезд меняются и из-за движения самих звезд в Галактике.

Разложим это движение на две составляющие: одна направлена вдоль луча зрения, а вторая лежит в плоскости, перпендикулярной лучу зрения, т. е. в картинной плоскости. В астрономии принято называть первую компоненту *лучевой* (радиальной) скоростью, а вторую — *собственным движением*.

Рассмотрим сначала *стандартную модель* движения звезды, в которой предполагается, что звезда движется в пространстве с *постоянной скоростью* V.

Пусть барицентрические координаты звезды S на эпоху T_0 равны α_0, δ_0. Единичный вектор $\mathbf{r_0}$ в направлении на звезду имеет координаты:

$$\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} \cos\delta_0\cos\alpha_0 \\ \cos\delta_0\sin\alpha_0 \\ \sin\delta_0 \end{pmatrix}. \tag{5.119}$$

Допустим, что требуется вычислить направление вектора $\mathbf{r}$ (т. е. координаты звезды α, δ) на произвольную эпоху $T = T_0 + t$. Если направление вектора $\mathbf{r}$ вычисляется относительно барицентра B, то $\mathbf{r}$ обозначим как $\mathbf{r}_B$, если относительно наблюдателя E, то как $\mathbf{r}_E$. Векторы $\mathbf{r}_B$ и $\mathbf{r}_E$ являются единичными векторами. Разница между направлениями $\mathbf{r}_B$ и $\mathbf{r}_E$, как мы уже знаем, равна параллаксу звезды.

Из рис. 5.17 получим для стандартной модели движения:

$$\mathbf{b}(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{V}t, \tag{5.120}$$

где $\mathbf{b}_0 = \mathbf{r}_0/\pi$; π — тригонометрический параллакс звезды.

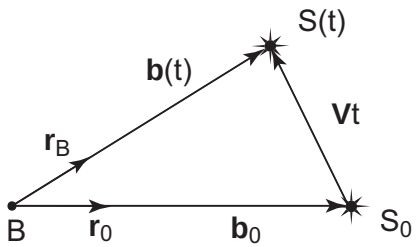


Рис. 5.17. Собственное движение звезды.

Тогда

$$\mathbf{r}_B = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} =< \mathbf{b}_0 + \mathbf{V}t > .$$

Угловые скобки обозначают нормирование вектора. Это выражение нельзя использовать, так как параллакс, являющийся малой величиной появляется в знаменателе. Поэтому перепишем (5.120) в следующем виде:

$$\frac{\pi}{1\text{ а. е.}}\mathbf{b}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{V}\frac{\pi}{1\text{ а. е.}}t$$

и нормируем:

$$\mathbf{r}_B =< \mathbf{r}_0 + \mathbf{V}\frac{\pi}{1\text{ а. е.}}t > . \tag{5.121}$$

По определению, собственное движение звезды равно производной единичного вектора $\mathbf{r}_B$ по времени. Рассмотрим рис. 5.18.

Единичный вектор $\mathbf{r}_0$ определяет направление на звезду S. Единичные векторы $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{q}_0$ определяют картинную плоскость; вектор $\mathbf{p}_0$

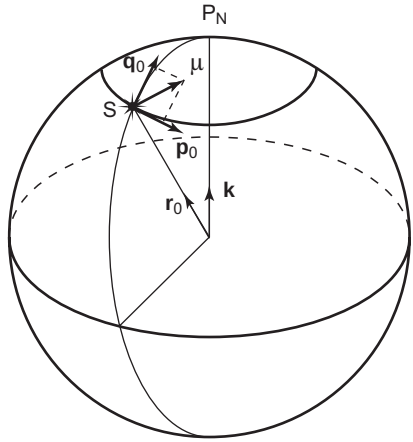


Рис. 5.18. Компоненты собственного движения звезды по прямому восхождению и склонению.

касается в точке S параллели и направлен в сторону увеличения прямых восхождений, а вектор $\mathbf{q}_0$ касается в точке S круга склонений и направлен к северному полюсу мира P_N.

Векторы $\mathbf{p}_0$ и $\mathbf{q}_0$ могут быть определены посредством уравнений:

$$\mathbf{p}_0 =< \mathbf{k} \times \mathbf{r}_0 >, \qquad \mathbf{q}_0 = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{p}_0, \tag{5.122}$$

где $\mathbf{k}$ — единичный вектор в направлении P_N. Имеем:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\delta_0 \cos\alpha_0 & \cos\delta_0 \sin\alpha_0 & \sin\delta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\delta_0 \sin\alpha_0 \\ \cos\delta_0 \cos\alpha_0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

следовательно

$$|\mathbf{k} \times \mathbf{r}_0| = \cos\delta_0.$$

Из уравнения (5.122) находим

$$\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} -\sin\alpha_0 \\ \cos\alpha_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5.123}$$

$$\mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\delta_0 \cos\alpha_0 & \cos\delta_0 \sin\alpha_0 & \sin\delta_0 \\ -\sin\alpha_0 & \cos\alpha_0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\delta_0 \cos\alpha_0 \\ -\sin\delta_0 \sin\alpha_0 \\ \cos\delta_0 \end{pmatrix}. \tag{5.124}$$

Определим вектор собственного движения звезды с помощью уравнения (рис. 5.18):

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{p}_0 \mu_\alpha \cos\delta + \mathbf{q}_0 \mu_\delta,$$

где $\mu_\alpha = \frac{d\alpha}{dt}$, $\mu_\delta = \frac{d\delta}{dt}$ — собственные движения по прямому восхождению и склонению, соответственно, измеренные в секундах дуги в год; $|\boldsymbol{\mu}| = \sqrt{(\mu_\alpha \cos\delta)^2 + \mu_\delta^2}$.

Учитывая, что собственное движение звезд мало (для самой быстрой звезды — звезды Барнарда — $\mu = 10''{,}27$ в год), в первом приближении перевод координат с одной эпохи на другую можно осуществить при помощи линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \mu_\alpha t, \\ \delta &= \delta_0 + \mu_\delta t. \end{aligned} \tag{5.125}$$

В этих уравнениях координаты α, δ звезды соответствуют эпохе T. Заметим, что формулы (5.125) нельзя применять для звезд вблизи полюса.

Для вывода более точных уравнений запишем скорость $\mathbf{V}$ звезды в виде:

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\mu} \frac{1 \text{ а. е.}}{\pi} + \mathbf{r}_0 V_r, \tag{5.126}$$

где V_r — лучевая скорость звезды, которая считается положительной при удалении ее от наблюдателя. Тогда уравнение (5.121) примет вид:

$$\mathbf{r}_B = < \mathbf{r}_0 + (\mathbf{p}_0 \mu_\alpha \cos\delta + \mathbf{q}_0 \mu_\delta + \mathbf{r}_0 \frac{\pi}{1 \text{ а. е.}} V_r) t > \tag{5.127}$$

или

$$\mathbf{r}_B = < \mathbf{r}_0 (1 + \frac{\pi}{1 \text{ а. е.}} V_r t) + \boldsymbol{\mu} t >, \tag{5.128}$$

причем лучевая скорость V_r измеряется в а. е./год, t — в годах.

Преобразование координат звезды для наблюдателя, находящегося на Земле, выполняется с учетом следующих формул. Единичный вектор $\mathbf{r}_E$, определяющий направление на звезду:

$$\mathbf{r}_E = \frac{\mathbf{b}_E}{|\mathbf{b}_E|}, \tag{5.129}$$

где $\mathbf{b}_E = \mathbf{b}_0 + \mathbf{V}t - \mathbf{R}_E$, $\mathbf{R}_E$ — радиус-вектор наблюдателя относительно барицентра (рис. 5.19).

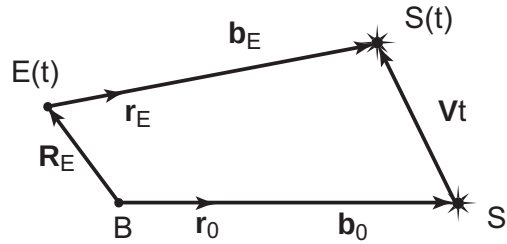


Рис. 5.19. Собственное движение звезды в топоцентрической системе координат.

При обработке наблюдений со спутника ГИППАРКОС различия между топоцентрическим и геоцентрическим положением звезды не делалось. Однако при достижении микросекундной точности наблюдений, как это планируется в проектах GAIA и других, необходимо уже будет учитывать суточный параллакс ближайших звезд. В самом деле, при расстоянии до звезды $b_E = 10$ парсек суточный параллакс $P \approx 6,4 \cdot 10^3$ км$/3 \cdot 10^{14}$ км ≈ 4 мкс дуги. При наблюдении с космического аппарата, находящегося на геостационарной орбите, суточный параллакс будет уже составлять ~ 20 мкс дуги, что сравнимо с планируемой точностью наблюдений.

Используя (5.126) и (5.128), преобразуем уравнение (5.129):

$$\mathbf{r}_E =< \mathbf{r_0} \left(1 + \frac{\pi}{1 \text{ а. е.}} V_r t\right) + \boldsymbol{\mu} t - \mathbf{R}_E \frac{\pi}{1 \text{ а. е.}} > . \qquad (5.130)$$

Если можно пренебречь суточным параллаксом, то $\mathbf{R}_E$ является барицентрическим радиусом-вектором геоцентра и вычисляется с помощью эфемерид.

Если требуется найти экваториальные координаты звезды на эпоху $T = T_0 + t$, то для этого надо преобразовать декартовы проекции вектора $\mathbf{r}_E$ в сферические координаты.

На рис. 5.20 в качестве примера показано движение в течение пяти лет двух звезд из каталога HIPPARCOS для наблюдателя, находящегося в геоцентре. Различие в траектории движения связано с различием координат звезд, величин собственного движения и тригонометрического параллакса.

Наблюдаемое собственное движение звезды включает, кроме движения самой звезды, движение Солнца в пространстве. Первая со-

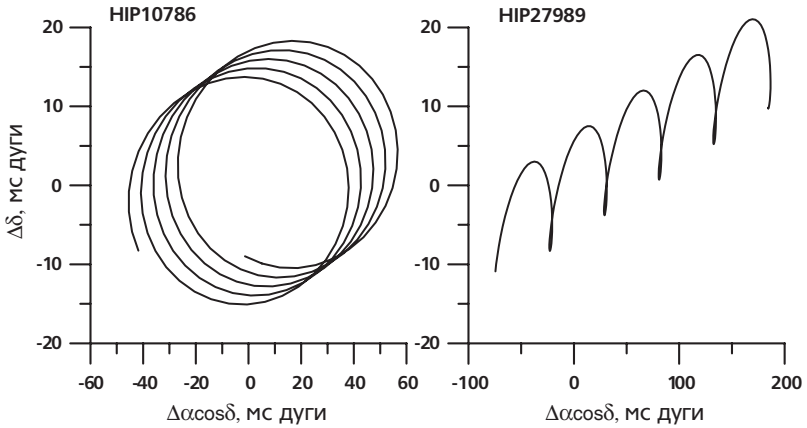


Рис. 5.20. Движение звезд HIP10786 и HIP27989 (αOri) на основе данных из каталога HIPPARCOS.

ставляющая движения звезды называется *пекулярной*, а вторая — *параллактической*. Предположение об этом было впервые высказано в 1742 г. Брадлеем и позже было подтверждено вычислениями Гершеля. Полученные им формулы называются формулами параллактического смещения звезды из-за движения Солнца в пространстве. Если Солнце за год переместилось из точки S в точку S' на расстояние R (рис. 5.21), то параллактическое смещение звезды равно

$$\sin p = \frac{R}{r} \sin \gamma,$$

или $p \approx \pi_s \sin \gamma$, где γ — угол между направлением на звезду и апекс A движения Солнца.

Величина $\pi_s = R/r$ называется средним вековым параллаксом, если под R понимать путь, пройденный Солнцем за год. Если $V_\odot$ — скорость Солнца относительно ближайших звезд, $R = V_\odot \cdot 1$ год, $r = 1$ а. е.$/\pi$, то $\pi_s = V_\odot \cdot 1$ год $\cdot\, \pi/1$ а. е., где π— тригонометрический параллакс. Подставляя значения, найдем соотношение между вековым и тригонометрическим параллаксами:

$$\pi_s = \frac{V_\odot}{4,74} \pi,$$

где $V_\odot$ выражено в км/с.

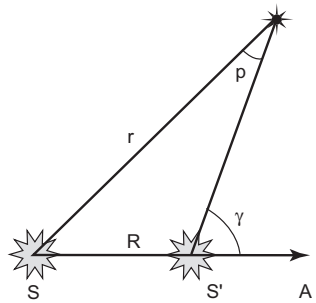


Рис. 5.21. Параллактическое смещение звезды из-за движения Солнца в пространстве.

Влияние движения Солнца на собственное движение звезды по прямому восхождению и склонению можно легко найти, воспользовавшись формулами (5.115) и (5.116). В этих формулах величины X, Y, Z — барицентрические координаты Земли, или, если барицентр назвать апексом, то X, Y, Z — это координаты Земли относительно апекса. Значит, изменение координат звезды вследствие движения Солнца выражается такими же формулами, но вместо X, Y, Z надо использовать координаты Солнца относительно апекса A (рис. 5.21). Обозначим их как $(X_\odot, Y_\odot, Z_\odot)$. Тогда:

$$\Delta\alpha\cos\delta = \pi(X_\odot\sin\alpha - Y_\odot\cos\alpha),$$
$$\Delta\delta = \pi(X_\odot\sin\delta\cos\alpha + Y_\odot\sin\delta\sin\alpha - Z_\odot\cos\delta).$$

Дифференцируя эти уравнения по времени и ограничиваясь лишь первыми производными, получим, используя (5.125):

$$\begin{aligned}\mu_\alpha\cos\alpha &= \pi(\dot{X}_\odot\sin\alpha - \dot{Y}_\odot\cos\alpha),\\ \Delta\delta &= \pi(\dot{X}_\odot\sin\delta\cos\alpha + \dot{Y}_\odot\sin\delta\sin\alpha - \dot{Z}_\odot\cos\delta).\end{aligned} \tag{5.131}$$

Компоненты скорости Солнца относительно апекса можно найти по формулам:

$$\dot{X}_\odot = V_\odot\cos\delta_\odot\cos\alpha_\odot,$$
$$\dot{Y}_\odot = V_\odot\cos\delta_\odot\sin\alpha_\odot,$$
$$\dot{Z}_\odot = V_\odot\sin\delta_\odot,$$

где $V_\odot = 19,5$ км/с, $\alpha_\odot = 271°$, $\delta_\odot = 30°$.

5.5. Измерение параллаксов и собственных движений звезд

Собственное движение можно разложить на две составляющие: параллактическую — μ'_α, μ'_δ и пекулярную — $\mu''_\alpha, \mu''_\delta$:

$$\mu_\alpha \cos\delta = \mu'_\alpha \cos\delta + \mu''_\alpha \cos\delta,$$
$$\mu_\delta = \mu'_\delta + \mu''_\delta.$$

Пекулярное собственное движение является следствием движения звезд в пространстве и содержит компоненту, вызванную галактическим вращением. Как и Солнце, ближайшие звезды вращаются относительно центра масс Галактики со скоростями около 250 км/с.

Для исключения галактического вращения используют привязку собственных движений звезд каталога к галактикам, которые можно считать практически неподвижными. Для этого проводится фотографирование галактик в две разные эпохи, а затем определяется кажущееся смещение галактик $\overline{\mu}^G_\alpha, \overline{\mu}^G_\alpha$ относительно группы опорных звезд. Если $\overline{\mu}_\alpha, \overline{\mu}_\delta$ — измеренное среднее собственное движение группы опорных звезд, то систематическая поправка для данной области неба равна:

$$\overline{\Delta\mu}_\alpha = \overline{\mu}^G_\alpha - \overline{\mu}_\alpha, \qquad \overline{\Delta\mu}_\delta = \overline{\mu}^G_\delta - \overline{\mu}_\delta.$$

Этот метод позволяет абсолютизировать собственные движения звезд, расположенных вблизи галактик. Так как галактики распределены по небу неравномерно, то получить поправки $\overline{\Delta\mu}_\alpha$, $\overline{\Delta\mu}_\delta$ для всех звезд каталога невозможно, и их приходится интерполировать. Если в результате такой процедуры окажется, что суммарная поправка к системе собственных движений не равна нулю, это будет означать вращение системы координат, определяемой данным каталогом. Для исключения подобного вращения при уточнении собственных движений накладывается условие равенства нулю суммарной поправки по всему небу.

Проблема определения параллаксов звезд является одной из самых сложных в астрометрии из-за малости эффекта. Для определения параллаксов широко использовался метод Шлезингера.

В течение нескольких лет фотографируется одна и та же область неба со звездами, параллакс которых измеряется, и одна из фотопластинок называется стандартной. Вокруг каждой из интересующих

нас звезд выбираются опорные звезды, параллакс которых считается равным нулю. Таким образом предполагается, что координаты опорных звезд изменяются лишь из-за собственного движения. Используя измерения опорных звезд на пластинках, находят коэффициенты связи координат этих звезд из стандартной пластинки с координатами звезд из других пластинок. Используя теперь найденные параметры связи, можно пересчитать координаты измеряемых звезд со всех пластинок к системе стандартной пластинки. Далее предполагается, что координаты измеряемых звезд отличаются из-за их собственного и параллактического движения. Решая систему условных уравнений методом наименьших квадратов, можно найти значения π и μ для исследуемых звезд.

Так как решение получается при условии равенства нулю параллаксов опорных звезд, то найденный параллакс не является абсолютным. Точность фотографического метода определения параллаксов характеризуется среднеквадратичной ошибкой $\pm 0''\!,01$.

Революционный прорыв в проблеме измерения параллаксов произошел в результате выполнения космического проекта ГИППАРКОС. В течение $\sim 3,5$ лет наблюдались ~ 118000 звезд, причем каждая в среднем $20 \div 40$ раз. В результате наблюдений и обработки результатов опубликован каталог, включающий 117955 звезд. Средняя точность наблюдений для звезд ярче девятой звездной величины характеризуется следующими среднеквадратичными ошибками:
$\pm 0,87$ мс дуги по α, $\pm 0,64$ мс дуги по δ;
$\pm 0,88$ мс дуги/год по μ_α, $\pm 0,74$ мс дуги/год по μ_δ,
$\pm 0,97$ мс дуги по параллаксу.

Расстояние до 20853 звезд измерено с относительной ошибкой менее 10% и до 49399 звезд — с ошибкой менее 20%. Несомненным достижением проекта ГИППАРКОС является то, что параллаксы измерены абсолютным способом. Благодаря этому оказалось возможным построить трехмерную карту распределения звезд в окрестности Солнца.

5.6. Отклонение луча света в гравитационном поле

Свет от звезд распространяется в гравитационном поле, которое создается другими звездами, Солнцем, планетами и т. д. Для точного вычисления гравитационного отклонения луча света необхо-

димо знать массу тела, расстояние до него от Земли и его координаты на небесной сфере. Для тел Солнечной системы эти параметры известны, и вычисление отклонения луча света в поле тяготения Солнечной системы не представляет особой сложности. Учет гравитационного поля звезд нашей Галактики на распространение света или радиоволн не может быть выполнен достаточно точно из-за того, что расстояние до большинства звезд неизвестно, а массы известны весьма приблизительно. Кроме видимых звезд, существует темные, невидимые тела, которые составляют значительную долю массы Галактики. Так как гравитационное поле темных тел также влияет на распространение света (этот эффект называется в литературе *микролинзированием*, так как темные тела являются гравитационными линзами), то точные астрометрические наблюдения могут помочь решить проблему «скрытой массы» Галактики.

Для вычисления гравитационного отклонения луча света воспользуемся метрикой (4.45) и запишем выражение для квадрата интервала в виде:

$$ds^2 = c^2(1-2\phi)dt^2 - (1+2\phi)dr^2,$$

где $\phi = U/c^2$, $U = GM/r$ — гравитационный потенциал на расстоянии r от тела с массой M. Так как событием является прием сигнала, распространяющегося со скоростью света, то $ds^2 = 0$ и

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = c^2\frac{1-2\phi}{1+2\phi}$$

или, пренебрегая членами порядка c^{-4}, получим

$$\frac{dr}{dt} = c\sqrt{\frac{1-2\phi}{1+2\phi}} \approx c(1-2\phi). \qquad (5.132)$$

Назовем величину $v = dr/dt$ координатной скоростью фотона: Тогда, согласно уравнению (5.22),

$$\frac{v}{c} = \frac{1}{n}, \quad n \approx 1+2\phi,$$

где n — показатель преломления. В результате, локальная скорость фотона зависит от локального гравитационного потенциала. Гравитационное поле проявляет себя, можно сказать, как среда с показателем преломления $n = 1+2\phi$.

Вид траектории фотона определяется условием (2.47). Начальная скорость фотона равна скорости света. Мы будем рассматривать ситуации, когда гравитационные поля являются слабыми, т. е. $c^2 \gg 2U$, или $\phi \ll 1$. Следовательно, фотон в слабом гравитационном поле движется по гиперболической орбите.

Если вместо фотона рассмотреть фронт плоской волны (поверхность постоянной фазы), проходящей через гравитационное поле, то отличие показателя преломления от единицы приведет к повороту фронта на некоторый угол.

Рассмотрим плоский фронт волны, распространяющейся в направлении оси Ox в момент времени t (рис. 5.22). Будем считать, что гравитационное поле создается телом, расположенным в точке O. В момент времени t нормаль $\mathbf{n}$ к фронту волны параллельна оси Ox.

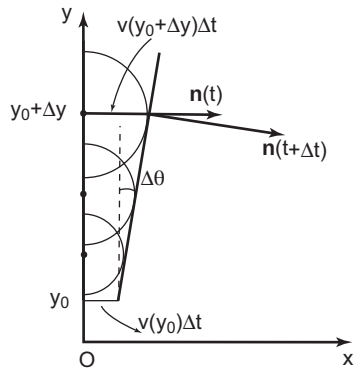


Рис. 5.22. Поворот фронта волны в гравитационном поле.

Согласно принципу Гюйгенса каждый элемент поверхности, которой достигла в данный момент времени волна, является центром элементарных волн, огибающая которых будет волновым фронтом в следующий момент времени. Так как в гравитационном поле скорость света зависит от локального гравитационного потенциал, то волна, проходящая вблизи тела, создающего гравитационное поле, распространяется медленнее, чем волна, проходящая вдали от тела. Следовательно, поворот фронта волны обусловлен уменьшением фазовой скорости волны при увеличении гравитационного поля: нормаль $\mathbf{n}(t + \Delta t)$ уже не будет параллельна оси Ox.

Угол поворота нормали легко найти из рисунка 5.22:

$$\operatorname{tg}\Delta\theta \approx \Delta\theta \approx \frac{v(y_0+\Delta y)\Delta t - v(y_0)\Delta t}{\Delta y}, \qquad (5.133)$$

где $v = dx/dt$ — координатная скорость света в направлении x, зависящая от координаты y. Деля обе части выражения (5.133) на Δx и находя предел выражения при $\Delta x \to 0$, получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{v}\frac{dv}{dy}. \qquad (5.134)$$

Применим теперь это уравнение для вычисления величины отклонения луча света в поле тяготения сферически-симметричной массы. Траектория фотона в этом случае лежит в плоскости. Будем считать, что начало системы координат O совпадает с центром тела; в плоскости, в которой лежит траектория фотона, определяем оси Ox, Oy. Пусть луч света распространяется вдоль оси Ox, а минимальное расстояние траектории фотона от тела O, называемое прицельным параметром, равно r_0 (рис. 5.23).

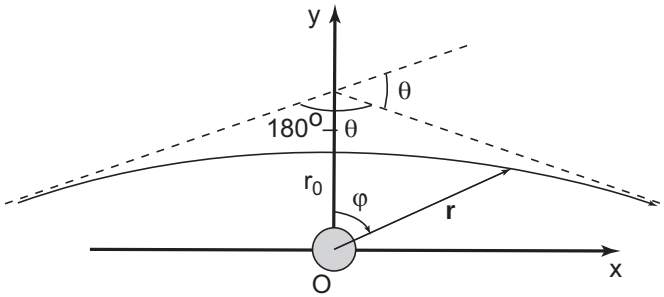


Рис. 5.23. Координаты, принятые при расчете отклонения света в гравитационном поле.

Интервал для света в сферически-симметричном поле (решение Шварцшильда) можно записать в виде (4.44):

$$ds^2 = 0 = c^2\left(1 - \frac{2U}{c^2}\right)dt^2 - \frac{dr^2}{1-\frac{2U}{c^2}} - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2).$$

Так как луч света при распространении в сферически-симметричном гравитационном поле не выходит из плоскости Oxy, то $\vartheta = 90°$ и $d\vartheta = 0$. Тогда

$$0 \approx c^2(1-2\phi)dt^2 - dr^2(1+2\phi) - r^2 d\varphi^2.$$

Это уравнение перепишем в следующем виде, учитывая, что изменение dy вдоль траектории мало, а $(1-2\phi)^{-1} \approx 1+2\phi$:

$$0 \approx c^2(1-2\phi)dt^2 - \left(\frac{dr}{dx}\right)^2 (1+2\phi)dx^2 - r^2\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 dx^2.$$

Так как $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \arccos\left(y/\sqrt{x^2+y^2}\right)$, то

$$\left(\frac{dr}{dx}\right)^2 = \left(\frac{x}{r}\right)^2, \quad \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = \frac{y^2}{r^4}.$$

Теперь

$$0 \approx c^2(1-2\phi)dt^2 - (1+2\phi\frac{x^2}{r^2})dx^2.$$

Координатная скорость света v вдоль оси x:

$$v = \frac{dx}{dt} = c\left[\frac{1-2\phi}{1+2\phi\frac{x^2}{r^2}}\right]^{1/2} \approx c\left[1-\phi\Big(1+\frac{x^2}{r^2}\Big)\right]. \qquad (5.135)$$

Отклонение луча в зависимости от x найдем по формуле (5.134):

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{v}\frac{dv}{dy} \approx \phi\left(\frac{3x^2y}{r^4} + \frac{y}{r^2}\right).$$

Интегрируя это выражение от $-\infty$ до $+\infty$ по переменной x, найдем угол θ — угол отклонения света в гравитационном поле:

$$\theta = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi\left(\frac{3x^2y}{r^4} + \frac{y}{r^2}\right)dx.$$

Чтобы вычислить интеграл, будем считать, что координата y фотона меняется вдоль траектории незначительно, т. е. $y = r_0$. Тогда $x = r_0 \operatorname{tg}\varphi$, $dx = r_0 \sec^2\varphi\, d\varphi$, $r = r_0/\cos\varphi$. Переходя к интегрированию по φ, заменяем пределы интегрирования от $-\infty$ до $+\infty$ на $-\pi/2$ и $\pi/2$, соответственно. В результате получим:

$$\theta = \frac{GM}{c^2 r_0}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (3\sin^2\varphi + 1)\cos\varphi\, d\varphi = \frac{4GM}{c^2 r_0}. \qquad (5.136)$$

Величина

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}$$

имеет размерность длины; ее называют *гравитационным радиусом* тела. Для Солнца $GM_\odot = 1,32712442076 \times 10^{20}$ м^{3}с$^{-2}$, и $r_g \approx 2,95$ км.

Максимальное отклонение будет при касании лучом поверхности Солнца. Так как $R_\odot \sim 700000$ км, то $\theta = 2r_g/R_\odot \approx 1''\!,75$.

Отклонение луча света в гравитационном поле было вычислено на основе ОТО А. Эйнштейном в 1915 г. и впервые измерено А. Эддингтоном в 1919 г. во время солнечного затмения. Теория Ньютона также предсказывает этот эффект. Однако величина отклонения луча света по Ньютону получается вдвое меньшей.

Для измерения отклонения луча света в гравитационном поле Солнца фотографировали звездное поле во время солнечного затмения. Измерение сдвигов изображений звезд и сравнение с их положениями на снимках, сделанных по прошествии ~ 6 месяцев, показало, что угол θ находится в пределах $1''\!,3 \div 2''\!,7$, что согласуется с ОТО в пределах 25%. Этот эксперимент явился триумфальным подтверждением эйнштейновской теории тяготения — общей теории относительности. В настоящее время для проверки ОТО используются наблюдения квазаров на РСДБ, и результаты измерений отличаются от теоретической оценки менее, чем на 1%.

5.7. Изменение координат опорного источника в гравитационном поле Солнца

В предыдущем параграфе мы показали, что при прохождении фотоном гравитационного поля массивного тела

1) координатная скорость фотона оказывается зависящей от его координат и

2) траектория движения фотона искривляется.

Изменение скорости фотона вдоль траектории приводит к изменению времени прохождения расстояния между двумя точками пространства по сравнению с ньютоновской теорией, т. е. к дополнительной гравитационной задержке сигнала. Следовательно, этот эффект важен при измерении не только координат, но и временных интервалов.

Искривление траектории движения фотона приводит к тому, что наблюдатель измеряет видимые координаты источников, так как положение источников определяется вектором, касательным к траектории фотона в точке наблюдения. Изменение гравитационного поля во времени из-за движения в пространстве тел — гравитационных линз — относительно опорных источников приводит к движению видимых изображений источников. Поэтому при редукции позиционных наблюдений эти смещения должны быть учтены.

Используя полученный выше результат, найдем изменение координат звезды или радиоисточника сначала в векторном виде, а затем в сферических координатах.

Строгое решение этой задачи может быть получено лишь в рамках ОТО. Здесь мы лишь укажем путь решения этой задачи.

Движение свободной материальной частицы в рамках теории относительности определяется принципом наименьшего действия, согласно которому частица движется так, что ее мировая линия между двумя заданными мировыми точками является экстремальной. В ньютоновской механике в плоском трехмерном пространстве этому соответствует прямолинейное равномерное движение. В гравитационном поле частица движется по мировой линии, которая также является экстремальной и называется *геодезической*. Но так как пространство не является плоским, то пространственное движение частицы уже не является прямолинейным и равномерным. Геодезическая линия свободной частицы является времяподобной, а фотона — нулевой.

В трехмерном пространстве решение уравнений Ньютона записывается в виде: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Координаты x, y, z и время t входят в формулы совершенно неравноправным образом. Чтобы восстановить симметрию, введем произвольный параметр λ и опишем движение точки в четырехмерном пространстве–времени четырьмя функциями:

$$\begin{cases} x = x^1(\lambda),\ y = x^2(\lambda),\ z = x^3(\lambda), \\ ict = x^4(\lambda), \end{cases}$$

или в более короткой записи, $x^i = x^i(\lambda)$, $i = 1 \div 4$; λ называется аффинным параметром. Аффинный параметр может быть выбран про-

извольным образом. В частности, им может быть интервал s, который определяется метрическим тензором g_{ij}:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j.$$

В формуле подразумевается двойное суммирование по индексам i и j, которые принимают значения $1 \div 4$. Так как g_{ij} является ковариантным тензором ранга 2, а дифференциалы dx^i компонентами контравариантного вектора, то ds^2 является скалярной величиной.

Геодезическая определяется функциями $x^i = x^i(s)$, которые удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0, \tag{5.137}$$

где Γ^i_{kl} — символы Кристоффеля, которые выражаются через метрический тензор.

Решение уравнений (5.137) в форме $x^i = x^i(s)$ позволяет найти четырехмерный вектор, касательный к геодезической. Именно этот вектор определяет направление на источник.

Используем здесь приближенный, более простой метод решения задачи. Заметим, что в качестве тел — гравитационных линз — могут выступать Солнце, планеты, звезды. Сначала получим уравнение гравитационной линзы.

Чтобы упростить решение задачи, будем считать, что вдали от тела–линзы фотон движется по прямой линии. Если звезда находится в точке S, а наблюдатель в точке O, то траектория фотона может быть представлена двумя прямыми линиями SB и BO, угол между которыми и показывает насколько отклоняется свет в поле тяжести тела L (рис. 5.24). Видимое изображение звезды I_1 находится на линии BO.

В редких случаях наблюдатель может увидеть второе изображение I_2, когда лучи от звезды пройдут по другую сторону тела L и попадут в точку O.

Введем следующие обозначения. Расстояние от звезды S до тела L обозначим как D_{SL}, расстояние от наблюдателя O до L — как D_L. Угол между направлением на тело L и истинным направлением на звезду S равен θ, между L и видимым изображением I_1 — θ_1. Угол α

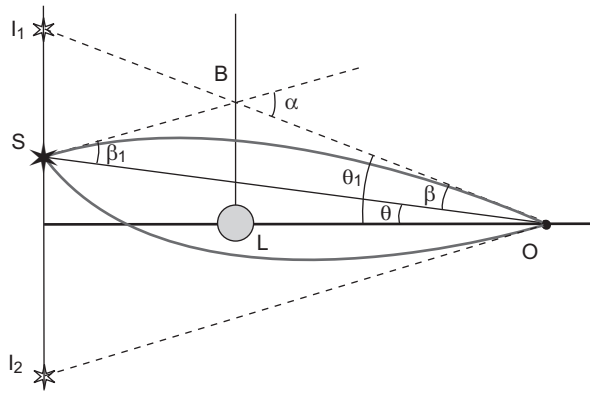


Рис. 5.24. Ход лучей света в гравитационном поле тела L.

равен отклонению луча света в поля тяжести L. Из рис. 5.24 видно, что справедливы следующие соотношения:

$$\alpha = \beta + \beta_1, \tag{5.138}$$

$$\theta_1 = \theta + \beta. \tag{5.139}$$

Из теоремы синусов следует, что $OB \sin\beta = SB \sin\beta_1$. Так как углы β, β_1 малы, то $\sin\beta \approx \beta$, $\sin\beta_1 \approx \beta_1$. Будем считать также, что угол θ мал; поэтому $SB \approx D_{SL}$, $OB \approx D_L$. Следовательно,

$$\beta D_L = \beta_1 D_{SL}. \tag{5.140}$$

Исключая из уравнения (5.139) переменную β и учитывая, что по (5.136) $\alpha = 4GM/c^2 r_0$, где $r_0 \approx BL = D_L \operatorname{tg}\theta_1 \approx D_L\theta_1$, получим:

$$\theta_1 = \theta + \alpha - \beta_1 = \theta + \frac{4GM}{c^2 D_L \theta_1} - (\theta_1 - \theta)\frac{D_L}{D_{SL}}.$$

Отсюда находим квадратное уравнение относительно θ_1, описывающее зависимость угла θ_1 от параметров тела L и положения звезды и наблюдателя относительно L:

$$\theta_1^2 - \theta\theta_1 - \theta_E^2 = 0, \tag{5.141}$$

где θ_E — угловой размер конуса Эйнштейна, определяемый как

$$\theta_E^2 = \frac{4GM}{c^2}\frac{D_{SL}}{(D_{SL} + D_L)D_L}. \tag{5.142}$$

Удобно выразить размер конуса Эйнштейна через параллаксы источника π_S и линзы π_L. Так как $D_{SL} = D_S - D_L$ (D_S — расстояние от наблюдателя до источника света), то

$$\theta_E^2 = 2r_g \frac{D_S - D_L}{D_S D_L} \frac{M}{M_\odot} = 2r_g \pi_L [\text{мс дуги}] \frac{206264'',8 \cdot 10^3}{1 \text{ а. е.}} \left(1 - \frac{\pi_S}{\pi_L}\right) \frac{M}{M_\odot}.$$

Подставляя значения констант, получим

$$\theta_E \text{ [мс дуги]} \approx 2,85 \sqrt{\pi_L [\text{мс дуги}] \left(1 - \frac{\pi_S}{\pi_L}\right) \frac{M}{M_\odot}}.$$

Для Солнца размер конуса Эйнштейна при наблюдении звезд ($D_{SL} \gg 1$ а. е.) равен примерно $40''$. Для звезд величина θ_E значительно меньше, и составляет единицы миллисекунд дуги.

Уравнение (5.141) называется уравнением гравитационной точечной сферически симметричной линзы. Это уравнение имеет два действительных корня:

$$\theta_1 = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\theta^2 + 4\theta_E^2}, \qquad (5.143)$$
$$\theta_2 = \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\theta^2 + 4\theta_E^2},$$

соответствующих двум изображениям I_1 и I_2 звезды S.

Изображение I_2 наблюдается не всегда. При выводе уравнения (5.141) предполагалось, что тело L имеет бесконечно малые размеры. В действительности, если тело L имеет радиус R_L, и прицельный параметр одного из изображений меньше радиуса тела R_L (или $R_L > D_L\theta_2$), то изображение I_2 наблюдатель не увидит. Оно находится за диском тела L. Такая ситуация имеет место, когда гравитационной линзой является Солнце. Угловой размер Солнца равен примерно половине градуса, что значительно превышает размер конуса Эйнштейна для Солнца на расстоянии одной астрономической единицы.

Если круглая звезда проходит через конус Эйнштейна точечной гравитационной линзы, то ее изображение представляется в виде двух «лунных серпов», зеркально отраженных друг относительно друга. Их размеры и яркость будут разными, но суммарный блеск двух изображений больше блеска самой звезды. Это явление было

названо *микролинзированием*. Сама линза может быть невидимым, темным телом. Поэтому в настоящее время эффект микролинзирования является мощным инструментом для изучения природы темной материи Галактики, ее распределения в Галактике, поиска планетных систем у звезд и т. д.

Для регистрации события микролинзирования звезда должна пройти на расстоянии в несколько миллисекунд дуги от линзы. Современные оптические инструменты не позволяют разрешить два изображения, разделенные таким малым угловым расстоянием. Поэтому эффект микролинзирования наблюдается по изменению яркости звезды. Вероятность микролинзирования довольно мала. В настоящее время зарегистрировано лишь несколько сотен событий в направлении на Большое и Малое Магеллановы Облака и галактический балдж.

Если звезда проходит на расстоянии, большем размера конуса Эйнштейна, то яркость изображения I_2 будет значительно меньше, чем яркость изображения I_1, и оно может быть просто не видно в телескоп. Таким образом мы приходим к явлению *слабого микролинзирования*: наблюдается одно видимое изображение, причем его смещение относительно истинного положения определяется параметрами линзы.

Вероятность слабого микролинзирования значительно больше, однако величина смещения изображения составляет всего несколько миллисекунд дуги. При выполнении проекта GAIA можно ожидать, что этот эффект будет обнаружен. В настоящее время единственными инструментами, обеспечивающими такую точность позиционных наблюдений, являются радиоинтерферометры со сверхдлинными базами. Теоретические вычисления показывают, что при прохождении звезды–линзы с массой порядка массы Солнца на расстоянии $\sim 0\overset{''}{,}1$ от внегалактического радиоисточника его видимое изображение опишет на небесной сфере окружность диаметром $\sim$ 2 мс дуги (рис. 5.25).

Пока этот эффект экспериментально не обнаружен, может быть, по причине малого числа регулярно наблюдаемых радиоисточников.

При проведении космических проектов GAIA и других, когда точность наблюдений достигнет десятка микросекунд дуги и число наблюдаемых объектов составит десятки и сотни тысяч, события слабого микролинзирования будут несомненно обнаружены.

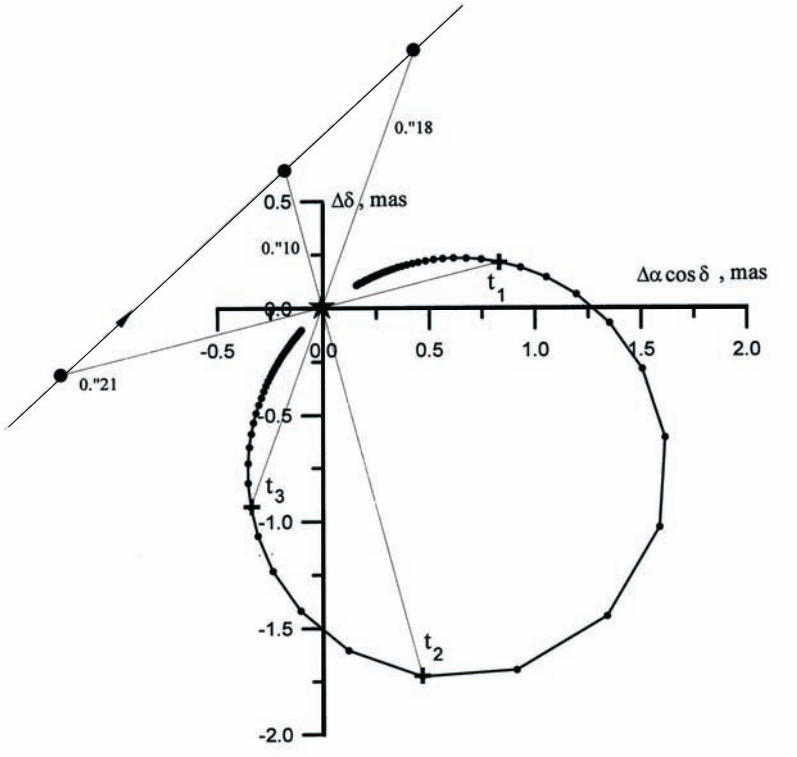


Рис. 5.25. Видимое движение внегалактического радиоисточника из-за слабого микролинзирования. При вычислениях предполагалось, что масса звезды–линзы равна массе Солнца, ее параллакс равен 10 мс дуги.

Найдем теперь изменение координат звезды или радиоисточника в результате микролинзирования в векторном виде. Рассмотрим сначала случай, когда отклонение света происходит в гравитационном поле Солнца.

На рис. 5.26 показана орбита Земли. Центр Земли находится в точке O, центр Солнца в точке L, истинное положение звезды обозначим как S, а видимое положение как I_1.

Определим следующие единичные векторы: $\mathbf{s}_0$, $\mathbf{s}'$, $\mathbf{s}_\odot$, которые направлены из центра Земли к звезде S, к ее видимому положению I_1 и к центру Солнца, соответственно. Так как угол между векторами $\mathbf{s}_0$ и $\mathbf{s}_\odot$ значительно превышает размер конуса Эйнштейна, то ре-

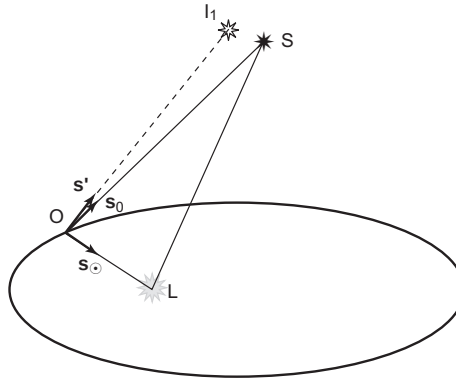


Рис. 5.26. Векторная диаграмма для вычисления отклонения света в поле Солнца.

шение уравнения гравитационной линзы для главного изображения I_1 звезды можно записать в виде:

$$\theta_1 = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\theta^2 + 4\theta_E^2} \approx \theta + \frac{\theta_E^2}{\theta}. \qquad (5.144)$$

Разность двух векторов

$$\Delta\mathbf{s}' = \mathbf{s}' - \mathbf{s}_0$$

это вектор, который лежит в плоскости OSI_1 и примерно равен по величине отклонению луча света в поле тяжести Солнца, т. е. $|\Delta\mathbf{s}'| = \theta_1 - \theta$ (см. рис. (5.24)). Если угол θ между направлениями на Солнце и звезду мал, то вектор $\Delta\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 - \mathbf{s}_\odot$ также примерно равен по величине θ: $|\Delta\mathbf{s}| = \theta$. Определение векторов $\Delta\mathbf{s}'$ и $\Delta\mathbf{s}$ соответствует уравнениям (5.139) и (5.143), т. е. ситуации, когда видимое изображение звезды отстоит от линзы дальше реальной звезды.

Из уравнения (5.144) имеем

$$\mathbf{s}' - \mathbf{s}_0 = \Delta\mathbf{s}\frac{\theta_E^2}{|\Delta\mathbf{s}|^2}. \qquad (5.145)$$

Умножим обе части уравнения (5.145) дважды векторно на $\mathbf{s}_0$. Тогда

$$\mathbf{s}_0 \times (\mathbf{s}_0 \times \mathbf{s}') = \mathbf{s}_0 \times (\mathbf{s}_0 \times \Delta\mathbf{s})\frac{\theta_E^2}{|\Delta\mathbf{s}|^2}.$$

Так как $|\Delta\mathbf{s}|^2 = 2(1 - \mathbf{s}_\odot \cdot \mathbf{s}_0)$ и $\theta_E^2 \approx 4GM/c^2 D_L$ ($D_{SL} \gg D_L$), получим:

$$\mathbf{s}_0(\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{s}') - \mathbf{s}' = -\frac{2GM}{c^2 D_L} \cdot \frac{\mathbf{s}_0 \times (\mathbf{s}_0 \times \mathbf{s}_\odot)}{1 - \mathbf{s}_\odot \cdot \mathbf{s}_0}.$$

Считая, что $\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{s}' \approx 1$, получим окончательное выражение:

$$\mathbf{s}' = \mathbf{s}_0 + \frac{2GM}{c^2 D_L} \cdot \frac{\mathbf{s}_0 \times (\mathbf{s}_0 \times \mathbf{s}_\odot)}{1 - \mathbf{s}_\odot \cdot \mathbf{s}_0}. \tag{5.146}$$

Для определения разницы между координатами видимого (α_a, δ_a) и истинного (α_t, δ_t) положения звезды воспользуемся уравнением (5.143) и рис. 5.27:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin(\alpha_a - \alpha_L)} = \frac{\cos\delta_L}{\sin\gamma}, \tag{5.147}$$

$$\frac{\sin(\theta_1 - \theta)}{\sin(\alpha_a - \alpha_t)} = \frac{\cos\delta_t}{\sin\gamma}, \tag{5.148}$$

где γ — позиционный угол дуги, соединяющий изображение I_1 и тело L с координатами α_L, δ_L.

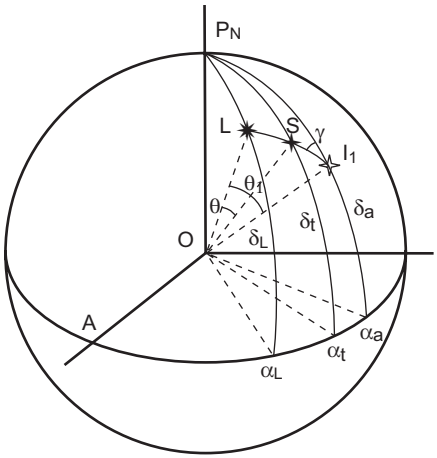


Рис. 5.27. Видимое и истинное положение звезды на небесной сфере.

Обозначив разность видимого и истинного прямого восхождения звезды как $\Delta\alpha = \alpha_a - \alpha_t$, разность склонений как $\Delta\delta = \delta_a - \delta_t$

и воспользовавшись малостью угла $\Delta\alpha$, т. е. $\sin\Delta\alpha \approx \Delta\alpha$, получим из (5.148):

$$\sin\gamma = \Delta\alpha \frac{\cos\delta_t}{\sin(\theta_1 - \theta)}.$$

Из (5.143) имеем $\theta_1 - \theta = \theta_E^2/\theta$. Подставляя значение $\sin\gamma$ в (5.147), получим

$$\Delta\alpha \approx \frac{\sin(\theta_E^2/\theta)}{\sin\theta_1} \frac{\cos\delta_L}{\cos\delta_a} \sin(\alpha_a - \alpha_L).$$

Если угол θ_1 мал, то $\sin\theta_1 \approx \theta_1$. Так как $\theta_1 \approx \theta$ и $\sin(\theta_E^2/\theta)/\sin\theta_1 \approx (\theta_E/\theta)^2$, то получим:

$$\Delta\alpha \approx \left(\frac{\theta_E}{\theta}\right)^2 \frac{\cos\delta_L}{\cos\delta_a} \sin(\alpha_a - \alpha_L). \tag{5.149}$$

Смещение звезды по склонению получим воспользовавшись следующими формулами сферической тригонометрии и рис. 5.27:

$$\sin\delta_t = \cos(\theta_1 - \theta)\sin\delta_a + \sin(\theta_1 - \theta)\cos\delta_a\cos\gamma,$$
$$\sin\delta_L = \cos\theta_1\sin\delta_a + \sin\theta_1\cos\delta_a\cos\gamma.$$

Из первого уравнения: $\cos(\theta_1 - \theta) \approx 1$, $\sin\delta_t - \sin\delta_a \approx -\cos\delta_a\Delta\delta$. Значит

$$\Delta\delta \approx -\frac{\theta_E^2}{\theta}\cos\gamma$$

и, выражая из второго уравнения $\cos\gamma$, находим

$$\Delta\delta = -\left(\frac{\theta_E}{\theta}\right)^2 \frac{\sin\delta_L - \cos\theta_1\sin\delta_a}{\cos\delta_a}, \tag{5.150}$$

где

$$\cos\theta_1 = \sin\delta_L\sin\delta_a + \cos\delta_L\cos\delta_a\cos(\alpha_a - \alpha_L).$$

Глава 6

ПРЕЦЕССИЯ И НУТАЦИЯ

Рассмотрим вращение Земли. Если $\mathbf{H}$ — вектор углового момента, $\mathbf{L}$ — момент внешних сил, то в инерциальной системе координат уравнение вращательного движения тела имеет вид:

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \mathbf{L}. \tag{6.1}$$

Если $\mathbf{L} = 0$, то из (6.1) следует, что $\mathbf{H} = \text{const}$, т. е. при отсутствии момента внешних сил угловой момент замкнутой системы сохраняется.

Если на Землю действуют внешние силы, момент которых не равен нулю, то под их действием происходит изменение вектора углового момента Земли. Угловой момент $\mathbf{H}$ равен произведению тензора инерции I на вектор угловой скорости вращения Земли $\mathbf{\Omega}$ (см. стр. 369):

$$\mathbf{H} = I\mathbf{\Omega}. \tag{6.2}$$

Если $\mathbf{L} \neq 0$, то из (6.1) и (6.2) следует, что векторы $\mathbf{H}$ и $\mathbf{\Omega}$ будут изменяться в инерциальной системе отсчета.

Под внешними силами в данной главе мы будем понимать силы притяжения Земли Луной и Солнцем[1]. В этом случае смещение вектора углового момента Земли в пространстве называется *лунно-солнечной прецессией*. Так как силы притяжения и их момент меняются во времени из-за обращения Земли вокруг Солнца и Луны вокруг Земли, то это приводит к периодическим движениям вектора

[1] В зависимости от решаемой задачи внешними по отношению к Земле могут считаться атмосфера и океаны.

углового момента Земли, которые накладываются на медленное прецессионное движение и называются *нутацией*. Сделаем важное замечание: в теоретической механике термин «нутация» употребляется для описания особенностей вращения твердого тела, не связанных с внешними силами.

Во вращающейся вместе с Землей системе координат уравнение (6.1) имеет вид:

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{H} = \mathbf{L}. \tag{6.3}$$

Уравнение (6.3) используется для определения влияния на вращение Земли геофизических процессов, таких как перемещение масс в атмосфере и океанах, тектоническое движение плит коры Земли, землетрясений и т. д., и описывает движение вектора $\mathbf{H}$ в земной системе координат. Эти процессы приводят к изменению тензора инерции Земли и, следовательно, влияют на вращение Земли. Если считать, что атмосфера и океаны связаны с Землей и составляют с ней замкнутую систему, то $\mathbf{L} = 0$. Это означает, что вектор углового момента, несмотря на действие геофизических процессов, сохраняет свое положение в пространстве. Но так как из-за перемещения масс происходит изменение тензора инерции Земли, то вектор $\mathbf{H}$ изменяет свою ориентацию относительно вектора $\mathbf{\Omega}$, т. е. вектор $\mathbf{H}$ движется относительно самой Земли. Наблюдателю, находящемуся на поверхности Земли, кажется, что Земля качается относительно оси углового момента.

Иногда это движение называется качанием Земли (по-английски «wobble»), но чаще *движением полюса*. В данном случае речь идет о *вынужденном* движении полюса, поскольку причиной этого движения являются геофизические процессы. При отсутствии момента внешних сил движение полюса называется *свободным* (или эйлеровским). Это равномерное движение оси вращения Земли относительно вектора углового момента $\mathbf{H}$. Как показал Эйлер, такое движение присуще всем твердым телам. Его параметры (амплитуда и период) находятся из решения динамических уравнений (6.32), описывающих вращение тела.

Нутация и движение полюса тесно связаны друг с другом, и о точном определении этих явлений будет рассказано позже при определении *небесного эфемеридного полюса*.

6.1. Причины прецессии и нутации

Рассмотрим две системы координат: экваториальную и эклиптическую (рис. 6.1). Системы координат определяются плоскостями небесного экватора и эклиптики и точкой их пересечения Υ или, что эквивалентно, положением северных полюсов P_N и Π_N.

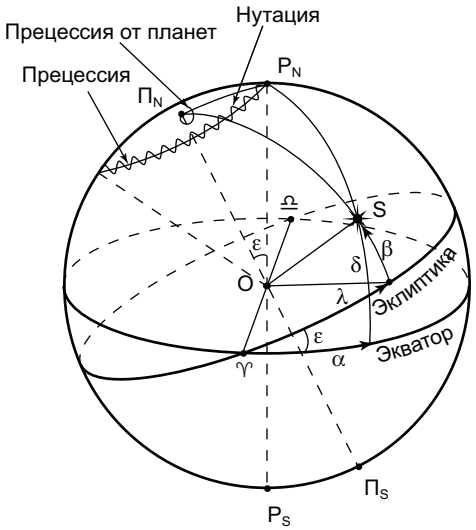


Рис. 6.1. Прецессионно-нутационное движение.

Положение звезды S относительно этих систем характеризуется экваториальными и эклиптическими координатами: α, δ и β, λ, соответственно. При смещении точек P_N и Π_N происходит изменение сторон треугольника $SP_N\Pi_N$, то есть изменение координат звезды. Причиной смещения оси OP_N является *лунно-солнечная прецессия*, а оси $O\Pi_N$ — *прецессия от планет*. В первом случае под действием Луны и Солнца происходит поворот плоскости экватора, во втором — поворот плоскости эклиптики из-за возмущений в движении Земли планетами.

Явление лунно-солнечной прецессии приводит к тому, что точка весеннего равноденствия перемещается по эклиптике навстречу Солнцу со скоростью примерно $50''\!,3$ в год. В результате прецессионного движения следующее равноденствие наступает раньше, чем

Солнце пройдет 360° по эклиптике. Поэтому другое название прецессии — предварение равноденствий. Ясно, что *звездный год*, или время, требующееся Солнцу для совершения полного оборота по эклиптике, будет длиннее *тропического года* (времени между двумя последовательными прохождениями Солнца через точку весеннего равноденствия) на

$$\Delta t \approx \frac{50''\!,3}{1296000''} 365,2422 \approx 0,01417 \text{ суток.}$$

За $0,01417$ суток Солнце проходит дугу в $50''\!,3$, которая называется прецессионным смещением точки весеннего равноденствия.

На прецессионное движение оси вращения Земли накладывается колебательное движение: полюс мира описывает за 18,6 года эллипс с осями $18''\!,4$ и $13''\!,7$ относительно среднего положения. Это движение было названо нутацией. В результате полюс мира описывает волнистую линию на небесной сфере (рис. 6.1 и рис. 1).

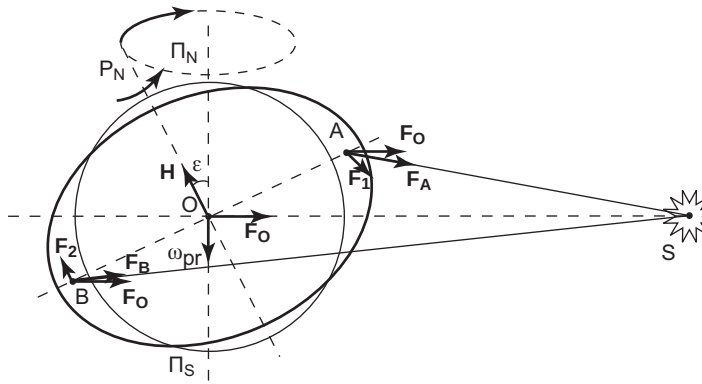


Рис. 6.2. Объяснение прецессии и нутации.

Причиной прецессии и нутации является несферичность Земли и несовпадение плоскостей экватора и эклиптики. В результате гравитационного притяжения Луной и Солнцем экваториального утолщения Земли возникает момент сил, стремящийся совместить плоскости экватора и эклиптики (рис. 6.2). Как будет показано ниже, лунно-солнечный момент сил, вызывающий прецессию, пропорционален r^{-3}, где r — расстояние от Земли до Солнца или Луны. Из-за

близости Луны к Земле главную роль в прецессионном и нутационном движении полюса мира играет не Солнце, а Луна: влияние Луны примерно в два раза больше.

Из рис. 6.2 видно, что так как $SA < SO < SB$, то $|\mathbf{F}_A| > |\mathbf{F}_O| > |\mathbf{F}_B|$ и из векторных равенств $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_A - \mathbf{F}_0$, $\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_B - \mathbf{F}_0$ следует, что пара сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ стремится повернуть плоскость экватора AB по часовой стрелке. Из-за вращения Земли такого поворота не происходит, но ориентация оси вращения изменяется: она описывает в пространстве конус. Угол между осью вращения Земли и осью $O\Pi_N$ равен углу наклона эклиптики к экватору: $\varepsilon \approx 23{,}^\circ5$.

Направление движения оси определим из следующих соображений. Воспользуемся для этого теоремой Резаля, используемой при построении теории гироскопов[2]. Эта теорема, по существу, является интерпретацией теоремы об изменении углового момента тела (6.1). Так как производная $d\mathbf{H}/dt$ представляет собой «скорость» конца вектора $\mathbf{H}$, то можно сформулировать теорему Резаля следующим образом: скорость конца вектора углового момента тела равна моменту внешних сил, приложенных к телу.

Пусть к оси вращения гироскопа приложена сила $\mathbf{F}$, как показано на рис. 6.3. Если тело не вращается, то под действием силы $\mathbf{F}$ ось Oz тела будет перемещаться в сторону действия силы. Если тело вращается, то действие силы вызывает прецессию оси. Для простоты будем считать, что ось Oz направлена вдоль оси главного момента инерции гироскопа, и вектор вращения $\mathbf{\Omega}$ также совпадает с этой осью. Момент силы $\mathbf{L}$ относительно неподвижной точки O (центра гироскопа) будет направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через линию действия силы и точку O. Согласно теореме Резаля, конец вектора $\mathbf{H}$ начинает двигаться в направлении момента силы $\mathbf{L}$ со скоростью $d\mathbf{H}/dt$. Вектор угловой скорости прецессии $\boldsymbol{\omega}_{pr}$ направлен по нормали к плоскости, содержащей вектор $\mathbf{L}$ (или $d\mathbf{H}/dt$), так как согласно формуле $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$ для скорости точки твердого тела скорость конца вектора $\mathbf{H}$ равна:

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \boldsymbol{\omega}_{pr} \times \mathbf{H}.$$

[2]Гироскопом называется твердое симметричное тело, вращающееся вокруг оси симметрии с угловой скоростью, которая значительно превышает угловую скорость изменения положения самой оси симметрии в пространстве. Как мы увидим ниже, Земля, как вращающееся тело, в соответствии с этим определением может считаться гироскопом.

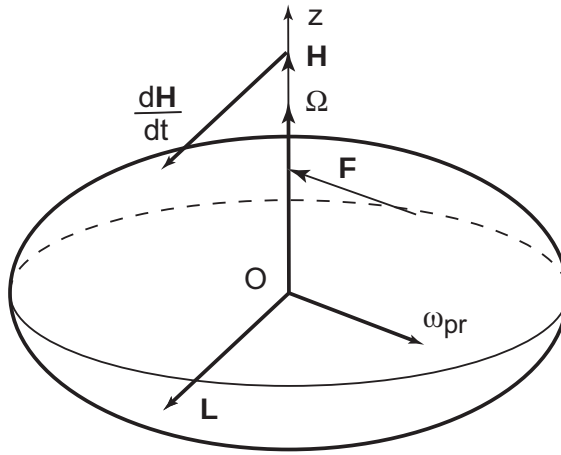


Рис. 6.3. Определение скорости прецессии

Тогда, учитывая, что $\mathbf{H} = (0, 0, C\Omega)^T$ (C—главный момент инерции), получим

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\omega}_{pr} \times \mathbf{H}$$

или

$$|\boldsymbol{\omega}_{pr}| = \frac{|\mathbf{L}|}{C\Omega \sin\phi}, \tag{6.4}$$

где ϕ — угол между векторами $\mathbf{H}$ и угловой скорости прецессии $\boldsymbol{\omega}_{pr}$.

Применительно к рис. 6.2 вектор $\mathbf{L}$ момента пары сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ направлен перпендикулярно плоскости листа в сторону от читателя. В ту же точку направлен и вектор скорости $d\mathbf{H}/dt$. Следовательно, вектор $\boldsymbol{\omega}_{pr}$ направлен в точку южного полюса эклиптики Π_s. Угол ϕ равен $180° - \varepsilon$, т. е. $\sin\phi = \sin\varepsilon$. Это означает, что прецессионное движение оси OP_N происходит по часовой стрелке, если смотреть с северного полюса эклиптики. Рис. 6.2 отражает расположение Земли и Солнца вблизи момента зимнего солнцестояния: в северном полушарии — зима, в южном — лето. Нетрудно проверить, что для летнего солнцестояния (Солнце будет располагаться на рис. 6.2 слева от Земли) момент сил будет направлен в ту же сторону: перпендикулярно плоскости листа от читателя. В моменты солнцестояний момент сил, действующий на экваториальное утолщение Земли, максимален; следовательно, угловая скорость прецессии максимальна.

Во время равноденствий момент сил равен нулю; значит, скорость прецессии равна нулю.

В действительности, мгновенная угловая скорость прецессии складывается из двух частей: первая обусловлена моментом сил притяжения Солнца, вторая — Луны. В результате этого суммарного эффекта северный полюс мира описывает на небесной сфере кривую, близкую к окружности, с угловым радиусом $\varepsilon \approx 23\overset{\circ}{,}5$. Период оборота равняется $1296000''/50\overset{''}{,}3 \approx 25765$ лет.

Изменение расстояния между Землей и Солнцем, Землей и Луной, наклон орбиты Луны к эклиптике приводят к изменению сил, действующих на экваториальное утолщение Земли. В результате величина угла между осями OP_n и $O\Pi_N$ меняется: появляются вариации ε с периодами, равными 18,6 лет, 9,3 года, 1 и 0,5 года, 13,7 суток и т. д. Это — нутационное движение оси вращения Земли.

Притяжение планетами экваториального утолщения Земли также должно вызывать прецессионно-нутационное движение оси мира. Однако из-за большого расстояния и малой по сравнению с Солнцем массы влияние планет мало. Максимальные по амплитуде нутационные гармоники не превышают 0,25 мс дуги. В теории нутации МАС 1980 г. этот эффект не учитывался. В новых, более точных теориях, планетная нутация обязательно учитывается.

Гораздо большее влияние планеты оказывают на положение плоскости эклиптики в пространстве. По определению, плоскость эклиптики — это плоскость, которая перпендикулярна к вектору орбитального углового момента системы Земля–Луна, причем скорость барицентра этой системы вычисляется относительно инерциальной системы отсчета. Влияние планет проявляется в возмущении орбиты Земли, т. е. в изменении положения вектора орбитального углового момента системы Земля–Луна в пространстве. В результате полюс эклиптики смещается примерно на $0\overset{''}{,}5$ в год (рис. 6.1). Смещение полюса эклиптики (прецессия от планет) приводит к дополнительному движению точки весеннего равноденствия навстречу Солнцу на $12''$ в столетие и уменьшению наклона эклиптики к экватору, в настоящее время — на $47''$ в столетие.

Таким образом, лунно-солнечная прецессия приводит к повороту плоскости экватора Земли и, следовательно, небесного экватора относительно эклиптики. Прецессия от планет приводит к изменению положения эклиптики в пространстве. На рис. 6.4 изображе-

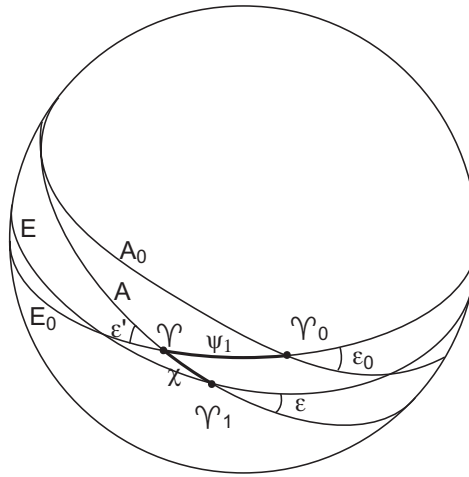


Рис. 6.4. Лунно-солнечная прецессия и прецессия от планет. Положения плоскостей экватора на эпохи T_0 и T обозначены как A_0 и A, плоскостей эклиптики — как E_0 и E. Дуга эклиптики $\Upsilon_0\Upsilon$ (ψ_1) называется лунно-солнечной прецессией за промежуток времени $t = T - T_0$. Дуга $\Upsilon\Upsilon_1$ (χ) среднего мгновенного экватора A называется прецессией от планет.

ны положения плоскостей эклиптики E_0, E и экватора A_0, A на две эпохи T_0 и T. Одну из точек пересечения плоскости эклиптики E_0 и плоскости экватора A_0, заданных на начальную эпоху T_0 — точку весеннего равноденствия — обозначим как Υ_0. В результате прецессии от планет эклиптика изменяет положение (на рисунке это положение обозначено буквой E) и пересекает мгновенный экватор A на эпоху T в точке Υ_1. Определим еще точку Υ как точку пересечения эклиптики начальной эпохи E_0 и мгновенного экватора A.

По определению, системы координат, задающие плоскости эклиптики и небесного экватора, являются *средними* системами координат, а точки весеннего равноденствия $\Upsilon, \Upsilon_0, \Upsilon_1$ называются *средними*. Термин «средняя система координат», используемый в астрометрии, подразумевает, что изменение положения осей систем координат относительно инерциальной системы при преобразовании от одной эпохи к другой происходит только из-за прецессии. Если учитывается нутация, то система координат называется *истинной*.

Положение экваториальной системы относительно эклиптической может быть задано тремя углами Эйлера: $\psi_1, \chi, \varepsilon$. *Угол* ψ_1 *ра-*

вен дуге эклиптики $\Upsilon_0\Upsilon$ и называется лунно-солнечной прецессией за промежуток времени $t = T - T_0$. В результате лунно-солнечной прецессии средняя мгновенная точка весеннего равноденствия Υ смещается навстречу движению Солнца по *эклиптике* из-за прецессионного движения экватора. Это, как показано выше, соответствует прецессионному движению северного полюса мира относительно северного полюса эклиптики по часовой стрелке.

Угол χ равен дуге $\Upsilon\Upsilon_1$ среднего мгновенного экватора A и называется прецессией от планет. В результате прецессии от планет средняя мгновенная точка весеннего равноденствия Υ_1 смещается вдоль среднего мгновенного экватора. Наклон мгновенной эклиптики E к экватору A равен ε, а эклиптики E_0 на начальную эпоху к экватору A равен ε'. Если, согласно Ньюкомбу, обозначить через T_0 промежуток времени в юлианских столетиях от эпохи 1900.0, то прецессионные параметры $\psi_1, \chi, \varepsilon'$ определяются следующими разложениями:

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= (5037''\!,084 + 0''\!,493T_0)t - 1''\!,072t^2,\\
\chi &= (12''\!,473 - 1''\!,887T_0)t - 2''\!,381t^2,\\
\varepsilon' &= \varepsilon + (0''\!,0606 - 0''\!,0092T_0)t^2 - 0''\!,00773t^3.
\end{aligned}$$

При $t = 0$, т. е. для любой начальной эпохи, $\psi_1 = 0$, $\chi = 0$, $\varepsilon' = \varepsilon$. В начальную эпоху, согласно исследованиям Ньюкомба, средний (по астрометрической, а не математической терминологии) наклон эклиптики к экватору равен

$$\varepsilon = 23^\circ 27' 08''\!,26 - 46''\!,845T_0 - 0''\!,0059T_0^2 + 0''\!,00181T_0^3.$$

Так как последняя формула не содержит T, то она определяет наклон эклиптики любой начальной эпохи T_0 к экватору этой эпохи.

В соответствии с решением МАС (1976 г.), принявшим новые значения астрономических постоянных, коэффициенты разложений прецессионных параметров Ньюкомба были перевычислены. Если начальная эпоха T_0 совпадает с фундаментальной J2000.0, то разложения имеют следующий вид:

$$\psi_1 = 5038''\!,7784t - 1''\!,07259t^2 - 0''\!,001147t^3, \tag{6.5}$$

$$\chi = 10''\!,5526t - 2''\!,38064t^2 - 0''\!,001125t^3, \tag{6.6}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - 46''\!,8150t - 0''\!,0059t^2 + 0''\!,001813t^3, \tag{6.7}$$

$$\varepsilon' = \varepsilon_0 + 0''\!,05127t^2 - 0''\!,007726t^3, \tag{6.8}$$

где t — динамическое время в юлианских столетиях от эпохи J2000.0:

$$t = \frac{\mathrm{JD(TCB)} - 2451545,0}{36525}. \tag{6.9}$$

Наклон эклиптики к экватору на эпоху J2000.0 $\varepsilon_0 = 23°26'21''\!,448$.

Годичные скорости лунно-солнечной прецессии и прецессии от планет найдем, продифференцировав уравнения (6.5) и (6.6) и уменьшив результат в 100 раз. Тогда

$$p_1 = \frac{1}{100}\frac{d\psi_1}{dt} = 50''\!,387784 - 0''\!,021452t - 0''\!,000034t^2, \tag{6.10}$$

$$q_1 = \frac{1}{100}\frac{d\chi}{dt} = 0''\!,105526 - 0''\!,047613t - 0''\!,000034t^2, \tag{6.11}$$

Величины p_1, q_1 называются *постоянными лунно-солнечной и планетной прецессии*, соответственно. Из уравнений (6.10-6.11) видно, что величины p_1, q_1 зависят от времени t. Поэтому обязательно нужно указывать эпоху, для которой приводятся значения этих постоянных. Для эпохи J2000.0 постоянные лунно-солнечной и планетной прецессии: $p_1 = 50''\!,387784/$год, $q_1 = 0''\!,105526/$год.

Обратимся теперь к рис. 6.5, на котором изображено годичное смещение в пространстве плоскостей экватора и эклиптики. Проведем круг склонений через точку Υ_0 и его пересечение с экватором A обозначим как N.

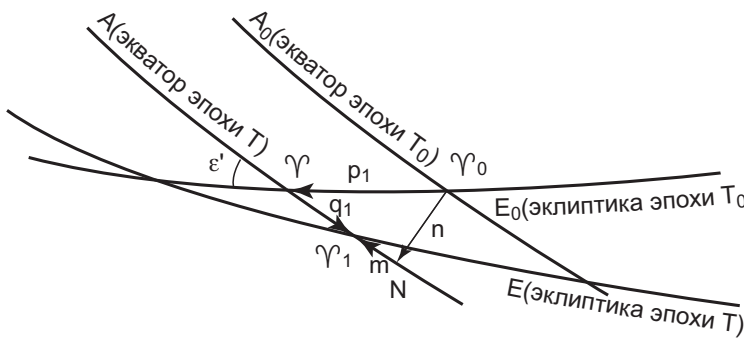


Рис. 6.5. Прецессия по прямому восхождению и склонению, лунно-солнечная прецессия и прецессия от планет.

Из-за малости прецессионных постоянных p_1, q_1 получим из треугольника $\Upsilon\Upsilon_0 N$, который можно считать плоским, соотношения между p_1, q_1 и m, n:

$$m = p_1 \cos\varepsilon' - q_1, \tag{6.12}$$

$$n = p_1 \sin\varepsilon'. \tag{6.13}$$

Величины m, n называются прецессией по прямому восхождению и склонению, соответственно. Значения прецессии по прямому восхождению и склонению для эпохи J2000.0: $m_0 = 4612''\!,4362/$столетие, $n_0 = 2004''\!,3109/$ столетие.

Если исключить из постоянной лунно-солнечной прецессии вклад планетной прецессии, то получим *годичную величину прецессии по долготе p*:

$$p = p_1 - q_1 \cos\varepsilon'. \tag{6.14}$$

Принятое значение постоянной прецессии по долготе для эпохи J2000.0 равно $50''\!,290965/$год $= 5029''\!,0965/$столетие.

6.2. Определение матрицы прецессии

Явление лунно-солнечной прецессии заключается в повороте плоскости экватора относительно плоскости эклиптики. Если с плоскостью экватора связана система координат, то это означает, что прецессия приводит к её вращению относительно инерциальной системы координат. Чтобы учесть влияние прецессии на координаты звезд, используем матричный метод.

Пусть положение экваториальной системы координат с началом в точке O в эпоху T_0 определяется полюсом мира Z_0 и плоскостью экватора, которая задается осями OX_0, OY_0. Эпоха T_0 часто совпадает с одной из фундаментальных эпох (например, J2000.0). Ось OX_0 направлена в точку весеннего равноденствия Υ_0. В результате прецессии экватор поворачивается и в эпоху T займет другое положение, определяемое полюсом Z и точкой весеннего равноденствия Υ, в которую направлена ось OX (рис. 6.6). Положение системы $OXYZ$ относительно $OX_0Y_0Z_0$ определяется с помощью трех углов Эйлера, которые в обозначениях Ньюкомба имеют вид: ζ_A, z_A, θ_A. Согласно определению Ньюкомба: дуга $\widehat{AY}$ равна z_A, $\widehat{AY_0} = \zeta_A$; угол θ_A равен двугранному углу между плоскостями экваторов. Очевидно, что дуга $\widehat{\Upsilon_0 A}$ равна прямому восхождению восходящего узла A

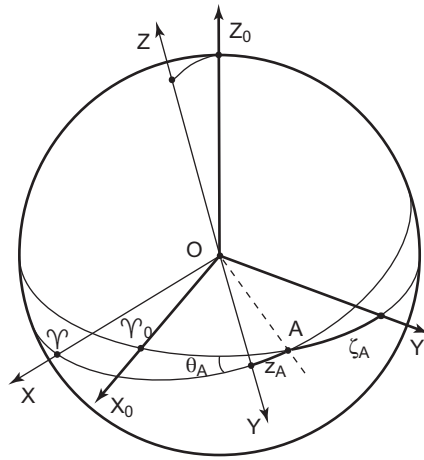


Рис. 6.6. Определение прецессионных параметров Ньюкомба ζ_A, z_A, θ_A.

экватора эпохи T на экваторе эпохи T_0: $\widehat{\Upsilon_0 A} = 90^\circ - \zeta_A$. Соответственно дуга $\widehat{\Upsilon A}$ равна прямому восхождению точки A, отсчитываемому от точки Υ по экватору эпохи T: $\widehat{\Upsilon A} = 90^\circ + z_A$.

Как уже говорилось, по соглашению, системы координат, изменяющие свое положение только из-за прецессии, называются *средними*. Следовательно, системы координат $OX_0Y_0Z_0$, $OXYZ$ являются средними на эпохи T_0 и T. Матричное уравнение

$$\mathbf{r}_0 = P\mathbf{r} \tag{6.15}$$

определяет преобразование координат единичного вектора $\mathbf{r}$ из средней системы в эпоху T к координатам единичного вектора $\mathbf{r}_0$ в эпоху T_0. Матрица P называется *матрицей прецессии* и определяет поворот средней системы за счет прецессии за промежуток времени $T - T_0$. Матрица P является ортогональной. Поэтому обратное преобразование от средней системы в эпоху T_0 к средней системе в эпоху T легко найти, заменив P на транспонированную матрицу P^T:

$$\mathbf{r} = P^T\mathbf{r}_0. \tag{6.16}$$

Явное выражение матрицы прецессии легко найти, воспользовавшись матрицами вращений (2.15). Три правых поворота: первый — относительно оси OZ на угол z_A, второй — относительно

линии узлов, с которой совмещается ось OY, на угол $-\theta_A$, и третий — относительно оси OZ_0 на угол ζ_A переводят систему $OXYZ$ в $OX_0Y_0Z_0$. Таким образом матрица преобразования P координат вектора, заданных на эпоху T, к координатам на эпоху T_0 равна

$$P = R_3(\zeta_A)R_2(-\theta_A)R_3(z_A). \tag{6.17}$$

Обратное преобразование координат от эпохи T_0 на эпоху T определяется матрицей P^T:

$$P^T = R_3(-z_A)R_2(\theta_A)R_3(-\zeta_A). \tag{6.18}$$

Следовательно, при переходе от эпохи T_0 к эпохе T экваториальные координаты преобразуются по матричному уравнению:

$$\begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} \cos\delta_0\cos\alpha_0 \\ \cos\delta_0\sin\alpha_0 \\ \sin\delta_0, \end{pmatrix} \tag{6.19}$$

где координаты звезды α_0, δ_0 относятся к экватору эпохи T_0, а α, δ — к экватору эпохи T.

Численные выражения прецессионных величин z_A, θ_A, ζ_A были найдены Ньюкомбом частично на основе теории прецессии, частично из наблюдений, в виде разложений по двум параметрам: t и t', причем $t' = T_0 - \mathrm{J}2000.0$ и $t = T - T_0$ равны числу юлианских столетий от начальной эпохи до фундаментальной эпохи J2000.0 и произвольной эпохи T от T_0. Если начальная эпоха T_0 совпадает с эпохой J2000.0 (при этом $t' = 0$), разложения принимают более простой вид

$$\begin{aligned} \zeta_A &= 0,5m_0t + 0''\!,30188t^2 + 0''\!,017998t^3, \\ z_A &= 0,5m_0t + 1''\!,09468t^2 + 0''\!,018203t^3, \\ \theta_A &= n_0t - 0''\!,42665t^2 - 0''\!,041833t^3, \end{aligned} \tag{6.20}$$

где m_0, n_0 — прецессии по прямому восхождению и склонению для эпохи J2000.0. Эти выражения были получены Лиске и др. на основе разложений Ньюкомба в системе астрономических констант МАС 1976 г.

Подставляя вместо m_0, n_0 полученные выше значения, находим разложения для прецессионных величин z_A, θ_A, ζ_A:

$$\begin{aligned}
\zeta_A &= 2306''\!,2181t + 0''\!,30188t^2 + 0'',017998t^3,\\
\theta_A &= 2004''\!,3109t - 0''\!,42665t^2 - 0''\!,041833t^3,\\
z_A &= 2306''\!,2181t + 1''\!,09468t^2 + 0''\!,018203t^3,
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Международный астрономический союз рекомендовал использовать разложения (6.5-6.7) и (6.21), начиная с 1984 г.

Заметим, что матрицу прецессии можно найти, используя формулы (6.5-6.7) для вычисления углов ψ_1, χ, ε', где $\varepsilon_0 = 23°26'21''\!,448$ на эпоху J2000.0. Используя рис. 6.4, получим, что для преобразования координат от эпохи T_0 на эпоху T нужно выполнить четыре вращения. Значит матрица

$$P^T = R_3(\chi)R_1(-\varepsilon')R_3(-\psi_1)R_1(\varepsilon_0). \tag{6.22}$$

Матричные уравнения (6.19) и (6.22) являются точными, но вычисления трудоемки. Для приближенных вычислений раньше использовались более простые формулы. Допустим, что звезда на эпоху T_0 имеет экваториальные координаты α_0, δ_0 и эклиптические координаты β_0, λ_0, а на эпоху T — α, δ и β, λ, соответственно. Если предположить, что за короткий промежуток времени между двумя эпохами T_0 и T положение эклиптики не меняется, то, очевидно, эклиптическая широта звезды не меняется. Так как точка весеннего равноденствия смещается из-за прецессии навстречу движению Солнца (см. рис. 6.5), то эклиптическая долгота звезды *увеличится* на величину $p_1(T - T_0)$, если разница эпох $\tau = T - T_0$ измеряется в годах. Таким образом, изменение эклиптических координат из-за лунно-солнечной прецессии:

$$\begin{aligned}
\Delta\beta &= \beta - \beta_0 = 0,\\
\Delta\lambda &= \lambda - \lambda_0 = p_1\tau.
\end{aligned}$$

Чтобы найти изменение экваториальных координат, воспользуемся уравнением (2.11):

$$\sin\delta = \cos\beta\sin\lambda\sin\varepsilon + \sin\beta\cos\varepsilon.$$

Предположим, что за промежуток времени τ наклон эклиптики к экватору не меняется, т. е. $\varepsilon = \varepsilon'$ (рис. 6.5). Тогда изменение склонения

связано с изменением эклиптической долготы посредством уравнения:

$$\cos\delta\Delta\delta = \cos\beta\cos\lambda\sin\varepsilon\Delta\lambda.$$

Воспользовавшись уравнением (2.9)

$$\cos\beta\cos\lambda = \cos\delta\cos\alpha,$$

найдем, что изменение склонения

$$\Delta\delta = p_1\tau\cos\alpha\sin\varepsilon.$$

Дифференцируя (2.9), получим:

$$\cos\delta\sin\alpha\Delta\alpha = \cos\beta\sin\lambda\Delta\lambda - \sin\delta\cos\alpha\Delta\delta$$

или, после подстановки $\Delta\delta$ и $\Delta\lambda$:

$$\cos\delta\sin\alpha\Delta\alpha = p_1\tau(\cos\beta\sin\lambda - \sin\delta\cos^2\alpha\sin\varepsilon).$$

Исключить эклиптические координаты можно, используя формулу подобия (2.14). После преобразований получим, что изменение прямого восхождения звезды

$$\Delta\alpha = p_1\tau(\cos\varepsilon + \operatorname{tg}\delta\sin\alpha\sin\varepsilon).$$

Таким образом, если звезда находится достаточно далеко от полюса мира и интервал времени τ мал (порядка года или меньше), то для перевода экваториальных координат от эпохи T_0 к эпохе T можно использовать формулы:

$$\alpha - \alpha_0 = m + n\operatorname{tg}\delta'\sin\alpha',$$
$$\delta - \delta_0 = n\cos\alpha'.$$

Повторим, что эти формулы приближенные. Поэтому они могут использоваться лишь для оценки прецессионного изменения координат звезд.

Правые части вычисляются итерациями: на первом шаге полагают $\alpha' = \alpha_0$, $\delta' = \delta_0$ и определяют $\alpha^{(0)}$, $\delta^{(0)}$. Результатом первой итерации являются полусуммы: $\alpha'^{(1)} = 1/2(\alpha_0 + \alpha^{(0)})$, $\delta'^{(1)} = 1/2(\delta_0 + \delta^{(0)})$. Значения $\alpha'^{(1)}$, $\delta'^{(1)}$ подставляют в правые части уравнений и выполняют вторую итерацию, и т. д., пока результаты k-ой

итерации $\alpha'^{(k)}$, $\delta'^{(k)}$ не будут отличаться от $\alpha^{(k)}$, $\delta^{(k)}$ на некоторую малую заданную величину.

Рассмотрим теперь вопрос влияния прецессии на скорость изменения экваториальных координат. Продифференцируем по времени уравнение (6.16):

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(P^T \mathbf{r}_0),$$

где $\mathbf{r}, \mathbf{r}_0$ — единичные векторы в направлении звезды в эпохи T и T_0. Тогда

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \Big[\frac{dR_3(-z_A)}{dt} R_2(\theta_A) R_3(-\zeta_A) + R_3(-z_A)\frac{dR_2(\theta_A)}{dt} R_3(-\zeta_A) + R_3(-z_A) R_2(\theta_A)\frac{dR_3(-\zeta_A)}{dt}\Big]\mathbf{r}_0, \tag{6.23}$$

причем

$$\frac{dR_3(-z_A)}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \cos z_A & -\sin z_A & 0 \\ \sin z_A & \cos z_A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin z_A & -\cos z_A & 0 \\ \cos z_A & -\sin z_A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dot{z}_A,$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени. Аналогично вычисляются другие производные. Так как

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} -\sin\delta\cos\alpha\cdot\dot{\delta} - \cos\delta\sin\alpha\cdot\dot{\alpha} \\ -\sin\delta\sin\alpha\cdot\dot{\delta} + \cos\delta\cos\alpha\cdot\dot{\alpha} \\ \cos\delta\cdot\dot{\delta} \end{pmatrix},$$

то, очевидно, что прецессия влияет на скорость изменения экваториальных координат. С точностью до первого порядка $\dot{\alpha} = \mu_\alpha, \dot{\delta} = \mu_\delta$. Это означает, что прецессия приводит к кажущемуся собственному движению звезд, которое может быть вычислено, если только матрица P известна точно. Если углы z_A, θ_A, ζ_A вычисляются с ошибками, т. е. теория прецессии неточна, то эти ошибки приведут к ошибкам в собственных движениях звезд.

При наблюдениях внегалактических радиоисточников считается, что их собственные движения равны нулю. Следовательно, отличие от нуля правой части уравнения (6.23) означает неточность теории прецессии. Приравнять правую часть (6.23) нулю можно, изменив постоянные прецессии. На этом принципе основано уточнение этих постоянных из радиоинтерферометрических наблюдений.

6.3. Прецессионные параметры в теории IAU2000

С 1 января 2003 г. по решению Генеральной Ассамблеи МАС 2000 г. рекомендуется использовать новую теорию прецессии-нутации IAU2000 взамен теории IAU1980. На основе анализа 20-летних наблюдений на РСДБ были определены поправки к ψ_1 (к дуге эклиптики эпохи J2000.0 между средними экваторами эпох T и J2000.0) и углу ε' между эклиптикой эпохи J2000.0 и средним экватором эпохи T (см. рис. 6.4). Обозначим эти поправки как $\Delta\psi_1$ и $\Delta\varepsilon'$, соответственно. Согласно принятой МАС теории IAU2000 эти поправки равны (см. «Стандарты МСВЗ»):

$$\Delta\psi_1 = (-0,29965 \pm 0,0004)''/\text{столетие},$$
$$\Delta\varepsilon' = (-0,02524 \pm 0,0001)''/\text{столетие}.$$

Заметим здесь, что точность определения поправок $\Delta\psi_1$ и $\Delta\varepsilon'$ сильно завышена. На основе сравнения нескольких теорий прецессии-нутации можно сделать вывод, что значения $\Delta\psi_1$ и $\Delta\varepsilon'$ различаются на 3–4 мс дуги.

Добавив поправку $\Delta\psi_1$ к ψ_1 (6.5), а $\Delta\varepsilon'$ к ε' (6.8), получим прецессионные параметры, согласованные с теорией IAU2000:

$$\psi_1 = 5038''\!,47875t - 1''\!,07259t^2 - 0''\!,001147t^3, \tag{6.24}$$
$$\varepsilon' = \varepsilon_0 - 0''\!,02524t + 0''\!,05127t^2 - 0''\!,007726t^3, \tag{6.25}$$
$$\varepsilon = \varepsilon_0 - 46''\!,84024t - 0''\!,0059t^2 + 0''\!,001813t^3, \tag{6.26}$$
$$\chi = 10''\!,5526t - 2''\!,38064t^2 - 0''\!,001125t^3. \tag{6.27}$$

Величина прецессии от планет χ не меняется. Матрица прецессии, соответствующая теории IAU2000, может быть найдена по формуле (6.22), где ψ_1 и ε' находятся по разложениям (6.24-6.25).

Если для вычисления матрицы прецессии (6.18) используются прецессионные величин z_A, θ_A, ζ_A, то их изменение можно найти следующим образом.

Пусть $m' = m_0 + \Delta m, n' = n_0 + \Delta n$. Тогда

$$m' = 100[(p_1 + \Delta p)\cos(\varepsilon' + \Delta\varepsilon') - q_1],$$
$$n' = 100[(p_1 + \Delta p)\sin(\varepsilon' + \Delta\varepsilon'),$$

$\Delta p = \Delta\psi_1/100$. С точностью до первого порядка имеем:

$$\Delta m = 100(\Delta p\cos\varepsilon' - p_1\Delta\varepsilon'\sin\varepsilon'),$$
$$\Delta n = 100(\Delta p\sin\varepsilon' + p_1\Delta\varepsilon'\cos\varepsilon').$$

Значит поправки к прецессионным величинам z_A, θ_A, ζ_A равны:

$$\Delta z_A = \Delta\zeta_A = 0,5\Delta m,$$
$$\Delta\theta_A = \Delta n.$$

Это приближенные значения. Для вычисления прецессионных величин z_A, θ_A, ζ_A с микросекундной точностью требуется использовать следующие выражения, полученные Н. Капитайн и соавторами и рекомендуемые МСВЗ:

$$\begin{aligned}
\zeta_A &= 2''\!,5976176 + 2306''\!,0809506t + 0''\!,3019015t^2 \\
&\quad + 0''\!,0179663t^3 - 0''\!,0000327t^4 - 0''\!,0000002t^5, \\
\theta_A &= 2004''\!,1917476t - 0''\!,4269353t^2 - 0''\!,0418251t^3 \\
&\quad - 0''\!,0000601t^4 - 0''\!,0000001t^5, \\
z_A &= -2''\!,5976176 + 2306''\!,0803226t + 1''\!,0947790t^2 \\
&\quad + 0''\!,0182273t^3 + 0''\!,0000470t^4 - 0''\!,0000003t^5.
\end{aligned}$$

6.4. Математическое описание прецессии

Рассмотрим вращающуюся систему координат $Oxyz$, жестко связанную с Землей, и инерциальную систему $OXYZ$, которая связана с эклиптикой, фиксированной на момент T_0. Ориентация земной системы координат относительно $OXYZ$ полностью определяется углами Эйлера. Для преобразования координат точки из системы $Oxyz$ в инерциальную систему необходимо выполнить три поворота: первое вращение, соответствующее изменению угла прецессии Ψ, происходит вокруг оси OZ с угловой скоростью $\mathbf{k}_e \cdot d\Psi/dt$; второе вращение, которое приводит к изменению угла нутации Θ, происхо-

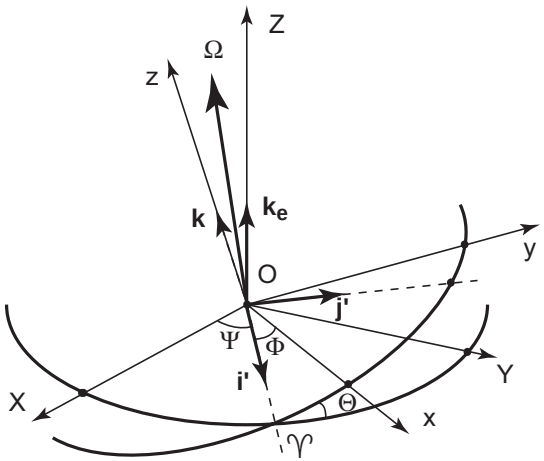


Рис. 6.7. К выводу кинематических уравнений Эйлера.

дит относительно линии узлов со скоростью $\mathbf{i}' \cdot d\Theta/dt$, где $\mathbf{i}'$ — единичный вектор, направленный в точку ♈ восходящего узла эклиптики; третье вращение, соответствующее изменению угла Φ, происходит вокруг оси Oz с угловой скоростью $\mathbf{k} \cdot d\Phi/dt$ (рис. 6.7).

Следовательно, вектор угловой скорости вращения $\mathbf{\Omega}$ системы координат $Oxyz$, связанной с Землей, относительно инерциальной системы может быть представлен в виде:

$$\mathbf{\Omega} = \dot{\Psi}\mathbf{k}_e + \dot{\Theta}\mathbf{i}' + \dot{\Phi}\mathbf{k}, \tag{6.28}$$

где точка обозначает производную по времени.

Чтобы найти проекции вектора $\mathbf{\Omega}$ на оси земной системы координат, составим таблицу направляющих косинусов единичных векторов $\mathbf{k}_e$, $\mathbf{i}'$, $\mathbf{k}$ относительно ортов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ осей Ox, Oy, Oz:

	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{k}_e$	$\sin\Theta\sin\Phi$	$\sin\Theta\cos\Phi$	$\cos\Theta$
$\mathbf{i}'$	$\cos\Phi$	$-\sin\Phi$	0
$\mathbf{k}$	0	0	1

Для пояснения разложения на рис. 6.7 нарисована ось с единичным вектором $\mathbf{j}'$, перпендикулярная линии узлов и лежащая в плос-

кости экватора. Проекции вектора $\mathbf{k}_e$ на $\mathbf{k}$ и $\mathbf{j}'$ равны $\cos\Theta$ и $\sin\Theta$, соответственно, т. е.

$$\mathbf{k}_e = \mathbf{k}\cos\Theta + \mathbf{j}'\sin\Theta.$$

Проекция $\mathbf{k}_e$ на $\mathbf{i}'$ равна нулю. Проецируя вектор $\mathbf{j}'$ на оси Ox и Oy получим:

$$\mathbf{j}' = \mathbf{i}\sin\Phi + \mathbf{j}\cos\Phi.$$

Обозначим проекции вектора $\mathbf{\Omega}$ на оси Ox, Oy, Oz как $\omega_x, \omega_y, \omega_z$. Используя таблицу направляющих косинусов и уравнение (6.28) получим:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\Psi}\sin\Theta\sin\Phi + \dot{\Theta}\cos\Phi, \\ \omega_y &= \dot{\Psi}\sin\Theta\cos\Phi - \dot{\Theta}\sin\Phi, \\ \omega_z &= \dot{\Psi}\cos\Theta + \dot{\Phi}. \end{aligned} \tag{6.29}$$

Уравнения (6.29) называются кинематическими уравнениями Эйлера. Они устанавливают связь между проекциями вектора угловой скорости $\mathbf{\Omega}$ на оси земной системы координат, углами Эйлера и их первыми производными по времени.

Для полного описания вращения тела в пространстве кинематических уравнений Эйлера недостаточно, так как в три уравнения входят шесть неизвестных величин: проекции мгновенной угловой скорости $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ на оси земной системы координат и производные углов Эйлера $\dot{\Psi}$, $\dot{\Theta}$, $\dot{\Phi}$, представляющих движение оси вращения относительно инерциальной системы координат.

Поэтому для определения положения тела в пространстве в зависимости от сил, приложенных к телу, необходимо использовать *динамические уравнения Эйлера*. Совместное использование кинематических и динамических уравнений Эйлера дает возможность определить положение осей системы координат, связанной с Землей, в пространстве (т. е. описать прецессию и нутацию), а также найти положение мгновенной оси вращения относительно земной системы координат (т. е. описать движение полюса и неравномерность вращения Земли).

Рассмотрим явление прецессии–нутации более подробно. Для этого предположим, что Земля является деформируемым телом. С Землей тем или иным способом жестко связана система координат,

которая вращается с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$ относительно инерциальной системы координат.

Определим вектор момента импульса (или углового момента) Земли $\mathbf{H}$ следующим образом:

$$\mathbf{H} = \iiint\limits_V \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} dM, \tag{6.30}$$

где $\mathbf{r}$, $\dot{\mathbf{r}}$ — радиус-вектор и скорость элемента массы dM в земной системе координат. Так как для твердого тела $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$, где $\mathbf{\Omega}$ — вектор угловой скорости вращения Земли, то, вычислив двойное векторное произведение $\mathbf{r} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})$, получим:

$$H_i = I_{ij}\omega_j,$$

где

$$I_{ij} = \iiint\limits_V (x_k x_k \delta_{ij} - x_i x_j) dM$$

есть компоненты тензора инерции I, δ_{ij} — символ Кронекера, индексы i, j, k принимают значения $1, 2, 3$. Здесь для краткости записи мы положили, что проекции векторов на ось Ox отмечаются индексом 1, соответственно проекции на оси Oy, Oz — индексами 2 и 3.

В векторном виде имеем (6.2):

$$\mathbf{H} = I\mathbf{\Omega}$$

где матрица

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{12} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{13} & -I_{23} & I_{33} \end{pmatrix}$$

называется тензором инерции. Матрица I симметрична: $I_{ij} = I_{ji}$. Поэтому можно выбрать оси системы координат таким образом, что матрица I станет диагональной (см. § 1.2) :

$$I = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}.$$

Оси выбранной таким образом системы координат называются *главными осями инерции*, а A, B, C — *главными моментами инерции*. Иногда ось системы координат, совпадающую с максимальным моментом инерции C, называется *осью фигуры* Земли. Далее будем считать, что оси системы координат $Oxyz$, связанной с Землей, совпадают с главными осями инерции. Тогда относительно этих осей уравнение (6.2) записывается в виде:

$$H_x = A\omega_x,\ H_y = B\omega_y,\ H_z = C\omega_z. \tag{6.31}$$

Вращение тела под действием момента сил $\mathbf{L}$ в системе, связанной с телом, описывается уравнением (6.3):

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{H} = \mathbf{L}.$$

Учитывая уравнения (6.31), получим:

$$\dot{H}_x = A\dot{\omega}_x,\ \dot{H}_y = B\dot{\omega}_y,\ \dot{H}_z = C\dot{\omega}_z,$$

где точка означает дифференцирование по времени. Тогда векторное уравнение (6.3) относительно главных осей инерции можно записать в виде системы:

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_x + (C - B)\omega_y\omega_z &= L_x, \\ B\dot{\omega}_y + (A - C)\omega_x\omega_z &= L_y, \\ C\dot{\omega}_z + (B - A)\omega_x\omega_y &= L_z, \end{aligned} \tag{6.32}$$

которая была получена Эйлером. Уравнения (6.32) называются динамическими уравнениями Эйлера и являются основными уравнениями, описывающими вращение тела. Первые два уравнения (6.32) описывают изменение положения вектора угловой скорости вращения $\mathbf{\Omega}$ в теле Земли, т. е. движение полюса. Третье из уравнений (6.32) отражает вариации угловой скорости вращения Земли при воздействии на нее аксиального (направленного по оси Oz) момента сил. Исследование этого уравнения представляет особый интерес, однако эта задача выходит за рамки данного учебника (см., например, монографии Г. Морица, А. Мюллера (1992); Н. С. Сидоренкова (2002)).

Рассмотрим первые два уравнения (6.32).

При изучении прецессии, нутации, движения полюса и приливов под моментом сил $\mathbf{L}$ понимают момент, создаваемый силами притяжения Луны и Солнца. Потенциал сил притяжения, или приливный потенциал, v играет основную роль во всех этих явлениях. Если dM — элемент массы Земли, то сила, действующая на этот элемент со стороны Луны и Солнца,

$$\mathbf{F} = dM \cdot \operatorname{grad} v.$$

Согласно определению,

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{F},$$

где суммирование ведется по всем точечным массам, из которых состоит Земля, $\mathbf{F}$ — внешняя сила, действующая на эти точечные массы, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор от внешнего тела к каждой из этих масс. Переходя от суммы к интегралу по объему Земли, получим полный момент лунно-солнечных сил притяжения

$$\mathbf{L} = \int_V \mathbf{r} \times \operatorname{grad} v dM. \tag{6.33}$$

Точное вычисление интеграла (6.33) — довольно трудная задача. Но поскольку скорость прецессии $\dot{\Psi}$ и нутации $\dot{\Theta}$ гораздо меньше угловой скорости вращения Земли $\dot{\Phi}$ (примерно в 10^7 и $7 \cdot 10^3$ раз, соответственно), то можно: 1) легко получить приближенные уравнения прецессии–нутации и 2) использовать более простой подход, при котором прецессия и нутация рассматривается как возмущение вращения Земли. Для этого подставим два первых кинематических уравнения Эйлера (6.29) в (6.32). Считая, что $\dot{\Theta} \ll \dot{\Phi}$, $\dot{\Psi} \ll \dot{\Phi}$, $\dot{\Phi} = \omega_z = \Omega = \text{const}$ и $A = B$, получим:

$$-C\Omega\dot{\Theta} = L_x \sin\Phi + L_y \cos\Phi,$$

$$-C\Omega\dot{\Psi}\sin\Theta = -L_x \cos\Phi + L_y \sin\Phi.$$

При выводе этих уравнений мы пренебрегли членами, которые содержат вторые производные $\ddot{\Psi}$, $\ddot{\Theta}$, а также произведения $\dot{\Psi}\dot{\Theta}$, по сравнению с членами, пропорциональными $\dot{\Phi}$.

Умножая второе уравнение на $i = \sqrt{-1}$ и складывая оба уравнения, получим:

$$C\Omega(\dot{\Theta} + i\dot{\Psi}\sin\Theta) = -ie^{i\Phi}(L_x + iL_y)$$

или

$$\dot{\Theta} + i\dot{\Psi}\sin\Theta = -\frac{i}{C\Omega}Le^{i\Phi}, \tag{6.34}$$

где $L = L_x + iL_y$. Уравнение (6.34) называется *уравнением Пуассона* и является основой классической теории прецессии и нутации.

Для приближенных вычислений используем следующий прием. Момент сил, действующий со стороны Луны (Солнца) на Землю, равен моменту сил с противоположным знаком, действующему со стороны Земли на Луну (Солнце). Поэтому вычислим потенциал Земли в *точке* с массой, равной массе Луны или Солнца ($m = M_☾$ или $m = M_\odot$) и совпадающей с центром Луны или Солнца. Потенциал притяжения Земли в точке с координатами r, θ, λ дается формулой (3.17):

$$U = \frac{GM}{r} - \frac{G}{2r^3}(C - A)(3\cos^2\theta - 1),$$

где θ — полярное расстояние. В разложении потенциала (3.17) кроме члена, пропорционального r^{-1}, имеется второй член, пропорциональный r^{-3} и зависящий от θ, который вызван сжатием Земли. Этот член зависит от полярного расстояния Луны или Солнца. Поэтому на массу m, расположенную на расстоянии r от центра масс Земли и полярном расстоянии θ, кроме центральной силы тяготения, равной $m\partial U/\partial r$, действует сила $\frac{m}{r}\partial U/\partial\theta$[3]. Вектор этой силы лежит в меридиональной плоскости, проходящей через Луну (Солнце). Компоненты силы, пропорциональной $\partial U/\partial\lambda$, нет. Это вызвано предположением, что $A = B$, т. е. вращательной симметрией фигуры Земли.

Следовательно, момент силы, действующий на точку с массой m со стороны Земли, $\mathbf{L} = -m\mathbf{r} \times \operatorname{grad} U$, $\mathbf{r}$ — геоцентрический радиус-вектор Луны или Солнца. Используя определение векторного произведения, получим:

$$\mathbf{L} = -m\begin{pmatrix} \mathbf{i}_r & \mathbf{i}_\theta & \mathbf{i}_\lambda \\ r & 0 & 0 \\ \frac{\partial U}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta} & \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\lambda} \end{pmatrix} = -m\mathbf{i}_\lambda\left(r\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}\right),$$

[3]Сила, действующая на тело, определяется градиентом гравитационного потенциала, который в сферической системе координат имеет вид (3.3).

так как $\partial U/\partial\lambda = 0$ и единичные векторы $\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\theta, \mathbf{i}_\lambda$ образуют правую тройку. Дифференцируя потенциал U (3.17) по θ получим, что момент, действующий на Солнце, равен

$$\mathbf{L} = -\mathbf{i}_\lambda M_\odot r_\odot \cdot \frac{1}{r_\odot}\frac{\partial U}{\partial\theta} = -\mathbf{i}_\lambda \frac{3GM_\odot}{r_\odot^3}(C-A)\cos\theta\sin\theta,$$

$r_\odot$ — расстояние от Земли до Солнца. Аналогично вычисляется момент, действующий на Луну. Необходимо лишь заменить $M_\odot$ на $M_☾$ и $r_\odot$ на $r_☾$. Из формулы видно, что момент направлен по нормали к меридиональной плоскости, проходящей через Солнце.

Проекции вектора $\mathbf{i}_\lambda$ на оси Ox, Oy земной системы координат равны $-\sin\lambda, \cos\lambda$, и компоненты вектора $\mathbf{L}$, следовательно, равны:

$$\begin{aligned} L_x &= \frac{3GM_\odot}{r_\odot^3}(C-A)\cos\theta\sin\theta\sin\lambda, \\ L_y &= -\frac{3GM_\odot}{r_\odot^3}(C-A)\cos\theta\sin\theta\cos\lambda. \end{aligned} \tag{6.35}$$

Так как момент сил, действующий на Землю со стороны Солнца, равен $-L$, то, используя (6.4) и учитывая, что $\theta = 90^\circ - \delta_\odot$, получим мгновенную угловую скорость прецессии

$$\omega_{pr} = -\frac{|L|}{C\Omega\sin\varepsilon} = -\frac{3GM_\odot}{2\Omega r_\odot^3}\frac{C-A}{C}\frac{|\sin 2\delta_\odot|}{\sin\varepsilon}.$$

Знак минус говорит о том, что ось вращения прецессирует вокруг направления на северный полюс эклиптики в направлении, противоположном вращению Земли. Усреднение $|\sin 2\delta_\odot|$ в течение года дает

$$\overline{\omega_{pr}} = -\frac{3}{2}\frac{GM_\odot}{\Omega r_\odot^3}\frac{C-A}{C}\cos\varepsilon.$$

Подставляя значения параметров, получим, что вклад Солнца в прецессию составляет $\sim 15''\!,51$. Так как плоскость орбиты Луны близка к плоскости эклиптики, то вклад Луны в прецессию можно оценить по этой же формуле, заменив $M_\oplus$ на $M_☾$. Близкое расстояние до Луны компенсирует малую по сравнению с Солнцем массу, и величина прецессии от Луны $\sim 34''\!,90$ в год. Полная средняя скорость прецессии $\sim 50''\!,41$ в год. С учетом геодезической прецессии скорость лунно-солнечной прецессии $\sim 50''\!,39$ в год.

Прецессия определяется параметром $H = (C - A)/C = 0,00327$, который называется *динамическим сжатием Земли*.

Вернемся теперь к уравнению Пуассона (6.34). Момент сил, действующий на Землю со стороны Луны и Солнца, пропорционален функции $\sin\delta\cos\delta$ (6.35), так как $\theta = 90^\circ - \delta$, где δ — склонение Луны или Солнца. Эта функция зависит от наклона эклиптики и лунной орбиты к экватору, эксцентриситетов лунной и земной орбит, среднего движения Земли и Луны по орбитам и т. д. Общепринятым методом вычисления этой функции является использование ряда Фурье, причем частота каждой гармоники определяется производной по времени от комбинации фундаментальных аргументов (6.42). Поэтому момент сил выражается как сумма гармоник определенных приливных частот ω_j:

$$L = L_x + iL_y = (C - A)\Omega^2 \sum_j B_j e^{-i(\omega_j t + \beta_j)}.$$

Амплитуды гармоник B_j вычисляются на основе используемых эфемерид.

Так как угол Φ в уравнении (6.34) — это угол поворота Земли за промежуток времени t, то, пренебрегая неравномерностью вращения, можно написать: $\Phi = \Omega t$. Тогда уравнение Пуассона примет вид:

$$\dot{\Theta} + i\dot{\Psi}\sin\Theta = -i\frac{C - A}{C}\Omega \sum_j B_j e^{-i(\Delta\omega_j t + \beta_j)}, \tag{6.36}$$

где

$$\Delta\omega_j = \omega_j - \Omega. \tag{6.37}$$

Уравнение (6.37) представляет определение нутационной частоты $\Delta\omega_j$. Для этого необходимо из соответствующей приливной частоты ω_j **вычесть** сидерическую частоту (скорость) вращения Земли. Причины этого понятны: приливные частоты определяются относительно земной вращающейся системы координат, тогда как нутационные частоты — относительно инерциальной системы, а скорость вращения земной системы координат равняется Ω.

Для нутации в небесной и движения полюса в земной системе координат определим нормированные частоты: $\sigma_C = -\Delta\omega/\Omega$, $\sigma_T = -\omega/\Omega$, и перепишем уравнение (6.37) в виде:

$$\sigma_C = \sigma_T + 1. \tag{6.38}$$

Период нутационной гармоники и той же гармоники в движении полюса (в звездных сутках) равен:

$$P_C = \frac{1}{\sigma_C}, \quad P_T = \frac{1}{\sigma_T}, \tag{6.39}$$

в небесной и земной системах координат, соответственно. На основе уравнения (6.38) можно сформулировать правило: долгопериодические в инерциальной системе нутационные гармоники в земной системе имеют период, близкий к звездным суткам.

Гармоника момента сил с частотой $\sigma_T = -1$ или Ω в земной системе имеет частоту $\sigma_C = 0$ или $\Delta\omega = 0$ в инерциальной системе. Этой гармонике соответствует прецессия или суточная приливная гармоника, обозначаемая как K_1. Часть приливных гармоник имеет период меньший, другая часть — больший, чем продолжительность звездных суток, т. е. частота $\sigma_T < -1$ в первом случае и $\sigma_T > -1$ во втором. Соответствующие им нутационные гармоники будут иметь отрицательные или положительные частоты. Если частота нутационной гармоники σ_C положительна, то это означает, что направление движения оси Oz земной системы координат под действием гармоники ω_j лунно-солнечной силы притяжения совпадает с направлением вращения Земли. Такое движение оси называется прямым. Если $\sigma_C < 0$, то движение оси называется обратным.

6.5. Точные формулы учета нутации

Для математического описания нутации воспользуемся уравнением Пуассона в виде (6.36). Момент сил L, как говорилось выше, периодически изменяется из-за эллиптичности орбиты Земли, эллиптичности орбиты Луны, наклона орбиты Луны к эклиптике. Эти периодические изменения вызывают периодическое движение оси мира — нутацию, которое накладывается на медленное прецессионное движение. В самом деле, интегрируя уравнение (6.36), имеем:

$$\begin{aligned}\Theta + i\Psi\sin\Theta = C_1 + iC_2 - i\frac{C-A}{C}B_0\Omega(t-t_0)\\ + \frac{C-A}{C}\sum_j \frac{\Omega}{\Delta\omega_j}B_j e^{-i(\Delta\omega_j t+\beta_j)}.\end{aligned}$$

Здесь мы считаем, что прецессии соответствует гармоника B_0 с частотой $\Delta\omega_0 = 0$, а $(C_1 + iC_2)$ — константа интегрирования. Полагая теперь, что

$$\Theta - C_1 = \Delta\varepsilon, \quad \Psi \sin\Theta - C_2 = \Delta\psi \sin\Theta,$$

получим окончательное выражение:

$$\Delta\varepsilon + i\Delta\psi \sin\Theta = -i\frac{C-A}{C}B_0\Omega(t-t_0) + \\ + \frac{C-A}{C}\sum_j \frac{\Omega}{\Delta\omega_j}B_j e^{-i(\Delta\omega_j t + \beta_j)}. \qquad (6.40)$$

Первый член в правой части линейно растет со временем; этот вековой член определяет прецессию. Второй член является суммой нутационных гармоник. Действительные выражения для углов $\Delta\varepsilon, \Delta\psi$ могут быть получены выделением действительной и мнимой частей уравнения.

Из (6.40) следует, что прецессия влияет только на $\Delta\psi$. Нутация приводит к изменению как угла Ψ на величину $\Delta\psi$ (*нутация в долготе*), так и угла Θ на $\Delta\varepsilon$ (*нутация в наклоне*). Как прецессия, так и нутация определяются динамическим сжатием Земли. При уменьшении сжатия прецессия и нутация также уменьшаются.

Полюс мира, движущийся относительно среднего полюса вследствие нутации, называется *истинным полюсом мира*. Плоскость, перпендикулярная оси, направленной в истинный полюс мира, называется *истинным экватором*. Нутационное движение происходит по эллипсу. Амплитуда главного члена нутации в долготе $\Delta\psi$ равна примерно $17''\!,20$, период равен $6798,4$ суток или $\sim 18,6$ года; главный член нутации в наклоне $\Delta\varepsilon$ имеет тот же период. Амплитуда этой гармоники равна примерно $9''\!,20$ и известна как *постоянная нутации*. Главный член нутации обусловлен несовпадением плоскости орбиты Луны с эклиптикой и попятным движением узлов лунной орбиты по эклиптике.

На эллипсоидальное главное нутационное движение накладываются петли, которые описывает истинный полюс мира с периодами от 9 лет до нескольких суток (см. рис. 1). Основными гармониками являются гармоники с периодами, равными году, половине года, половине месяца. Теория нутации IAU1980 включает 106 нутацион-

ных членов. В соответствии с принятой практикой нутация в долготе и наклоне может быть найдена по следующим формулам:

$$\Delta\psi = \sum_{i=1}^{106}(A_i + A_i' t)\sin\vartheta, \quad \Delta\varepsilon = \sum_{i=1}^{106}(B_i + B_i' t)\cos\vartheta, \tag{6.41}$$

где

$$\vartheta = \sum_{j=1}^{5} n_j F_j, \tag{6.42}$$

n_j — целые числа, $F_j, (j = 1, \ldots 5)$ — фундаментальные аргументы, определяемые выражениями:

$$\begin{aligned}
F_1 &\equiv l = \text{средняя аномалия Луны} \\
&= 134^\circ\!,96340251 + 1717915923''\!,2178t + 31''\!,8792t^2 \\
&+ 0''\!,051635t^3 - 0''\!,00024470t^4, \\
F_2 &\equiv l' = \text{средняя аномалия Солнца} \\
&= 357^\circ\!,52910918 + 129596581''\!,0481t - 0''\!,5532t^2 \\
&- 0''\!,000136t^3 - 0''\!,00001149t^4, \\
F_3 &\equiv F = L - \Omega \\
&= 93^\circ\!,27209062 + 1739527262''\!,8478t - 12''\!,7512t^2 \\
&- 0''\!,001037t^3 + 0''\!,00000417t^4, \\
F_4 &\equiv D = \text{средняя элонгация Луны от Солнца} \\
&= 297^\circ\!,85019547 + 1602961601''\!,2090t - 6''\!,3706t^2 \\
&+ 0''\!,006593t^3 - 0''\!,00003169t^4, \\
F_5 &\equiv \Omega = \text{средняя долгота восходящего узла Луны} \\
&= 125^\circ\!,04455501 - 6962890''\!,5431t + 7''\!,4722t^2 \\
&+ 0''\!,007702t^3 - 0''\!,00005939t^4,
\end{aligned}$$

где t измеряется в юлианских столетиях по 36525 суток от эпохи J2000.0 (6.9), L — средняя долгота Луны.

Теория нутации IAU2000 содержит около 1500 членов; углы $\Delta\psi, \Delta\varepsilon$ выражаются в виде:

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= \sum_{i=1}^{N}(A_i + A_i' t)\sin\vartheta + (A_i'' + A_i''' t)\cos\vartheta, \\ \Delta\varepsilon &= \sum_{i=1}^{N}(B_i + B_i' t)\cos\vartheta + (B_i'' + B_i''' t)\sin\vartheta. \end{aligned} \tag{6.43}$$

Коэффициенты $A_i'', A_i''', B_i'', B_i'''$, появляющиеся в разложениях (6.43), определяются неупругими свойствами Земли и диссипацией приливной энергии.

Процедура IAU2000A.f на языке Фортран имеется на сайте: ftp://maia.usno.navy.mil/conv2000/ chapter5/IAU2000A.f.

Пользователи, которым достаточна точность вычисления углов $\Delta\psi, \Delta\varepsilon \sim 1$ мс дуги, могут использовать усеченное разложение (6.43) (процедура IAU2000B.f).

После того как по теории нутации найдены углы $\Delta\psi, \Delta\varepsilon$, можно вычислить *матрицу нутации* N, необходимую для преобразования между средней и истинной системами координат. Для ее определения воспользуемся рис. 6.8, на котором показан средний экватор и эклиптика на эпоху T и истинный экватор на эту же эпоху. Точка весеннего равноденствия, соответствующая среднему экватору, обозначена как Υ_M, а истинному экватору — как Υ_T.

Преобразование от истинной системы к средней выполняется с использованием следующих вращений: 1) относительно оси, проходящей через точку Υ_T и направленной к читателю, на угол $\varepsilon + \Delta\varepsilon$, 2) относительно истинной оси мира на угол $\Delta\psi$, 3) относительно оси, проходящей через точку Υ_M, на $-\varepsilon$. Таким образом, матрица N определяется выражением

$$N = R_1(-\varepsilon)R_3(\Delta\psi)R_1(\varepsilon + \Delta\varepsilon). \tag{6.44}$$

Обратный переход (от средней системы к истинной) выполняется при помощи матрицы N^T:

$$N^T = R_1(-\varepsilon - \Delta\varepsilon)R_3(-\Delta\psi)R_1(\varepsilon).$$

Наклон эклиптики к экватору вычисляется по формуле (6.7).

Рис. 6.8. Учет нутации при преобразовании между системами координат.

Точный учет прецессии и нутации (переход от среднего экватора и равноденствия T_0 к истинному экватору и равноденствию T) выполняется с помощью уравнения:

$$\mathbf{r}(T) = N^T P^T \mathbf{r}(T_0), \tag{6.45}$$

где $\mathbf{r}(T), \mathbf{r}(T_0)$ — единичные радиусы-векторы в направлении звезды в эпохи T и T_0; обратное преобразование

$$\mathbf{r}(T_0) = PN\mathbf{r}(T). \tag{6.46}$$

В «Астрономическом ежегоднике» приводятся ежедневные значения девяти элементов матрицы $N^T P^T$ на текущий год (эпохой T_0 является J2000.0).

6.6. Преобразование из земной к небесной системе координат

Обработка любых наблюдений какого-либо объекта, проводимых с Земли, требует знания матрицы преобразования от небесной (НСК) к земной системе координат (ЗСК).

В данном разделе мы получим классическое выражение этой матрицы на основе экваториальных параметров z_A, θ_A, ζ_A для прецессии, $\Delta\psi, \varepsilon + \Delta\varepsilon$ для нутации, параметров вращения Земли x_p, y_p,

UT1 и поправок к нутационным углам $\delta\psi$, $\delta\varepsilon$. Также мы рассмотрим концепцию так называемого «невращающегося начала отсчета» (non-rotating origin, NRO), определим на ее основе новые параметры вращения Земли и соответствующую им матрицу преобразования.

6.6.1. Определение небесного эфемеридного полюса

В принципе, для изучения вращения ЗСК относительно НСК достаточно знать три угла Эйлера и их производные по времени. Однако исторически ситуация сложилась таким образом, что удобнее оказалось ввести промежуточную систему, движение которой относительно НСК определяется принятой теорией прецессии–нутации, а движение ЗСК относительно промежуточной системы — параметрами вращения Земли. Так как общее число вводимых параметров больше трех, то очевидно, что они связаны между собой. Иными словами, вопрос звучит так: какие гармоники в движении осей промежуточной системы считать нутационными, а какие отнести к движению полюса?

Этот вопрос решается на основе соглашения. Важно отметить, что системы отсчета, именуемые GCRS и ITRS, заданы, и по определению вращение Земли математически связано с ориентацией координатных осей первой системы относительно осей второй. Напомним, что оси GCRS параллельны осям барицентрической системы ICRS, а начало совпадает с центром масс Земли. Положение осей промежуточной системы отсчета на эпоху T относительно GCRS задается выражением (6.45). Следовательно, кинематическое преобразование (6.45) определяет ориентацию осей промежуточной системы, которая служит основой для изучения вращения Земли. Как следует из определения, эта система не связана с мгновенной осью вращения Земли. Ориентация земной системы координат относительно промежуточной задается параметрами вращения Земли.

Рассмотрим теперь принципы, лежащие в основе выбора промежуточной системы и ее осей.

Во-первых, Международный астрономический союз принял в качестве небесной системы отсчета систему, опирающуюся на координаты внегалактических радиоисточников. Из-за больших расстояний до выбранных радиоисточников их собственные движения малы, и реализованная небесная система координат близка к инерциальной. Во-вторых, земная система координат определяется так,

что поле деформаций земной коры не имеет глобального вращения. В-третьих, за последнее десятилетие были построены значительно более точные теории прецессии–нутации Земли, чем теория IAU1980. В современных теориях учитываются нутационные гармоники с периодами до половины суток ($\sigma_C = 2$ в инерциальной системе), а из наблюдений находятся суточные и полусуточные ($\sigma_T = 1$, $\sigma_T = 2$ в земной системе) гармоники в движении полюса. Так как, например, прямой полусуточной нутации ($\sigma_C = 2$) согласно уравнению (6.38) соответствует прямая суточная гармоника ($\sigma_T = 1$) в движении полюса, то возникает необходимость разделить эти движения.

Наблюдения, проводимые с поверхности Земли, определяют положение полюса земной системы координат (тиссерановой оси Oz), относительно полюса промежуточной системы. Этот полюс и называется *небесным эфемеридным полюсом*, НЭП (Celestial Ephemeris Pole, CEP). Очевидно, что положение НЭП на небесной сфере определяется теорией прецессии и нутации на основе (6.45).

Координаты небесного эфемеридного полюса в земной системе называются *координатами полюса* (x_p, y_p). Угол, на который Земля поворачивается относительно НЭП за промежуток атомного времени, называется *гринвичским истинным звездным временем* (Greenwich Apparent Sidereal Time, GAST). С помощью процедуры, изложенной в § 6.6.2 гринвичское истинное звездное время может быть преобразовано во всемирное время UT1 (и наоборот UT1 в GAST).

Так как теория прецессии и нутации построена с некоторыми ошибками, то преобразование (6.45) также выполняется с ошибками. Эти ошибки (или углы $\delta\psi$, $\delta\varepsilon$) находятся из наблюдений на РСДБ как поправки к вычисленным на основе принятой МАС теории нутации углам $\Delta\psi$, $\Delta\varepsilon$ (6.41) или (6.43). Таким образом, координаты небесного эфемеридного полюса в небесной системе равны $\Delta\psi + \delta\psi$, $\Delta\varepsilon + \delta\varepsilon$.

Пять углов — UT1, x_p, y_p, $\delta\psi$, $\delta\varepsilon$ — называются *параметрами ориентации Земли*. Они регулярно определяются на основе наблюдений Международной службой вращения Земли. Подчеркнем еще раз, что все пять углов определяются относительно оси, направленной в небесный эфемеридный полюс, а не относительно мгновенной оси вращения Земли (рис. 6.9).

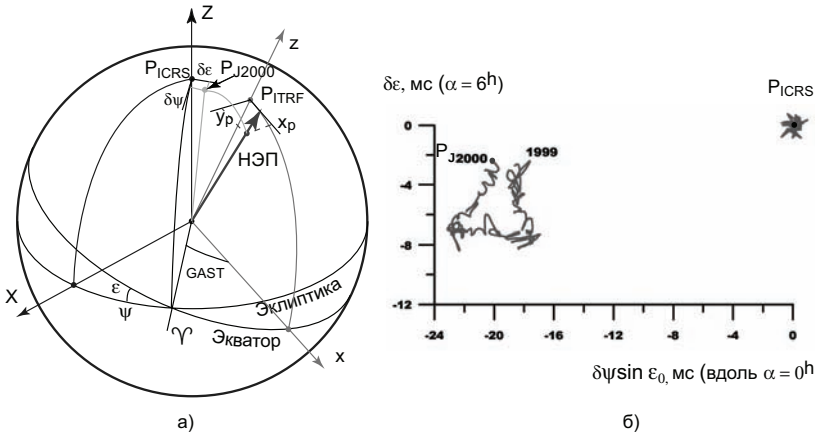


Рис. 6.9. Определение небесного эфемеридного полюса. Координаты НЭП в земной системе координат (показан полюс P_{ITRF} и экватор) равны x_p, y_p, GAST, в небесной системе координат — $\Delta\psi + \delta\psi$, $\Delta\varepsilon + \delta\varepsilon$). P_{ICRS} — полюс ICRS, экватор системы ICRS не показан; P_{J2000} — средний полюс опорной системы на эпоху J2000.0.

На рис. 6.9а показано расположение осей земной $Oxyz$ (ITRF) и небесной систем координат $OXYZ$ (ICRS), определение координат НЭП в земной (x_p, y_p, GAST) и небесной ($\Delta\psi + \delta\psi$, $\Delta\varepsilon + \delta\varepsilon$) системах (экватор системы ICRS и оси Oy, OY не показаны). Из-за ошибок теории IAU1980 средний полюс P_{J2000} описывает около полюса P_{ICRS} сложную кривую. На рис. 6.9б это движение показано за 1999–2000 г. При использовании теории IAU1980 полюс P_{J2000} на эпоху J2000.0 смещен относительно P_{ICRS} на величину: $\Delta\psi \sin\varepsilon_0 = -20,10$ мс дуги, $\Delta\varepsilon = -2,56$ мс дуги (см. также рис. 2.11). На рис. 6.9б также показано движение среднего полюса относительно P_{ICRS}, вычисленное по новой теории нутации (с учетом смещения P_{J2000}). Как видно, расхождение не превышает 1 мс дуги.

Любая из осей, связанных с Землей, принимает участие в двух движениях:

1. Ось движется относительно инерциальной системы (это определяется по видимому с Земли изменению координат звезд или радиоисточников); это движение называется прецессией и нутацией.

2. Ось может двигаться по отношению к самой Земле. Наблюдатель определяет это движение по изменению географических координат пункта наблюдения. Ему кажется, что он вместе с Землей качается относительно оси. Поэтому движение полюса иногда называется качанием.

С точки зрения наблюдателя, находящегося на Земле, гармоники в траектории оси Oz в пространстве имеют периоды, близкие к звездным суткам в соответствии с (6.39), а гармоники в траектории полюса — десятки–сотни звездных суток. И, наоборот, для наблюдателя в инерциальной системе отсчета прецессионно-нутационное движение — это долгопериодическое движение оси Oz, тогда как гармоники в движении полюса лежат в суточной области спектра.

Небесный эфемеридный полюс как промежуточный полюс был определен для того, чтобы разделить движение тиссерановой оси Oz на две части:

1. В инерциальной системе (прецессия и нутация), обозначаемое как движение НЭП в ICRS и включающее все гармоники с периодами (в небесной системе) больше 2 суток (т. е. с частотами σ_C в диапазоне от $-1/2$ до $+1/2$ циклов/сутки).

2. Движение в земной системе, обозначаемое как движение НЭП в ITRS и включающее все гармоники с периодами (в ITRS) больше 2 суток (т. е. с частотами σ_T в диапазоне от $-1/2$ до $+1/2$ циклов/сутки).

Для более ясного представления обратимся к рис. 6.10, на котором показано возможное разделение движения полюса и прецессионного–нутационного движения в спектральной области.

В земной системе координат все гармоники в движении оси Oz с частотами от $-1/2$ до $+1/2$ циклов/сутки относятся к движению полюса. Среди них по амплитуде выделяются чандлеровская, годичная и полугодичная компоненты. Заметим, что две последние гармоники разлагаются на прямое и обратное движения, т. е. результирующее движение полюса с периодами 1 и 1/2 года являются эллиптическими. Гармоники с частотами от $-3/2$ до $-1/2$ циклов/сутки являются нутационными гармониками. В частности, приливы в атмосфере Земли, частоты которых близки к -1 циклу/сутки, приводят к нутационному и прецессионному движению оси Oz. В этой же

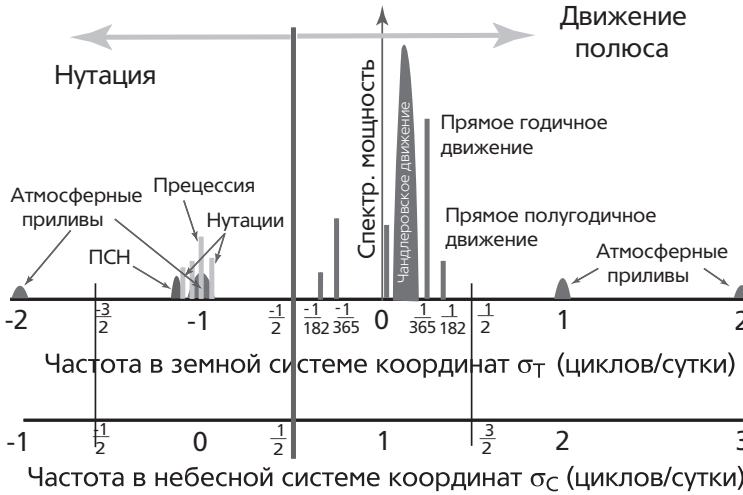


Рис. 6.10. Возможное разделение движения полюса и прецессионного-нутационного движения в спектральной области.

спектральной области находится частота так называемой почти суточной нутации (ПСН). Это — одна из резонансных частот Земли. Существование ее определяется наличием жидкого ядра, а величина связана со сжатием границы жидкое ядро — мантия Земли.

Частоты гармоник в движении полюса в инерциальной системе лежат в диапазоне от 1/2 до 3/2 циклов/сутки, тогда как частоты нутационных гармоник — в пределах от –1/2 до 1/2 циклов/сутки.

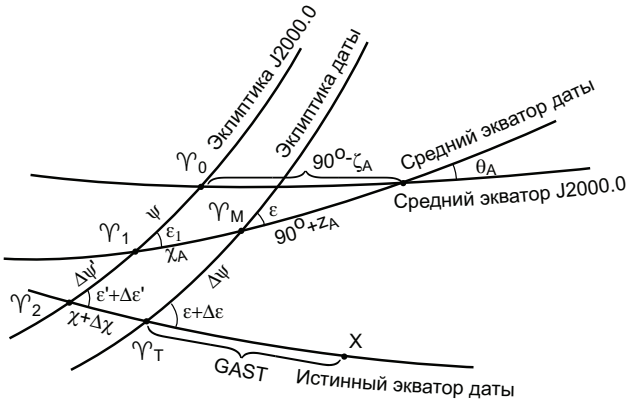
Заметим, что соглашение о разделе гармоник по частотам от –3/2 до 1/2 циклов/сутки в земной и от –1/2 до 3/2 циклов/сутки в небесной системе координат и определение НЭП было принято в 1979 г. В качестве теории нутации должна использоваться теория IAU1980.

Никаких соглашений для гармоник, лежащих вне этого диапазона, не было принято, так как их амплитуда очень мала, и их невозможно было наблюдать. Сейчас ситуация изменилась, поэтому на Генеральной Ассамблее МАС в 2000 г. было принято расширенное определение НЭП. Для астрометрических задач, в которых требуется микросекундный уровень точности, необходимо использовать небесный промежуточный полюс, НПП (по-английски Celestial Intermediate Pole, CIP), определение которого дается ниже.

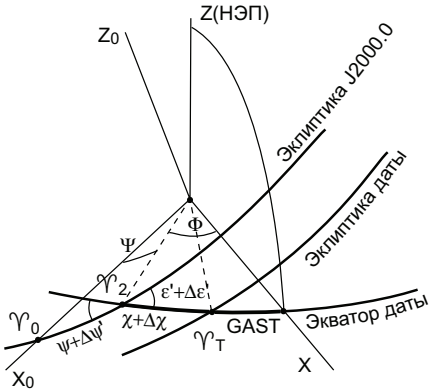
6.6.2. Гринвичское истинное звездное время

Определение 6.6.1. *Часовой угол истинной точки весеннего равноденствия, отсчитываемый от Гринвичского меридиана, называется Гринвичским истинным звездным временем (Greenwich Apparent Sidereal Time, GAST).*

Для пояснения определения воспользуемся рис. 6.11.



а)



б)

Рис. 6.11. Определение Гринвичского истинного звездного времени (GAST).

На рис. 6.11,а показаны средние экваторы и эклиптики на эпоху T и J2000.0, а также истинный экватор на эпоху T (или экватор даты), показаны также прецессионные и нутационные углы. На рис. 6.11,б показаны две системы координат. Оси Ox, Oy, Oz определяют земную систему координат на эпоху $T = t_0 + t$. Оси Ox, Oy лежат в плоскости истинного экватора, а ось Oz направлена в *небесный эфемеридный полюс*. По определению небесный эфемеридный полюс совпадает с тиссерановой осью Oz в отсутствии движения полюса. Оси Ox, Oz определяют плоскость гринвичского меридиана на эпоху T. Пересечение плоскости экватора, задаваемой осями Ox, Oy, и эклиптики даты определяют истинную точку весеннего равноденствия Υ_T. Ось OX_0 направлена в среднюю точку весеннего равноденствия Υ_0 (J2000.0). На рис. 6.11,б показаны также углы Эйлера Ψ, Θ, Φ.

Третье кинематическое уравнение Эйлера (6.29) определяет связь между мгновенной угловой скоростью вращения Земли относительно НЭП и углами Эйлера:

$$\omega_z = \dot{\Phi} + \dot{\Psi}\cos\Theta,$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени. Используя рис. 6.11а и рис. 6.11б легко выразить углы Эйлера через прецессионные и нутационные параметры:

$$\Psi = \psi + \Delta\psi', \quad \Theta = \varepsilon' + \Delta\varepsilon', \quad \Phi = \mathrm{GAST} + \chi + \Delta\chi,$$

где $\Delta\psi'$, $\Delta\varepsilon'$ — нутационные углы, отнесенные к эклиптике эпохи t_0, $\chi, \Delta\chi$ — прецессия и нутация от планет вдоль экватора. Из-за прецессии точка Υ_2 смещается по эклиптике эпохи J2000.0 навстречу Солнцу, тогда как угол Ψ отсчитывается в противоположном направлении. Поэтому $\dot{\Psi} = -\frac{d}{dt}(\psi + \Delta\psi')$. Следовательно, угловая скорость

$$\omega_z = \frac{d}{dt}(\mathrm{GAST} + \chi + \Delta\chi) - \frac{d}{dt}(\psi + \Delta\psi')\cos(\varepsilon' + \Delta\varepsilon'). \qquad (6.47)$$

Интегрирование уравнения (6.47) дает:

$$\mathrm{GAST} = \mathrm{C} + \int_{t_0}^{t} \omega_z dt + \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}(\psi + \Delta\psi')\cos(\varepsilon' + \Delta\varepsilon')dt - \chi - \Delta\chi.$$

Сохраняя только линейные члены по $\Delta\psi'$ и $\Delta\varepsilon'$, получим:

$$\begin{aligned}\mathrm{GAST} \approx \mathrm{C} + \int_{t_0}^{t} \omega_z dt + \left(\int_{t_0}^{t} \dot{\psi} \cos\varepsilon' dt - \chi\right) + \\ + \left(\int_{t_0}^{t} \Delta\dot{\psi}' \cos\varepsilon' dt - \Delta\chi\right) - \\ - \int_{t_0}^{t} \dot{\psi}\Delta\varepsilon' \sin\varepsilon' dt - \int_{t_0}^{t} \Delta\dot{\psi}' \Delta\varepsilon' \sin\varepsilon' dt. \qquad (6.48)\end{aligned}$$

В уравнении (6.48) первый член — постоянная интегрирования, второй — угол поворота Земли за промежуток времени $t - t_0$, члены в первой скобке представляют вклад прецессии, второй — вклад нутации, а последние два члена — комбинированный вклад прецессии и нутации в истинное звездное время.

Если бы нутационного движения не было, то $\Delta\psi' = \Delta\varepsilon' = \Delta\chi = 0$, экватор даты являлся бы средним, точка Υ_T совпала бы со средней точкой Υ_M. Таким образом, из (6.48) можно получить выражение, определяющее гринвичское среднее звездное время:

$$\mathrm{GMST} = \mathrm{C} + \int_{t_0}^{t} \omega_z dt + \int_{t_0}^{t} \dot{\psi} \cos\varepsilon' dt - \chi.$$

Константа C, следовательно, равна гринвичскому среднему звездному времени в начальный момент t_0: $\mathrm{C} = \mathrm{GMST}_0$.

Остальные четыре члена в уравнении (6.48) называются «уравнением равноденствий» (equation of equinoxes, eq eq):

$$\begin{aligned}\mathrm{eq\,eq} = \mathrm{GAST} - \mathrm{GMST} = \int_{t_0}^{t} \Delta\dot{\psi}' \cos\varepsilon' dt - \Delta\chi - \\ - \int_{t_0}^{t} \dot{\psi}\Delta\varepsilon' \sin\varepsilon' dt - \int_{t_0}^{t} \Delta\dot{\psi}' \Delta\varepsilon' \sin\varepsilon' dt. \qquad (6.49)\end{aligned}$$

Величину планетной нутации $\Delta\chi$ можно найти, используя рис. 6.11а и предполагая, что дуги являются прямыми линиями. Тогда, используя формулы планиметрии, получим:

$$\Delta\psi \cos\varepsilon + (\chi + \Delta\chi) \cos\Delta\varepsilon' = \chi + \Delta\psi' \cos\varepsilon'.$$

Учитывая, что $\cos\Delta\varepsilon' \approx 1$, получим:

$$\Delta\chi = \Delta\psi' \cos\varepsilon' - \Delta\psi \cos\varepsilon.$$

Подставляя это выражение в (6.49) и считая, что

$$\int_{t_0}^{t} \Delta\dot{\psi}' \cos\varepsilon' dt \approx \Delta\psi' \cos\varepsilon',$$

получим уравнение равноденствий в виде:

$$\text{eq eq} = \text{GAST} - \text{GMST} = \Delta\psi\cos\varepsilon - \\ - \int_{t_0}^{t} \dot{\psi}\Delta\varepsilon'\sin\varepsilon' dt - \int_{t_0}^{t} \Delta\dot{\psi}'\Delta\varepsilon'\sin\varepsilon' dt. \qquad (6.50)$$

Первый член в (6.50) равен проекции дуги $\Delta\psi$ (нутации в долготе) на средний экватор даты. Его величина не превышает 1,5 сек. До 1984 г. именно член $\Delta\psi\cos\varepsilon$ назывался уравнением равноденствий.

Численное значение второго члена в (6.50)

$$-\int_{t_0}^{t} \dot{\psi}\Delta\varepsilon'\sin\varepsilon' dt = 2,649\sin\Omega - 0,013\sin 2\Omega \text{ [мс дуги]},$$

где Ω — средняя долгота восходящего узла лунной орбиты.

Третий член в (6.50) можно представить в виде суммы векового и периодических членов, причиной появления которых является совместное влияние нутации в долготе и наклоне на движение точки весеннего равноденствия:

$$-\int_{t_0}^{t} \Delta\dot{\psi}'\Delta\varepsilon'\sin\varepsilon' dt = \\ -3,851t - 0,005\sin\Omega + 0,076\sin 2\Omega \text{ [мс дуги]}.$$

Вековым членом в выражении GAST – GMST пренебрегают, так как считается, что он входит в разность GMST – UT1, численное значение которой получено из наблюдений. В результате уравнение равноденствий принимает вид:

$$\text{eq eq} = \text{GAST} - \text{GMST} = \\ \Delta\psi\cos\varepsilon + 0''\!,00264\sin\Omega + 0''\!,000064\sin 2\Omega, \qquad (6.51)$$

которое в «Стандартах МСВЗ» 1996 г. рекомендуется использовать с 1 января 1997 г.

6.6.3. Классическое преобразование из ЗСК в НСК

Для преобразования вектора из земной системы (ITRF) в небесную систему координат, задаваемую истинным экватором и равноденствием, воспользуемся рис. 6.9.

Для вычисления матрицы преобразования необходимо выполнить три поворота осей земной системы: сначала относительно оси

y на угол x_p, затем относительно оси x на угол y_p и вокруг оси z на угол $-GAST$, после чего перемножить матрицы:

$$\mathbf{r}_T = R_3(-GAST)R_1(y_p)R_2(x_p)\mathbf{r}_{ITRF}, \tag{6.52}$$

где $\mathbf{r}_T$ — вектор в промежуточной системе. В уравнении (6.52) x_p, y_p — координаты полюса, $GAST$ — истинное звездное время. Так как преобразование от промежуточной системы к средней, заданной на эпоху J2000.0, описывается уравнением (6.46), то имеем:

$$\mathbf{r}_{GCRS} = W\mathbf{r}_{ITRF}, \tag{6.53}$$

где матрица преобразования определяется выражением:

$$W = PNR_3(-GAST)R_1(y_p)R_2(x_p). \tag{6.54}$$

В результате преобразования (6.53) оси земной системы координат будут повернуты и ориентированы так же, как оси барицентрической системы. Начало этой системы совпадает с центром Земли, но геоцентрическая небесная система отсчета GCRS движется вместе с Землей относительно барицентра Солнечной системы.

Воспользуемся теперь уравнением (6.52) для учета влияния движения полюса на координаты пункта на поверхности Земли. Пусть в системе ITRF координаты пункта равны φ_0, λ_0. Из-за перемещения полюса в точку x_p, y_p мгновенные координаты пункта станут равняться φ, λ. В матричной форме преобразование координат записывается в виде:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\lambda \\ \cos\varphi\sin\lambda \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = R_1(y_p)R_2(x_p)\begin{pmatrix} \cos\varphi_0\cos\lambda_0 \\ \cos\varphi_0\sin\lambda_0 \\ \sin\varphi_0 \end{pmatrix}. \tag{6.55}$$

Так как величины x_p, y_p не превышают нескольких десятых секунды дуги, то $\sin x_p \approx x_p$, $\cos x_p \approx 1$, $\sin y_p \approx y_p$, $\cos y_p \approx 1$. Перемножим матрицы, сохраняя лишь линейные по x_p, y_p члены, затем перепишем (6.55) в виде:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi_0\cos\lambda_0 \\ \cos\varphi_0\sin\lambda_0 \\ \sin\varphi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_p \\ 0 & 1 & -y_p \\ -x_p & y_p & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\lambda \\ \cos\varphi\sin\lambda \\ \sin\varphi \end{pmatrix}.$$

В явном виде запишем выражения для компоненты z:

$$\sin\varphi_0 = \sin\varphi + \cos\varphi(-x_p\cos\lambda + y_p\sin\lambda).$$

Так как изменение широты вследствие движения полюса мало, можно представить функцию $\sin\varphi$ в виде ряда Тейлора:

$$\sin\varphi \approx \sin\varphi_0 + (\varphi - \varphi_0)\cos\varphi_0.$$

С точностью до линейных членов можно переписать это выражение в виде:

$$\sin\varphi_0 \approx \sin\varphi + (\varphi_0 - \varphi)\cos\varphi.$$

Тогда преобразование от мгновенной наблюдаемой широты φ к средней широте φ_0:

$$\varphi_0 = \varphi + (-x_p\cos\lambda + y_p\sin\lambda). \tag{6.56}$$

Изменение долготы пункта из-за движения полюса найдем, записав выражения для компоненты x:

$$\cos\varphi_0\cos\lambda_0 = \cos\varphi\cos\lambda + x_p\sin\varphi. \tag{6.57}$$

Аналогичным образом запишем разложения функций $\cos\varphi$, $\cos\lambda$ в ряды Тейлора:

$$\cos\varphi \approx \cos\varphi_0 - (\varphi - \varphi_0)\sin\varphi_0 \approx \cos\varphi_0 - (\varphi - \varphi_0)\sin\varphi,$$
$$\cos\lambda \approx \cos\lambda_0 - (\lambda - \lambda_0)\sin\lambda_0 \approx \cos\lambda_0 - (\lambda - \lambda_0)\sin\lambda.$$

Выразив из этих уравнений $\cos\varphi_0$ и $\cos\lambda_0$, подставим их в (6.57). Если теперь заменить $\varphi_0 - \varphi$ выражением (6.56) и пренебречь произведениями малых членов $(\lambda - \lambda_0)x_p$, $(\lambda - \lambda_0)y_p$, то после элементарных преобразований получим уравнение (4.11):

$$\Delta\lambda = \lambda_0 - \lambda = -(x_p\sin\lambda + y_p\cos\lambda)\operatorname{tg}\varphi.$$

6.6.4. Концепция «невращающегося начала отсчета»

На XXIV-й Генеральной Ассамблее МАС, которая проходила в Манчестере в 2000 г., были приняты несколько резолюций, касающихся вопроса преобразовании координат при переходе от небесной к земной системе.

В резолюции B1.3 определяются барицентрическая и геоцентрическая небесные системы отсчета (BCRS и GCRS), которые должны использоваться при вычислении четырехмерных координат объектов при наблюдении из барицентра Солнечной системы и из центра Земли, соответственно. Системы BCRS и GCRS заданы метрическими тензорами, на основе которых получены формулы преобразования пространственных координат и времени.

В резолюции B1.6 рекомендуется, начиная с 1 января 2003 г., использовать теорию прецессии–нутации IAU2000, которая должна заменить устаревшую теорию IAU1980. С этого же момента вводится промежуточная система, полюс которой называется небесным промежуточным полюсом (Celestial Intermediate Pole, CIP) вместо небесного эфемеридного полюса, НЭП (резолюция B1.7).

Небесный промежуточный полюс (НПП) был определен таким образом, чтобы разделить движение тиссерановой оси Oz на две части (рис. 6.12):

1. В инерциальной системе (прецессия и нутация), обозначаемое как движение НПП в ICRS и включающее все гармоники с периодами (в небесной системе) больше 2 суток (т. е. с частотами σ_C в диапазоне от $-1/2$ до $+1/2$ циклов/сутки).

2. В земной системе (движение полюса), обозначаемое как движение НПП в ITRS и включающее все гармоники с с частотами, лежащими вне близсуточного диапазона с $\sigma_T \approx -1$ (т. е. с частотами менее $-3/2$ или более $-1/2$ циклов/сутки).

Вместо точки весеннего равноденствия в качестве начала отчета долгот в небесной и земной системах координат вводятся «невращающиеся начала отсчета» (или NRO), концепция которых была предложена Б. Гино. Точки — новые начала отсчета — были названы *небесным эфемеридным началом* (Celestial Ephemeris Origin, CEO) для небесной системы и, соответственно, *земным эфемеридным началом* (Terrestrial Ephemeris Origin, TEO) для земной системы (резолюция B1.8). В резолюции определяется также «угол поворота Земли» θ (Earth Rotation Angle), который равен двугранному углу между началами CEO и TEO и измеряется вдоль экватора, соответствующего небесному промежуточному полюсу (НПП). Всемирное время UT1 линейно пропорционально θ. Преобразование координат

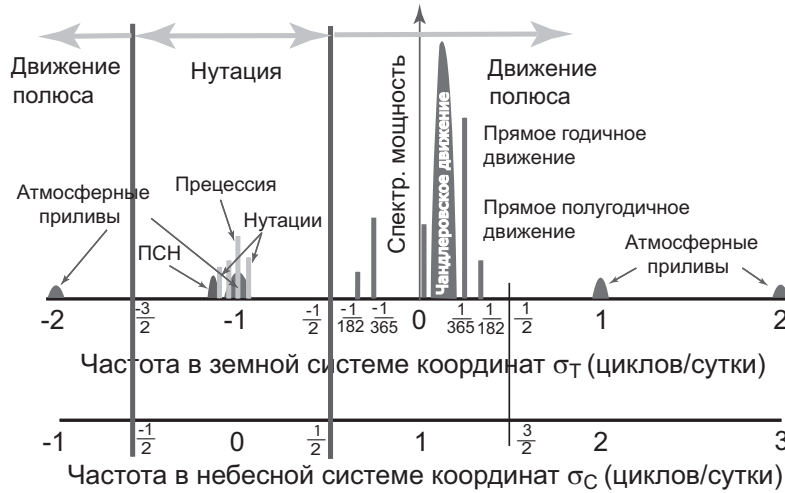


Рис. 6.12. Разделение движения полюса и прецессионного-нутационного движения в спектральной области в теории IAU2000.

вектора из земной системы ITRS в небесную систему GCRS определяется положением НПП в GCRS, положением НПП в ITRS и углом поворота Земли.

В основе концепции NRO лежат следующие соображения.

Классическое преобразование (6.53) включает прецессионные z_A, θ_A, ζ_A и нутационные параметры $\Delta\psi, \varepsilon + \Delta\varepsilon$ и гринвичское истинное звездное время GAST. Эти параметры относятся к экватору и равноденствию даты и эклиптике даты (см. рис. 6.11). Однако современные системы, такие как РСДБ, GPS, лазерные дальномеры, используемые для изучения вращения Земли, практически нечувствительны к ориентации эклиптики и, значит, к положению точек равноденствий.

Есть и другие недостатки классического преобразования (6.53). Во-первых, угол поворота Земли, называемый гринвичским истинным звездным временем GAST, определяется положением точки весеннего равноденствия Υ_T (рис. 6.11). Следовательно, мы не можем отделить неравномерность вращения Земли от смещения точки Υ_T из-за движения экватора или поворота эклиптики. Положение усугубляется еще и тем, что, как уже сказано, радиоинтерферометрические наблюдения нечувствительны к движению эклиптики.

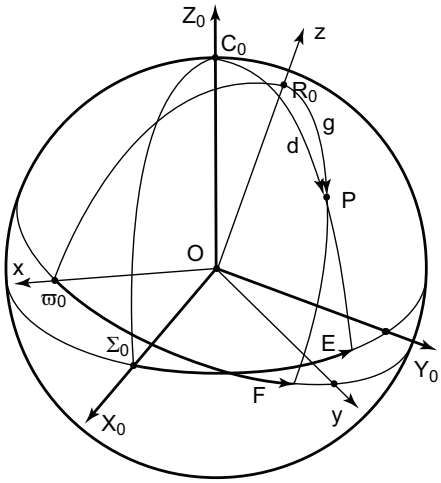


Рис. 6.13. Определение координат мгновенного полюса P в НСК и ЗСК.

Во-вторых, прецессия и нутация рассматриваются отдельно друг от друга, хотя по природе это не независимые явления. В-третьих, повышение точности наблюдений требует новых, более точных методов редукции.

Обозначим точку пересечения вектора мгновенной угловой скорости вращения Земли с небесной сферой как P. Это — мгновенный полюс вращения (рис. 6.13).

Ось OZ_0 небесной системы направлена в полюс C_0; она определяет фундаментальную плоскость — плоскость небесного экватора, в которой лежит ось OX_0, проходящая через начало отсчета Σ_0 на этом большом круге. Ось OY_0 направлена так, что система осей является правой. Ось Oz определяет полюс R_0 земной системы; ось Ox — начало отсчета долгот ϖ_0 на земном экваторе и ось Oy дополняет систему до правой.

Пусть координаты полюса P в НСК равны d (дуга $\widehat{C_0P}$) и E (двугранный угол $\widehat{\Sigma_0C_0P}$), а в ЗСК — g (дуга $\widehat{R_0P}$) и F (двугранный угол $\widehat{\varpi_0R_0P}$). Тогда вращение Земли можно описать, изучая движение полюса P в НСК и ЗСК, одновременно можно найти закон вращения ЗСК в небесной системе вокруг оси OP.

Определим невращающееся начало отсчета (NRO) в небесной системе следующим образом. Введем еще одну прямоугольную си-

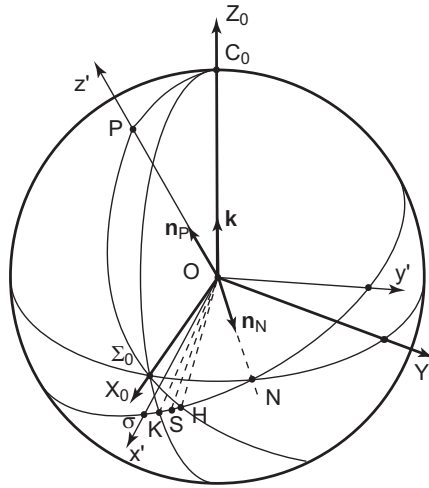


Рис. 6.14. Определение невращающегося начала отсчета σ в НСК.

стему $Ox'y'z'$ (рис. 6.14), причем ось Oz' направлена в полюс P, а ось Ox' направлена в точку σ, лежащую на мгновенном экваторе и служащую на нем началом отсчета долгот .

Точка σ, а с ней и ориентация системы $Ox'y'z'$, определяется из *кинематического* условия, предложенного Б. Гино: любое бесконечно малое смещение полюса P в небесной системе не должно приводить к угловому вращению системы $Ox'y'z'$ вокруг оси Oz'.

Итак, целью замены точки весеннего равноденствия на невращающееся начало отсчета (NRO) является разделение вращательного и орбитального движений Земли, которые смешиваются в выражении для гринвичского истинного звездного времени (6.48). В качестве новых точек — начал отсчета предлагались и такие (рис. 6.14): K — точка пересечения мгновенного экватора с фиксированной плоскостью OX_0Z_0; H — точка пересечения мгновенного экватора плоскостью, проходящей через мгновенный полюс и точку Σ_0; S — точка, удовлетворяющая условию $\widehat{SN} = \widehat{\Sigma_0 N}$, где N — восходящий узел мгновенного экватора на фундаментальном.

Наиболее важным свойством невращающегося начала отсчета (NRO), которое выделяет его среди остальных точек, является условие отсутствия вращения земной системы $Ox'y'z'$ в НСК при движении мгновенного полюса P.

Невращающееся начало отсчета определим двугранным углом σPS или дугой $s = \widehat{\sigma S}$. Обозначим, как и ранее, тройку базисных векторов системы $OX_0Y_0Z_0$ как $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, а единичные векторы, направленные из точки O в точки P, N, K, S, H как $\mathbf{n}_i$, где $i = P, N, K, S, H$.

Тогда положение произвольной точки R, лежащей на мгновенном экваторе, может быть найдено из условия:

$$\mathbf{n}_P \cdot \mathbf{n}_R = 0,$$

где $\mathbf{n}_R$ — единичный вектор, направленный в точку R. Аналогичным образом могут быть найдены положения других точек:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_N = 0 \text{ (точка } N) \qquad \mathbf{j} \cdot \mathbf{n}_K = 0 \text{ (точка } K)$$
$$\mathbf{n}_H \cdot (\mathbf{n}_P \times \mathbf{i}) = 0 \text{ (точка } H) \qquad \mathbf{n}_S \cdot \mathbf{n}_N = \mathbf{i} \cdot \mathbf{n}_N \text{ (точка } S)$$

Получим теперь формулу, связывающую единичный вектор $\mathbf{n}_\sigma$, который направлен в NRO, и вектор $\mathbf{n}_S$. Из определений скалярного и векторного произведений и NRO следует, что:

$$\mathbf{n}_\sigma \cdot \mathbf{n}_S = \cos s,$$
$$\mathbf{n}_\sigma \times \mathbf{n}_S = \mathbf{n}_P \sin s.$$

Умножая второе выражение векторно на $\mathbf{n}_S$, получим в левой части:

$$\mathbf{n}_S \times (\mathbf{n}_\sigma \times \mathbf{n}_S) = \mathbf{n}_\sigma - \mathbf{n}_S \cdot (\mathbf{n}_S \cdot \mathbf{n}_\sigma).$$

Значит

$$\mathbf{n}_\sigma = \mathbf{n}_S \cos s + (\mathbf{n}_S \times \mathbf{n}_P) \sin s. \tag{6.58}$$

Выразим теперь вектор $\mathbf{n}_S$ через координаты полюса P в НСК, которые положим равными X, Y, Z, т. е.

$$\mathbf{n}_P = (X, Y, Z)^T,$$

причем $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$. Имеем:

$$\mathbf{n}_S \cdot \mathbf{n}_N = \mathbf{i} \cdot \mathbf{n}_N = \cos \gamma$$
$$\mathbf{n}_S \times \mathbf{n}_N = \mathbf{n}_P \sin \gamma.$$

Умножая второе выражение векторно на $\mathbf{n}_N$, получим:

$$\mathbf{n}_S = \mathbf{n}_N \cos \gamma + (\mathbf{n}_N \times \mathbf{n}_P) \sin \gamma.$$

Так как компоненты вектора

$$\mathbf{n}_N = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{n}_P}{|\mathbf{k} \times \mathbf{n}_P|} = \frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \begin{pmatrix} -Y \\ X \\ 0 \end{pmatrix},$$

а $\cos\gamma = -Y/\sqrt{X^2 + Y^2}$, $\sin\gamma = X/\sqrt{X^2 + Y^2}$, то после несложных преобразований получим:

$$\mathbf{n}_S = \begin{pmatrix} 1 - X^2/(1 + Z) \\ -XY/(1 + Z) \\ -X \end{pmatrix}. \tag{6.59}$$

Таким образом, если выразить дугу s через координаты мгновенного полюса X, Y, Z в небесной системе, то движение NRO будет полностью определено.

Используя сферические координаты полюса P: E и d (рис. 6.13), имеем:

$$\begin{aligned} X &= \sin d \cos E, \\ Y &= \sin d \sin E, \\ Z &= \cos d. \end{aligned} \tag{6.60}$$

Вследствие движения полюса в НСК вектор мгновенной угловой скорости системы $Ox'y'z'$

$$\mathbf{\Omega} = \dot{E}\mathbf{k} - (\dot{E} + \dot{s})\mathbf{n}_P + \dot{d}\mathbf{n}_N,$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени. Проекция вектора $\mathbf{\Omega}$ на ось Oz:

$$\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}_P = \dot{E}\cos d - (\dot{E} + \dot{s}) = \dot{E}(\cos d - 1) - \dot{s}.$$

Из определения NRO следует, что $\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}_P = 0$ и, следовательно

$$\dot{s} = \dot{E}(\cos d - 1)$$

или

$$s = \int_{t_0}^{t} \dot{E}(\cos d - 1)\, dt - C, \tag{6.61}$$

где константа

$$C = \sigma_0 N_0 - \Sigma_0 N_0,$$

σ_0, N_0 — положение NRO и узла мгновенного экватора на эпоху t_0. Чтобы зафиксировать положение NRO на начальную эпоху t_0, по соглашению принимается, что

$$\sigma_0 N_0 = \Sigma_0 N_0.$$

Тогда уравнение (6.61) в векторном виде имеет вид:

$$s = \int_{t_0}^{t} \frac{(\mathbf{n}_P \times \dot{\mathbf{n}}_P) \cdot \mathbf{k}}{1 + \mathbf{n}_P \cdot \mathbf{k}}\, dt$$

или в прямоугольных координатах

$$s = -\int_{t_0}^{t} \frac{1}{1+Z} \left(X \frac{dY}{dt} - Y \frac{dX}{dt} \right) dt.$$

В земной системе соответствующее смещение

$$s' = \varpi M - \varpi_0 M$$

определяет земное невращающееся начало отсчета, где точка ϖ — это мгновенное начало отсчета долгот (TEO), а M — восходящий узел мгновенного экватора на экваторе ЗСК.

По аналогии с (6.61) можем записать следующее уравнение:

$$s' = \int_{t_0}^{t} \dot{F}(\cos g - 1)\, dt.$$

Координаты полюса P в ЗСК по соглашению равны:

$$x_p = g \cos F, \quad y_p = -g \sin F.$$

Согласно определению оба начала — точки σ и ϖ — лежат на одном мгновенном экваторе. Рассмотрим двугранный угол $\sigma P \varpi$ (рис. 6.15). Пусть он равняется θ, причем будем считать, что он увеличивается в направлении по часовой стрелке и отсчитывается от точки ϖ.

Из определения NRO следует, что производная $d\theta/dt$ точно равна мгновенной угловой скорости вращения Земли вокруг оси OP.

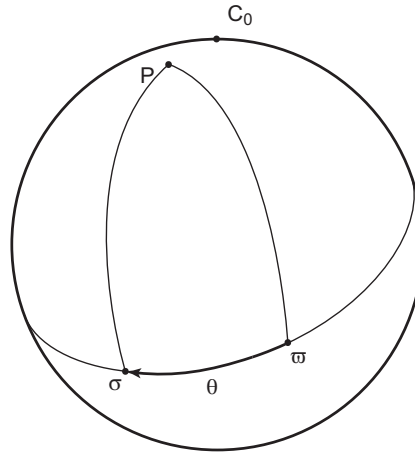


Рис. 6.15. Определение звездного угла θ.

Значит, угол θ точно отражает сидерическое вращение Земли вокруг этой оси. Чтобы избежать недоразумений при использовании θ и звездного времени, Гино предложил называть его *звездным углом*. В резолюции B1.8 этот угол назван «углом поворота Земли».

Преобразование координат вектора из ЗСК в НСК в соответствие с резолюцией B1.8 имеет вид:

$$\mathbf{r}_{GCRS} = Q(t)R(t)W(t)\mathbf{r}_{ITRS}, \tag{6.62}$$

где матрицы $Q(t), R(t), W(t)$ представляют движение полюса в НСК, вращение Земли и движение полюса в ЗСК, соответственно. Матрицы равны:

$$W(t) = R_3(-s')R_2(x_p)R_1(y_p), \tag{6.63}$$

где x_p, y_p — координаты небесного промежуточного полюса (НПП) в ЗСК, величина s' задает положение земного эфемеридного начала в соответствии с кинематическим определением NRO в ITRS при смещении НПП относительно ITRS из-за движения полюса;

$$R(t) = R_3(-\theta); \tag{6.64}$$

$$Q(t) = R_3(-E)R_2(-d)R_3(E)R_3(s), \tag{6.65}$$

где d, E — сферические координаты НПП в небесной системе, s — параметр, задающий положение небесного эфемеридного начала.

Матрица $Q(t)$ (6.65) может быть выражена через прямоугольные координаты полюса X, Y, Z (6.60) следующим образом:

$$Q(t) = \begin{pmatrix} 1 - aX^2 & -aXY & X \\ -aXY & 1 - aY^2 & Y \\ -X & -Y & 1 - a(X^2 + Y^2) \end{pmatrix} \cdot R_3(s),$$

где $a = 1/(1 + \cos d) \approx 1/2 + (X^2 + Y^2)/8$.

Время t, от которого зависят элементы матриц, отсчитывается в юлианских столетиях от эпохи J2000.0:

$$t = (JD(TT) - 2451545,0)/36525. \tag{6.66}$$

Численные выражения для вычисления параметров s', θ, s, X, Y получены Н. Капитейн. Величина s' зависит только от самых больших гармоник в движении полюса, т. е. от чандлеровской и годичной компонент:

$$s' = -0,0015(a_c^2/1,2 + a_a^2)t,$$

где a_c, a_a — средние амплитуды чандлеровской и годичной компонент (в сек дуги). Используя современные значения амплитуд этих гармоник, получим:

$$s' = -47t \text{ мкс дуги.}$$

Угол поворота Земли

$$\theta(T_u) = 2\pi(0,7790572732640 + 1,00273781191135448T_u),$$

где

$$T_u = JD(UT1) - 2451545,0, \quad \text{UT1} = \text{UTC} + (\text{UT1} - \text{UTC}).$$

Для практических вычислений s используется формула:

$$s(t) = -\frac{1}{2}\Big[X(t)Y(t) - X(t_0)Y(t_0)\Big] + \int_{t_0}^{t} \dot{X}(t)Y(t)dt,$$

где $X(t), Y(t)$ представляются в виде рядов:

$$
\begin{aligned}
X(t) = &- 0''\!,01661699 + 2004''\!,19174288t - 0''\!,42721905t^2 \\
&- 0''\!,19862054t^3 - 0''\!,00004605t^4 + 0''\!,00000598t^5 \\
&+ \sum_i \Big[(a_{s,0})_i \sin(ARG) + (a_{c,0})_i \cos(ARG)\Big] \\
&+ \sum_i \Big[(a_{s,1})_i t \sin(ARG) + (a_{c,1})_i t \cos(ARG)\Big] \\
&+ \sum_i \Big[(a_{s,2})_i t^2 \sin(ARG) + (a_{c,2})_i t^2 \cos(ARG)\Big] \\
&+ \cdots ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y(t) = &- 0''\!,00695078 - 0''\!,02538199t - 22''\!,40725099t^2 \\
&+ 0''\!,00184228t^3 + 0''\!,00111306t^4 + 0''\!,00000099t^5 \\
&+ \sum_i \Big[(b_{s,0})_i \sin(ARG) + (b_{c,0})_i \cos(ARG)\Big] \\
&+ \sum_i \Big[(b_{s,1})_i t \sin(ARG) + (b_{c,1})_i t \cos(ARG)\Big] \\
&+ \sum_i \Big[(b_{s,2})_i t^2 \sin(ARG) + (b_{c,2})_i t^2 \cos(ARG)\Big] \\
&+ \cdots .
\end{aligned}
$$

Время t задается формулой (6.66), а ARG вычисляется как функция фундаментальных аргументов теории нутации (стр. 377). Коэффициенты a, b можно найти на сайте:
ftp://maia.usno.navy.mil/conv2000/chapter5/
(таблица 5.2a для X и 5.2b для Y-компоненты).

Разложение для величины s (в мкс дуги), согласованное с теорией нутации IAU2000, имеет вид:

$$
\begin{aligned}
s(t) = &-XY/2 + 94 + 3808,35t - 119,94t^2 - 72574,09t^3 \\
&+ \sum_k C_k \sin \alpha_k + 1,71t \sin \Omega + 3,57t \cos 2\Omega \\
&+ 743,53t^2 \sin \Omega + 56,91t^2 \sin(2F - 2D + 2\Omega) \\
&+ 9,84t^2 \sin(2F + 2\Omega) - 8,85t^2 - \sin 2\Omega.
\end{aligned}
$$

В выражении сохранены члены, величина которых превышает 0,5 мкс дуги. Разложение можно использовать на интервале времени от 1975 до 2025 г.

Аргументы α_k и коэффициенты C_k приводятся в таблице 6.1.

Таблица 6.1. Аргументы α_k и коэффициенты C_k для вычисления $s(t)$.

α_k	C_k (мкс дуги)
Ω	-2640,73
2Ω	-63,53
$2F - 2D + 3\Omega$	-11,75
$2F - 2D + \Omega$	-11,21
$2F - 2D + 2\Omega$	+4,57
$2F + 3\Omega$	-2,02
$2F + \Omega$	-1,98
3Ω	+1,72
$l' + \Omega$	+1,41
$l' - \Omega$	+1,26
$l + \Omega$	+0,63
$l - \Omega$	+0,63

Зададимся теперь вопросом: насколько удачен выбор небесного и земного эфемеридных начал для отсчета долгот в небесной и земной системах, соответственно?

Дело в том, что выбор невращающегося начала отсчета в качестве x-оси небесной системы координат приводит к вековому вращению системы. Это происходит потому, что по определению «невращающееся начало» NRO не имеет вращательного движения относительно мгновенного полюса. Но если полюс имеет вековое движение относительно инерциальной системы, то, естественно, что и NRO будет двигаться вековым образом в пространстве. Другими словами, вековое движение системы — это плата за выбор NRO в качестве начала. Скорость векового вращения небесного эфемеридного начала достаточно велика: примерно $-4''\!,15$/год. Все сказанное справедливо и для земного эфемеридного начала. Последнее имеет вековое

вращение, так как полюс в земной системе имеет хорошо известные чандлеровскую и годичную гармоники.

Исключительный случай отсутствия векового движения NRO реализуется когда полюс не движется относительно инерциальной системы, что бывает чрезвычайно редко. В результате, принимая концепцию NRO, мы должны работать во *вращающихся* системах отсчета, что значительно усложняет уравнения динамики, в частности, уравнения небесной механики.

6.7. Процедура редукции оптических наблюдений

Выше мы рассмотрели явления, приводящие к изменению положения небесных тел на небесной сфере. В данном параграфе будет рассмотрена процедура редукции наблюдений звезд, а ниже — процедура редукции наблюдений на радиоинтерферометрах.

Небесная система отсчета может быть реализована списком выбранных звезд (или радиоисточников), координаты которых фиксируют направления осей системы координат. Список опорных звезд называется фундаментальным каталогом, а небесная система — фундаментальной небесной системой. Координаты опорных звезд (прямое восхождение и склонение) изменяются по ряду причин. Выше мы рассмотрели, как изменяется положение звезд из-за собственного движения, аберрации, параллактического смещения, рефракции. Прецессия и нутация приводят к движению небесного экватора и, следовательно, к изменению координат звезд со временем. Поэтому для фиксации основных кругов системы отсчета необходимо определить эпоху, к которой отнесены координаты звезд, указать начало системы отсчета и определить положение небесного экватора и точки весеннего равноденствия.

Как уже говорилось, экватор и равноденствие называются истинными или средними в зависимости от того, учитывается или нет нутация. В качестве стандартной эпохи сейчас принята эпоха J2000.0.

Назовем *средним местом* звезды её координаты, отнесенные к среднему экватору и равноденствию даты наблюдения *в барицентрической системе отсчета*. Средние координаты звезды изменяются вследствие прецессии и собственного движения.

Видимым местом звезды называются координаты звезды *в геоцентрической системе отсчета*, отнесенные к истинному экватору

и равноденствию даты наблюдения. Преобразование от среднего места к видимому включает учет нутации, годичной аберрации и параллактического смещения. Видимые координаты звезды отличаются от наблюдаемых на поправки за рефракцию и суточную аберрацию.

В каталогах приводятся средние места звезд на стандартную эпоху. Это означает, что для перехода от средних мест к средним стандартным местам нужно учесть прецессию и собственное движение. В каталоге HIPPARCOS координаты звезд приводятся на эпоху J1991.25, а экватор системы HIPPARCOS совпадает с экватором J2000.0. Следовательно, для преобразования координат звезд к стандартной эпохе требуется учесть только собственное движение.

Если требуется преобразовать измеренные координаты звезды или планеты к экватору и равноденствию стандартной эпохи, то классический метод обработки оптических астрометрических наблюдений заключается в следующем.

1. Из наблюденных зенитных расстояний вычитаются поправки за рефракцию, т. е. находятся прямые восхождения и склонения небесных тел для точки на поверхности Земли, лишенной атмосферы.

2. Учитывая поправку за суточную аберрацию, находятся координаты, которые отнесены к невращающейся Земле.

3. Учет суточного параллакса, если известно расстояние до небесного тела, приводит к переносу начала отсчета в центр Земли. Геоцентрическое положение небесного тела называется, как уже говорилось, *видимым местом*.

4. Учет годичной аберрации (для близких небесных тел — планетной аберрации) приводит к переносу начала системы отсчета в барицентр Солнечной системы. В результате выполненной редукции координаты небесных тел определяются относительно истинного экватора и равноденствия даты в барицентрической системе отсчета.

5. Учет нутации позволяет определить координаты, отнесенные к среднему экватору и равноденствию даты.

6. Исправляя координаты за прецессию и собственное движение, получим координаты небесных тел, отнесенные к среднему экватору и равноденствию стандартной эпохи. Положение небесных тел в этой системе координат является средним стандартным местом.

Приведем теперь формулы, используемые для вычисления координат звезды на момент наблюдения (эпоху t). Пусть прямое восхождение и склонение звезды на эпоху T_0 равны α_0, δ_0. Будем предполагать, что эпоха T_0 совпадает со стандартной эпохой J2000.0.

Редукция оптических наблюдений заключается в выполнении следующих этапов.

1. На первом шаге необходимо вычислить барицентрическое время TDB, TCB или T_{eph}, зная всемирное координированное время UTC наблюдения. При редукции используется то время, которое является аргументом эфемерид планет, Луны и Солнца. Это делается на основе формул (4.75-4.80). Приведем их еще раз:

$$\begin{aligned}
\Delta\mathrm{UT} &= \mathrm{UT1} - \mathrm{UTC},\\
\Delta\mathrm{AT} &= \mathrm{TAI} - \mathrm{UTC},\\
\mathrm{TT} &= \mathrm{TDT} = \mathrm{ET} = \mathrm{TAI} + 32{,}^{\mathrm{s}}184,\\
\mathrm{TDB} &= \mathrm{TDT} + \frac{1}{c^2}\mathbf{V}_\oplus \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R}_\oplus) + P,\\
\mathrm{TCG} &= \mathrm{TT} + L_G(t - t_0),\\
\mathrm{TCB} &= \mathrm{TDB} + L_B(t - t_0),\\
\mathrm{TCB} &= \mathrm{TCG} + L_C(t - t_0) + \frac{1}{c^2}\mathbf{V}_\oplus \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R}_\oplus) + P,\\
\mathrm{T}_{eph} &= \mathrm{TT} + \frac{1}{c^2}\mathbf{V}_\oplus \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R}_\oplus) + P,
\end{aligned}$$

где $t - t_0 = (\mathrm{MJD(TAI)} - 43144,0) \cdot 86400^{\mathrm{s}}$,

$$\begin{aligned}
L_G &= 6,969290134 \times 10^{-10},\\
L_B &= 1,55051976772 \times 10^{-8} \pm 2 \times 10^{-17},\\
L_C &= 1,48082686741 \times 10^{-8} \pm 2 \times 10^{-17},
\end{aligned}$$

$\mathbf{r}$, $\mathbf{R}_\oplus$ — барицентрические радиусы-векторы наблюдателя и центра Земли, $\mathbf{V}_\oplus$ — барицентрический вектор скорости центра Земли, P — периодические члены. Начальным моментом

времени t_0 является $0^{\mathrm{h}}0^{\mathrm{m}}0^{\mathrm{s}}$ TAI 1 января 1977 г. Модифицированная юлианская дата этого момента MJD(TAI) $= 43144,0$.

При невысокой точности наблюдений можно считать, что барицентрическое время совпадает с TT. Вычисляется также юлианская дата наблюдения JD(t), где t равно TDB, TCB или T_{eph}.

2. На момент барицентрического времени t с помощью эфемерид DE200, DE405 или других вычисляются барицентрические радиус-вектор $\mathbf{R}_{\oplus}(t)$ (в а. е.) и скорость $\mathbf{V}(t) = V\mathbf{n}$ (в а. е./сутки) Земли, отнесенные к экватору и равноденствию эпохи J2000.0, а также гелиоцентрический радиус-вектор Земли $\mathbf{R}_{SE} = \mathbf{R}_{\oplus} - \mathbf{R}_{\odot}$, где $\mathbf{R}_{\odot}$ — барицентрический радиус-вектор Солнца. Находим единичный гелиоцентрический радиус-вектор Земли $\mathbf{r}_{\oplus} =< \mathbf{R}_{SE} >= \mathbf{R}_{SE}/|\mathbf{R}_{SE}|$.

3. Единичный барицентрический радиус-вектор $\mathbf{r}_0$ звезды

$$\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} \cos\delta_0 \cos\alpha_0 \\ \cos\delta_0 \sin\alpha_0 \\ \sin\delta_0 \end{pmatrix},$$

где α_0, δ_0 — прямое восхождение и склонение звезды на эпоху J2000.0 для экватора и равноденствия J2000.0.

Находим вектор скорости движения звезды $\mathbf{m} = (m_x, m_y, m_z)$ (в радианах/год) в пространстве:

$$\mathbf{m} = \mathbf{p}_0 \mu_\alpha \cos\delta_0 + \mathbf{q}_0 \mu_\delta + \mathbf{r}_0 \frac{\pi}{1\ \text{а. е.}} V_r$$

или

$$\begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha_0 & -\sin\delta_0\cos\alpha_0 & \cos\delta_0\cos\alpha_0 \\ \cos\alpha_0 & -\sin\delta_0\sin\alpha_0 & \cos\delta_0\sin\alpha_0 \\ 0 & \cos\delta_0 & \sin\delta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_\alpha\cos\delta_0 \\ \mu_\delta \\ \frac{\pi}{1\ \text{а. е.}} V_r \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0$ — единичные векторы (5.123-5.124), компоненты собственного движения $\boldsymbol{\mu}$ звезды $\mu_\alpha \cos\delta_0, \mu_\delta$ выражаются в радианах/год, параллакс π — в радианах, радиальная скорость V_r — в а. е./год. Если скорость V_r задана в каталоге в км/с, то 1 км/с $\approx 0,21095$ а. е./год.

Вычисляем единичный геоцентрический радиус-вектор $\mathbf{r}_E$ в направлении звезды (5.130):

$$\mathbf{r}_E =< \mathbf{r_0} + \mathbf{m}\Delta t - \mathbf{R}_\oplus \frac{\pi}{1\text{ а. е.}} >,$$

где $\Delta t = (\mathrm{JD}(t) - 2451545,0)/365,25$ — интервал в юлианских годах от эпохи J2000.0.

4. Находим геоцентрический единичный радиус-вектор $\mathbf{r}'_E$ звезды с учетом отклонения света в поле тяготения Солнца. Из уравнения (5.146) получим, заменяя D_L на $|\mathbf{R}_{SE}|$ и $\mathbf{s}_\odot$ на $-\mathbf{r}_\oplus$:

$$\mathbf{r}'_E =< \mathbf{r}_E + \frac{2GM_\odot}{c^2|\mathbf{R}_{SE}|} \cdot \frac{\mathbf{r}_\oplus - (\mathbf{r}_E \cdot \mathbf{r}_\oplus)\mathbf{r}_E}{1 + \mathbf{r}_\oplus \cdot \mathbf{r}_E} > .$$

5. Учитываем годичную аберрацию по формуле (5.105) и находим вектор $\mathbf{r}''_E$:

$$\mathbf{r}''_E = \frac{1}{1 + \beta \mathbf{r}'_E \cdot \mathbf{n}} \left[\frac{\mathbf{r}'_E}{\gamma} + \beta \mathbf{n} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} (\mathbf{r}'_E \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \right],$$

где $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, $\beta = V/c$, $\mathbf{n}$ — единичный вектор направления скорости Земли, $\mathbf{n} = \mathbf{V}_\oplus / |\mathbf{V}_\oplus|$.

6. Вычисляем матрицу прецессии P и матрицу нутации N на эпоху t. Преобразование к видимому месту звезды, задаваемому вектором

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\delta \cos\alpha \\ \cos\delta \sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix},$$

выполняется с помощью матричного уравнения (6.45):

$$\mathbf{r} = N^T P^T \mathbf{r}''_E.$$

7. Находим сферические координаты α, δ звезды в геоцентрической системе, отнесенные к истинному экватору и равноденствию эпохи t:

$$\delta = \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\alpha = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & 0 \le \lambda < \pi/2, \text{ если } x > 0, y \ge 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \pi/2 \le \lambda \le 3\pi/2, \text{ если } x \le 0, \\ 2\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & 3\pi/2 < \lambda < 2\pi, \text{ если } x > 0, y < 0. \end{cases}$$

Глава 7

РЕДУКЦИЯ НАБЛЮДЕНИЙ НА РСДБ

Одним из современных астрометрических методов наблюдений является радиоинтерферометрия со сверхдлинными базами (РСДБ). Два радиотелескопа, находящиеся на большом расстоянии друг от друга, одновременно наблюдают радиоисточник на частоте $\omega = 2\pi f$. База (расстояние между телескопами) может быть от нескольких километров до нескольких тысяч километров. Если обозначить один из телескопов первым, а другой — вторым, то вектор $\mathbf{b}$ (рис. 5.5), равный $\mathbf{b} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, называется вектором базы, где $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ — радиусы-векторы телескопов. Если вектор $\mathbf{b}$ известен точно, а $\mathbf{s}$ — единичный вектор в направлении наблюдаемого источника с известными координатами, то

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{s} = c\tau_g, \tag{7.1}$$

где c — скорость света, τ_g — задержка сигнала.

Каждый пункт РСДБ оснащен стандартом частоты, системой приема и преобразования высокочастотного радиосигнала к низкочастотному (к видеополосе) и системой регистрации. По заранее составленной программе телескопы (как правило, это параболические антенны) одновременно наблюдают в течение нескольких минут один и тот же радиоисточник. Так как принимаемые радиосигналы представляют собой шумы, мощность которых очень мала, то сначала они усиливаются, затем преобразуются в низкочастотную область спектра и, наконец, преобразуются из аналогового в цифровой вид. Цифровой сигнал, представляющий из себя случайную последовательность единиц и нулей, записывается на магнитную ленту в течение нескольких минут вместе с метками времени от стан-

дарта частоты. Затем, следуя программе наблюдений, антенны переводятся на следующий источник, и цикл повторяется.

При проведении астрометрических наблюдений в сеансе участвуют от 3 до 10 антенн. В среднем сеанс длится одни сутки. За это время на каждой станции выполняется 100–200 наблюдений 20–40 радиоисточников.

После завершения наблюдений магнитные ленты с каждого пункта РСДБ перевозятся в центр обработки, где выполняется анализ: вычисляется амплитуда и фаза Φ_0 корреляционной функции сигналов для каждой пары антенн (см. сноску на стр. 266). В идеальном случае последовательность единиц и нулей между одними и теми же метками времени на разных магнитных лентах должна быть одинаковой, но сдвинутой на величину задержки. В этом случае амплитуда корреляционной функции равнялась бы единице, а фаза зависела бы лишь от задержки сигнала. В реальной ситуации амплитуда очень мала (порядка $0,01$ для мощных радиоисточников) и в дальнейшей обработке не используется (хотя есть смысл определять веса наблюдений в зависимости от амплитуды).

В результате обработки лент определяется групповая временна̀я задержка сигнала и частота интерференции, которые равны производной фазы Φ_0 кросскорреляционного сигнала по отношению к циклической частоте наблюдений ω и скорости изменения фазы, соответственно:

$$\tau_{gr} = \frac{d\Phi_0}{d\omega}, \quad f_{int} = \frac{d\Phi_0}{dt}.$$

В дальнейшем будем обозначать измеренные (найденные в результате корреляционной обработки) задержку и частоту интерференции символами τ_o и f_o.

Если бы координаты телескопов и источника были известны точно, отсутствовала бы атмосфера, часы были бы синхронизованы точно, то групповая задержка τ_{gr} равнялась бы геометрической задержке τ_g (7.1): $\tau_{gr} = \tau_g$. В действительности вместо (7.1) приходится использовать уравнение:

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{s} = c(\tau_g + \Delta\tau), \tag{7.2}$$

где поправка $c\Delta\tau$ включает ошибки координат телескопов и источника, ошибки теории прецессии и нутации и т. д., в том числе задержку сигнала в атмосфере $\Delta\tau_{atm}$. Предположим здесь, что задерж-

ку $\Delta\tau_{atm}$ мы вычислили, и наша задача теперь — построить модель расчета геометрической задержки τ_g.

Расчетная задержка зависит от десятков параметров. Поэтому на следующем этапе обработки РСДБ наблюдений, в зависимости от задачи, выбирают те параметры, которые следует уточнить. После этого строится матрица условных уравнений относительно уточняемых параметров. Решение системы завершает обработку наблюдений.

Таким образом, на *первом* этапе необходимо с максимально возможной точностью вычислить расчетные задержку и частоту интерференции для каждого наблюдения на основе принятой модели вращения Земли и движения ее по орбите, приливного и неприливного смещения телескопов, теории прецессии и нутации и т. д. В настоящее время модель вычисления задержки и частоты интерференции определена стандартами Международной службы вращения Земли и систем отсчета.

В соответствии со стандартами МСВЗ модель задержки вычисляется в рамках общей теории относительности и с использованием определения барицентрической и геоцентрической систем отсчета (BCRS и GCRS).

В системе BCRS задержка записывается в виде:

$$t_2 - t_1 = -\frac{1}{c}\mathbf{s} \cdot [\mathbf{r}_2(t_2) - \mathbf{r}_1(t_1)] + \Delta\tau_{grav}, \tag{7.3}$$

где $\mathbf{s}$ — единичный вектор в направлении на источник из барицентра Солнечной системы при отсутствии гравитационного отклонения света, $\mathbf{r}_1(t_1), \mathbf{r}_2(t_2)$ — барицентрические радиусы-векторы телескопов в моменты t_1, t_2 (по шкале TCB) прихода фронта волны на телескопы, $\Delta\tau_{grav}$ — гравитационная задержка радиосигнала в Солнечной системе.

Но задержка измерена на поверхности Земли. Поэтому уравнение (7.3) следует преобразовать в систему, связанную с Землей. Сначала уравнение (7.3) преобразуется в уравнение для геоцентрической задержки. Для этого используются формулы релятивистского преобразования барицентрических векторов $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ в соответствующие геоцентрические векторы $\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2$ и промежутка времени $t_2 - t_1$ (TCB) в промежуток времени TCG: $t'_2 - t'_1$. После этого можно выразить геоцентрическую задержку через вектор базы $\mathbf{b}$.

Это решение определяет задержку в шкале TCG, которая является шкалой координатного времени в системе GCRS. Векторы также выражаются в системе GCRS.

Однако метки времени, записываемые на магнитные ленты и используемые при корреляции сигналов, формируются стандартами частоты, которые, как мы знаем, отражают собственное время. Перед началом наблюдений стандарты на всех телескопах, участвующих в сеансе РСДБ, синхронизируются между собой с помощью радио, телесигналов или сигналов навигационных систем в шкале UTC с максимально возможной точностью. Поэтому можно считать, что измеренная задержка выражается не в собственном времени часов, а в шкале координатного времени TT (так как шкала TT отличается от шкалы UTC только смещением). Тогда в формуле для задержки $t'_2 - t'_1$ (TT) вектор базы $\mathbf{b}$ выражается не в GCRS, а в системе ITRF2000. Пространственные координаты, получаемые из анализа данных РСДБ, согласованы со шкалой времени TT, а не TCG.

Именно этот алгоритм используется во всех центрах анализа наблюдений на РСДБ. Координаты телескопов, следовательно, приводятся не в системе GCRS; масштаб земной системы координат ITRF2000 не удовлетворяет резолюциям МАС (см. также стр. 431).

После того как разработана модель задержки, можно найти расчетные значения задержки и частоты интерференции (обозначим их как τ_c и f_c), которые равны геометрическим значениям плюс поправки за атмосферу и рассинхронизацию часов. Одновременно вычисляются частные производные задержки и частоты интерференции по параметрам модели. Этот этап в соответствии с традициями астрометрии можно назвать редукцией РСДБ-наблюдений.

Современная точность измерения групповой задержки составляет примерно 10 пкс, а частоты интерференции $\sim 10^{-15}$ с/с. Значит, точность вычисления задержки (точность модели наблюдений) должна быть не хуже 1 пкс (в линейной мере $\sim 0,3$ мм).

На *втором* этапе обработки для каждого наблюдения разность измеренной и вычисленной задержки (частоты интерференции) представляется в виде разложения по малым параметрам — поправкам к принятым значениям параметров p_i модели:

$$\tau_o - \tau_c = \sum_i^N \frac{\partial \tau_c}{\partial p_i} \Delta p_i, \quad f_o - f_c = \sum_i^N \frac{\partial f_c}{\partial p_i} \Delta p_i, \tag{7.4}$$

причем число параметров N может быть различным в зависимости от конкретной задачи.

На *третьем* этапе оцениваются параметры модели. Чаще всего для этого используется метод наименьших квадратов. Решение системы условных уравнений (7.4) дает поправки Δp_i к параметрам, которые нас интересуют.

7.1. Основные этапы редукции наблюдений на РСДБ

Для вычисления задержки с точностью ~ 1 пкс необходимо знать координаты вектора базы с точностью $\sim 0,3$ мм или с относительной погрешностью $\sim 10^{-10}$ при длинах баз $\sim 3 \div 5$ тыс. км. С аналогичной точностью необходимо предвычислять взаимную ориентацию вектора базы и вектора направления на источник. Взаимная ориентация этих векторов изменяется вследствие вращения Земли, изменения ориентации Земли в инерциальном пространстве, приливных и тектонических движений пунктов РСДБ и т. д. Все эти явления должны быть учтены при моделировании задержки с относительной ошибкой, не превышающей 10^{-10}.

Процедура расчета задержки (времени прохождения фронта волны от первой до второй антенны) рекомендована в «Стандартах МСВЗ» и заключается в выполнении следующих этапов.

1. Все вычисления выполняются на момент собственного времени t'_1 прихода сигнала на антенну с номером 1. Время t'_1 измеряется часами в заданной земной системе координат. Как уже говорилось, масштаб системы ITRF2000 согласован с шкалой координатного времени TT. На момент времени t'_1 в системе ITRF2000 вычисляется изменение координат телескопов из-за тектонического движения.

2. Кроме этого координаты телескопов меняются вследствие приливов, изменения атмосферной нагрузки на земную кору, температурных деформаций. Эти поправки вычисляются на момент наблюдения в локальной топоцентрической системе, называемой VEN: первая ось направлена в геодезический зенит (V), вторая — на восток (E) и третья — на север (N). Для преобразования поправок к координатам телескопов от системы

VEN к системе ITRF2000 МСВЗ рекомендует использовать средний эллипсоид IERS96.

3. Координаты телескопов из системы ITRF2000 преобразуются в геоцентрическую небесную систему координат (GCRS), движущуюся вместе с Землей. Это преобразование включает ряд поворотов систем координат, которые представляются в результате одной матрицей вращения (6.54).

4. Используя преобразования Лоренца, координаты телескопов преобразуются к системе отсчета BCRS с началом в барицентре Солнечной системы.

5. Задержка прихода сигнала на антенну с номером 2 вычисляется в шкале координатного времени в барицентрической системе координат. К полученной задержке добавляется гравитационная задержка сигнала.

6. С помощью обратного преобразования Лоренца задержка из барицентрической преобразуется в геоцентрическую небесную систему, движущуюся с Землей, и вычисляется геометрическая геоцентрическая задержка.

7. Для вычисления расчетной задержки к геометрической задержке добавляются поправки, вызванные рассинхронизацией часов, задержкой сигнала в тропосфере и ионосфере Земли.

Чтобы получить частоту интерференции, необходимо продифференцировать по времени выражение для задержки.

7.2. Вычисление гравитационной задержки

Радиосигнал в Солнечной системе распространяется в гравитационном поле, которое создается Солнцем и другими телами. С достаточной точностью гравитационное поле Солнца и планет можно аппроксимировать полем тяготения точечной массы. В этом случае для вычисления гравитационной задержки можно использовать формулы, полученные в § 5.6. Как говорилось, в гравитационном поле не только искривляется траектория фотона, но и изменяется его координатная скорость. Если первая причина приводит к изменению положения источника на небе, то вторая — к дополнительной задержке сигнала при прохождении им гравитационного поля.

Изменение скорости фотона пропорционально GM/rc^2 (5.135). Легко показать, что изменение длины пути вследствие отклонения траектории фотона от прямолинейной является величиной второго порядка малости по параметру GM/rc^2. Поэтому этим эффектом, по сравнению с изменением скорости фотона, можно пренебречь.

Задержку сигнала в гравитационном поле в этом случае можно рассчитать, взяв прямолинейную траекторию фотона (рис. 7.1). Пусть событие испускания фотона описывается координатами t_s, $\mathbf{r}_s(t_s)$, а приема — t_e, $\mathbf{r}_e(t_e)$. Так как при прохождении сферически-симметричного гравитационного поля траектория фотона лежит в плоскости, то для вычисления задержки введем систему координат (x, y) с началом в центре гравитирующего тела, причем ось x направим параллельно волновому вектору $\mathbf{k}$.

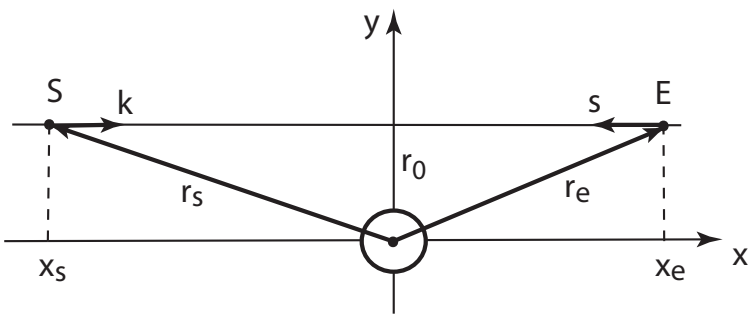


Рис. 7.1. Гравитационная задержка сигнала в поле Солнца.

В этой системе координат для вычисления гравитационной задержки воспользуемся уравнением (5.135). Для этого перепишем уравнение (5.135) следующим образом:

$$cdt = \frac{dx}{1 - \phi\left(1 + \frac{x^2}{r^2}\right)} \approx dx\left[1 + \phi\left(1 + \frac{x^2}{r^2}\right)\right], \qquad (7.5)$$

где $\phi = \frac{GM}{c^2 r}$. Дифференциальное уравнение (7.5) легко решается:

$$c\int\limits_{t_s}^{t_e} dt = \int\limits_{x_s}^{x_e} dx + \frac{GM}{c^2}\int\limits_{x_s}^{x_e} \frac{1}{r}\left(1 + \frac{x^2}{r^2}\right)dx.$$

Так как $r = \sqrt{x^2 + r_0^2}$, то интегралы тоже легко вычисляются:

$$c(t_e - t_s) = (x_e - x_s) + \\ + 2\frac{GM}{c^2} \ln \frac{x_e + \sqrt{x_e^2 + r_0^2}}{x_s + \sqrt{x_s^2 + r_0^2}} - \frac{GM}{c^2} \left(\frac{x_e}{\sqrt{x_e^2 + r_0^2}} - \frac{x_s}{\sqrt{x_s^2 + r_0^2}} \right). \quad (7.6)$$

Первый член в формуле (7.6) представляет геометрическую задержку сигнала в ньютоновом приближении, второй и третий члены — релятивистскую задержку сигнала. Для численной оценки релятивистской задержки важен лишь второй член в (7.6), так как третий член дает слишком малый вклад.

Если ввести обозначения: $r_s = |\mathbf{r}_s|, r_e = |\mathbf{r}_e|$, то уравнение (7.6) можно записать в виде:

$$c(t_e - t_s) = |\mathbf{r}_s(t_s) - \mathbf{r}_e(t_e)| + 2\frac{GM}{c^2} \ln \frac{\mathbf{r}_e \cdot \mathbf{k} + r_e}{\mathbf{r}_s \cdot \mathbf{k} + r_s}. \quad (7.7)$$

Таким образом, в присутствии гравитационного поля массивного тела свету необходимо большее время для прохождения данного расстояния, чем следует из ньютоновской теории тяготения.

Чтобы найти гравитационную задержку для радиоинтерферометра, воспользуемся уравнениями (7.3) и (7.7):

$$c(t_2 - t_1) = |\mathbf{r}_s(t_s) - \mathbf{r}_2(t_2)| - |\mathbf{r}_s(t_s) - \mathbf{r}_1(t_1)| + \\ + 2\frac{GM}{c^2} \left(\ln \frac{r_2 - \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{s}_2}{r_1 - \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{s}_1} + \ln \frac{r_s - \mathbf{r}_s \cdot \mathbf{s}_1}{r_s - \mathbf{r}_s \cdot \mathbf{s}_2} \right).$$

Здесь мы учли, что в общем случае направление на источник из двух точек с барицентрическими радиусами-векторами $\mathbf{r}_1(t_1), \mathbf{r}_2(t_2)$ может различаться и определяется единичными векторами $\mathbf{s}_1(t_1)$, $\mathbf{s}_2(t_2)$.

При наблюдении галактических или внегалактических радиоисточников справедливы соотношения: $r_s \gg r_1$, $r_s \gg r_2$. Поэтому можно записать, что

$$|\mathbf{r}_s(t_s) - \mathbf{r}_i(t_i)| \approx (\mathbf{r}_s(t_s) - \mathbf{r}_i(t_i)) \cdot \mathbf{s}, \quad r_s - \mathbf{r}_s \cdot \mathbf{s}_i = r_s(1 - \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}_i),$$

где $\mathbf{s} = \mathbf{r}_s / r_s$, $i = 1, 2$.

Легко выразить векторы $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$ через $\mathbf{s}$. Если обозначить через $\mathbf{r}_{is}$ радиус-вектор источника относительно телескопа i, то

$$\mathbf{r}_{is} = \mathbf{r}_s - \mathbf{r}_i, \quad \mathbf{s}_i = \mathbf{r}_{is} / r_{is},$$

$$r_{is} = r_s\sqrt{1 + \frac{r_i^2}{r_s^2} - 2\frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{s}}{r_s}}.$$

Разлагая квадратный корень по малому параметру, получим:

$$\mathbf{s}_i \approx \mathbf{s} + \frac{1}{r_s}\big[(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{s}) \cdot \mathbf{s} - \mathbf{r}_i\big] - \frac{1}{r_s^2}\Big[(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{s}) \cdot \mathbf{r}_i + \frac{1}{2}r_i^2 \cdot \mathbf{s} - \frac{3}{2}\mathbf{s} \cdot (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{s})^2\Big].$$

Значит

$$\ln\frac{r_2 - \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{s}_2}{r_1 - \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{s}_1} \approx \ln\frac{r_2 - \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{s}}{r_1 - \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{s}},\ \ln\frac{r_s - \mathbf{r}_s \cdot \mathbf{s}_1}{r_s - \mathbf{r}_s \cdot \mathbf{s}_2} \approx \ln\frac{r_1^2 - (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{s})^2}{r_2^2 - (\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{s})^2}$$

и в окончательном виде гравитационная задержка

$$\Delta\tau_{grav} = \frac{2GM}{c^3} \cdot \ln\left(\frac{r_1 + \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{s}}{r_2 + \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{s}}\right). \tag{7.8}$$

Полная гравитационная задержка при распространении сигнала в Солнечной системе равна сумме задержек, вызванных гравитационным полем всех планет, включая Луну, кроме Земли. В формуле (7.8) векторы $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ являются радиусами-векторами телескопов относительно гравитирующего тела с массой M. Вклад Юпитера и Сатурна в гравитационную задержку может достигать нескольких сотен, а Луны — нескольких пикосекунд. Величина гравитационной задержки, вызываемой полем Солнца, существенно зависит от положения Солнца относительно радиоисточника: при угловом расстоянии 1° задержка ~ 40 нс, при расстоянии 180° — 400 пкс.

Для Земли гравитационная задержка выражается той же формулой (векторы $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ являются радиусами-векторами телескопов в системе GCRS) и составляет ~ 20 пкс.

7.3. Вычисление геометрической задержки

Для вычисления геометрической задержки будем считать, что радиоисточник находится на бесконечно большом расстоянии от наблюдателя, т. е. фронт приходящей волны — плоский. Найдем сначала выражение для задержки в барицентрической системе отсчета (см. § 7.1, пункт 5), используя уравнение (7.3).

Так как вычисления задержки должны выполняться для момента времени прихода фронта волны на телескоп №1, т. е. t_1, то разложим вектор $\mathbf{r}_2(t_2)$ в ряд:

$$\mathbf{r}_2(t_2) = \mathbf{r}_2(t_1) + \dot{\mathbf{r}}_2(t_1)(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{r}}_2(t_1)(t_2 - t_1)^2 + \dots . \qquad (7.9)$$

Для телескопов, расположенных на Земле, скорость $|\dot{\mathbf{r}}_2| \sim 30$ км/с, ускорение $|\ddot{\mathbf{r}}_2| \sim 10^{-2}$ м/с^2. Для максимальной базы, реализуемой на Земле (~ 10000 км), задержка $t_2 - t_1 \sim 0,03$ с. Значит, вклад второго члена в длину вектора $\mathbf{r}_2$ равен $\sim 0,9$ км, третьего — менее $0,01$ мм. Отсюда делаем вывод, что по сравнению с точностью вычислений (0,3 мм) вкладом ускорения можно пренебречь.

В момент прихода фронта плоской волны на телескоп №1 радиус-вектор этого телескопа относительно барицентра B Солнечной системы равен $\mathbf{r}_1(t_1)$, где t_1— время ТСВ. В момент времени t_1 радиус-вектор телескопа №2 в этой же системе равен $\mathbf{r}_2(t_1)$, а в момент прихода фронта волны — $\mathbf{r}_2(t_2)$ (рис. 7.2).

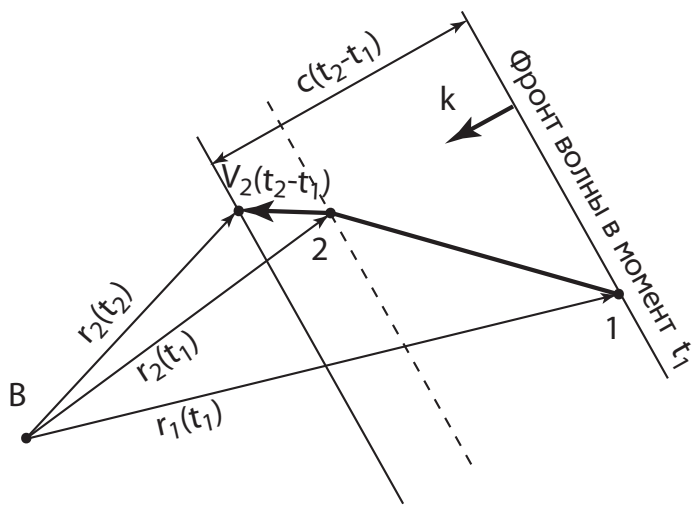


Рис. 7.2. Геометрия прихода фронта волны на РСДБ.

Пусть скорость второй антенны равна $\mathbf{V}_2 = \dot{\mathbf{r}}_2$. Тогда, используя уравнения (7.3) и (7.9), найдем

$$c(t_2 - t_1) = \mathbf{k} \cdot [\mathbf{r}_2(t_1) - \mathbf{r}_1(t_1)] + \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_2(t_1)(t_2 - t_1) + c\Delta\tau_{grav}, \quad (7.10)$$

где $\mathbf{k}$ — единичный вектор в направлении распространения волны. Если $\mathbf{s}$ — единичный барицентрический вектор источника, то $\mathbf{k} = -\mathbf{s}$. Из (7.10) получим:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta\tau_{grav} + \frac{1}{c}\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{1 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_2/c} = \frac{\Delta\tau_{grav} - \frac{1}{c}\mathbf{s} \cdot \mathbf{b}(t_1)}{1 + \mathbf{s} \cdot \mathbf{V}_2/c}, \quad (7.11)$$

$\mathbf{b}(t_1) = \mathbf{r}_2(t_1) - \mathbf{r}_1(t_1)$. Все вектора в (7.11) вычисляются в барицентрической системе отсчета на момент времени t_1. Скорость второго пункта может быть представлена с необходимой точностью в виде суммы двух векторов: барицентрической скорости геоцентра $\mathbf{V}_\oplus$ и линейной скорости $\mathbf{w}_2 = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_2$, определяемой вращением Земли, т. е. $\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_\oplus + \mathbf{w}_2$.

На этапе редукции (см. § 7.1, пункт 6) задержку (7.11) необходимо пересчитать в геоцентрическую небесную систему. Для этого используем преобразования Лоренца, записанные в виде (5.98-5.99), и исправим их для учета гравитационного поля Солнечной системы в центре Земли.

Воспользуемся выражением (4.46) для интервала, которое запишем в следующем виде:

$$c^2 d\tau^2 = c^2(1 - 2\phi)dt^2 - (1 + 2\phi)dx^j dx^j, \quad (7.12)$$

где $\phi = U/c^2$, U — гравитационный потенциал всех тел Солнечной системы в точке расположения часов. В уравнении (7.12) использовано правило суммирования Эйнштейна. Если ввести новую систему координат $(t^*, \mathbf{r}^*)$ такую, что

$$\begin{aligned} dt^* &= \sqrt{1 - 2\phi}\, dt \approx (1 - \phi)dt, \\ dx^{*k} &= \sqrt{1 + 2\phi}\, dx^k \approx (1 + \phi)dx^k, \end{aligned} \quad (7.13)$$

то интервал записывается в виде:

$$c^2 d\tau^2 = c^2(dt^*)^2 - (dx^{*j} dx^{*j}).$$

Иными словами, в координатах $(t^*, \mathbf{r}^*)$ метрика является метрикой Минковского, и законы физики могут быть записаны в рамках специальной теории относительности. Координаты, помеченные звездочкой, определены в барицентрической системе отсчета. Чтобы

найти соответствующие координаты и промежутки времени в системе, связанной с движущейся Землей, которые по-прежнему будем отмечать штрихами, необходимо выполнить преобразования Лоренца (5.98-5.99). Запишем их в дифференциальной форме:

$$dx'^j = dx^{*j} + (\gamma - 1)\frac{dx^{*k}V^k}{V^2}V^j - \gamma V^j dt^*,$$
$$t' = \gamma\Big(t^* - \frac{dx^{*k}V^k}{c^2}\Big).$$

Если ограничиться членами порядка c^{-2}, то

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}, \quad \gamma - 1 \approx \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}.$$

Исключая координаты со звездочкой с помощью уравнений (7.13), получим

$$dx'^j = (1+\phi)dx^j + (1+\phi)\frac{1}{2}\frac{dx^kV^k}{c^2}V^j -$$
$$- (1-\phi)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}\right)V^j dt, \tag{7.14}$$
$$dt' = \left(1 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}\right)\Big[(1-\phi)dt - (1+\phi)\frac{dx^kV^k}{c^2}\Big]. \tag{7.15}$$

Обратное преобразование легко найти с помощью матричного метода. Для этого необходимо записать уравнения (7.14-7.15) в матричном виде, т. е. определить матрицу K^*, аналогичную матрице K (5.95), и вычислить обратную матрицу $(K^*)^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\phi'}\left[\frac{V_1^2}{V^2}\gamma' + 1\right] & \frac{V_1V_2}{\phi'V^2}\gamma' & \frac{V_1V_3}{\phi'V^2}\gamma' & -i\beta\gamma\frac{V_1}{\phi'V} \\ \frac{V_1V_2}{\phi'V^2}\gamma' & \frac{1}{\phi'}\left[\frac{V_2^2}{V^2}\gamma' + 1\right] & \frac{V_2V_3}{\phi'V^2}\gamma' & -i\beta\gamma\frac{V_2}{\phi'V} \\ \frac{V_1V_3}{\phi'V^2}\gamma' & \frac{V_2V_3}{\phi'V^2}\gamma' & \frac{1}{\phi'}\left[\frac{V_3^2}{V^2}\gamma' + 1\right] & -i\beta\gamma\frac{V_3}{\phi'V} \\ i\beta\gamma\frac{V_1}{(1-\phi)V} & i\beta\gamma\frac{V_2}{(1-\phi)V} & i\beta\gamma\frac{V_3}{(1-\phi)V} & \frac{\gamma}{(1-\phi)} \end{pmatrix}, \tag{7.16}$$

где: $\gamma - 1 = \gamma'$, $1 + \phi = \phi'$, $\beta = V/c$, $V = V_\oplus$ — барицентрическая скорость центра масс Земли. Из (7.16) следует, что дифференциальное преобразование координат и промежутков времени из движущейся

(штрихованной) системы к барицентрической системе записывается в виде:

$$dx^j = (1-\phi)\left[dx'^j + \frac{1}{2}\frac{dx'^k V^k}{c^2}V^j + \left(1+\frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}\right)V^j dt'\right], \qquad (7.17)$$

$$dt = \left(1+\phi+\frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}\right)\left(dt' + \frac{dx'^k V^k}{c^2}\right). \qquad (7.18)$$

Если часы находятся в покое относительно Земли, то $dx'^k = 0$. Следовательно, соотношение между промежутками координатного и собственного времени из (7.18) имеет известный нам вид:

$$dt = \left(1+\phi+\frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}\right)dt' \text{ или } \quad dt' = \left[1-\left(\phi+\frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}\right)\right]dt.$$

Интегрирование второго уравнения подробно рассмотрено в § 4.5.2.

Согласно соглашению мы должны вычислять все величины на момент времени t_1. Поэтому из (7.18) имеем:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = t_2' - t_1' + \frac{1}{c^2}\left\langle \frac{V_\oplus^2}{2} + U(\mathbf{r}_\oplus)\right\rangle \Delta t + \\ + \frac{1}{c^2}\left[V_\oplus^k(r_2^k - r_\oplus^k)|_{t_2} - V_\oplus^k(r_2^k - r_\oplus^k)|_{t_1}\right].$$

Используя формулы (7.9) и (7.11), вычислим значения векторов на момент t_1. В результате получим:

$$\Delta t = t_2' - t_1' + \frac{1}{c^2}\left\langle \frac{V_\oplus^2}{2} + U(\mathbf{r}_\oplus)\right\rangle \Delta t + \frac{1}{c^2}\mathbf{V}_\oplus\cdot\mathbf{b} - \frac{1}{c^3}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{s})\cdot(\mathbf{V}_\oplus\cdot\mathbf{w}_2). \qquad (7.19)$$

Расстояние между двумя точками в земной системе отсчета определяется выражением (7.17) при $dt' = 0$ и может быть найдено интегрированием. Пренебрегая вариациями потенциала и изменением скорости этих точек (такие вариации малы по сравнению с потенциалом на поверхности Земли и средней скоростью), получим:

$$\Delta x^j = (1-\phi)\Delta x'^j + \frac{1}{2}\frac{\Delta x'^k V^k}{c^2}V^j.$$

или в векторном виде:

$$\mathbf{b}^* = (1-\phi)\mathbf{b}'(t_1') + \frac{1}{2}\frac{\mathbf{b}'(t_1')\cdot\mathbf{V}_\oplus}{c^2}\mathbf{V}_\oplus. \qquad (7.20)$$

Вектор базы $\mathbf{b}'(t_1') = \mathbf{r}_2'(t_1') - \mathbf{r}_1'(t_1')$ в момент собственного времени t_1' соответствует вектору $\mathbf{b}^*$ в барицентрической системе, причем:

$$\mathbf{b}^* = \mathbf{r}_2(t_2^*) - \mathbf{r}_1(t_1).$$

Чтобы выразить вектор $\mathbf{b}^*$ через $\mathbf{b}(t_1) = \mathbf{r}_2(t_1) - \mathbf{r}_1(t_1)$, заметим, что два события, одновременных в геоцентрической системе координат и произошедших в момент t_1', разделены промежутком координатного времени (7.18):

$$t_2^* - t_1 = \left(1 + \phi + \frac{1}{2}\frac{V_\oplus^2}{c^2}\right)\frac{\mathbf{b}'(t_1')\cdot\mathbf{V}_\oplus}{c^2} = \frac{\mathbf{b}'(t_1')\cdot\mathbf{V}_\oplus}{c^2} + O(c^{-4}). \quad (7.21)$$

Учитывая, что в барицентрической системе отсчета

$$\mathbf{r}_2(t_2^*) = \mathbf{r}_2(t_1) + \mathbf{V}_2(t_2^* - t_1),$$

получим выражение для вектора $\mathbf{b}^*$:

$$\mathbf{b}^* = \mathbf{b}(t_1) + \mathbf{V}_2(t_2^* - t_1) = \mathbf{b}(t_1) + \mathbf{V}_2\frac{\mathbf{b}'(t_1')\cdot\mathbf{V}_\oplus}{c^2}. \quad (7.22)$$

Пренебрегая членами порядка c^{-4} и менее, из уравнений (7.20) и (7.22), получим (см. § 7.1, пункт 4):

$$\mathbf{b}(t_1) = \mathbf{b}'(t_1') - \frac{1}{c^2}\Big(U(\mathbf{r}_\oplus)\mathbf{b}'(t_1') + \\ + \frac{1}{2}(\mathbf{b}'(t_1')\cdot\mathbf{V}_\oplus)\mathbf{V}_\oplus + (\mathbf{b}'(t_1')\cdot\mathbf{V}_\oplus)\mathbf{w}_2\Big). \quad (7.23)$$

Выразим теперь левую часть формулы (7.11) через разность $\Delta t' = t_2' - t_1'$, т. е. заменим Δt по формуле (7.19), а вектор $\mathbf{b}$ на $\mathbf{b}'$ согласно (7.23). После приведения подобных членов получим окончательную формулу для задержки сигнала в геоцентрической системе координат (см. § 7.1, пункт 6):

$$\Delta t' = \frac{1}{1 + \frac{1}{c}\mathbf{s}\cdot(\mathbf{V}_\oplus + \mathbf{w}_2)}\Big\{\Delta\tau_{grav} - \\ - \frac{1}{c}(\mathbf{s}\cdot\mathbf{b}')\Big[1 - \frac{2U(\mathbf{r}_\oplus)}{c^2} - \frac{|\mathbf{V}_\oplus|^2}{2c^2} - \frac{\mathbf{V}_\oplus\cdot\mathbf{w}_2}{c^2}\Big] - \\ - \frac{1}{c^2}(\mathbf{V}_\oplus\cdot\mathbf{b}')\Big(1 + \frac{\mathbf{V}_\oplus\cdot\mathbf{s}}{2c}\Big)\Big\}. \quad (7.24)$$

Расчетная задержка τ_c получается путем добавления к $\Delta t'$ задержки в тропосфере и ионосфере, а также поправки за рассинхронизацию часов:

$$\tau_c = \Delta t' + (\delta D_2 - \delta D_1)/c + [(\tau_{ion})_2 - (\tau_{ion})_1] + \\ + C_0 + C_1(t - \overline{t}) + \frac{1}{2}C_2(t - \overline{t})^2,$$

где $\delta D_1, \delta D_2$ вычисляются для телескопов 1 и 2 по формуле (5.56), а ионосферная задержка $(\tau_{ion})_1$, $(\tau_{ion})_2$ находится очень точно, если наблюдения велись одновременно на двух частотах (5.38). Основной вклад в ошибку вычисления τ_c вносит неточность вычисления задержки в тропосфере, вызванной наличием водяного пара.

Обычно поправка за рассинхронизацию часов представляется в виде квадратичного полинома, коэффициенты C_0, C_1, C_2 которого уточняются при решении системы условных уравнений (7.4); t — момент наблюдения в шкале UTC, $\overline{t}$ — средний момент сеанса наблюдений.

7.4. Вычисление частных производных по нутации в долготе и нутации в наклоне

В качестве примера приведем теперь алгоритм вычисления частных производных от расчетной задержки по нутации в долготе и наклоне.

В соответствии с используемой теорией нутации и алгоритмом вычисления расчетной задержки при преобразовании координат телескопов из земной в геоцентрическую небесную систему координат на эпоху J2000.0 необходимо знать матрицу вращения (6.54), которую, используя определение матрицы нутации N (6.44), запишем в виде:

$$W = PR_1(-\varepsilon)R_3(\Delta\psi)R_1(\varepsilon + \Delta\varepsilon)R_3(-GAST)R_1(y_p)R_2(x_p). \quad (7.25)$$

Нас интересуют поправки к вычисленным по теории нутации углам $\Delta\psi$ и $\Delta\varepsilon$. Для вычисления частных производных расчетной задержки по этим параметрам запишем выражение для базы $\mathbf{b}'$:

$$\mathbf{b}' = W\mathbf{b}_{cfs},$$

где $\mathbf{b}_{cfs}$ — вектор базы в земной системе координат после учета приливных и неприливных смещений телескопов.

Тогда частные производные задержки по параметру η, где $\eta = \Delta\psi$ или $\eta = \Delta\varepsilon$,

$$\frac{\partial \Delta t'}{\partial \eta} = \frac{1}{1 + \frac{1}{c}\mathbf{s}\cdot(\mathbf{V}_\oplus + \mathbf{w}_2)}\Big\{-\frac{\mathbf{s}}{c}\cdot\frac{\partial \mathbf{b}'}{\partial \eta}\Big[1 - \frac{2U}{c^2} - \frac{|\mathbf{V}_\oplus|^2}{2c^2} - \frac{\mathbf{V}_\oplus\cdot\mathbf{w}_2}{c^2}\Big] - \\ - \frac{1}{c^2}\mathbf{V}_\oplus\cdot\frac{\partial \mathbf{b}'}{\partial \eta}\Big(1 + \frac{\mathbf{s}\cdot\mathbf{V}_\oplus}{2c}\Big)\Big\}.$$

Производные вектора базы по $\Delta\psi$ и $\Delta\varepsilon$:

$$\frac{\partial \mathbf{b}'}{\partial \Delta\psi} = \frac{\partial W}{\partial \Delta\psi}\mathbf{b}_{cfs},\ \frac{\partial \mathbf{b}'}{\partial \Delta\varepsilon} = \frac{\partial W}{\partial \Delta\varepsilon}\mathbf{b}_{cfs},$$

где

$$\frac{\partial W}{\partial \Delta\psi} = P\frac{\partial N}{\partial \Delta\psi}R_3(-GAST)R_1(y_p)R_2(x_p) + \\ + PN\frac{\partial R_3(-GAST)}{\partial \Delta\psi}R_1(y_p)R_2(x_p),$$

$$\frac{\partial W}{\partial \Delta\varepsilon} = P\frac{\partial N}{\partial \Delta\varepsilon}R_3(-GAST)R_1(y_p)R_2(x_p) + \\ + PN\frac{\partial R_3(-GAST)}{\partial \Delta\varepsilon}R_1(y_p)R_2(x_p).$$

Производные матрицы N по переменным $\Delta\psi$ и $\Delta\varepsilon$:

$$\frac{\partial N}{\partial \Delta\psi} = R_1(-\varepsilon)\frac{\partial R_3(\Delta\psi)}{\partial \Delta\psi}R_1(\varepsilon'), \quad \frac{\partial N}{\partial \Delta\varepsilon} = R_1(-\varepsilon)R_3(\Delta\psi)\frac{\partial R_1(\varepsilon')}{\partial \Delta\varepsilon},$$

здесь мы использовали обозначение: $\varepsilon' = \varepsilon + \Delta\varepsilon$.

В явном виде имеем:

$$\frac{\partial N}{\partial \Delta\psi} = \begin{pmatrix} -\sin\Delta\psi & \cos\Delta\psi\cos\varepsilon' & \cos\Delta\psi\sin\varepsilon' \\ -\cos\varepsilon\cos\Delta\psi & -\cos\varepsilon\sin\Delta\psi\cos\varepsilon' & -\cos\varepsilon\sin\Delta\psi\sin\varepsilon' \\ -\sin\varepsilon\cos\Delta\psi & -\sin\varepsilon\sin\Delta\psi\cos\varepsilon' & -\sin\varepsilon\sin\Delta\psi\sin\varepsilon' \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial N}{\partial \Delta\varepsilon} = \\ \begin{pmatrix} 0 & -\sin\Delta\psi\sin\varepsilon' & \sin\Delta\psi\cos\varepsilon' \\ 0 & -\cos\varepsilon\cos\Delta\psi\sin\varepsilon' + \sin\varepsilon\cos\varepsilon' & \cos\varepsilon\cos\Delta\psi\cos\varepsilon' + \sin\varepsilon\sin\varepsilon' \\ 0 & -\sin\varepsilon\cos\Delta\psi\sin\varepsilon' - \cos\varepsilon\cos\varepsilon' & \sin\varepsilon\cos\Delta\psi\cos\varepsilon' - \cos\varepsilon\sin\varepsilon' \end{pmatrix}$$

Так как

$$R_3(-GAST) = \begin{pmatrix} \cos(GAST) & -\sin(GAST) & 0 \\ \sin(GAST) & \cos(GAST) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$\frac{\partial R_3(-GAST)}{\partial \Delta\psi} = \frac{dR_3(-GAST)}{dGAST}\frac{\partial GAST}{\partial \Delta\psi},$$
$$\frac{\partial R_3(-GAST)}{\partial \Delta\varepsilon} = \frac{dR_3(-GAST)}{dGAST}\frac{\partial GAST}{\partial \Delta\varepsilon} = 0.$$

Так как уравнение равноденствий (6.51) определяется **средним** наклоном ε, то истинное гринвичское время GAST не зависит от $\Delta\varepsilon$. Поэтому

$$\frac{\partial GAST}{\partial \Delta\psi} = \cos\varepsilon, \quad \frac{\partial GAST}{\partial \Delta\varepsilon} = 0$$

и

$$\frac{\partial R_3(-GAST)}{\partial \Delta\varepsilon} = 0.$$

Аналогично вычисляются частные производные расчетной задержки по другим параметрам: координатам полюса, всемирному времени, координатам телескопов и радиоисточников и т. д.

Глава 8

АСТРОНОМИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ

Формулы, описывающие движение небесных тел, содержат большое число величин, которые должны быть определены из наблюдений или экспериментов. Например, это массы и размеры планет, компоненты угловой скорости их вращения, элементы орбит и т. п. Очевидно, значения этих величин зависят как от совокупности наблюдений, по которым они определены, так и от системы формул, описывающих движение небесных тел. Таким образом, каждая новая теория или даже каждое новое наблюдение, требуют пересмотра всей совокупности постоянных величин.

Практически такой пересмотр нецелесообразен, хотя и возможен в наше компьютерное время. Чтобы сравнивать между собой наблюдения, сделанные в разное время и из разных мест, планировать полеты космических аппаратов и для многих других целей, необходимы значения постоянных, являющихся общепринятым стандартом. Такой стандарт в астрономии называют системой фундаментальных постоянных. Входящие в систему постоянные называются *фундаментальными астрономическими постоянными*, хотя многие из них определяются геодезическими, геофизическими и другими методами.

Список астрономических постоянных не регламентирован и меняется в зависимости от потребностей и точности вычислений. Желательно, чтобы числовые значения постоянных, выводимые из большого числа наблюдений, точно удовлетворяли теоретическим соотношениям, а также чтобы разности между принятыми и измеренными значениями для каждой астрономической постоянной были ма-

лыми величинами. Желательно, чтобы система постоянных существовала без изменений в течение длительного времени.

Астрономические постоянные можно разделить на несколько групп. Первая группа описывает геометрические параметры Земли (экваториальный радиус, сжатие). Вторая группа — это параметры, связанные с динамикой Земли (динамический форм-фактор, постоянные прецессии, нутации, наклон эклиптики к экватору). К третьей группе относятся параметры, описывающие динамические свойства Солнечной системы (геоцентрическая и гелиоцентрическая постоянные, отношения масс Солнца и планет и др.). В настоящее время к последней группе можно отнести масштабные коэффициенты преобразования между различными шкалами времени.

Среди постоянных выделяют такие, значения которых можно назначить произвольно. Они называются *определяющими*. Другие называются *основными*. В первых системах фундаментальных астрономических постоянных существовали *выводимые* постоянные.

Первая система фундаментальных астрономических постоянных, обязательная при обработке наблюдений, была принята в 1896 г. и 1911 г. и действовала вплоть до 1964 г. В основу этой системы были положены результаты исследований С. Ньюкомба. В список вошли четырнадцать величин: постоянные прецессии, нутации, аберрации, параллакс Солнца, экваториальный радиус Земли, ускорение силы тяжести на экваторе и др. Согласование и принятие системы постоянных способствовало прогрессу в астрономии, так как была создана основа для обработки наблюдений в астрометрии, небесной механике, геодезии и других науках. Строго говоря, первая система не являлась системой постоянных, как это было определено в начале параграфа, из-за несогласованности постоянных между собой, отсутствия разделения на основные и выводимые, а была, скорее, списком наиболее точных значений важнейших астрономических постоянных. Забегая вперед, скажем, что спустя почти сто лет после создания первого списка постоянных, МАС рекомендовал (в 1994 г.) периодически пересматривать некоторые постоянные и публиковать наиболее точные значения, не пересматривая всю систему.

Тем не менее, первая система постоянных просуществовала почти семьдесят лет. Только в 1964 г. на XII Генеральной Ассамблее МАС была принята новая система. К этому времени была намного увеличена точность наблюдений и измерения времени, были по-

строены новые теории движения планет с учётом релятивистских поправок. Решающими факторами для принятия новой системы были высокоточные значения параметров гравитационного поля и фигуры Земли, которые получены на основе наблюдений искусственных спутников Земли, измерение величины астрономической единицы в метрах на основе радиолокационных наблюдений планет. Система включала 23 постоянных (из них две определяющих — число эфемеридных секунд в тропическом году 1900,0 и гауссову гравитационную постоянную, десять основных, одиннадцать выводимых), пять вспомогательных коэффициентов и массы девяти больших планет.

Система фундаментальных астрономических постоянных 1964 г. просуществовала недолго: на XVI Генеральной Ассамблее МАС 1976 г. была принята новая международная система. Она используется для вычисления эфемерид и астрономических ежегодников, начиная с 1984 г. В системе 1976 г. осталась одна определяющая постоянная — гауссова гравитационная постоянная, десять основных, восемь выводимых и массы девяти больших планет и Солнца (табл. 8.1). Величины постоянных приводятся в системе СИ, в которой за единицы длины, массы и времени приняты метр, килограмм и секунда, соответственно. Дополнительно в качестве единиц времени можно использовать одни сутки, равные по определению 86400 секунд СИ, юлианский год, равный 365,25 суток, и юлианское столетие, равное 36525 суток. В настоящее время иногда используют и юлианское тысячелетие (10 юлианских столетий). За астрономическую единицу массы принята масса Солнца. Масса Солнца (выводимая постоянная) в килограммах определяется отношением гелиоцентрической солнечной постоянной к гравитационной постоянной тяготения. Единицей длины в астрономии является астрономическая единица, которая определяется через значение гауссовой гравитационной постоянной (см. стр. 206).

Так как величина сидерического года T_s больше тропического года T_{tr} на отношение годичной прецессии по долготе p (6.14) к dL/dt (стр. 237): $p/(dL/dt) = 0\overset{\mathrm{d}}{,}01417313$, то из (4.86) на эпоху J2000.0 найдем

$$T_s = 365\overset{\mathrm{d}}{,}256365773.$$

Среднее движение системы Земля+Луна: $n = 2\pi/T_s \approx 0,01720212403$.

Тогда большая полуось орбиты системы Земля+Луна, вычисленная по третьему закону Кеплера,

$$a = \left[\frac{k^2}{n^2}(M_\odot + M_\oplus + M_☾)\right]^{1/3} \approx 1,000000042\,\text{а. е.},$$

т. е. примерно на 6 км больше астрономической единицы.

Новой стандартной эпохой равноденствия в системе 1976 г. является эпоха 2000, январь 1,5 TT, что соответствует юлианской дате JD2451545,0, обозначаемой как J2000.0. В формулах вычисления прецессионных параметров в качестве единицы времени используется юлианское столетие, в отличие от прежних систем, где использовалось тропическое столетие.

За прошедшие 25 лет решений об изменении системы постоянных не было. Поэтому в настоящее время должна использоваться система постоянных 1976 г., утвержденная МАС. Однако уже в начале 80-х гг. точность наблюдений повысилась настолько, что потребовалось при их редукции использовать новые, более точные значения постоянных. Международная служба вращения Земли начала использовать новые значения и новые алгоритмы редукции. Так называемые «Стандарты» или «Соглашения» МСВЗ были выпущены в 1989, 1992, 1996 и 2003 гг. В соглашениях приводятся определения основных систем координат, значения постоянных, которые должны использоваться при обработке наблюдений, описываются методы вычисления различных поправок к координатам станций, указывается, какие эфемериды, модели геопотенциала необходимо использовать.

В связи с этим, на Генеральной Ассамблее МАС в 1994 г. было принято решение о сохранении системы МАС 1976 г. как долговременной основы для вычислений в астрономии. В то же время некоторые постоянные, значения которых будут определены более точно, будут периодически заменяться, как это делается в МСВЗ. К настоящему времени уже подготовлены файлы наилучших текущих оценок постоянных (File of Current Best Estimates) для 1994 и 2000 гг.

Аналогичные решения приняты и Международной ассоциацией геодезии (МАГ), которая сохранила геодезическую систему отсчета (Geodetic Reference System) 1980 г. как основу для геодезических вычислений. Численные значения отдельных постоянных мо-

гут быть изменены, при этом сама система не меняется. Так как МАГ публикует свой список параметров, общих для астрономии, геодезии и геодинамики (Parameters of Common Relevance of Astronomy, Geodesy, and Geodynamics), то это приводит к путанице, так как постоянные МАГ и постоянные МАС не согласованы друг с другом. Например, числовые значения экваториального радиуса Земли a_E являются разными, что связано с различными способами учета поправок за приливы. Рекомендованное МАГ значение большой полуоси Земли относится к эллипсоиду, соответствующему так называемой поверхности «средней» коры (см. § 3.5) для геодезических и поверхности «нулевого прилива» для гравиметрических измерений: $a_E = 6378136,62 \pm 0,10$ м (резолюция XVIII Генеральной Ассамблеи МАГ). Это значение должно использоваться и при астрономических вычислениях (см. табл. 8.2). Вопреки этой резолюции при астрономической редукции используется значение $a_E = 6378136,3$ м, определяющее кору Земли, «условно свободную от приливов». Именно в этой системе приводятся координаты станций, задающие земную систему координат.

При обработке наблюдений искусственных спутников Земли рекомендуется использовать модель геопотенциала EGM96, для которой $a_E = 6378136,3$ м и $GM_\oplus = 3.986004415 \times 10^{14}$ м^{3}с$^{-2}$ (в «ТТ»-единицах).

Система астрономических постоянных МАС 1976 г. (табл. 8.1) принята для постоянных, не приведенных в таблице 8.2.

Таблица 8.1: Система фундаментальныхастрономических постоянных 1976 г.

№	Название постоянной	Обозначение	Значение постоянной	Пределы истинного значения
		Определяющая постоянная		
1	Гауссова гравитац. постоянная	k	0,01720209895	—
		Основные постоянные		
2	Скорость света, м/с	c	299 792 458	299 792 456,8 299 792 459,2
3	Время прохождения светом астроном. единицы, с	τ_A	499,004782	499,004776 499,004788
4	Экватор. радиус	a_e	6 378 140	6378135

Таблица 8.1. (Продолжение)

№	Название постоянной	Обозначение	Значение постоянной	Пределы истинного значения
	Земли, м			6378145
5	Динамический коэффициент сжатия Земли	J_2	0,00108263	0,00108262 0,00108264
6	Геоцентрическая постоянная тяготения, м^3/с^2	$GM_\oplus$	$3.986005\times$ $\times 10^{14}$	3.986002×10^{14} 3.9860028×10^{14}
7	Постоянная тягот., м^{3}кг$^{-1}$с$^{-2}$	G	$6,672 \times 10^{-11}$	$6,668 \times 10^{-11}$ $6,676 \times 10^{-11}$
8	Отношение масс Земли и Луны	μ	$1/81,30068 =$ $= 0,01230002$	0,01230006 0,01229997
9	Общая прецессия в долготе для юлиан. столетия (2000,0)	p_1	$5029''\!,0966$	$5028''\!,95$ $5029''\!,25$
10	Наклон эклиптики к экватору (2000,0)	ε_0	$23°26'21''\!,448$	$23°26'21''\!,35$ $23°26'21''\!,55$
11	Постоянная нутации (2000,0)	N	$9''\!,2109$	$9''\!,200$ $9''\!,211$
	Выводимые постоянные			
12	Астрономическая единица, м	$A = c\tau_A$	$1,49597870\times$ $\times 10^{11}$	$1,49597868 \times 10^{11}$ $1,49597872 \times 10^{11}$
13	Параллакс Солнца	$\pi_\odot = a_e/A$	$8''\!,794148$	$8''\!,794141$ $8''\!,794155$
14	Постоянная абер. (2000,0)	κ	$20''\!,49552$	$20''\!,495518$ $20''\!,495520$
15	Сжатие Земли	f	$1/298,257 =$ $= 0,00335281$	0,00335279 0,00335283
16	Гелиоцентрическая гравитационная постоянная, м^3/с^2	$GM_\odot =$ A^3k^2/D^2	$1.32712438\times$ $\times 10^{20}$	$1.32712433 \times 10^{20}$ $1.32712443 \times 10^{20}$
17	Отношение масс Солнца и Земли	$M_\odot/M_\oplus =$ $= GM_\odot/GM_\oplus$	332 946,0	332 945,7 332 946,3
18	Отношение массы Солнца и массы сист. Земля–Луна	$M_\odot/M_\oplus(1+\mu)$	328 900,5	328 900,2 328 900,8
19	Масса Солнца, кг	$M_\odot = GM_\odot/G$	$1,9891 \times 10^{30}$	$1,9879 \times 10^{30}$

Таблица 8.1. (Продолжение)

№	Название постоянной	Обозначение	Значение постоянной	Пределы истинного значения
				$1,9891 \times 10^{30}$
Система масс планет(обратные значения)				
20	Солнце	$M_{\odot}$	1,000000	—
21	Меркурий	$M_{☿}$	6 023 600	6 020 000 6 027 000
22	Венера	$M_{♀}$	408 523,5	408521 408526
23	Земля–Луна		328 900,5	328900 328901
24	Марс	$M_{♂}$	3098710	3 098 600 3 098 760
25	Юпитер	$M_{♃}$	1047,355	1047,330 1047,380
26	Сатурн	$M_{♄}$	3498,5	3497 3500
27	Уран	$M_{♅}$	22869	22650 23 100
28	Нептун	$M_{♆}$	19314	19300 19450
29	Плутон	$M_{♇}$	3 000 000	2000000 15000000

В таблице 8.2 приводятся значения постоянных из «Стандартов МСВЗ» 2003 г. (IERS Conventions 2003); в первой колонке приводятся обозначения постоянных и их размерность, во второй — численное значение (в «TCG/TCB»-единицах СИ), в третьей — ошибка, в четвертой — комментарий. Большинство значений постоянных приводятся в единицах СИ; они согласованы для использования с геоцентрическим координатным временем TCG, которое является временной координатой для геоцентрической системы, или с барицентрическим координатным временем TCB, которое является временной координатой для барицентрической системы.

Значения постоянных τ_A и $c\tau_A$ приводятся, однако, в «TDB»-единицах. Напомним, что координаты пунктов в системе ITRF2000 приводятся в «TT»-единицах.

«TDB»-единицы и «TCB»-единицы времени t и длины ℓ связаны соотношениями:

$$t_{TDB} = t_{TCB}(1 - L_B),\ \ell_{TDB} = \ell_{TCB}(1 - L_B),$$

$$GM_{TDB} = GM_{TCB}(1 - L_B),$$

коэффициент L_B приводится в таблице 8.2. Следовательно, преобразование величины X, имеющей размерность времени или длины, и численное значение x_{TCB}, взятое из таблицы 8.2 в «TCB» (СИ-единицах), к численному значению x_{TDB} в «TDB»-единицах, имеет вид:

$$x_{TDB} = x_{TCB}(1 - L_B).$$

Аналогично, численное значение x_{TCG} (из таблицы) связано с численным значением x_{TT} в «TT»-единицах уравнением

$$x_{TT} = x_{TCG}(1 - L_G),$$

где L_G также приводится в таблице 8.2.

Временной шкалой для эфемерид DE405/LE405 является не шкала TCB, а T_{eph}, отличающаяся от TCB линейным дрейфом (4.79-4.80):

$$t_{eph} = t_{TCB}(1 - L_B),$$

то есть шкала T_{eph} близка к шкале TDB. Поэтому гравитационные постоянные тел и пространственные координаты Солнечной системы, получающиеся из динамического анализа на основе эфемерид DE405/LE405, измеряются в «TDB»-единицах.

В таблице 8.3 приводятся значения масс планет (в обратных солнечных массах) в системе астрономических постоянных МАС 1976 г., а также значения масс в эфемеридах DE200 и DE405.

В заключение рассмотрим вопрос о масштабе системы ITRF2000, то есть о шкалах, в которых измеряются пространственные и временные координаты на Земле.

В основе вычислений временных задержек сигналов при РСДБ-наблюдениях квазаров, лазерных наблюдений спутников и Луны лежит геоцентрическая небесная система координат (GCRS), временной шкалой которой является координатное время TCG. Наблюдаемая задержка определяется в шкале собственного времени атомных

Таблица 8.2. Стандарты МСВЗ 2003

1	2	3	4
c, [мс$^{-1}$]	299792458	Определяющая	Скорость света
L_B	$1.55051976772\times10^{-8}$	2×10^{-17}	Среднее значение $1-d(\mathrm{TT})/d(\mathrm{TCB})$
L_C	$1.48082686741\times10^{-8}$	2×10^{-17}	Среднее значение $1-d(\mathrm{TCG})/d(\mathrm{TCB})$
L_G	$6.969290134\times10^{-10}$	Определяющая	$1-d(\mathrm{TT})/d(\mathrm{TCG})$
G, [м^{3}кг$^{-1}$с$^{-2}$]	6.673×10^{-11}	1×10^{-13}	Гравит. пост.
$GM_\odot$, [м^{3}с$^{-2}$]	$1.32712442076\times10^{20}$	5×10^{10}	Гелиоцентрическая гравит. пост.
* τ_A, [с]	499.0047838061	2×10^{-8}	Астроном. ед. в сек
* $c\tau_A$, [м]	149597870691	6	Астроном. ед. в м
ϵ_0	$84381''.4059$	$0''.0003$	Наклон эклиптики на эпоху J2000.0
$J_{2\odot}$	2×10^{-7}	(принято для DE405)	Динам. форм-фактор Солнца
μ	0.0123000383	5×10^{-10}	Отношение масс Луна/Земля
$GM_\oplus$, [м^{3}с$^{-2}$]	3.986004418×10^{14}	8×10^{5}	Геоц. гравит. постоянная (EGM96)
+ a_E, [м]	6378136.6	0.10	Экватор. рад. Земли
+ $1/f$	298.25642	0.00001	Обратная величина сжатия Земли
+ $J_{2\oplus}$	1.0826359×10^{-3}	1.0×10^{-10}	Динам. форм-фактор
ω, [рад/с]	7.292115×10^{-5}	Переменная	Ном. ср. значение угловой скор. Земли
+ g_e, [мс$^{-2}$]	9.7803278	1×10^{-6}	Ср. знач. ускорения силы тяж. на экват.
W_0, [м^{2}с$^{-2}$]	62636856.0	0.5	Потенциал на геоиде
R_0, [м]	6363672.6	0.1	Геопот. коэф. $R_0=GM_\oplus/W_0$

* Значения постоянных τ_A и $c\tau_A$ даны в «TDB»-единицах.

+ Значения постоянных a_E, $1/f$, $J_{2\oplus}$ и g_E даны в системе «нулевого прилива» («zero tide»).

часов, установленных на пунктах наблюдений. Так как часы синхронизируются в шкале UTC, то можно считать, что они имеют одинаковый ход относительно координатной шкалы TT. Поэтому задерж-

Таблица 8.3. Значения масс планет (в обратных солнечных массах) в системе MAC1976, эфемеридах DE200 и DE405

Планета	MAC1976	DE200	DE405
Меркурий	6023600	6023600	6023600
Венера	408523.5	408523.5	408523.71
Земля + Луна	328900.5	328900.55	328900.561400
Марс	3098710.	3098710.	3098708.
Юпитер	1047.355	1047.350	1047.3486
Сатурн	3498.5	3498.0	3497.898
Уран	22869	22960	22902.98
Нептун	19314	19314	19412.24
Плутон	3000000	130000000	135200000

ка может рассматриваться как временной интервал τ_{TT} координатного времени TT.

Возможны два подхода при интерпретации задержки сигнала, в которых используются две различные геоцентрические координатные системы и две шкалы координатного времени TCG и TT.

В первом подходе, который полностью согласован с резолюциями MAC, все величины (координаты векторов, временные задержки) должны быть преобразованы к GCRS-координатным величинам; в качестве шкалы времени используется TCG. В этом подходе измеренная временная задержка должна быть преобразована в TCG-координатный интервал:

$$\tau_{TCG} = \frac{\tau_{TT}}{1 - L_G}.$$

Координаты радиусов-векторов пунктов вычисляются в GCRS, как того и требуют резолюции MAC; обозначим их как x_{TCG}, поскольку они согласованы со шкалой TCG.

Во втором подходе используется задержка, измеряемая в шкале времени TT. В этом случае координаты радиусов-векторов пунктов вычисляются уже не в GCRS, а в другой системе. Преобразование этих координат в GCRS (на уровне ошибок измерений) есть простое изменение масштаба. Пространственные координаты x_{TT}, получаю-

щиеся из анализа лазерных данных или данных РСДБ, согласованы со шкалой TT. Координаты x_{TCG} могут быть получены, использованием простого уравнения:

$$x_{TCG} = \frac{x_{TT}}{1 - L_G}.$$

Все центры анализа данных РСДБ и лазерных данных используют второй подход, следовательно, вычисляют пространственные координаты x_{TT} и используют шкалу TT как шкалу координатного времени.

Несмотря на принятие резолюций МАС, все центры анализа данных будут продолжать использовать второй подход, причем координаты *не должны* пересчитываться в x_{TCG} для вычисления их значений в земной системе координат ITRF2000. Это значит, что шкала ITRF2000 *не согласуется* с резолюциями МАС.

Если все же требуется получить пространственные координаты, согласующиеся с TCG, то можно использовать формулу:

$$x_{TCG} = x_{ITRF2000} \times (1 + L_G).$$

Приложение А

ЮЛИАНСКИЕ И КАЛЕНДАРНЫЕ ДАТЫ

Таблица А.1. Юлианские даты на начало года по григорианскому календарю

Год	JD	Год	JD	Год	JD	Год	JD
1950	2433282.5	1976	2442778.5	2001	2451910.5	2026	2461041.5
1951	2433647.5	1977	2443144.5	2002	2452275.5	2027	2461406.5
1952	2434012.5	1978	2443509.5	2003	2452640.5	2028	2461771.5
1953	2434378.5	1979	2443874.5	2004	2453005.5	2029	2462137.5
1954	2434743.5	1980	2444239.5	2005	2453371.5	2030	2462502.5
1955	2435108.5	1981	2444605.5	2006	2453736.5	2031	2462867.5
1956	2435473.5	1982	2444970.5	2007	2454101.5	2032	2463232.5
1957	2435839.5	1983	2445335.5	2008	2454466.5	2033	2463598.5
1958	2436204.5	1984	2445700.5	2009	2454832.5	2034	2463963.5
1959	2436569.5	1985	2446066.5	2010	2455197.5	2035	2464328.5
1960	2436934.5	1986	2446431.5	2011	2455562.5	2036	2464693.5
1961	2437300.5	1987	2446796.5	2012	2455927.5	2037	2465059.5
1962	2437665.5	1988	2447161.5	2013	2456293.5	2038	2465424.5
1963	2438030.5	1989	2447527.5	2014	2456658.5	2039	2465789.5
1964	2438395.5	1990	2447892.5	2015	2457023.5	2040	2466154.5
1965	2438761.5	1991	2448257.5	2016	2457388.5	2041	2466520.5
1966	2439126.5	1992	2448622.5	2017	2457754.5	2042	2466885.5
1967	2439491.5	1993	2448988.5	2018	2458119.5	2043	2467250.5
1968	2439856.5	1994	2449353.5	2019	2458484.5	2044	2467615.5
1969	2440222.5	1995	2449718.5	2020	2458849.5	2045	2467981.5
1970	2440587.5	1996	2450083.5	2021	2459215.5	2046	2468346.5
1971	2440952.5	1997	2450449.5	2022	2459580.5	2047	2468711.5
1972	2441317.5	1998	2450814.5	2023	2459945.5	2048	2469076.5
1973	2441683.5	1999	2451179.5	2024	2460310.5	2049	2469442.5
1974	2442048.5	2000	2451544.5	2025	2460676.5	2050	2469807.5
1975	2442413.5						

Следующие две программы на языке Фортран, разработанные К. В. Куимовым, предназначены для вычисления юлианской даты на момент времени по григорианскому календарю, и, наоборот, календарной даты по юлианской дате.

Программа Time1 не работает для отрицательных номеров года.

```
      Subroutine Time1(Iy, Im, Id, UT, JD)
C
C     Вычисление юлианской даты на момент времени по григорианскому
C     календарю, заданной параметрами:
C     Iy, Im, Id, UT — год, месяц, число, всемирное время
C
C     Входные параметры:
C     1) Iy — год (целое положительное число)
C     2) Im — месяц (целое число от 1 до 12)
C     3) Id — число (целое число от 1 до 31)
C     4) UT — всемирное время (в радианах).
C     Выходной параметр:
C     JD — юлианская дата
C
C     Литература: Ж. Меёс, Астрономические формулы для
C     калькуляторов, М. «Мир», с. 29.
C     Автор программы К. В. Куимов. Версия: май 1990 г.
C
      Real*8 JD
      Integer iy, im, id, b, m, y
      Parameter (Pi2 = 6.283185307179586d0)
C
      y = iy
      m = im
      If(im .gt. 2) go to 1
      y = y – 1
      m = m + 12
```

```
1   Continue
    iv = 36525 * y
    If(iy .le. 0) iv = iv – 75
    iv = iv/100
    b = 0
    If(iy * 10000 + im * 100 + id .lt. 15821015) go to 2
    b = y/100
    b = 2 – b + b/4
2   Continue
    JD = (iv + 306001 * (m + 1)/10000 + b + id) + 1720994.5d0 + UT/Pi2
    End
```

```
      Subroutine Time2(JD, Iy, Im, Id, UT)
C
C     Вычисление календарной даты по григорианскому
C     календарю по юлианской дате
C
C     Входные параметры:
C     JD — юлианская дата
C     Выходные параметры:
C     1) Iy — год (целое положительное число)
C     2) Im — месяц (целое число от 1 до 12)
C     3) Id — число (целое число от 1 до 31)
C     4) UT — всемирное время в радианах (0 <= UT < 2 * Pi).
C
C     Литература: Ж. Меёс, Астрономические формулы для
C     калькуляторов, М. «Мир», с. 29.
C     Автор программы К. В. Куимов. Версия: август 1991 г.
C
```

```
      Implicit real*8 (a – h, o – z)
      Real*8 JD
      Real*8 Pi2, F
      Data Pi2 /6.283185307179586d0/
C
      F = JD + 0.5d0
      iz = F
C     F - дробная часть суток;
      F = F – iz
      ia = iz
      If(iz .lt. 2299161) go to 1
      ia = (iz * 100 – 186721625)/3652425
      ia = iz + 1 + ia – ia/4
    1 Continue
      ib = ia + 1524
      ic = (ib * 100 – 12210)/36525
      id = 36525 * ic/100
      ie = (ib – id) * 10000/306001
      id = ib – id – 306001 * ie/10000
      im = ie – 1
      If(ie .gt. 13) im = im – 12
      iy = ic – 4716
      If(im .le. 2) iy = iy + 1
      UT = F * Pi2
C
      End
```

ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

B.1. Матричная алгебра

Матрицей A размера $m \times n$ называется таблица скалярных величин:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \equiv [a_{ij}],$$

$i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n$; m — число строк, n — число столбцов матрицы. Элемент a_{ij} называется элементом матрицы и расположен в i-ой строке и j-ом столбце.

Для матриц определены следующие операции:

1. Матрицы A и B размера $m \times n$ равны ($A = B$), если для всех i и j равны их элементы: $a_{ij} = b_{ij}$.

2. Сумма матриц A и B размера $m \times n$ есть матрица C размера $m \times n$:
$$C = A + B; \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

3. Произведение матрицы A размера $m \times n$ на скаляр α есть матрица B размера $m \times n$:
$$B = \alpha A; \quad b_{ij} = \alpha a_{ij}.$$

4. Произведение матрицы A размера $m \times n$ на матрицу B размера $n \times k$ есть матрица C размера $m \times k$:

$$C = AB; \quad c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}.$$

Матрица A^T, транспонированная по отношению к матрице A размера $m \times n$, есть матрица $A^T \equiv [a_{ji}]$ размера $n \times m$. Справедливы следующие соотношения:

$$(A + B)^T = A^T + B^T; \quad (\alpha A)^T = \alpha A^T; \quad (AB)^T = B^T A^T.$$

Матрица A размера $n \times n$ называется квадратной матрицей порядка n.

Квадратная матрица A называется диагональной, если все недиагональные элементы a_{ij} $(i \neq j)$ равны нулю.

Диагональная матрица A размера $n \times n$ называется единичной: $A = I$, если все диагональные элементы равны единице: $a_{ii} = 1$, $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Если I — единичная матрица размера $n \times n$, то для любой матрицы B размера $n \times n$ справедливы равенства $IB = BI = B$.

Квадратная матрица A называется симметричной, если $A^T = A$, т. е. если $a_{ij} = a_{ji}$.

Квадратная матрица A называется невырожденной, если она имеет единственную обратную матрицу A^{-1}, определяемую условием: $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

Квадратная матрица A называется ортогональной, если $A^T A = AA^T = I$, т. е. если $A^T = A^{-1}$.

Если квадратные матрицы A и B одного порядка невырождены, скаляр $\alpha \neq 0$, то

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}; \quad (\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}; \quad (A^{-1})^{-1} = A.$$

Квадратная матрица не вырождена тогда и только тогда, когда ее строки (столбцы) линейно независимы.

B.2. Линейная алгебра

Система линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

эквивалентна матричному уравнению

$$Ax = B \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Если матрица A квадратная и невырожденная, то матричное уравнение имеет единственное решение:

$$x = A^{-1}B.$$

Если матрица A является ортогональной и ее детерминант равен единице ($\det A = 1$), то линейное преобразование $y = Ax$ называется вращением.

Система m уравнений

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

линейно независима, если из условия $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0$ при всех значениях $x_1, \ldots, x_n$ следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$. В противном случае эти m уравнений линейно зависимы, т. е. по крайней мере одно из уравнений может быть представлено в виде линейной комбинации остальных.

Векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ линейно независимы, если из уравнения

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \lambda_3\mathbf{a}_3 = 0$$

следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. В противном случае векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ линейно зависимы и по крайней мере один из них, например, $\mathbf{a}_1$ может быть выражен в виде линейной комбинации $\mathbf{a}_1 = \xi_2\mathbf{a}_2 + \xi_3\mathbf{a}_3$ остальных векторов.

Любой вектор $\mathbf{a}$ в трехмерном пространстве может быть представлен в виде разложения:

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$$

относительно линейно-независимых векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Эти векторы называются базисом. В трехмерном пространстве числа a_1, a_2, a_3 являются координатами вектора $\mathbf{a}$ в системе координат, определяемой базисными векторами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

B.3. Декартовы прямоугольные и сферические координаты вектора

Если базисные векторы, или орты, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ взаимно перпендикулярны и определяют оси системы координат Ox, Oy, Oz, то разложение

$$\mathbf{u} = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{e}$$

определяет декартовы прямоугольные координаты u_x, u_y, u_z вектора $\mathbf{u}$.

Базисными векторами сферической системы координат является правая тройка единичных векторов $\mathbf{i}_r$, $\mathbf{i}_\theta$, $\mathbf{i}_\lambda$, т. е. $\mathbf{i}_r \times \mathbf{i}_\theta = \mathbf{i}_\lambda$, направленных в сторону увеличения соответствующих координат: r — расстояния, θ — кошироты, λ — долготы. Разложение вектора $\mathbf{u}$ по базису имеет вид:

$$\mathbf{u} = u_r\mathbf{i}_r + u_\theta\mathbf{i}_\theta + u_\lambda\mathbf{i}_\lambda,$$

u_r, u_θ, u_λ компоненты вектора $\mathbf{u}$ в базисе $\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\theta, \mathbf{i}_\lambda$.

Декартовы координаты вектора $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ выражаются через сферические координаты (r, θ, λ) следующим образом:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\lambda \\ r\sin\theta\sin\lambda \\ r\cos\theta \end{pmatrix},$$

$r = |\mathbf{u}|$.

Единичные векторы $\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\theta, \mathbf{i}_\lambda$ в декартовых координатах имеют вид:

$$\mathbf{i}_r = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\lambda \\ \sin\theta\sin\lambda \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i}_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\lambda \\ \cos\theta\sin\lambda \\ -\sin\theta \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{i}_\lambda = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} -\sin\lambda \\ \cos\lambda \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Преобразование между компонентами вектора в декартовом и сферическом базисе имеет вид:

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\lambda \end{pmatrix}; \quad M = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\lambda & \cos\theta\cos\lambda & -\sin\lambda \\ \sin\theta\sin\lambda & \cos\theta\sin\lambda & \cos\lambda \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Обратное преобразование имеет вид:

$$\begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\lambda \end{pmatrix} = M^T \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}.$$

B.4. Элементы дифференциального и интегрального исчисления

Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x, если он существует, равен:

$$dy = \frac{dy}{dx}dx = f'(x)dx,$$

$f'(x) = dy/dx$ — производная функции.

Дифференциал функции $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если он существует, равен:

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n,$$

причем частные производные $\frac{\partial f}{dx_1}$, …, $\frac{\partial f}{dx_n}$ вычисляются в рассматриваемой точке.

Если $f(x)$ — действительная функция, имеющая в интервале $a \le x < b$ n-ю производную $f^{(n)}$, то

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x-a)^{n-1} + R_n(x), (a \le x < b),$$

где $R_n(x)$ называется остаточным членом.

Градиентом скалярной функции $F(\mathbf{r}) = F(x, y, z)$ называется векторная функция, определяемая формулой:

$$\operatorname{grad} F(\mathbf{r}) = \frac{\partial F}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\mathbf{k} \text{ в декартовых координатах,}$$
$$\operatorname{grad} F(\mathbf{r}) = \frac{\partial F}{\partial r}\mathbf{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\mathbf{i}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial \lambda}\mathbf{i}_\lambda \text{ в сфер. координатах.}$$

Полный дифференциал dF скалярной функции $F(\mathbf{r}) = F(x, y, z)$, соответствующий перемещению точки на $d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}$,

$$dF(\mathbf{r}) = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dx = d\mathbf{r} \cdot \operatorname{grad} F(\mathbf{r}).$$

Дифференциал $d\mathbf{r}$ радиуса-вектора $\mathbf{r}$ вдоль кривой C, описываемой уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \text{ или в параметрическом виде } \begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t), \end{cases}$$

определяется в каждой точке кривой $\mathbf{r} = \Big(x(t), y(t), z(t)\Big)$ формулой:

$$d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k} = \Big(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}\Big)dt.$$

Вектор $d\mathbf{r}$ направлен по касательной к кривой C в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r}$.

Квадрат элемента длины:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad \text{в декартовых координатах,}$$
$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\lambda^2 \qquad \text{в сферических координатах.}$$

Преобразование дифференциалов из сферической в декартову систему координат имеет вид:

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\lambda & r\cos\theta\cos\lambda & -r\sin\lambda \\ \sin\theta\sin\lambda & r\cos\theta\sin\lambda & r\cos\lambda \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\lambda \end{pmatrix}.$$

B.5. Криволинейные координаты

Если в области V трехмерного евклидова пространства заданы соотношения, ставящие в соответствие каждой точке (x, y, z) тройку чисел $x^i,\ i = 1, 2, 3$, причем

$$x^1 = f_1(x, y, z), \quad x^2 = f_2(x, y, z), \quad x^3 = f_3(x, y, z),$$

то функции x^1, x^2, x^3 называются криволинейными координатами точки.

Условие $x^i = f_i(x, y, z) = \text{const},\ i = 1, 2, 3$ определяет координатную поверхность. Две координатных поверхности, соответствующие различным координатам $x^i, x^j, (i \neq j)$ пересекаются по координатной линии, соответствующей третьей координате x^k.

Единичные векторы $\mathbf{i}_1(x^1, x^2, x^3)$, $\mathbf{i}_2(x^1, x^2, x^3)$, $\mathbf{i}_3(x^1, x^2, x^3)$, касательные к координатным линиям x^1, x^2, x^3, являются локальными базисными векторами.

В качестве локальных базисных векторов можно выбрать тройку направленных по координатным линиям векторов (не обязательно единичных), которые определяются уравнениями:

$$\mathbf{e}_1(x^1, x^2, x^3) = \sqrt{g_{11}}\,\mathbf{i}_1, \quad \mathbf{e}_2(x^1, x^2, x^3) = \sqrt{g_{22}}\,\mathbf{i}_2,$$
$$\mathbf{e}_2(x^1, x^2, x^3) = \sqrt{g_{33}}\,\mathbf{i}_3,$$

где g_{ii} — компоненты метрического тензора:

$$g_{ik}(x^1, x^2, x^3) = \left(\frac{\partial x}{\partial x^i}\frac{\partial x}{\partial x^k} + \frac{\partial y}{\partial x^i}\frac{\partial y}{\partial x^k} + \frac{\partial z}{\partial x^i}\frac{\partial z}{\partial x^k}\right)\Bigg|_{(x^1, x^2, x^3)}.$$

Локальные базисные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ могут быть выражены через орты $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ декартовой системы координат по формулам:

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial x}{\partial x^i}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial x^i}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial x^i}\mathbf{k}.$$

Функции $\frac{\partial x}{\partial x^i}, \frac{\partial y}{\partial x^i}, \frac{\partial z}{\partial x^i}$ являются направляющими косинусами орта $\mathbf{e}_i$ по отношению к декартовым осям Ox, Oy, Oz.

В качестве локальных базисных векторов можно выбрать тройку векторов $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3$:

$$\mathbf{e}^1(x^1, x^2, x^3) = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}}, \quad \mathbf{e}^2(x^1, x^2, x^3) = \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}{\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}},$$
$$\mathbf{e}^3(x^1, x^2, x^3) = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}},$$

направленных перпендикулярно к координатным поверхностям.

В базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ координаты вектора $\mathbf{a}$ называются ковариантными координатами:

$$a_i = a_i(x^1, x^2, x^3) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i, \ i = 1, 2, 3,$$

а в базисе $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$ — контравариантными:

$$a^i = a^i(x^1, x^2, x^3) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^i, \ i = 1, 2, 3.$$

Справедливы формулы:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = g_{ij}, \quad |\mathbf{e}_i| = \sqrt{g_{ii}}, \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^k = \begin{cases} 1, & \text{при } i = k \\ 0, & \text{при } i \neq k. \end{cases}$$

В частном случае прямоугольных декартовых координат $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ имеем:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}^1 = \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}^2 = \mathbf{i}_2 = \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}^3 = \mathbf{i}_3 = \mathbf{k}.$$

Система криволинейных координат x^1, x^2, x^3 является ортогональной, если

$$g_{ik}(x^1, x^2, x^3) = 0 \text{ при } i \neq k$$

в каждой точке (x^1, x^2, x^3). Координатные линии, а значит, и векторы локального базиса $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ будут перпендикулярны друг к другу в каждой точке.

Элемент объема в криволинейных координатах:

$$dV = \sqrt{g}\, dx^1 dx^2 dx^3, \ \sqrt{g} = \sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}\,.$$

Интеграл по объему от функции

$$f(x,y,z) = f[x(x^1,x^2,x^3), y(x^1,x^2,x^3), z(x^1,x^2,x^3)]$$

по ограниченной области V

$$\int_V f(x,y,z)dV = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz =$$
$$= \iiint_V f[x(x^1,x^2,x^3), y(x^1,x^2,x^3), z(x^1,x^2,x^3)]\sqrt{g}dx^1dx^2dx^3.$$

Интеграл по объему не зависит от выбора системы координат и может быть выражен непосредственно через тройные интегралы по x, y, z или x^1, x^2, x^3.

В сферических координатах $\sqrt{g} = r^2 \sin\theta$.

B.6. Сферические функции

Гравитационный потенциал U во всех точках, находящихся на поверхности и вне Земли, удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

Оператор ∇ называется «набла». В сферических координатах (r, θ, λ) уравнение Лапласа имеет вид:

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\lambda^2}.$$

Решение уравнения Лапласа есть:

$$U = \left\{\begin{array}{c} r^l \\ \text{или} \\ r^{-(l+1)} \end{array}\right\} \times P_l^m(\cos\theta)e^{im\lambda},$$

где l, m — целые числа, причем $l \geq 0$ и $|m| \leq l$, $i = \sqrt{-1}$. Функции $P_l^m(\mu)$ называются присоединенными функциями Лежандра степени l и порядка m. Функции $P_l^m(\mu)$ есть решения дифференциального уравнения:

$$(1-\mu^2)\frac{d^2P}{d\mu^2} - 2\mu\frac{dP}{d\mu} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2}\right]P = 0.$$

При $m = 0$ получается уравнение Лежандра. В функциях $P_l^0(\mu)$ верхний индекс 0 обычно опускают.

Определим сферические функции как

$$Y_l^m(\theta, \lambda) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\, P_l^m(\cos\theta)e^{im\lambda}$$

для $m \geq 0$. Для отрицательных m сферические функции определяются следующим образом: $Y_l^m \equiv (-1)^m Y_l^{(-m)*}$, где символ * означает комплексное сопряжение.

Полиномы Лежандра представляют собой решения уравнения Лапласа, обладающие осевой симметрией. Если $m = 0$, то сферические функции $Y_l^m(\theta, \lambda)$ не зависят от долготы и называются зональными. Потенциал, разлагающийся только по зональным функциям, можно записать в виде ряда по степеням расстояния r от начала координат, коэффициентами являются полиномы Лежандра. Они зависят только от полярного расстояния θ.

Присоединенные функции Лежандра являются ортогональными функциями, т. е.

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(\mu)P_{l'}^{m'}(\mu) = \begin{cases} \frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}, & \text{если одновременно } l = l', m = m' \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Каждая дважды дифференцируемая действительная функция $\Psi(\theta, \lambda)$, удовлетворяющая условию $\Psi(\theta, \lambda + 2\pi) = \Psi(\theta, \lambda)$ и определенная при $0 \leq \theta \leq \pi$ и $0 \leq \lambda \leq 2\pi$ на поверхности сферы, может быть разложена в сходящийся ряд

$$\begin{aligned}\Psi(\theta, \lambda) &= \sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\alpha_{j0}P_j(\cos\theta) + \sum_{m=0}^{j} P_j^m(\cos\theta)(\alpha_{jm}\cos m\lambda + \beta_{jm}\sin m\lambda)\right] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{m=-j}^{j}\gamma_{jm}P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\lambda}.\end{aligned}$$

Коэффициенты разложения находятся следующим образом:

$$\alpha_{jm} = \frac{2j+1}{2\pi}\frac{(j-m)!}{(j+m)!}\int_0^{2\pi} d\lambda\, \cos m\lambda \int_0^{\pi} \Psi(\theta,\lambda) P_j^m(\cos\theta)\sin\theta d\theta,$$

$$\beta_{jm} = \frac{2j+1}{2\pi}\frac{(j-m)!}{(j+m)!}\int_0^{2\pi} d\lambda\, \sin m\lambda \int_0^{\pi} \Psi(\theta,\lambda) P_j^m(\cos\theta)\sin\theta d\theta,$$

$$\gamma_{jm} = \gamma^*_{j,-m} = \frac{1}{2}(\alpha_{jm} - i\beta_{jm}) =$$

$$= \frac{2j+1}{4\pi}\frac{(j-m)!}{(j+m)!}\int_0^{2\pi} d\lambda\, e^{im\lambda} \int_0^{\pi} \Psi(\theta,\lambda) P_j^m(\cos\theta)\sin\theta d\theta,$$

где $j = 0, 1, 2, \ldots; m = 0, 1, 2, \ldots, j$.

Приложение С

ОСНОВНЫЕ ТЕРМИНЫ

- **Аберрация** — видимое угловое смещение небесного тела относительно его истинного положения, вызванное движением наблюдателя и тела; причиной аберрации является конечность скорости света.

  – **вековая** — составляющая звездной аберрации (см. **аберрация звездная**), обусловленная движением Солнечной системы относительно центра Галактики.

  – **годичная** — составляющая звездной аберрации (см. **аберрация звездная**), обусловленная движением Земли относительно Солнца.

  – **звездная** — видимое угловое смещение небесного тела относительно его истинного положения, вызванное движением наблюдателя. Величина смещения пропорциональна отношению скорости наблюдателя к скорости света; звездная аберрация включает годичную, суточную и вековую компоненты.

  – **суточная** — составляющая звездной аберрации (см. **аберрация звездная**), обусловленная суточным движением наблюдателя относительно центра Земли, т. е. вращением Земли.

  – **планетная** — видимое угловое смещение небесного тела относительно его истинного положения, вызванное как движением наблюдателя, так и движением тела.

– **эллиптическая, E-члены** — компоненты годичной аберрации (см. **аберрация годичная**), зависящие от **эксцентриситета орбиты** и **долготы перигелия** Земли.

- **Азимут** — дуга **горизонта** от точки юга до пересечения с **вертикалом** небесного тела, отсчитываемая по часовой стрелке.

- **Апекс** — точка небесной сферы, в которую направлен вектор скорости тела.

- **Аномалия** — угловое расстояние тела на **орбите**, отсчитываемое от **перицентра**.

  – **истинная** — угол между радиусом-вектором тела на орбите и **перицентром**, отсчитываемый от перицентра.

  – **средняя** — произведение средней угловой скорости движения тела по орбите (см. **среднее движение**) на промежуток времени с момента прохождения через перицентр.

  – **эксцентрическая** — угол между направлением на перицентр и направлением из центра эллипса на точку, лежащую на вспомогательной окружности, причем перпендикуляр из этой точки к большой полуоси проходит через тело на эллиптической орбите; радиус вспомогательной окружности равен большой полуоси эллипса, центр совпадает с центром эллипса.

- **Апоцентр** — точка орбиты, наиболее удаленная от центрального тела.

- **Астрономическая единица (а. е.)** — радиус круговой орбиты тела с пренебрежимо малой по сравнению с Солнцем массой, обращающегося вокруг Солнца с периодом $2\pi/k$, где k — **Гауссова гравитационная постоянная**; 1 а. е. немного меньше **большой полуоси** орбиты Земли.

- **Астрономические координаты** — широта и долгота точки на поверхности Земли, измеряемые относительно **геоида**; астрономические координаты определяются направлением **отвесной линии** в точке наблюдения.

- **Атомная секунда** — см. **секунда СИ**.

- **Афелий** — точка **орбиты** тела, наиболее удаленная от Солнца (см. **апоцентр**).

- **Барицентр** — центр масс системы тел; например, центр масс Солнечной системы.

- **Барицентрическое динамическое время (TDB)** — независимый аргумент в уравнениях движения для вычисления барицентрических **эфемерид**. TDB отличается от **земного динамического времени TDT** только периодическими членами. По терминологии общей теории относительности TDB может считаться координатным временем (см. **динамическое время**).

- **Большая полуось** — половина большой оси эллипса.

- **Видимое место** — положение небесного тела на **небесной сфере**, центр которой совпадает с центром Земли, вычисляемое из наблюденного положения путем вычитания поправок за **рефракцию**, за суточную аберрацию (см. **аберрация суточная**), за суточный параллакс (см. **параллакс суточный**), т. е. поправок, зависящих от топоцентрического положения наблюдателя. Таким образом, видимое место небесного тела совпадало бы с его истинным геоцентрическим положением, искаженным планетной аберрацией (за исключением суточной аберрации, см. **аберрация планетная**; **аберрация суточная**), отнесенным к **истинному экватору и равноденствию**.

- **Восходящий узел** — точка орбиты, которую тело проходит, переходя из области отрицательных широт (см. **широта**) в область положительных широт.

- **Всемирное время** — общее обозначение шкал времени, основанных на вращении Земли вокруг своей оси.

  – **UT1** — всемирное время по шкале, в которой за начальный момент последующих суток принята нижняя кульминация среднего Солнца на начальном меридиане и учтено влияние движения полюсов Земли на положение меридианов.

  – **UT2** — всемирное время по шкале, в которой также учтено влияние сезонной неравномерности вращения Земли вокруг своей оси.

- **Всемирное координированное время (UTC)** — шкала времени, рассчитываемая Международным бюро мер и весов так, что смещение относительно TAI (см. **международное атомное время**) составляет целое число секунд, а относительно шкалы всемирного времени UT1 (см. **всемирное время**) — не превышает 0,9 с; это достигается путем добавления **дополнительной секунды**. Шкала UTC — шкала атомного времени, распространяемого с помощью радио и телесетей.

- **Высота** — угловое расстояние небесного тела над или под горизонтом, равное дуге окружности большого круга, проходящего через тело и **зенит**; одна из координат тела в горизонтальной системе координат. Высота равна 90° минус **зенитное расстояние**.

- **Гауссова гравитационная постоянная** ($k = 0,01720209895$) — определяющая постоянная в системе астрономических постоянных; связывает единицу длины (см. **астрономическая единица**), единицу массы (масса Солнца) и единицу времени (сутки) через третий закон Кеплера.

- **Геодезические координаты** — широта и долгота точки на поверхности Земли, определяемые относительно геодезической вертикали (нормали к референц-эллипсоиду).

- **Геоид** — поверхность, на которой потенциал W силы тяжести Земли удовлетворяет условию $W = \text{const}$. Совпадает со средним уровнем океана; согласно резолюции B1.9 XXIV Генеральной Ассамблеи МАС постоянная преобразования L_G от шкалы **земного времени (TT)** к шкале **координатного геоцентрического времени (TCG)** является определяющей. Поэтому из величины константы L_G следует, что геоид — поверхность, соответствующая потенциалу, $W_0 = 62636856,0005\,\text{м}^2\text{с}^{-2}$.

- **Геоцентр** — центр масс Земли, включая океаны и атмосферу.

- **Геоцентрические координаты** — широта и долгота точки на поверхности Земли, определяемые относительно центра Земли; также координаты небесных тел в системе отсчета, связанной с центром Земли.

- **Год** — промежуток времени, определяемый обращением Земли вокруг Солнца. Календарный год (см. **григорианский календарь**) приблизительно равен тропическому году (см. **год тропический**).

- **Год бесселев** — промежуток времени, за который прямое восхождение среднего экваториального солнца увеличивается ровно на 24^h. Продолжительность бесселева года на $0\overset{s}{,}148T$ (T — число столетий от эпохи 1900.0) короче продолжительности тропического года. Начало бесселева года использовалось как **стандартная эпоха** (например B1950.0). С 1984 г. в качестве стандартной эпохи используется начало юлианского года (см. **год юлианский**).

- **Год тропический** — промежуток времени, за который фиктивная точка (среднее экваториальное солнце) последовательно проходит через среднюю точку весеннего равноденствия.

- **Год юлианский** — промежуток времени, равный 365,25 атомным суткам.

- **Горизонт** — линия пересечения небесной сферы и перпендикулярной к отвесной линии плоскости.

- **Григорианский календарь** — система счета времени, основанная на 400-летнем цикле, в котором 146097 суток. Средняя продолжительность календарного года равна 365,2425 суток. В григорианском календаре високосными считаются годы, номер которых делится на 4 без остатка, кроме годов, номер которых делится на 100. Если же номер года кратен 400, то год считается високосным.

- **Движение полюса** — нерегулярное движение полюсов Земли относительно **земной системы координат**.

- **Декретное время** — **поясное время**, измененное правительственными распоряжениями.

- **Динамическое время** — время, введенное в 1984 г. для замены **эфемеридного времени**; независимый аргумент в динамических теориях и эфемеридах (см. **барицентрическое динамическое время TDB**, **земное динамическое время TDT**.

- **Динамическое равноденствие** — точки пересечения **эклиптики** с истинным небесным экватором (см. **истинный экватор и равноденствие**).

- **Долгота** — двугранный угол между большим кругом, проходящим через полюсы и точку начала отсчета долготы, и большим кругом, проходящим через полюсы и заданную точку.

  – **восходящего узла** — двугранный угол между направлением на восходящий узел и направлением на точку начала отсчета долготы.

  – **галактическая** — двугранный угол между большим кругом, проходящим через полюсы и центр Галактики, и большим кругом, проходящим через полюсы Галактики и небесное тело; измеряется вдоль **экватора галактического** в положительном направлении от 0° до 360°.

  – **земная** — двугранный угол между плоскостями Гринвичского **меридиана** и меридиана, проходящего через заданную точку; измеряется вдоль **экватора** в положительном направлении от 0° до 360° к востоку.

  – **эклиптическая** — двугранный угол между большим кругом, проходящим через полюсы эклиптики и через точку **динамического равноденствия**, и большим кругом, проходящим через полюсы эклиптики и небесное тело; измеряется вдоль **эклиптики** в положительном направлении от 0° до 360°.

  – **перицентра** — сумма долготы восходящего узла и углового расстояния перигелия от узла.

- **Дополнительная секунда** (leap second) — **секунда СИ**, добавляемая между пятьдесят девятой и нулевой секундами (шестидесятая секунда) в заранее объявленное время для сохранения разницы между шкалами UTC и UT1 в пределах 0,9 с; обычно дополнительная секунда добавляется 30 июня или 31 декабря.

- **Запаздывание света** — промежуток времени, требуемый свету для прохождения расстояния от небесного тела до наблюдателя. За этот промежуток тело перемещается в пространстве, что приводит к угловому смещению его видимого положения

(см. **видимое место**) от **истинного положения**. См. также **аберрация планетная**.

- **Звездное время** — **часовой угол** точки весеннего равноденствия.

- **Звездные сутки** — промежуток времени между двумя последовательными одноименными **кульминациями** точки весеннего равноденствия.

- **Земное динамическое время TDT** — независимый аргумент в уравнениях движения для вычисления геоцентрических **эфемерид**. В момент времени 1997, 1 января $0^h0^m0^s$ TAI значение TDT равно 1997, $1,0003725$ января; TDT $=$ TAI $+ 32^s,184$ (см. **барицентрическое динамическое время**, **земное время**, **динамическое время**, **международное атомное время**).

- **Зенит** — точка **небесной сферы**, в которой **отвесная линия**, продолженная вверх, пересекает небесную сферу. (См. также **отклонение от вертикали**).

  – **геоцентрический** — точка **небесной сферы**, в которой геоцентрический радиус-вектор наблюдателя, продолженный вверх, пересекает небесную сферу.

  – **геодезический** — точка **небесной сферы**, в которой нормаль из точки наблюдения к **референц-эллипсоиду**, продолженная вверх, пересекает небесную сферу.

- **Зенитное расстояние** — угловое расстояние на небесной сфере от **зенита** до небесного тела. Зенитное расстояние равно 90° минус **высота** небесного тела над горизонтом.

- **Интервал времени** — время, протекшее между моментами двух событий. С математической точки зрения **Интервал** есть «расстояние» между двумя событиями в четырехмерном пространстве-времени.

- **Истинный экватор и равноденствие** — мгновенное положение **небесного экватора**, пересечение которого с **эклиптикой** определяет истинную точку весеннего равноденствия. Изменение положения истинного экватора в пространстве происходит как из-за **прецессии**, так и из-за **нутации**. (См. также **средний экватор и равноденствие**).

- **Истинное солнечное время** — геоцентрический часовой угол центра Солнца плюс 12^h.

- **Календарь** — система исчисления продолжительности длительных интервалов времени, основанная на периодичности явлений природы и связанная с движением небесных светил.

- **Круг склонений** — большой круг **небесной сферы**, проходящий через **полюсы мира** и небесной тело, и, следовательно, перпендикулярный **небесному экватору**.

- **Лапласа плоскость** — неизменяемая в пространстве плоскость, в которой движутся два тела, взаимно притягивающиеся по закону Ньютона.

- **Линия узлов** — линия пересечения двух больших кругов; линия пересечения плоскости орбиты с основной плоскостью системы координат.

- **Лучевая скорость** — скорость изменения расстояния до небесного тела. То же, что **радиальная скорость**.

- **Международное атомное время (TAI)** — шкала атомного времени, рассчитываемая Международным бюро мер и весов на основе показаний **стандартов частоты**, установленных в лабораториях разных стран мира.

- **Меридиан** — пересечение большого круга, проходящего через полюсы сферы, с ее поверхностью.

- **Модифицированная юлианская дата (MJD)** — **юлианская дата** минус 2400000,5 суток.

- **Надир** — точка **небесной сферы**, диаметрально противоположная **зениту**.

- **Наклонность** — двугранный угол между плоскостью орбиты и основной плоскостью системы координат.

- **Небесный меридиан** — пересечение большого круга, проходящего через **полюсы мира** и **зенит** наблюдателя, с небесной сферой.

- **Небесная сфера** — сфера единичного радиуса с началом в произвольной точке (месте расположения наблюдателя, центре Земли, барицентре Солнечной системы и т. д.).

- **Небесный экватор**, плоскость — большой круг, перпендикулярный оси, которая направлена в **небесный эфемеридный полюс** (при использовании теории нутации IAU1980) и в **небесный промежуточный полюс** (при использовании теории IAU2000); иногда говорят — проекция на небесную сферу **экватора** Земли. (См. также **средний экватор и равноденствие**; **истинный экватор и равноденствие**).

- **Небесный промежуточный полюс** — полюс, относительно которого определяется **нутация** по теории IAU2000.

- **Небесный эфемеридный полюс** — полюс, относительно которого определяется **нутация** и **движение полюса** по теории IAU1980; пересечение оси Oz земной системы координат с **небесной сферой** при отсутствии движения полюса.

- **Нутация** (в астрономии) — короткопериодические вариации в движении оси вращения тела (вектора угловой скорости), а также вектора углового момента тела относительно инерциальной системы координат под действием внешней приливной силы.

  – **в долготе** — движение истинной точки весеннего равноденствия относительно средней вдоль эклиптики; вызывается смещением истинного полюса мира по дуге большого круга, проходящего через средний полюс экватора и среднюю точку весеннего равноденствия.

  – **в наклоне** — смещение истинного полюса по дуге большого круга, проходящего через полюс эклиптики и средний полюс экватора.

- **Орбита** — траектория, по которой движется небесное тело относительно центрального тела.

  – , **элементы** — параметры, характеризующие положение плоскости орбиты в пространстве (Ω — долгота восходящего узла, см. **восходящий узел**; i — **наклонность**; ω —

угловое расстояние **перицентра** от восходящего узла), её форму (e — **эксцентриситет**) и размер (a — **большая полуось**) и положение тела на орбите (M_0 — **средняя аномалия** в определенную эпоху).

- **Ось мира** — прямая, проходящая через центр небесной сферы и параллельная оси вращения Земли.
- **Оси Тиссерана** — геоцентрические координатные оси, относительно которых угловой момент, вызываемый деформациями тела, равен нулю.
- **Отвесная линия** — направление силы тяжести в точке наблюдения.
- **Отклонение света** — изменение направления прихода световых волн от звезд, радиоисточников к наблюдателю при их распространении в гравитационном поле тел Солнечной системы.
- **Параллакс** — разница между направлениями на небесное тело из двух различных точек пространства; угол, под которым видна с небесного тела линия, соединяющая две указанные точки.
  - **вековой** — угол, под которым с небесного тела видно расстояние, пройденное барицентром Солнечной системы за год.
  - **годичный** — угол, под которым с небесного тела виден барицентрический радиус-вектор центра масс системы Земля–Луна.
  - **суточный** — угол, под которым с небесного тела виден геоцентрический радиус-вектор наблюдателя.
  - **тригонометрический** — отношение, равное $1/R$, где R — расстояние до небесного тела (в астрономических единицах).
- **Перигелий** — ближайшая к Солнцу точка орбиты планеты.
- **Перицентр** — ближайшая к центральному телу точка орбиты небесного тела.
- **Полюсы мира** — точки пересечения **оси мира** с небесной сферой.

- **Поправка часов** — значение интервала времени, которое прибавляют к показаниям часов, чтобы получить действительное время в данной шкале.

- **Поясное время** — единое время в пределах часового пояса, исчисляемое в шкале всемирного координированного времени и отличающееся от него на целое число часов, равное номеру часового пояса.

- **Прецессия** — движение оси вращения тела относительно инерциальной системы координат под действием внешней приливной силы. Прецессия оси вращения Земли может быть разложена на лунно-солнечную и прецессию от планет, которые вызываются притяжением Солнцем, Луной и планетами, соответственно, экваториального избытка масс Земли. По традиции, прецессией от планет называется также другое явление, а именно, смещение средней мгновенной точки весеннего равноденствия вдоль среднего мгновенного экватора из-за возмущений планетами положения эклиптики.

- **Прямое восхождение** — одна из координат в экваториальной системе координат. Начало отсчета прямых восхождений (положение оси X системы ICRS) задается средними прямыми восхождениями 23 выбранных радиоисточников, среди которых имеется и квазар 3C273B. Координаты источников исправляются таким образом, чтобы прямое восхождение квазара 3C273B равнялось его значению в системе фундаментального каталога FK5 ($\alpha = 12^{\mathrm{h}}29^{\mathrm{m}}6\overset{\mathrm{s}}{,}6997$; J2000.0). Таким образом, начало отсчета прямых восхождений не связано с точкой **динамического равноденствия**.

- **Равноденствие** — одна из двух точек **небесной сферы**, в которой пересекаются **эклиптика** и **небесный экватор**; момент времени, в который Солнце проходит через указанные точки (см. также **динамическое равноденствие**).

- **Равноденствие каталога** — момент времени, фиксирующий положение экваториальной системы координат, к которой относятся координаты объектов каталога (см. также **динамическое равноденствие**).

- **Радиальная скорость** — скорость изменения расстояния до небесного тела. То же, что **лучевая скорость**.

- **Редукция наблюдений** — перевод координат и скоростей небесных тел из системы координат, в которой они измерены, к стандартной системе.

- **Рефракция** — изменение направления прихода световой или радиоволны при прохождении атмосферы Земли.

  – **астрономическая** — изменение **высоты** небесного тела над **горизонтом** при прохождении волной атмосферы Земли.

  – **в радиодиапазоне** — задержка радиосигналов в тропосфере (из-за изменения скорости распространения волн) и ионосфере Земли (из-за зависимости фазовой скорости волн от частоты).

- **Секунда СИ** — измеренный на уровне моря промежуток времени, в течение которого совершается 9192631770 колебаний, соответствующих частоте излучения атомом ^{133}Cs при резонансном переходе между энергетическими уровнями сверхтонкой структуры основного состояния в отсутствии внешних магнитных полей.

- **Собственное движение** — скорость изменения положения небесного тела на **небесной сфере**; скорость изменения сферических координат небесного тела в определенной системе сферических координат.

- **Среднее движение** — средняя угловая скорость движения тела по кеплеровской орбите.

- **Среднее место** — положение тела на **небесной сфере** с центром, находящимся в барицентре Солнечной системы, отнесенное к **среднему экватору и равноденствию** на **стандартную эпоху**. Среднее место вычисляется методом вычитания из непосредственно измеренных координат тела поправок за **рефракцию**, суточный и годичный **параллакс**, звездную аберрацию (см. **аберрация звездная**) и приведения полученных координат к среднему экватору и равноденствию на стандартную эпоху.

- **Среднее солнечное время** — увеличенный на 12^h часовой угол фиктивной точки (см. **среднее экваториальное солнце**), равномерно движущейся по экватору в ту же сторону, в которую движется Солнце по эклиптике.

- **Средний экватор и равноденствие** — положение **небесного экватора**, который подвержен влиянию только **прецессии**. Пересечение среднего экватора с **эклиптикой** определяет среднюю точку весеннего равноденствия. Короткопериодические вариации (см. **нутация**) в положении **небесного экватора** относительно **эклиптики** не учитываются. Координаты звезд, радиоисточников в каталогах обычно приводятся на средний экватор и **равноденствие каталога** на **стандартную эпоху**.

- **Стандарт частоты** — прибор, предназначенный для воспроизведения электромагнитных колебаний заданной частоты (или ряда частот) и (или) формирования шкалы времени; первичный стандарт (репер) частоты — прибор, предназначенный для воспроизведения единицы времени через частоту спектральной линии ^{133}Cs.

- **Точка весеннего равноденствия** — восходящий узел **эклиптики** на **небесном экваторе**.

- **Уклонение отвеса** — угол, образуемый **линией отвеса** с нормалью к референц-эллипсоиду (геодезической вертикалью).

- **Уравнение времени** — **часовой угол** центра истинного Солнца минус часовой угол среднего экваториального Солнца; **истинное солнечное время** минус **среднее солнечное время**. Иногда вычитание проводят в обратном порядке.

- **Уравнение равноденствий** — разница между истинным и средним звездным временем (см. **звездное время, истинное и среднее**).

- **Часовой угол** — двугранный угол между небесным меридианом и кругом склонения небесного тела.

- **Ход часов** — изменение **поправки часов** за интервал времени, отнесенное к этому интервалу. Поправка часов и интервал времени могут быть выражены в различных единицах времени

(в зависимости от этого различают суточный ход [с/сут], часовой ход [с/ч] и т. д.).

- **Широта** — дуга окружности большого круга, проходящего через полюсы и заданную точку; измеряется от основной плоскости системы координат от 0° до +90° к северу и от 0° до −90° к югу.
  - **галактическая** — дуга окружности большого круга, проходящего через полюсы Галактики и небесное тело; измеряется от галактического экватора (см. **экватор галактический**) от 0° до +90° к северу и от 0° до −90° к югу.
  - **земная** — угловое расстояние точки на поверхности Земли, измеряемое вдоль **меридиана** от **экватора** к северу (от 0° до +90°) или югу (от 0° до −90°).
  - **эклиптическая** — дуга окружности большого круга, проходящего через полюсы эклиптической системы координат и небесное тело; измеряется от **эклиптики**) от 0° до +90° к северу и от 0° до −90° к югу.
- **Шкала времени** — периодический астрономический или физический процесс, который используется для задания единицы времени. Промежуток времени между событиями определяется разностью эпох, измеряемой в принятых единицах времени.
- **Экватор** — линия пересечения поверхности тела большим кругом, перпендикулярным оси вращения тела.
  - **небесный** — линия пересечения **небесной сферы** большим кругом, перпендикулярным **оси мира**.
  - **галактический** — линия пересечения **небесной сферы** большим кругом, перпендикулярным оси, проходящей через полюсы Галактики.
- **Эклиптика** — линия пересечения **небесной сферы** плоскостью эклиптики. Это плоскость, которая перпендикулярна к вектору орбитального углового момента системы Земля–Луна, причем скорость барицентра этой системы вычисляется относительно инерциальной системы отсчета.

- **Эксцентриситет** — параметр, определяющий вид конического сечения; один из элементов эллиптической **орбиты** (см. **орбита, элементы**).

- **Эпоха** — дата некоторого события или произвольный фиксированный момент времени, используемый как начало отсчета времени при определении небесной системы отсчета, а также момент, к которому относятся координаты звезд в каталогах.

- **Эпоха стандартная** — момент времени, на который приводятся координаты небесных тел; до 1984 г. координаты в каталогах звезд относились к **среднему экватору и равноденствию** на начало бесселева года: B1900.0, B1950.0, B1975.0 (см. **год бесселев**). Начиная с 1984 г. вместо бесселева года используется юлианский год (см. **год юлианский**), и для обозначения стандартной эпохи применяется буква J, например J2000.0.

- **Эфемеридное время (ET)** — независимая переменная в уравнениях движения тел Солнечной системы; шкала эфемеридного времени использовалась с 1960 до 1984 г., в 1984 г. шкала ET была заменена шкалами **динамического времени**.

- **Эфемеридная секунда** — $1/31556925,9747$ часть тропического года на эпоху 1900, январь 0, 12^h ET.

- **Юлианская дата (JD)** — число суток с 12 часов UT 1 января 4713 г. до н. э. до эпохи наблюдений. Сутки могут быть средними солнечными, эфемеридными, звездными, измеряемыми в шкале атомного или динамического времени.

- **Юлианский календарь** — система счета времени, введенная Юлием Цезарем. Основана на 28-летнем цикле. Средняя продолжительность календарного года равна 365,25 суток. В юлианском календаре високосными считаются годы, номер которых делится на 4 без остатка.

- **Юлианское столетие** — **интервал времени**, равный 36525 атомных суток.

ЛИТЕРАТУРА

Абалакин В. К. Основы эфемеридной астрономии. М.: Наука, 1979, 448 с.

Атмосфера. Справочник. Предс. редколлегии: Седунов Е. С. Л.: Гидрометеоиздат, 1991, 510 с.

Блажко С. Н. Курс сферической астрономии. 2-е изд. М.: Гостехиздат, 1954.

Бронштэн В. А. Клавдий Птолемей. М.: Наука, 1988, 240 с.

Брумберг В. А. Релятивистская небесная механика. М.: Наука, 1972, 382 с.

Брумберг В. А., Глебова Н. И., Лукашова М. В., Малков А. А., Питьева Е. В., Румянцева Л. И., Свешников М. Л., Фурсенко М. А. Расширенное объяснение к «Астрономическому ежегоднику». Труды ИПА РАН, Вып. 10. СПб.: ИПА РАН, 2004, 488 с.

Климишин И. А. Календарь и хронология. М.: Наука, 1990, 478 с.

Ковалевский Ж. Современная астрометрия. Фрязино: Век 2, 2004, 478 с.

Копейкин С. М. Теория относительности в радиоастрономических наблюдениях. Астрон. журн. 1990, **67**, 10–20.

Куликов К. А. Курс сферической астрономии. М.: Наука, 1976, 232 с.

Маррей К. Э. Векторная астрометрия. Киев: Наукова Думка, 1986, 327 с.

Матросов А. В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. СПб.: БХВ-Петербург, 2001, 528 с.

Меёс Ж., Астрономические формулы для калькуляторов, М. Мир, 1988, 167 с.

Мориц Г., Мюллер А. Вращение Земли: теория и наблюдения. Киев: Наукова Думка, 1992, 512 с.

Одуан К., Гино Б. Измерение времени. Основы GPS. М.: Техносфера. 2002, 400 с.

Подобед В. В., Нестеров В. В. Общая астрометрия. М.: Наука, 1975, 552 с.

Рожанский И. Д. Античная наука. М.: Наука, 1980, 200 с.

Сажин М. В. Теория относительности для астрономов. http://www.astronet.ru/db/msg/1170927

Сидоренков Н. С. Физика нестабильностей вращения Земли. М.: Физматлит, 2002, 384 с.

Auer L. H., Standish E. M. Astronomical refraction: computational method for all zenith angles. Astron. J., 2000, **119**, 2472–2474.

Boucher Cl., Altamini Z., Sillard P., Feissel-Vernier M. The ITRF2000. IERS Technical Note 31. Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main. 2004.

Brumberg V. A., Kopejkin S. M. Relativistic time scales in the Solar system. Celest. Mech. and Dyn. Astron., 1990, **48**, 23–44.

Capitaine N., Guinot B. and Souchay J. A Non-rotating Origin on the Instantaneous Equator: Definition, Properties and Use. Celest. Mech., 1986, **39**, 283—307.

Capitaine N., Gontier A.-M. Accurate procedure for deriving UT1 at a submilliarcsecond accuracy from Greenwich Sidereal Time or from the stellar angle. Astron. Astrophys., 1993, **275**, 645–650.

Capitaine N., Guinot B. and McCarthy D. D. Definition of the Celestial Ephemeris origin and of UT1 in the International Reference Frame. Astron. Astrophys., 2000, **355**, 398—405.

Capitaine N., Chapront J., Lambert S. and Wallace P. Expressions for the Celestial Intermediate Pole and Celestial Ephemeris Origin consistent with the IAU 2000A precession-nutation model. Astron. Astrophys., 2003, **400**, 1145—1154.

Danjon A. Astronomie generale. Paris. 1952–53. p.143–162.

Dehant V., Arias F., Bizouard Ch., Bretagnon P., Brzeziński A., Buffett B., Capitaine N., Defraigne P., de Viron O., Feissel M., Fliegel H., Forte A., Gambis D., Getino J., Gross R., Herring T., Kinoshita H., Klioner S., Mathews P. M., McCarthy D., Moisson X., Petrov S., Ponte R. M., Roosbeek F., Salstein D., Schuh H., Seidelmann K., Soffel M., Souchay J., Vondrák J., Wahr J. M., Weber R., Williams J., Yatskiv Y., Zharov V. E. and Zhu S. Y. Considerations concerning the non-rigid Earth nutation theory. Celest. Mech. and Dyn. Astron., 1999, **72**, 245—310.

Folkner W. M., Charlot P., Finger M. H., et al. Determination of the extragalactic-planetary frame tie from joint analysis of radio interferometric and lunar laser ranging measurements. Astron. Astrophys., 1994, **287**, 279.

Fukushima T. Geodesic Nutation. Astron. Astrophys., 1991, **244**, L11—L12.

Giacomo P. Equation for the determination of the density of moist air (1981). Metrologia, **18**, 1982, 33–40.

Green R. M. Spherical astronomy. Cambridge University Press, 1985, 520 p.

Guinot B. Basic Problems in the Kinematics of the Rotation of the Earth, in Time and the Earth's Rotation, McCarthy D. D. and Pilkington J. D. (eds.), D. Reidel Publishing Company, 1979, 7—18.

Heiskanen W. A., Moritz H. Physical Geodesy. W. H. Freeman and Co., San Francisco and London, 1967, 363 p.

Hellings, R.W. Relativistic effects in astronomical timing measurements. Astron. Journal., 1986, **91**, 650–659.

IERS Conventions 1996. D.D. McCarthy (ed.) IERS Tech. Note 21. Observatoire de Paris, 1996, 96 p.

IERS Conventions 2003. D. D. McCarthy, G. Petit (eds.) IERS Tech. Note 32. U. S. Naval Observatory, Bureau International des Poids et Mesures, 2004, 127 p.

Kovalevsky J. Modern Astrometry. 2d ed. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2002.

Kovalevsky J., Seidelmann P. K. Fundamentals of astrometry. Cambridge University Press, 2004, 404 p.

Lieske J. H., Lederle T., Fricke W., and Morando B. Expressions

for the Precession Quantities Based upon the IAU (1976) System of Astronomical Constants. Astron. Astrophys., 1977, **58**, 1–16.

Ma C., Arias E. F., Eubanks T. M., Fey A., Gontier A.-M., Jacobs C. S., Sovers O. J., Archinal B. A. and Charlot P. The International Celestial Reference Frame as realized By Very Long Baseline Interferometry. Astron. Astrophys., 1998, **116**, 516—546.

Nelson R. A., McCarthy D. D., Malys S., Levine J., Guinot B., Fliegel H. F., Beard R. L. and Bartholomew T. R. The leap second: its history and possible future. Metrologia, 2001, **38**, 509–529.

Newcomb, S. Astronomical Papers for the American Ephemeris and Nautical Almanac. 1895, Vol. VI, Part I: Tables of the Sun, Washington D. C., U. S. Govt. Printing Office, 9.

Owens J. C. Optical refractive index of air: dependence on pressure, temperature and composition. Applied Optics, **6**, p. 51–59.

Sovers O.J, Jacobs C. S. Observation model and parameter partials for the JPL VLBI parameter estimation software «MODEST»–1996. JPL Publ. 83–39, Rev.6, 1996, 151 p.

Thayer G. D. An improved equation for the radio refractive index of air. Radio Science, 1974, **9**, 803–807.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аберрация, 15, 35, 297–301
    годичная, 305, 308
    планетная, 298, 315
    постоянная, 35, 306
    суточная, 304–305
    вековая, 313
    звездная, 298, 312
Афелий, 116
Аномалия
    эксцентрическая, 117
    истинная, 117
    средняя, 117
Апекс, 300
Аргумент перигелия, 117
Астрометрия
    задачи, 14, 21
Атмосфера стандартная, 288
Азимут, 73
Барицентр
    Солнечной системы, 20, 123, 125, 128, 221
Центр масс, 135
Часовой
    пояс, 35, 184
    угол, 77, 165
Дисперсия Аллана, 190
Дисперсия волн, 268
Длина пути
    оптическая, 273
Долгота, 56
    астрономическая, 132, 147
    эклиптическая, 80
    геоцентрическая, 145
    геодезическая, 145
    перигелия, 114, 118
    средняя, 118
    восходящего узла, 117
Движение полюса, 170, 350
    чандлеровское колебание, 37, 175
    годичное, 175
    свободное, 350
    вынужденное, 350
Движение полюсов, 17
Эфемериды, 36, 101, 125, 227
Эйлера
    углы, 90, 356, 359, 366, 386
Эклиптика, 22, 79
    плоскость, 77, 79, 351
Эксцентриситет, 113, 117
Экватор
    галактический, 82
    истинный, 376
    небесный, 74
        средний, 102, 104
    ICRS, 104
Эллипсоид
    референц, 133

средний земной, 134, 142
вращения, 128
Эпоха
каталога, 102
наблюдения, 102
равноденствия, 103
стандартная, 102
Формула
косинусов, 64
пяти элементов, 66
синусов, 66
Формула Лапласа, 258
Фундаментальные аргументы, 169
Геоид, 128, 159
уравнение, 140
Геопотенциал, 138, 159
Год
бесселев, 238
тропический, 24, 236, 352
високосный, 241
юлианский, 24, 241
звездный, 238, 352
Гравитационный радиус, 339
Инерции
моменты, 55
произведения, 55
тензор, 55
Интервал, 200
Календарь, 239
григорианский, 242
лунно-солнечный, 21
солнечный, 22
юлианский, 241
Калибровка, 16
Картирующие функции, 285
Каталог, 14
фундаментальный, 101
Координаты
астрономические, 128
декартовы, 45, 56
геоцентрические, 145
геодезические, 128, 145
контравариантные, 59
ковариантные, 59
сферические, 57
видимые, 15, 102
небесного эфемеридного полюса, 381
Круг
большой, 40
малый, 40
склонений, 75
широты, 79
вертикальный, 72
высоты, 73
Кульминация, 94, 165
нижняя, 94
верхняя, 94
Линия изменения даты, 35, 186
Лоренца преобразования, 202, 308
Лява числа, 161
Матрица, 46
Матрица преобразования от ЗСК к НСК, 389
Меридиан
Гринвичский, 169
Метрика пространства, 62, 208, 211
Микролинзирование, 335
Мировая
линия, 200
точка, 200
Моменты инерции, 52, 136
Земли, 138
Надир, 72
Наклонение орбиты, 117
Направляющие косинусы, 45, 136
Небесная сфера, 24, 39
Небесный меридиан, 75
Небесное эфемеридное начало, 391
Невращающееся начало отсчета (NRO), 380, 390–402
Нутации
матрица, 378
постоянная, 376

Нутация, 16, 18, 36, 350
геодезическая, 221
от планет, 386
теория IAU1980, 18, 377, 382
теория IAU2000, 19, 104, 378
в долготе, 376
в наклоне, 376
Оси Тиссерана, 156, 381
Ось фигуры, 370
Ось мира, 74
Отвесная линия, 72, 132
уклонение, 147
Параллакс, 36
Солнца, 116, 323
суточный, 321
тригонометрический, 318
Параллактическое смещение, 16, 298
Параметры ориентации Земли, 381
Парсек, 318
Перигелий, 114
Плоскость горизонта, 72
Полдень истинный, 165
Полиномы Лежандра, 135
Полночь
истинная, 165
средняя, 166
Полуось
большая, 114, 117
малая, 114
Полярное расстояние, 56, 76
Полюс
мгновенный, 393
мира, 74
мира истинный, 376
небесный
эфемеридный, 18, 380–384
промежуточный, 18, 19, 384, 391
средний, 102
Полюсы мира, 352
Постоянная
прецессии, 29
тяготения, 107, 129
Постоянные
астрономические фундаментальные, 424
определяющие, 425
Потенциал, 37, 129, 159
Прецессии
матрица, 359
Прецессионные параметры Ньюкомба, 357
Прецессия, 16, 18, 36, 78, 238
геодезическая, 221
от планет, 357, 386
параметры Ньюкомба, 357
по прямому восхождению, 359
по склонению, 359
Прецессия лунно-солнечная, 349
постоянная, 358
Прецессия от планет
постоянная, 358
Прецессия по долготе
постоянная, 359
Предварение равноденствий, 352
Преобразование из ЗСК в НСК
классическое, 388
Продолжительность суток, 17, 170
Произведение векторов
скалярное, 45
векторное, 53
Прямое восхождение, 76
Пулковские таблицы рефракции, 260
Пульсар, 227
РСДБ, 265, 407–423
Радиорефракция, 252, 265, 421
Равноденствие, 76
динамическое, 77, 101, 105
истинное, 246
среднее, 246
Редукция, 14, 402–406
Рефракция, 15, 97, 251

астрономическая, 251
индекс, 254
постоянная, 254
в ионосфере, 274
в тропосфере, 277
СВЧ-радиометры, 286
Секунда, 169
атомная, 189
эфемеридная, 38, 189, 237
Сферическая астрономия
задачи, 15–18
Система координат
барицентрическая, 71, 123–126
декартова, 45
эклиптическая, 79–80, 121
экваториальная, 71, 74–78
фундаментальная, 100
галактическая, 80–83
гелиоцентрическая, 71, 126
геоцентрическая, 71, 126
горизонтальная, 71–74
истинная, 356
небесная, 14
сферическая, 56
средняя, 356
топоцентрическая, 16, 71, 126
земная, 14, 152, 159–162
ITRF, 152, 157, 161, 431
Система отсчета, 14, 70, 127
динамическое определение, 100, 106
кинематическое определение, 100
BCRS, 221, 391, 409
GCRS, 221, 389, 391, 409
ICRF, 103
ICRS, 103, 126
ITRS, 152
Склонение, 75
Скорость лучевая, 326
Скорость света, 206, 270, 307
Скорость волны
фазовая, 267
групповая, 268
Событие, 200
Собственные
векторы, 50
значения, 50
Собственное движение, 16, 298, 326
Солнце
истинное, 165
среднее экваториальное, 166, 246
Среднее движение, 115
Средний наклон эклиптики к экватору, 357
Стандарт частоты, 189
нестабильность, 190
точность, 190
Сутки
солнечные
истинные, 165
средние, 166
звездные, 186
Сжатие
Земли динамическое, 140
эллипсоида геометрическое, 139
геоида, 140
Сжатие Земли
динамическое, 374
Широта
астрономическая, 75, 92, 132, 147
эклиптическая, 79
геоцентрическая, 145
геодезическая, 145
Шкала времени, 15, 70
атомная, 38, 163
динамическая, 163
эфемеридная, 38, 164, 198
пульсарная, 227–234

солнечная, 163
звездная, 163, 186
TCB, 198, 220, 223, 409
TCG, 152, 198, 220, 409
TDB, 198
TDT, 198
TT, 198, 215
Тензор, 48, 60
главные моменты, 52, 370
главные оси, 52, 56, 370
инерции, 137, 156, 170, 369
метрический, 60
Точка
осеннего равноденствия, 76
весеннего равноденствия, 76
динамическая, 77
Треугольник
параллактический, 84
сферический, 42
Угловой момент
орбитальный, 77, 109
Угловой момент относительный, 156
Угол поворота Земли, 391, 398, 399
Уравнение
Кеплера, 119
Пуассона, 372
центра, 122, 223
равноденствий, 246, 387
времени, 28, 167
Рэлея, 270
Уравнения Эйлера
динамические, 368
кинематические, 368
Условное международное начало, 17, 152, 175
Вертикал, 72
Высота
геодезическая, 148
над горизонтом, 73
ортометрическая, 133, 148
Восход, 96
Восходящий узел, 82
орбиты, 116
Вращение Земли
неравномерности, 170–184
Время
атомное, 189
декретное, 184
динамическое, 188
эфемеридное, 188
координатное, 200
летнее, 184
местное, 184
московское, 186
собственное, 200
солнечное
истинное, 165
среднее, 165
всемирное, 169, 245
координированное (UTC), 178
UT0, 176
UT1, 176
UT2, 177
звездное, 186, 245
гринвичское, 187
гринвичское истинное, 246, 381, 388, 389, 392
гринвичское среднее, 246, 387
истинное, 246
местное, 97, 187
среднее, 246
звездное
гринвичское истинное, 385
Юлианская дата, 177, 234
модифицированная, 182, 235
Юлианская эпоха, 236
Юлианское столетие, 241
Задержка
гравитационная, 409, 412–415
в ионосфере, 277

в тропосфере, 277
Заход, 96
Закон Кеплера
первый, 114
третий, 115
второй, 111
Земля
фигура, 16, 36
параметры вращения, 16, 17
вращение, 16, 17
Земное эфемеридное начало, 391
Зенит, 72
астрономический, 147
геодезический, 147
Зенитное расстояние, 73