РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ФГБОУ ВПО ТЮМЕНСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ДИСТАНЦИОННОГО ОБРАЗОВАНИЯ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК
И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

А. П. ДЕВЯТКОВ, А. А. МАКАРОВ,
Е. Г. ПЫТКЕЕВ, А. Г. ХОХЛОВ

МАТЕМАТИКА: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебное пособие

Тюмень
Издательство
Тюменского государственного университета
2011

УДК 517.2(075.8)+512.8(075.8)
ББК В161я73+В143я73
М340

А. П. Девятков, А. А. Макаров, Е. Г. Пыткеев, А. Г. Хохлов. МАТЕМАТИКА: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА: учебное пособие. Тюмень: Издательство Тюменского государственного университета, 2011. 468 с.

Представленный материал соответствует требованиям Государственных образовательных стандартов третьего поколения по дисциплине «Математика: математический анализ и линейная алгебра». Основные положения дополняются примерами и задачами с решениями, вопросами, упражнениями и тестом для самопроверки. Приведены контрольные работы за первый и второй семестры.

Для студентов, обучающихся по специальностям 080105 (060400) «Финансы и кредит», 080107 (351200) «Налоги и налогообложение», 080109 (060500) «Бухгалтерский учет, анализ и аудит», 080502 (060800) «Экономика управления на предприятии», 080504 (061000) «Государственное и муниципальное управление», 080508(062300) «Информационный менеджмент», 080115(350900) «Таможенное дело», 080111(061500) «Маркетинг», 080100 (521300) «Экономика», 080500 (521500) «Менеджмент (бакалавр)» и др.

Предназначено для любых форм обучения, в т. ч. заочной с применением дистанционных технологий, а также для самостоятельного приобретения начальных сведений по математике.

Рекомендовано Учебно-методической комиссией Института математики, естественных наук и информационных технологий ТюмГУ, одобрено на заседании кафедры математического анализа и теории функций.

Рецензенты: ***А. Г. Ченцов***, профессор, член-корр. РАН
Т. Г. Латфуллин, д-р физ.-мат. наук, профессор ТюмГУ

Ответственный
за выпуск: ***А. В. Трофимова***, зав. отделом учебно-методического обеспечения ИДО ТюмГУ

ISBN 978-5-400-00564-0

© ФГБОУ ВПО Тюменский государственный университет, 2011
© А. П. Девятков, А. А. Макаров, Е. Г. Пыткеев, А. Г. Хохлов, 2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 7
ВВЕДЕНИЕ 11

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

ГЛАВА 1. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ 21
§ 1. Общие сведения о множествах 21
§ 2. Множество вещественных чисел 26
§ 3. Важнейшие теоремы о действительных числах 30
§ 4. Числовые функции 33
Типовые задачи и алгоритмы их решения 36
Резюме 37
ГЛАВА 2. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ 38
§ 1. Понятие числовой последовательности 38
§ 2. Предел числовой последовательности 39
§ 3. Основные свойства операции предельного перехода 41
§ 4. Предел монотонной последовательности 46
§ 5. Подпоследовательности и частичные пределы 48
§ 6. Основные теоремы о последовательностях 49
§ 7. Замечательные (важнейшие) пределы 53
§ 8. Сравнение последовательностей 54
§ 9. Предел числовой функции 55
§ 10. Основные свойства функций, имеющих предел 59
§ 11. Односторонние пределы функции 63
§ 12. О бесконечных пределах функции 63
§ 13. Замечательные пределы 64
§ 14. Сравнение функций. *O*-символика 64
§ 15. Непрерывные функции 68
§ 16. Свойства непрерывных функций 70
§ 17. Непрерывность элементарных функций 72
§ 18. Точки разрыва и их классификация 72
§ 19. Свойства непрерывных функций на отрезке 74
Типовые задачи и алгоритмы их решения 76
Резюме 77
ГЛАВА 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ 78
§ 1. Производная 78
§ 2. Дифференциал 89
§ 3. Производные и дифференциалы высших порядков 92
§ 4. Основные теоремы дифференциального исчисления 94

§ 5. Раскрытие неопределенности по правилу Бернулли–Лопиталя 97
§ 6. Формула Тейлора 101
§ 7. Исследование функций с помощью производных 109
Типовые задачи и алгоритмы их решения 118
Резюме 118
ГЛАВА 4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ 119
§ 1. Первообразная 119
§ 2. Основные свойства неопределенного интеграла 121
§ 3. Таблица основных интегралов 121
§ 4. Основные правила интегрирования 122
§ 5. Методы интегрирования 123
§ 6. Интегрирование рациональных функций 129
§ 7. Интегрирование иррациональных выражений и трансцендентных функций 134
§ 8. Метод Остроградского 142
§ 9. Определенный интеграл 143
§ 10. Геометрическое приложение определенного интеграла 156
§ 11. Несобственные интегралы 167
Типовые задачи и алгоритмы их решения 171
Резюме 173
ГЛАВА 5. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ 174
§ 1. Линейные пространства 174
§ 2. Матрицы и определители 180
§ 3. Системы линейных уравнений 200
§ 4. Собственные значения и собственные векторы 216
§ 5. Векторы 221
§ 6. Прямая линия на плоскости 240
§ 7. Различные виды уравнений плоскости 247
§ 8. Прямая линия в пространстве 251
§ 9. Пучок плоскостей 255
§ 10. Линии второго порядка 257
Типовые задачи и алгоритмы их решения 264
Резюме 272
ГЛАВА 6. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ 273
§ 1. Различные типы множеств в n-мерном пространстве 273
§ 2. Функции нескольких переменных 281
§ 3. Частные производные функции нескольких переменных 287
§ 4. Дифференцируемость функций нескольких переменных. Полный дифференциал 291
§ 5. Дифференцирование сложной функции 298
§ 6. Дифференциалы высших порядков 300
§ 7. Выпуклость функций нескольких переменных 302

§ 8. Свойства выпуклых функций 304
§ 9. Производная функции по направлению. Градиент 313
§ 10. Экстремумы функции нескольких переменных 317
§ 11. Формула Тейлора для функции двух переменных 324
§ 12. Условный экстремум функции нескольких переменных 327
§ 13. Метод множителей Лагранжа 329
§ 14. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции, имеющей частные производные во внутренних точках ограниченного замкнутого множества 332
§ 15. Наибольшее и наименьшее значения функции (глобальный экстремум) 335
Типовые задачи и алгоритмы их решения 335
Резюме 343
ГЛАВА 7. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (ОДУ) 344
§ 1. Основные понятия и определения 345
§ 2. Задача Коши 346
§ 3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными 350
§ 4. Однородные и квазиоднородные уравнения 351
§ 5. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка 354
§ 6. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах 358
§ 7. Уравнения, не разрешенные относительно производной 359
§ 8. Дифференциальные уравнения высших порядков 363
§ 9. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков 367
§ 10. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами 369
§ 11. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения 371
§ 12. Метод неопределенных коэффициентов для определения частного решения неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами 375
§ 13. Уравнение Эйлера. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (основные понятия) 376
§ 14. Системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами 379
§ 15. Системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами 382
Типовые задачи и алгоритмы их решения 384
Резюме 393
ГЛАВА 8. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ 394
§ 1. Основные понятия и определения 395
§ 2. Необходимый признак сходимости ряда 396
§ 3. Простейшие свойства числовых рядов 397
§ 4. Ряды с неотрицательными членами 398

§ 5. Знакочередующиеся ряды ... 403
§ 6. Знакопеременные ряды ... 403
§ 7. Функциональные ряды ... 405
§ 8. Степенные ряды ... 407
§ 9. Свойства степенных рядов ... 408
§ 10. Ряды Тейлора ... 411
§ 11. Разложение элементарных функций в ряд Маклорена ... 413
§ 12. Методы разложения функций в ряд Маклорена ... 415
§ 13. Приложения степенных рядов ... 417
§ 14. Нахождение сумм числовых рядов. Убыстрение сходимости ... 421
§ 15. Вычисление сумм числовых рядов ... 423
Типовые задачи и алгоритмы их решения ... 425
Резюме ... 438
ЗАКЛЮЧЕНИЕ ... 439
ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЯ ... 440
Ключи к тестам для самопроверки ... 456
Задания для контрольных работ ... 456
ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ... 462
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ ... 466

ПРЕДИСЛОВИЕ

Слово «математика» означает «точное знание». Если математик открыл, что дважды два — четыре (а это было великое открытие, даже если он сделал его «считая окурки», как говорил Маяковский), то этот ответ никогда не изменится (даже если будут считаться гораздо большие предметы, у Маяковского — локомотивы).

Зачем студентам-гуманитариям точные формулировки определений, аксиом, доказательства теорем? Для того, чтобы ответить на этот вопрос, сделаем несколько замечаний.

Две основные задачи стоят перед любым человеческим сообществом: создание и распределение. Как во взаимодействии с природой создать побольше благ, т. е. всего того, что делает жизнь человека более привлекательной? Как распределить затраты на создание благ и сами блага между входящими в данное сообщество индивидами? По тому, сколь успешно решает сообщество эти две главные задачи, можно судить о степени его развития.

Чем тут может помочь наука? Естественные и технические науки помогают создавать блага, видоизменять природу, но так, чтобы не разрушить хрупкую среду обитания человека. О практических успехах естественных наук судят по материализации идеи: по тем предметам, которые удалось создать с помощью науки. Гуманитарные науки в основном связаны не с процессом создания благ, а с их распределением. Экономика, социология, политология, социальная психология, юриспруденция ищут способы разумной внутренней организации общества, об их практических достоинствах судят по тому, как они влияют на сознание людей и какое получается при этом общество.

Положение математики особое. Она возникла и долго развивалась как инструмент естественных наук, в основном физики и инженерного дела. Все крупные технические достижения — от строительства зданий и мостов до раскрепощения атомной энергии, сверхзвуковой авиации и космических полетов — были бы невозможны без математики и математиков.

Однако гуманитарные науки также все больше нуждаются в формализованном языке, причем не столько для овеществления своих идей, сколько для анализа очень непростой логики взаимодействия людей. На вопрос «для чего изучают математику?» замечательно от-

ветил еще XIII в. английский философ и естествоиспытатель Роджер Бэкон: «Тот, кто не знает математики, не может узнать никакой другой науки и даже не может обнаружить своего невежества».

Отметим особую роль математики как дисциплины, развивающей интеллектуальные и творческие способности человека. Лучшего средства для их совершенствования пока не найдено.

Нам хотелось бы выразить благодарность студенткам М. В. Котвановой и А. В. Терниковой за помощь в компьютерном наборе текста.

Мы с особой признательностью и печалью вспоминаем всегда охотно приходившего на помощь в трудных ситуациях заведующего кафедрой математического анализа и теории функций профессора Виктора Ивановича Кругликова. Некоторые его идеи о преподавании фундаментальной математики нашли отражение в этом пособии.

Кругликов Виктор Иванович

12 июля 2007 г., на 63-м году жизни скончался доктор физико-математических наук, профессор Виктор Иванович Кругликов.

Ушел из жизни крупный ученый, талантливый педагог, патриот России.

В. И. Кругликов родился 18 апреля 1945 г. в г. Ужуре Красноярского края. После средней школы он учился в Томском, а затем в Донецком государственном университете, который окончил в 1968 г., по специальности математика. В 1972 г. защитил кандидатскую диссертацию по окончании аспирантуры Института прикладной математики и механики АН УССР.

В Тюменском государственном университете Виктор Иванович начал преподавать в 1973 г., в год открытия университета. Преподавательская деятельность В. И. Кругликова сыграла большую положительную роль в становлении университетского математического образования в Тюмени.

В конце 70-х гг. В. И. Кругликов уехал из Тюмени на Украину, где два десятка лет преподавал в Донецком государственном университете. Там он вырастил много учеников и оставил о себе добрую память. Диссертацию на степень доктора физико-математических наук Виктор Иванович защитил в 1993 г.

Когда Россия и Украина стали разными государствами, В. И. Кругликов вернулся на Родину.

С 1997 г. он работал в Тюменском государственном университете, где возглавил кафедру математического анализа и теории функций и был в этой должности до последних дней.

Виктор Иванович запомнится коллегам и студентам своими новаторскими приемами в преподавании математики, яркой речью, умелым руководством кафедрой, ненавязчивой и своевременной помощью коллегам.

В большинстве своих математических работ В. И. Кругликов исследовал отображения с обобщенными производными, им были созданы основы систематической теории отображений квазиконформных в среднем.

Важные приложения находят результаты В. И. Кругликова в теории простых концов фиксированных и переменных областей и в открытом им новом направлении — теории предельных множеств последовательности функций.

Большой интерес у В. И. Кругликова вызывали проблемы высшей школы. Им впервые в полном объеме разработана рейтинговая система оценки качества учебы и преподавания.

Научная и педагогическая деятельность В. И. Кругликова имеет российское и международное признание. Ему присвоено звание профессора и в России и на Украине. Он был избран членом-корреспондентом Петровской академии наук и искусств.

Светлая память о Викторе Ивановиче Кругликове — Учителе, давшем путевку в жизнь многим молодым математикам, удивительном человеке, замечательном ученом навечно останется в сердцах тех, кто его знал, учился у него, работал с ним.

ВВЕДЕНИЕ

Пособие написано в соответствии с требованиями государственных образовательных стандартов третьего поколения по экономическим и менеджеральным направлениям и специальностям, разработанных Научно-методическим советом по математике Министерства образования и науки Российской Федерации от 24 февраля 2009 г. № 142.

Появление данного пособия продиктовано желанием создать курс математики, в котором материал был бы изложен на довольно строгом уровне и в то же время понятен широкому кругу читателей (студентов). Это предъявляет жесткие требования к отбору материала. Включены основополагающие результаты классической математики.

Кроме этого, задачами данного курса являются не только сообщение известного запаса сведений, но и обучение их применению, развитие у учащихся логического мышления и математической культуры, необходимых для изучения математики, математической интуиции, наконец, идейная подготовка студента к изучению других математических дисциплин.

Поскольку пособие рассчитано на студентов, которые в дальнейшем будут применять математику к решению конкретных задач, то при освещении ряда вопросов обращено внимание на выработку у читателя точки зрения и психологии специалиста, интересующегося лишь использованием математических методов в прикладных вопросах.

Запас сведений мы старались делать по возможности минимальным. Он состоит из изложения лишь тех фактов, которые рассматриваются обычно на лекциях. Опыт показывает, что такой прием позволяет максимально помочь учащемуся овладеть различными математическими методами, сделать их простыми и естественными, научить свободно их применять.

Практика упражнений и решения задач при методах, которые мы рекомендовали, постепенно приводит к знанию ходовых формул и правил, затем к оценке этих правил, немного позже — к пониманию определений, правил и формул. В математике мало того, что заучивается наизусть, все, что познается таким способом, в действительности является следствием длительной практики. Что же касается основных понятий и теорем, то невозможно знание их отдельно друг от друга.

Например, понятие непрерывности будет постепенно приводить к накоплению новых понятий и теорем и почти автоматически вызывать в уме различные виды непрерывных функций, затем общие понятия, и, наконец, исходное понятие предела. Такой путь приводит студента к самостоятельному воспроизведению логической цепи курса, как бы создавая творческий процесс.

Некоторые понятия могут быть усвоены после неоднократного прочтения и многих часов обдумывания, но это естественное явление. Постоянное же умственное усилие при решении упражнений и задач и теоретическом размышлении, медленно, но с постепенным нарастанием ведет на путь синтетический, который и является целью всякого формирования интеллекта.

С этой целью в учебном пособии много места отводится разбору решения задач (примеров) на основе рассмотренных общих методов. Имеется много упражнений, которые позволяют лучше усвоить предложенный материал, по существу разобраться в его содержании, проконтролировать понимание, развить математическую культуру мышления, научить применять математический аппарат к решению простейших задач.

В упражнениях формулируются факты, которые могут быть легко доказаны методами, разобранными в курсе, причем эти факты иногда используются в дальнейшем. К упражнениям отнесены такие задания, которые посильны каждому учащемуся. Рекомендуется делать все упражнения, представленные в курсе. Если какое-либо из них вызывает затруднение, это означает, что соответствующая часть курса усвоена не очень хорошо, и, быть может, целесообразно вернуться назад. Имеется определенное количество чисто технических упражнений, без которых нельзя овладеть математическими методами (на технику дифференцирования, интегрирования и т. д.).

Учебное пособие состоит из предисловия, введения, восьми глав и заключения, написано таким образом, чтобы читатель (студент) имел возможность не только самостоятельно изучать предложенный курс, но и контролировать процесс обучения.

В начале каждой главы сформулированы цели, которые должны быть достигнуты читателем в процессе обучения. Каждая глава заканчивается кратким резюме. В конце пособия («Задания для контроля») находятся вопросы и упражнения для самостоятельного решения и тесты для самопроверки.

Рекомендуем (еще раз!) читателю выполнить все предложенные упражнения, при этом правилом должна стать старинная пословица: «Если сначала нет успеха, то попытайтесь еще и еще». В пособии приведены ответы на все упражнения и тесты.

Только после того, как выполнены все (или большая часть) упражнений, нужно попытаться пройти тест для самоконтроля (уложившись в один академический час).

Тест считается пройденным, если читатель правильно решил (выполнил) не менее четырех из пяти заданий. Если цель не достигнута, то всю процедуру следует повторить.

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Рабочая программа дисциплины

Включены теоретические занятия (лекции), практические занятия, самостоятельная работа, а также контрольные и проверочные мероприятия. При этом календарно-тематический и тематический планы представлены следующим образом:

26 часов отводится на лекционные занятия;

26 часов — практические занятия;

301 час — самостоятельная работа;

7 часов — индивидуальные занятия;

2 часа — экзаменационная работа;

2 часа отведены на контрольную работу.

Длительность курса составляет два учебных семестра. Ниже приведено структурирование материала на 35 частей, соответствующих 18 занятиям, составляющим первый семестр, и 17 занятиям, составляющим второй семестр. Для каждого из семестров представлена таблица, в которой написаны часы, отведенные на то или иное занятие.

Первый учебный семестр

В данном семестре изучаются следующие разделы:

- Предел функции и непрерывность.
- Дифференциальное исчисление функций.
- Неопределенный и определенный интегралы.
- Линейная алгебра и аналитическая геометрия.

Занятие		Краткое содержание занятия
Номер занятия	**1**	Множества. Способы задания множеств. Операции над множествами. Общее понятие функции. Основные определения. Множество вещественных чисел. Аксиома непрерывности. Классификация вещественных чисел
Лекционные занятия, ч	0,5	
Практические занятия, ч	–	
Самостоятельные занятия, ч	9	Основное модульное неравенство. Окрестности и полуокрестности. Предельные точки. Открытые и замкнутые множества

Занятие		Краткое содержание занятия
Номер занятия	**2**	Грани числовых множеств. Теорема о точной верхней грани. Лемма Гейне–Бореля–Лебега о покрытиях
Лекционные занятия, ч	0,5	
Практические занятия, ч	–	
Самостоятельные занятия, ч	9	
Номер занятия	**3**	Понятие числовой функции. Способы задания числовых функций. Грани функций. Четные, нечетные, периодические, монотонные функции. Классификация элементарных функций
Лекционные занятия, ч	1	
Практические занятия, ч	1	
Самостоятельные занятия, ч	9	
Номер занятия	**4**	Понятие числовой последовательности. Аналитическое и геометрическое описание предела. Сходящиеся и расходящиеся последовательности. Единственность предела. Ограниченность сходящейся последовательности. Свойство устойчивости. Предел стационарной последовательности. Предельный переход в неравенствах. Свойство линейности. Предельный переход в произведении и частном
Лекционные занятия, ч	1	
Практические занятия, ч	1	
Самостоятельные занятия, ч	9	
Номер занятия	**5**	Предел неубывающей последовательности. Число е. Понятие подпоследовательности. Теорема о пределе промежуточной последовательности. Принцип Кантора о вложенных отрезках. Принцип Больцано–Вейерштрасса о сходящейся подпоследовательности. Фундаментальные последовательности и критерий Коши. Замечательные (важнейшие) пределы. Сравнение последовательностей и важнейшие примеры. Таблица эквивалентных последовательностей
Лекционные занятия, ч	1	
Практические занятия, ч	1	
Самостоятельные занятия, ч	9	
Номер занятия	**6**	Предел числовой функции. Основные свойства функций, имеющих предел. Свойство устойчивости. Теорема о пределе промежуточной функции. Односторонние пределы функции. О бесконечных пределах функции. Сравнение функций. *O*-символика. Критерий эквивалентности. Непрерывные функции. Свойства непрерывных функций. Точки разрыва и их классификация. Свойства непрерывных функций на отрезке. Теорема Вейерштрасса. Теоремы Больцано–Коши
Лекционные занятия, ч	1	
Практические занятия, ч	1	
Самостоятельные занятия, ч	9	

Занятие		Краткое содержание занятия
Номер занятия	**7**	Производная. Основные определения. Геометрический смысл производной. Вычисление производных основных элементарных функций. Производная обратной функции. Таблица производных. Дифференцируемость и непрерывность. Простейшие правила вычисления производных. Дифференцирование сложной функции (композиции функций)
Лекционные занятия, ч	–	
Практические занятия, ч	1	
Самостоятельные занятия, ч	9	
Номер занятия	**8**	Дифференциал. Инвариантность формы дифференциала. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница. Замечание о дифференциале высших порядков. Основные теоремы дифференциального исчисления
Лекционные занятия, ч	1	
Практические занятия, ч	–	
Самостоятельные занятия, ч	9	
Номер занятия	**9**	Необходимое условие локального экстремума (теорема Ферма). Теорема Ролля. Теорема Коши. Раскрытие неопределенности по правилу Бернулли–Лопиталя. Другие виды неопределенности. Формула Тейлора. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа. Приложения формулы Тейлора.
Лекционные занятия, ч	1	
Практические занятия, ч	–	
Самостоятельные занятия, ч	8	
Номер занятия	**10**	Исследование функций с помощью производных. Возрастание и убывание функции. Достаточные условия существования экстремума. Исследование функции на выпуклость и вогнутость. Точки перегиба функции. Асимптоты графика функции. Общая схема исследования функции
Лекционные занятия, ч	–	
Практические занятия, ч	1	
Самостоятельные занятия, ч	8	
Номер занятия	**11**	Первообразная. Неопределенный интеграл. Таблица основных интегралов. Основные правила интегрирования. Метод подстановки в неопределенном интеграле
Лекционные занятия, ч	0,5	
Практические занятия, ч	1	
Самостоятельные занятия, ч	8	
Номер занятия	**12**	Метод интегрирования по частям. Возвратные интегралы. Интегрирование квадратных иррациональностей. Интегрирование рациональных функций. Основные теоремы алгебры. Метод Остроградского
Лекционные занятия, ч	0,5	
Практические занятия, ч	1	
Самостоятельные занятия, ч	8	

Занятие		Краткое содержание занятия
Номер занятия	**13**	Определенный интеграл. Теорема о среднем. Основная теорема анализа. Площадь плоской области
Лекционные занятия, ч	0,5	
Практические занятия, ч	1	
Самостоятельные занятия, ч	8	
Номер занятия	**14**	Длина дуги кривой. Объем тела вращения. Площадь поверхности вращения. Несобственные интегралы
Лекционные занятия, ч	0,5	
Практические занятия, ч	1	
Самостоятельные занятия, ч	8	
Номер занятия	**15**	Линейные пространства. Определение и примеры линейных пространств. Подпространства. Линейная зависимость. Базис, размерность пространства. Матрица. Определитель. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа. Действия над матрицами. Нахождение обратной матрицы
Лекционные занятия, ч	1	
Практические занятия, ч	1	
Самостоятельные занятия, ч	8	
Номер занятия	**16**	Системы однородных уравнений. Метод Гаусса для однородных уравнений. Понятие ранга матрицы. Теорема Кронекера–Капелли. Метод Крамера. Метод обратной матрицы. Собственные значения и собственные векторы
Лекционные занятия, ч	1	
Практические занятия, ч	1	
Самостоятельные занятия, ч	8	
Номер занятия	**17**	Векторы. Линейные операции над векторами. Базис. Разложение вектора по базису. Радиус-вектор точки. Деление отрезка в заданном отношении. Скалярное произведение векторов. Векторное произведение двух векторов. Смешанное произведение трех векторов
Лекционные занятия, ч	1	
Практические занятия, ч	–	
Самостоятельные занятия, ч	8	
Номер занятия	**18**	Различные способы записи уравнения прямой на плоскости. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Различные виды уравнений плоскости. Прямая линия в пространстве. Угол между прямыми в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Пучок плоскостей. Линии второго порядка
Лекционные занятия, ч	1	
Практические занятия, ч	1	
Самостоятельные занятия, ч	8	

Второй учебный семестр

В данном семестре изучаются следующие разделы:

- Функции многих переменных.
- Обыкновенные дифференциальные уравнения.
- Ряды.

Занятие		Краткое содержание занятия
Номер занятия	**1**	Пространства R^n. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Функции нескольких переменных. Частные производные функции нескольких переменных. Частная производная первого и второго порядка
Лекционные занятия, ч	1	
Практические занятия, ч	–	
Самостоятельные занятия, ч	9	
Номер занятия	**2**	Дифференцируемость функций нескольких переменных. Полный дифференциал. Необходимое условие дифференцируемости. Достаточное условие дифференцируемости. Дифференцирование сложной функции. Дифференциалы высших порядков
Лекционные занятия, ч	1	
Практические занятия, ч	1	
Самостоятельные занятия, ч	9	
Номер занятия	**3**	Выпуклость функций нескольких переменных. Выпуклое множество. Свойства выпуклых функций. Непрерывность выпуклых функций. Критерий выпуклости функций
Лекционные занятия, ч	0,5	
Практические занятия, ч	–	
Самостоятельные занятия, ч	9	
Номер занятия	**4**	Матрица Гессе. Критерий Сильвестра. Производная функции по направлению. Градиент
Лекционные занятия, ч	0,5	
Практические занятия, ч	1	
Самостоятельные занятия, ч	9	
Номер занятия	**5**	Экстремумы функции нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие строгого экстремума. Формула Тейлора для функции двух переменных
Лекционные занятия, ч	0,5	
Практические занятия, ч	–	
Самостоятельные занятия, ч	9	
Номер занятия	**6**	Условный экстремум функции нескольких переменных. Наибольшее и наименьшее значение функции (глобальный экстремум). Метод множителей Лагранжа
Лекционные занятия, ч	0,5	
Практические занятия, ч	1	
Самостоятельные занятия, ч	9	

Занятие		Краткое содержание занятия
Номер занятия	**7**	Дифференциальное уравнение. Интегральная кривая дифференциального уравнения. Частное решение. Задача Коши. Теорема Коши. Особое решение ОДУ
Лекционные занятия, ч	1	
Практические занятия, ч	1	
Самостоятельные занятия, ч	9	
Номер занятия	**8**	Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные и квазиоднородные уравнения. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Метод Лагранжа. Уравнение Риккати. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах. Уравнение Лагранжа. Уравнение Клеро
Лекционные занятия, ч	1	
Практические занятия, ч	1	
Самостоятельные занятия, ч	9	
Номер занятия	**9**	Дифференциальные уравнения высших порядков. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Уравнения, допускающие понижения порядка. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков
Лекционные занятия, ч	1	
Практические занятия, ч	1	
Самостоятельные занятия, ч	9	
Номер занятия	**10**	Линейные однородные уравнения. Определитель Вронского. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение
Лекционные занятия, ч	1	
Практические занятия, ч	1	
Самостоятельные занятия, ч	9	
Номер занятия	**11**	Линейные неоднородные дифференциальные уравнения. Метод вариации произвольных постоянных. Метод неопределенных коэффициентов
Лекционные занятия, ч	0,5	
Практические занятия, ч	1	
Самостоятельные занятия, ч	8	
Номер занятия	**12**	Уравнение Эйлера. Системы линейных дифференциальных уравнений. Нормальная система дифференциальных уравнений
Лекционные занятия, ч	0,5	
Практические занятия, ч	–	
Самостоятельные занятия, ч	8	
Номер занятия	**13**	Числовой ряд. Частичная сумма числового ряда. Сумма числового ряда. Необходимый признак сходимости ряда. Простейшие свойства числовых рядов. Ряды с неотрицательными членами. Интегральный признак Коши. Признак сравнения. Предельный признак сравнения
Лекционные занятия, ч	1	
Практические занятия, ч	1	
Самостоятельные занятия, ч	8	

Занятие		Краткое содержание занятия
Номер занятия	**14**	Признак Д'Аламбера. Признак Коши. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Знакопеременные ряды. Абсолютная сходимость ряда
Лекционные занятия, ч	1	
Практические занятия, ч	1	
Самостоятельные занятия, ч	9	
Номер занятия	**15**	Функциональные ряды. Область сходимости функционального ряда. Равномерная сходимость функциональных рядов. Признак Вейерштрасса. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус сходимости степенного ряда. Свойства степенных рядов
Лекционные занятия, ч	1	
Практические занятия, ч	1	
Самостоятельные занятия, ч	8	
Номер занятия	**16**	Ряды Тейлора. Остаточный член в форме Лагранжа. Разложение элементарных функций в ряд Маклорена. Методы разложения функций в ряд Маклорена. Правила умножения рядов
Лекционные занятия, ч	0,5	
Практические занятия, ч	1	
Самостоятельные занятия, ч	9	
Номер занятия	**17**	Приложения степенных рядов. Применение рядов к раскрытию неопределенностей. Нахождение сумм числовых рядов
Лекционные занятия, ч	0,5	
Практические занятия, ч	1	
Самостоятельные занятия, ч	9	

Критерии успешности обучения

Количественная итоговая оценка как в первом, так и во втором семестре определяется суммарным количеством баллов, полученных за домашнюю контрольную работу и итоговое тестирование. При этом максимальное количество баллов составляет 30 за контрольную работу и 70 — за тестирование. Общая сумма составляет 100 баллов.

Студент считается успевающим, если контрольная работа выполнена им не менее, чем на 20 баллов, а тестирование — не менее, чем на 30 баллов.

Неуспевающие студенты проходят контрольные мероприятия повторно в соответствии с Уставом учебного заведения.

Качественная итоговая оценка выражается через количественную следующим образом:

Сумма баллов	0-59	60-70	71-92	92-100
Оценка	неудовл.	удовл.	хорошо	отлично

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Глава 1. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Математический анализ не менее всеобъемлющий, чем сама природа; он определяет все ощутимые взаимосвязи, измеряет времена, пространства, силы, температуры.
Ж. Фурье

Цели и задачи

Сформировать представление о множествах и отображениях, свойствах действительных чисел.

Знать понятие точных граней множеств, основные свойства отрезка (лемму о покрытиях) и элементарных функций.

Уметь находить точные грани множеств и функций, решать функциональные неравенства, находить области определения и области значений функций.

§ 1. Общие сведения о множествах

Множества. Способы задания множеств

Понятие *множества* считается первоначальным и неопределяемым. Под множеством понимают совокупность определенных и отличных друг от друга объектов, объединенных общим характерным признаком в единое целое. В математике вместо «множество» часто говорят «система», «класс», «семейство», «совокупность».

Объекты или предметы, из которых состоит множество, называют *элементами* множества.

Множества обычно обозначают большими буквами (A, B, C, $\sum$, Ω, …), а их элементы — малыми (a, b, c, σ, ω, …). Если элемент a принадлежит множеству A, то пишут $a \in A$; если a не принадлежит множеству A, пишут $a \notin A$.

Множество задается или перечислением его элементов, или указанием характеристики свойств элементов.

Если множество A состоит из элементов (a, b, c, d), то пишут $A = \{a, b, c, d\}$.

Если множество A задается указанием характерного свойства $P(x)$ его элементов, это записывается так: $A=\{x:P(x)\}$ (читается «A есть множество таких x, что выполнено $P(x)$»).

Множество, не содержащее ни одного элемента, называют *пустым* и обозначают символом $\varnothing$.

Включение и равенство множеств

Множество A называется *подмножеством* множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B. При этом множество B называется *надмножеством* множества A.

Если A — подмножество множества B, то пишут $A\subset B$ (читается «множество A является подмножеством множества B», «A содержится в B»).

Принимается, что пустое множество является подмножеством любого множества.

Если выполнены оба включения $A\subset B$ и $B\subset A$, то множества A и B состоят из одних и тех же элементов и называются *равными*, что обозначается символом $A=B$.

Операции над множествами

Объединением множеств A и B называется множество $A\cup B$, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B.

Геометрически объединение множеств интерпретируется с помощью *диаграмм Эйлера–Венна*. На этих диаграммах множества изображаются в виде кругов, треугольников или геометрических фигур произвольной формы. Геометрическая интерпретация объединения множеств A и B дана на рис. 1.1.

Операция объединения множеств удовлетворяет коммутативному и ассоциативному законам:

$A\cup B=B\cup A$; $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$.

Очевидно, что $A\cup A=A$ и $A\cup\varnothing=A$.

Пересечением множеств A и B называется множество $A\cap B$, состоящее из всех тех и только тех элементов, каждый из которых принадлежит обоим множествам одновременно.

Геометрическая интерпретация пересечения множеств дана на рис. 1.2.

Так же, как и операция объединения, операция пересечения подчиняется коммутативному и ассоциативному законам:

$A \cap B = B \cap A$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

Очевидно, что $A \cap A = A$ и $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Операции объединения и пересечения взаимно подчиняются дистрибутивным законам:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

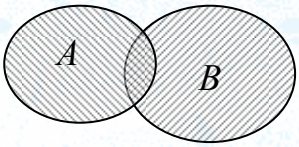


Рис. 1.1

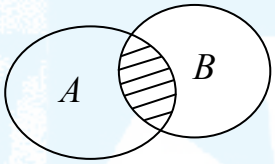


Рис. 1.2

Разностью двух множеств A и B называется множество $A \setminus B$, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат A, но не принадлежат B.

Геометрическая интерпретация разности двух множеств дана на рис. 1.3.

Очевидно, что $A \cup \overline{A} = U$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$, $\overline{\varnothing} = U$, $\overline{U} = \varnothing$, $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Геометрическая интерпретация дополнения дана на рис. 1.4.

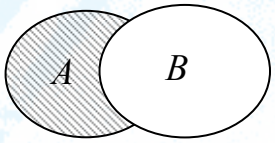


Рис. 1.3

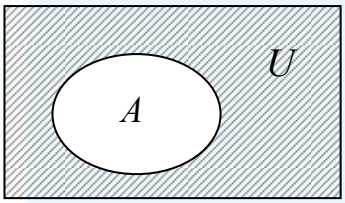


Рис. 1.4

Часто все рассматриваемые множества являются подмножествами некоторого фиксированного множества, которое называют в этом случае *универсальным* (например, при изучении функций действительной переменной за универсальное можно принять множество всех действительных чисел). Обозначим универсальное множество буквой U.

Дополнением множества A до универсального множества U называется множество $\overline{A} = U \setminus A$.

Операции объединения и пересечения могут быть определены не только для двух множеств, но и для произвольного их семейства.

Объединением семейства множеств $\{A_p\}_{p\in I}$ называется совокупность $\bigcup\limits_{p\in I} A_p$ элементов, принадлежащих хотя бы одному множеству A_p из данного семейства.

Пересечением семейства множеств $\{A_p\}_{p\in I}$ называется совокупность $\bigcap\limits_{p\in I} A_p$ элементов, одновременно принадлежащих всем множествам $A_p, p \in I$ данного семейства.

Введем также операцию декартова произведения двух произвольных множеств A и B.

Пара элементов $(x;y)$, $x \in A$, $y \in B$, называется упорядоченной, если указан порядок записи элементов x и y. При этом считается, что $(x_1;y_1) = (x_2,y_2)$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Элементы упорядоченной пары $(x;y)$ называются координатами этой пары (x — первая координата, y — вторая).

Декартовым произведением двух множеств A и B называется множество $A \times B$, состоящее из всевозможных упорядоченных пар $(x;y)$, $x \in A$, $y \in B$.

Пример 1. $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4\}$

$$A \times B = \{(1;3),(1;4),(2;3),(2;4),(3;3),(3;4)\}$$
$$B \times A = \{(3;1),(3;2),(3;3),(4;1),(4;2),(4;3)\}.$$

Сравнивая $A \times B$ и $B \times A$, видим, что в общем случае $A \times B \neq B \times A$.

Общее понятие функции. Основные определения

Пусть X, Y — произвольные множества и f — закон (правило), по которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y = f(x) \in Y$. Тогда говорят, что задано *отображение* f множества X в множество Y, или *функция* f с областью определения X и областью значений Y. Отображение f множества X в Y обозначают $f : X \to Y$.

Элемент $y = f(x) \in Y$ называется *образом элемента* $x \in X$.

Совокупность образов всех элементов $x \in A$ некоторого подмножества $A \subset X$ называют *образом множества* A и обозначают $f(A)$:

$f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subset Y$.

Совокупность всех тех элементов $x \in X$, образы которых лежат в заданном подмножестве $B \subset Y$, называют *полным прообразом множества* B и обозначают $f^{-1}(B)$:

$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\} \subset X$.

Пусть $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ — две функции. Тогда можно образовать новую функцию $h : X \to Z$, определяемую равенством $h(x) = g(f(x))$, которая называется *сложной функцией*, или *композицией функций* f и g, и обозначается также $h = g \circ f$.

Отображение f называется *разнозначным*, или *инъекцией*, если различным элементам множества X соответствуют различные элементы множества Y, т. е. из условия $x_1 \neq x_2$ следует $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Отображение f называется *отображением* X *на* Y, или *сюръекцией*, если для любого элемента $y \in Y$ найдется хотя бы один элемент $x \in X$ такой, что $y = f(x)$. Другими словами, образ $f(X) = Y$.

Отображение f называется *взаимно однозначным*, или *биекцией*, если каждый элемент $y \in Y$ является образом ровно одного элемента $x \in X$. Другими словами, отображение f одновременно является и инъекцией и сюръекцией.

Если отображение $f : X \to Y$ есть взаимно однозначное соответствие между элементами множеств X и Y, то можно говорить об обратном отображении.

Отображение $f^{-1} : Y \to X$ называют *обратным* к отображению $f : X \to Y$, если элементу $y \in Y$ ставится в соответствие тот элемент $x \in X$, образом которого при отображении f является y.

Таким образом, равенство $x = f^{-1}(y)$ равносильно равенству $y = f(x)$.

Если f^{-1} — отображение, обратное к f, то f — обратное к f^{-1}, поэтому их называют взаимно обратными отображениями.

§ 2. Множество вещественных чисел

Аксиома непрерывности

Из школьного курса математики нам известны интуитивные понятия о множестве вещественных чисел R, арифметических операций над ними и правилах сравнения.

В дополнение к этим интуитивным представлениям для строгого построения математического анализа нам будет необходима следующая аксиома.

Аксиома полноты (непрерывности). *Если* $A, B \subset R$ *— непустые числовые множества и* $a \le b$ *для всех* $a \in A$ *и* $b \in B$, *то существует число* $c \in R$ *такое, что* $a \le c \le b$ *для всех чисел* $a \in A$, $b \in B$.

Кратко: если $A \le B$, *то существует число* c *такое, что* $A \le c \le B$.

Геометрическая иллюстрация к этой аксиоме дана на рис. 1.5.

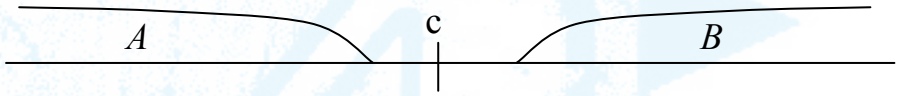


Рис. 1.5

Классификация вещественных чисел

Во множестве R вещественных чисел выделяют четыре подмножества:

N — натуральные числа,

Z — целые числа,

Q — рациональные числа,

I — иррациональные числа.

Натуральные числа определяются по индукции, отправляясь от числа 1, при помощи операции сложения по правилу:

1, 2=1+1, 3=2+1, 4=4+1, … $n=(n-1)+1$, …

Целые числа — натуральные числа, им противоположные и число 0.

Рациональные числа — это всевозможные дроби вида m/n, где m — целое, а n — натуральное число.

Иррациональные числа — это все остальные вещественные числа, т. е. числа, не являющиеся рациональными.

Таким образом, всякое вещественное число является либо рациональным, либо иррациональным $R = Q \cup I$. При этом множество рациональных чисел содержит в качестве своего подмножества множество целых чисел, которое, в свою очередь, содержит в себе все натуральные числа $Q \supset Z \supset N$.

Модуль вещественного числа

Абсолютной величиной, или *модулем* вещественного числа x, называют число

$|x| = \max\{x, -x\}$.

Модуль обладает следующими свойствами:

1) $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$;

2) $|-x| = |x|$, $|xy| = |x| \cdot |y|$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, $y \neq 0$;

3) $|x - a| < \varepsilon$ тогда и только тогда, когда $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$.

Теорема 1 (основное модульное неравенство). *Для любых вещественных чисел x, y справедливы неравенства*

$\big||x| - |y|\big| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$.

Доказательство. Обоснуем правую часть, предоставив обоснование левой части читателю.

Поскольку $|\pm y| = |y|$, а $x \pm y = x + (\pm y)$, то достаточно рассмотреть случай, когда вместо $\pm$ стоит $+$. Из определения модуля следуют неравенства

$x \leq |x|$, $\quad -x \leq |x|$,

$y \leq |y|$, $\quad -y \leq |y|$,

сложив которые получим $x + y \leq |x| + |y|$ и $-x - y \leq |x| + |y|$. Следовательно,

$|x + y| = \max\{x + y, -(x + y)\} \leq |x| + |y|$.

Числовая прямая

Рассмотрим прямую l, на которой зададим порядок точек, считая, что $x < y$, если точка x лежит левее точки y (рис. 1.6).

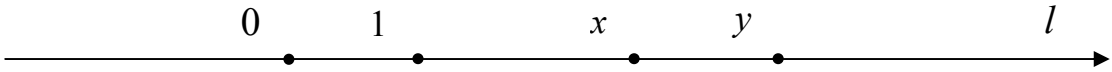


Рис. 1.6

Произвольно зафиксируем две точки — 0 и 1, $0<1$. Отрезок $\overline{01}$ будем считать масштабным с длиной 1.

Прямая l с выбранным на ней порядком точек и масштабным отрезком называется *числовой*, поскольку между ее точками и вещественными числами имеется естественное взаимно однозначное соответствие.

Натуральные числа n будем изображать, откладывая вправо от точки 0 масштабный отрезок n раз.

Числа $\frac{1}{n}$ изобразим, разделив масштабный отрезок на n равных частей.

Дроби $\frac{m}{n}$, $m>0$ изобразим, откладывая отрезок $\overline{0\frac{1}{n}}$ вправо от 0 m раз.

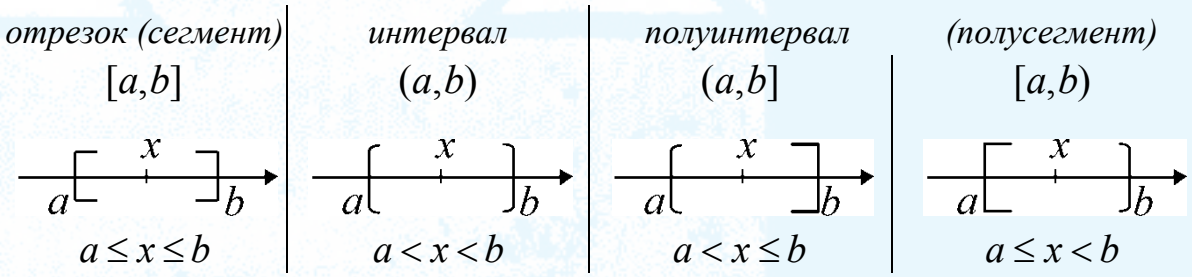
Рациональные числа изобразим как точки $\frac{m}{n}$ и симметричные им точки относительно 0.

Оставшиеся точки — иррациональные числа.

В дальнейшем мы будем широко пользоваться описанной геометрической интерпретацией вещественных чисел.

Числовые промежутки

Рассматриваются два числа $a<b$. *Промежутком* с концами a и b, обозначаемым символом $<a,b>$, называется одно из четырех множеств.



Окрестности и полуокрестности

Окрестностью точки x_0 называется любой интервал (a,b), содержащий точку x_0. Обозначаются окрестности символами $U(x_0), V(x_0), B(x_0), \ldots$

Для любого $\varepsilon > 0$ ε*-окрестностью* точки x_0 называется интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Точка x_0 называется центром ε-окрестности, число ε — ее радиусом. Обозначаются ε-окрестности символами $U(x_0,\varepsilon), V(x_0,\varepsilon), B(x_0,\varepsilon), \ldots$

Также рассматриваются *полуокрестности* и ε*-полуокрестности:*

- правые $[x_0, b)$ и, соответственно, $[x_0, x_0 + \varepsilon)$;
- левые $(a, x_0]$, $(x_0 - \varepsilon, x_0]$.

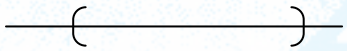
Проколотые окрестности и полуокрестности обозначаются $\overset{\circ}{U}(x_0), \overset{\circ}{U}(x_0,\varepsilon), \ldots$ и получаются удалением из окрестностей самой точки x_0.

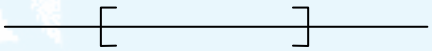
Предельные точки. Открытые и замкнутые множества

Пусть $A \subset R$ — произвольное множество вещественных чисел. Точка x_0 называется *предельной*, или *точкой сгущения* множества A, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется точка $x \in A$, $x \neq x_0$, такая, что $|x - x_0| < \varepsilon$. То есть x_0 есть предельная точка множества A, если всякая окрестность этой точки содержит хотя бы одну точку множества A, отличную от x_0.

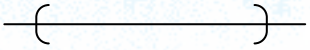
Пример:

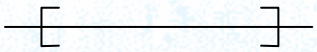
Множество предельных точек интервала — отрезок с теми же концами.





Множество $A \subset R$ называется *открытым*, если для любой точки $x_0 \in A$ найдется ее окрестность $U(x_0)$, целиком лежащая в A, $U(x_0) \subset A$.

 открытое, но не замкнутое множество;

 замкнутое, но не открытое множество.

Множество называют *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Расширенная числовая прямая

Часто числовую прямую дополняют двумя идеальными точками $-\infty$ (*минус бесконечность*) и $+\infty$ (*плюс бесконечность*), считая что для любого числа $x \in R$ выполнены неравенства $-\infty < x < +\infty$.

Числовая прямая, пополненная бесконечными точками, называется *расширенной* и обозначается $\overline{R}$.

За окрестности бесконечных точек принимаются множества $U(-\infty, P) = \{x : x < P\}$ и $U(+\infty, M) = \{x : x > M\}$, где P, M — произвольные числа. Геометрически эти окрестности изображены на рис. 1.7.

Рис. 1.7

Также вводится понятие *бесконечности без знака* ∞. Ее окрестностями считаются множества $U(\infty, K) = \{x : |x| > K\}$, где число $K > 0$ (см. рис. 1.8).

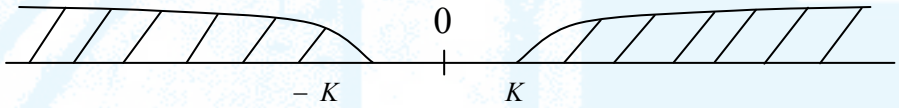
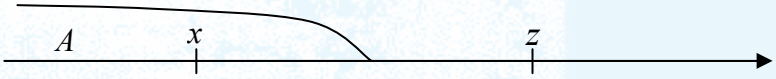


Рис. 1.8

§ 3. Важнейшие теоремы о действительных числах

Грани числовых множеств

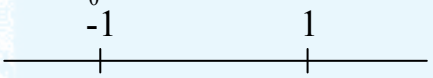
Число z называется *верхней гранью* множества A, если $A \le z$, т. е. для любой точки $x \in A$ выполнено $x \le z$.



Множество A *ограничено сверху*, если оно имеет хотя бы одну верхнюю грань. В противном случае говорят о неограниченном сверху множестве.

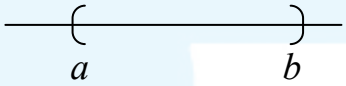
Число z_0 называют *точной верхней гранью* множества A и обозначают $z_0 = \sup A$ (читается «супремум»), если z_0 — верхняя грань A и для любой другой верхней грани z выполнено $z_0 \le z$.

Пример 2. $A = \{-1, 1\}$ $\sup A = 1$



Пример 3. $N = \{1, 2, 3, ...\}$ сверху неограниченно, значит, sup не существует.

Пример 4. $A = (a,b)$ $\sup A = b \notin A$



Пример 5. $A = [a,b]$ $\sup A = b \in A$

Замечания.

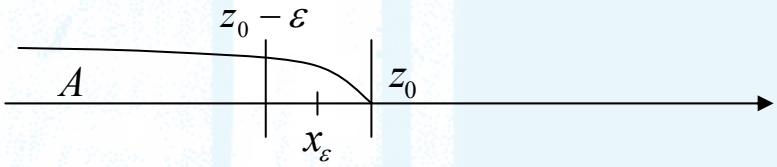
1) Верхняя грань определяется неоднозначно.

2) sup определяется однозначно. Действительно, если числа $z_0^{(1)}$ и $z_0^{(2)}$ — точные верхние грани множества A, то они оба являются верхними гранями, следовательно, с одной стороны $z_0^{(1)} \le z_0^{(2)}$, и, с другой — $z_0^{(2)} \le z_0^{(1)}$, т. е. $z_0^{(1)} = z_0^{(2)}$.

3) Нетрудно проверить, что равенство $z_0 = \sup A$ равносильно совокупности двух условий

$A \le z_0$.

Для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать точку $x_\varepsilon \in A$ такую, что $x_\varepsilon > z_0 - \varepsilon$.



Аналогично определяются нижняя грань и точная нижняя грань множества.

Число w называется *нижней гранью* множества A, если $w \le A$, т. е. для любой точки $x \in A$ выполнено $w \le x$.

Множество A *ограничено снизу*, если оно имеет хотя бы одну нижнюю грань. Иначе говорят о неограниченном сверху множестве.

Множество называется *ограниченным*, если оно ограничено и сверху и снизу. Нетрудно проверить, что множество A ограничено тогда

и только тогда, когда существует число $M>0$ такое, что $|x|\le M$ для всех точек $x\in A$.

Число w_0 называют *точной нижней гранью* множества A и обозначают $w_0=\inf A$ (читается «инфимум»), если w_0 — нижняя грань A и для любой другой нижней грани w выполнено $w\le w_0$.

Теорема о точной верхней грани

Теорема 2. *Всякое непустое ограниченное сверху множество A имеет точную верхнюю грань.*

Доказательство. Из условия теоремы и определения ограниченности сверху следует, что у множества A существует по крайней мере одна верхняя грань. Обозначим через B множество всех верхних граней множества A. По сказанному, оно не пусто $B\ne\varnothing$.

Из определения верхней грани вытекает $A\le B$, т. е. $a\le b$ для всех точек $a\in A$, $b\in B$.

По аксиоме непрерывности существует число c такое, что $A\le c\le B$.

Условие $A\le c$ означает, что c — верхняя грань. Условие же $c\le B$, учитывая состав множества B, означает, что $c=\sup A$. Теорема доказана.

Очевидно, что аналогичная теорема имеет место и для точной нижней грани.

Соглашение.

1) Если множество A неограниченно сверху, то положим $\sup A=+\infty$.

Если множество A неограниченно снизу, то положим $\inf A=-\infty$.

2) Если $\sup A\in A$, то будем также обозначать его $\max A$.

Если $\inf A\in A$, то будем также обозначать его $\min A$.

Лемма о покрытиях

Скажем, что произвольная система интервалов $\Sigma=\{(\alpha_p,\beta_p)\}_{p\in P}$ *покрывает* некоторое множество A, если $A\subset\bigcup\limits_{p\in P}(\alpha_p,\beta_p)$, т. е. для любой точки $x\in A$ найдется интервал (α_p,β_p), содержащий эту точку.

Следующее утверждение устанавливает важнейшее свойство сегмента — его *компактность*.

Лемма Гейне–Бореля–Лебега о покрытиях. *Из всякой системы интервалов* $\Sigma = \{(\alpha_p, \beta_p)\}_{p \in P}$, *покрывающей отрезок* $[a,b]$, *можно выделить конечную подсистему интервалов* $\Sigma' \subset \Sigma$, *также покрывающую данный отрезок* $[a,b]$.

Доказательство. Обозначим через E множество таких точек $x \in (a,b]$, что отрезок $[a,x]$ может быть покрыт конечной подсистемой интервалов из системы Σ. Поскольку точка a покрыта некоторым интервалом системы Σ, то множество E не пусто — в это множество входят все достаточно близкие к a точки $x \in (a,b]$. Кроме того, очевидно, что множество E, целиком лежащее на отрезке $[a,b]$, ограничено сверху (например, числом b). По теореме о точной верхней грани существует $z = \sup E$.

Из определения точной верхней грани следуют неравенства $a \le E \le z \le b$, а значит, точка $z \in [a,b]$. Интервал $(\alpha_{p_0}, \beta_{p_0})$ системы Σ, содержащий точку z, содержит некоторую точку $x_0 \in E$ (см. замечание 3 к определению точной верхней грани). Присоединяя к конечной подсистеме интервалов, покрывающей отрезок $[a, x_0]$, интервал $(\alpha_{p_0}, \beta_{p_0})$, убеждаемся, что $z \in E$. Одновременно с этим убеждаемся, что необходимо $z = b$. В самом деле, если $z < b$, то, выбирая в интервале $(\alpha_{p_0}, \beta_{p_0})$ какую-либо точку $x_1 \in [a,b]$, $x_1 > z$, видим, что $x_1 \in E$, а это противоречит тому, что z — точная верхняя грань E.

Итак, $z \in E$ и $z = b$, т. е. $b \in E$. Вспоминая определение множества E, делаем заключение о справедливости леммы.

§ 4. Числовые функции

Понятие числовой функции

В § 1 было дано общее понятие функции или отображения множества X во множество Y. В случае, когда X и Y подмножествами множества вещественных чисел $X, Y \subset R$, говорят о *числовой функции*. При этом для функции $y = f(x)$ принята следующая терминоло-

гия: x — независимая переменная или аргумент, y — зависимая переменная.

Графиком числовой функции $y = f(x)$ называется множество точек плоскости $\Gamma_f = \{(x, y) : x \in X, y = f(x)\}$ (рис. 1.9).

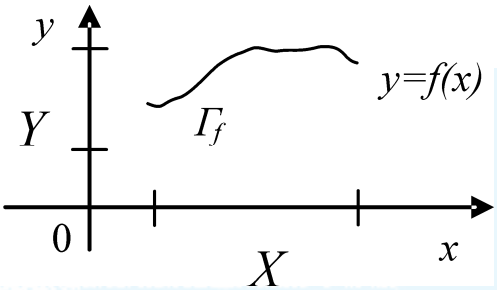


Рис. 1.9

Способы задания числовых функций

Аналитический — зависимость $y = f(x)$ задается либо формулой, либо неким аналитическим выражением.

Примеры: $y = x^{\sqrt{2}}$, $y = \sin^2 x$, $x^2 + y^2 = 1$, …

Графический — функция $y = f(x)$ задается своим графиком Γ_f (рис. 1.9).

Табличный — задание функции осуществляется табличным перечислением значений аргумента $x_1, x_2, ..., x_n$ и соответствующих им значений функции $y_1, y_2, ..., y_n$.

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

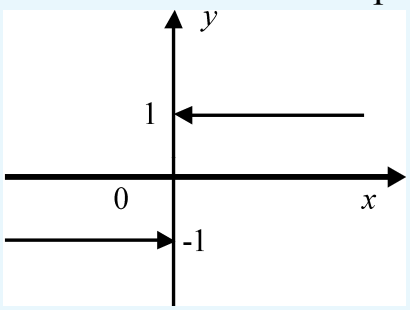
Программный — составлена компьютерная программа, реализующая алгоритм вычисления значения функции $y = f(x)$ по заданному значению аргумента x из некоторого множества X.

Словесный — область определения X, область значений Y и правило f описаны словами.

Примеры:

1) функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \text{ рациональное число} \\ 0, \text{ если } x \text{ иррациональное число}; \end{cases}$$



2) функция «знак числа»

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 . \end{cases}$$

Грани функций

Понятие граней числовой функции $f : X \to Y$ определяется исходя из множества ее значений $f(X)$.

Например, функция *ограничена сверху*, если таковым является множество $f(X)$, т. е. существует число M такое, что $f(x) \le M$ для всех точек $x \in X$. Геометрически это означает, что весь график функции f лежит не выше прямой $y = M$.

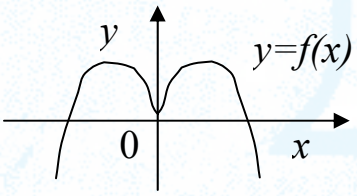
Аналогично, *точной верхней гранью функции* f на множестве X называется $\sup f(X)$, который обозначается также $\sup\limits_{x \in X} f(x)$.

Четные, нечетные, периодические, монотонные функции

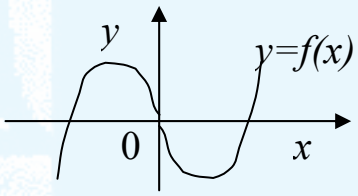
Множество $X \subset R$ называется *симметричным относительно нуля*, если из включения $x \in X$ следует включение $-x \in X$.

Функция $f(x)$, заданная на симметричном относительно нуля множестве X, называется *четной*, если $f(-x) = f(x)$ для любого $x \in X$. График четной функции симметричен относительно оси О*y*.

Функция $f(x)$, заданная на симметричном относительно нуля множестве X, называется *нечетной*, если $f(-x) = -f(x)$ для любого $x \in X$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.



четная функция



нечетная функция

Функция $f(x)$, заданная на множестве X, называется *периодической с периодом* $T > 0$, если для любого $x \in X$ также и $x \pm T \in X$, при этом выполнено равенство $f(x \pm T) = f(x)$.

Функция $f(x)$ *возрастает (убывает) на множестве* X, если для любых точек $x_1, x_2 \in X$ с условием $x_1 < x_2$ выполнено $f(x_1) \le f(x_2)$ ($f(x_1) \ge f(x_2)$).

Возрастающая или убывающая функция называется *монотонной*.

Элементарные функции

Сначала выделяются *основные элементарные функции*. К ним относятся: $y = C$, $y = x^{\alpha}$, $y = a^x$, $y = \log_a x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Элементарные функции образуются из них путем конечного числа арифметических действий и операции образования сложной функции.

Классификация элементарных функций

Элементарные функции подразделяются на следующие классы:

- *Многочлены (полиномы)* — $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$.
- *Рациональные функции* — $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где P и Q — многочлены.

В частности, *дробно-рациональные функции* — $R(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

- *Иррациональные функции* — не являющиеся рациональными функции, получаемые из функций $y = C$ и $y = x^{\alpha}$ (α — рациональное число) путем конечного числа арифметических действий и операции образования сложной функции.
- *Трансцендентные функции* — все остальные элементарные функции.

Типовые задачи и алгоритмы их решения

Пример 6. Найти область определения функции $y = \lg\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$.

Решение. Записываем ограничения на переменные. Во-первых, знаменатель не может обращаться в нуль, во-вторых, величина под логарифмом должна быть строго больше нуля.

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ \sin\dfrac{\pi}{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \dfrac{\pi}{x} \in (2\pi k, \pi + 2\pi k), k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \dfrac{1}{x} \in (2k, 2k+1), k \in Z \end{cases}.$$

Таким образом, $D(y) = \{x : x \in (1, +\infty) \cup \bigcup\limits_{k \in Z, k \neq 0} (\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k})\}$.

Пример 7. Найти область определения функции $y = \arccos(2\sin x)$.

Решение. Аргумент арккосинуса должен быть по абсолютной величине меньше единицы. Таким образом, имеем ограничение:

$$-1 \leq 2\sin x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \sin x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in [-\frac{\pi}{6} + \pi k, \frac{\pi}{6} + \pi k], k \in Z.$$

Окончательно, ответ:

$$D(y) = \bigcup_{k \in Z} [-\frac{\pi}{6} + \pi k, \frac{\pi}{6} + \pi k].$$

Пример 8. Найти $\sup A$ и $\inf A$, если $A = \{n \in Z : n^3 < 100\}$.

Решение. Решая неравенство $n^3 < 100$, заключаем, что $n < \sqrt[3]{100} = 4,64...$ Так как по условию число n — целое, то получаем $A = \{4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, ...\}$.

Ответ: $\sup A = 4, \quad \inf A = -\infty$.

Пример 9. Найти предельные точки множества $A = \{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in N\}$.

Решение. При четных $n = 2k$ точки множества A имеют вид $1 + \frac{1}{2k}$ и накапливаются к точке 1. При нечетных $n = 2k+1$ имеют вид $-1 + \frac{1}{2k+1}$ и накапливаются к точке –1. Таким образом, множество A имеет две предельные точки: 1 и –1.

Резюме

Рассмотрены множества и действия над ними, понятие точных граней множества, элементарные функции и их основные свойства.

Глава 2. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Пристальное, глубокое изучение природы есть источник самых плодотворных открытий математики.
Ж. Фурье

Цели и задачи

Сформировать представление о понятии предела последовательностей и функций, непрерывных функциях и их свойствах.

Знать свойства операции предельного перехода, замечательные пределы, теоремы о числовых последовательностях (теорема Больцано–Вейерштрасса, критерий Коши), теоремы о непрерывных функциях (теорема Вейерштрасса, Больцано–Коши).

Уметь вычислять пределы последовательностей и функций, находить асимптоты, применять теоремы для исследования свойств функций.

§ 1. Понятие числовой последовательности

Числовая последовательность — это числовая функция, определенная на множестве натуральных чисел N.

Последовательность задана, если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое число x_n — *общий член* последовательности.

Последовательность записывается в строчку $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ либо используется краткая запись $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\{x_n\}$ или (x_n).

Примеры: $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, ..., \frac{(-1)^n}{n}, ...$; $\{2\}_{n=1}^{\infty} = 2,2,2,2,....$

Поскольку последовательность — это частный случай функции, то здесь сохраняют силу все определения. Например последовательность $\{x_n\}$ *не убывает*, если $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n \le ...$; *ограничена сверху*, если существует число M такое, что $x_n \le M$ для всех $n = 1,2,3,...$; *ограничена*, если существует число $K > 0$ такое, что $|x_n| \le K$ для всех номеров n и т. д. Точная верхняя грань последовательности обозначается либо $\sup\limits_{n \in N} x_n$, либо просто $\sup\{x_n\}$.

§ 2. Предел числовой последовательности

Аналитическое описание предела

Число a называется *пределом числовой последовательности* $\{x_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех членов последовательности с номерами $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Обозначения: $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ (читается «a равно предел x_n при n стремится к бесконечности); $x_n \to a$, $n \to \infty$ (читается x_n стремится к a при n стремится к бесконечности).

Пример 1. Покажем, что последовательность $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ имеет своим пределом число 1.

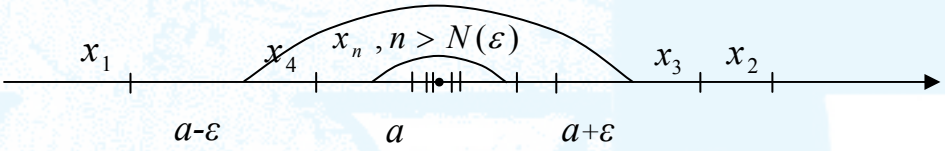
Возьмем любое число $\varepsilon > 0$. Так как $|x_n - 1| = \left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| = \dfrac{1}{n+1}$, то для отыскания значений n, удовлетворяющих неравенству $|x_n - 1| < \varepsilon$, достаточно решить неравенство $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$. Получим $n > \dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$, следовательно, в качестве N можно взять любое число, большее $\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$. Тогда неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$ будет выполняться при всех $n > N$. Поскольку ε было выбрано произвольно, то этим доказано, что 1 есть предел последовательности $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Геометрическое описание предела

Числовую последовательность $\{x_n\}$ будем рассматривать как последовательность точек числовой прямой. Так как неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ равносильно неравенствам $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, то определение предела допускает следующую геометрическую интерпретацию: точка a будет пределом последовательности точек $\{x_n\}$, если для любой окрестности $U(a,\varepsilon) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ точки a найдется такое число N,

что все точки последовательности $\{x_n\}$ с номерами $n > N$ попадут в заданную окрестность. При этом за пределами окрестности $U(a,\varepsilon)$ может оказаться разве лишь конечное число членов последовательности.

Если выбрать $\varepsilon' < \varepsilon$, то окрестность $U(a,\varepsilon') \subset U(a,\varepsilon)$. Следовательно, в нее попадут точки последовательности, начиная с более высокого номера.



Сходящиеся и расходящиеся последовательности

Если числовая последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, то она называется *сходящейся*, в противном случае — *расходящейся*.

Пример 2. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ Здесь $x_n = \frac{1}{2^n}$. Проверим, что последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$. Для этого, выбирая произвольное число $\varepsilon > 0$, мы должны указать число N такое, что для всех $n > N$ выполнено $|\frac{1}{2^n} - 0| < \varepsilon$. Нетрудно увидеть, что подойдет $N = \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$. Действительно, неравенство $n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$ равносильно условию $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Отметим, что число $N(\varepsilon)$ определено не однозначно. Например, подойдет $N = \log_2 \frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{3}$.

Пример 3. $x_n = \frac{\sin n}{2^n}$. Поскольку $|x_n| \le \frac{1}{2^n}$, то последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. При этом в качестве N можно выбрать то же значение, что и в примере 1.

Пример 4. $x_n = (-1)^n$. Последовательность имеет вид –1, 1, –1, 1, –1, 1, … Она расходится, т. к. любая точка $a \in R$ имеет окрестность, за пределами которой лежит бесконечно много членов данной последовательности.

Бесконечные пределы последовательности

Пополнение числовой прямой бесконечными точками $+\infty$, $-\infty$ и ∞ позволяет несколько расширить понятие предела, приписав некоторым расходящимся последовательностям бесконечный предел. Это возможно в следующих трех случаях.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если для любого числа M найдется число N такое, что для всех номеров $n > N$ выполнено неравенство $x_n > M$.

Геометрически это означает, что «почти вся» (т. е. вся, за исключением конечного числа членов) последовательность $\{x_n\}$ лежит в любой наперед заданной окрестности $+\infty$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, если для любого числа P найдется число N такое, что для всех номеров $n > N$ выполнено неравенство $x_n < P$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, если $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$.

Последовательность с бесконечным пределом называют *бесконечно большой*, а последовательность с нулевым пределом — *бесконечно малой*.

Теорема 1. *Последовательность $\{x_n\}$ с отличными от нуля членами является бесконечно большой тогда и только тогда, когда последовательность $\{1/x_n\}$ является бесконечно малой.*

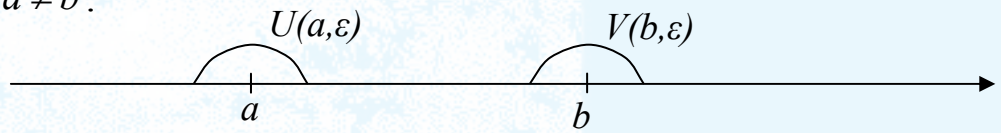
Доказательство этой теоремы оставляем читателю.

§ 3. Основные свойства операции предельного перехода

Единственность предела

Теорема 2. *Сходящаяся последовательность имеет только один предел.*

Доказательство. От противного. Предположим, что сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ имеет два различных предела $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $a \neq b$.



Выберем число $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы ε-окрестности $U(a,\varepsilon) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ и $V(b,\varepsilon) = (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ точек a и b не пересекались. Для этого достаточно взять, например, $\varepsilon = |b-a|/3$.

Согласно определению предела найдется число N_1 такое, что для всех номеров $n > N_1$ выполнено $x_n \in U(a,\varepsilon)$, и число N_2 такое, что для всех номеров $n > N_2$ выполнено $x_n \in V(b,\varepsilon)$. Обозначим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда при $n > N$ выполнены оба включения, следовательно, $x_n \in U(a,\varepsilon) \cap V(b,\varepsilon)$, а это противоречит условию $U \cap V = \varnothing$.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Предел конечно-измененной последовательности

Теорема 3. *Изменение значений у конечного числа членов последовательности не влияет ни на ее свойство быть сходящейся или расходящейся, ни на величину ее предела.*

Доказательство. Пусть из последовательности

(1) $x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_n, ...$

путем изменения значений у первых k членов получена последовательность

(2) $x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*, x_{k+1}, ..., x_n, ...$.

Очевидно, что и наоборот, (1) может быть получена из (2) тем же способом.

Пусть (1) сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется N_1 такое, что для всех $n > N_1$ выполнено $|x_n - a| < \varepsilon$ (*). Положим $N = \max\{k, N_1\}$, тогда неравенство (*) выполнено и для всех $n > N$. Но при таких n члены обеих последовательностей совпадают, а значит и для (2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Меняя местами (1) и (2), получим, что справедливо и обратное утверждение.

Ограниченность сходящейся последовательности

Теорема 4. *Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Выберем $\varepsilon_0 = 1$. Найдется натуральное число N такое, что для всех номеров $n > N$ выполнено $|x_n - a| < 1$. Отсюда по основному модульному неравенству получим $|x_n| - |a| < 1$, т. е. $|x_n| < |a| + 1$. Обозначим $K = \max\{x_1, x_2, ..., x_N, |a| + 1\}$. Тогда для всех $n = 1,2,...$ будет справедлива оценка $|x_n| \le K$, что и означает ограниченность последовательности $\{x_n\}$.

Свойство устойчивости

Теорема 5. *Пусть последовательность* $\{x_n\}$ *сходится,* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *и* $a < p$. *Тогда найдется число* N *такое, что для всех номеров* $n > N$ *выполнено неравенство* $x_n < p$.

Доказательство. Выберем число $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы было выполнено неравенство $a + \varepsilon < p$ (например, $\varepsilon = (p - a)/2$). Тогда, т. к. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, существует число N такое, что при всех $n > N$ выполнено неравенство $a - \varepsilon < \underline{x_n} < a + \varepsilon < \underline{p}$. Из подчеркнутого следует утверждение теоремы.

Предел стационарной последовательности

Теорема 6. *Если* $x_n = c$, $n = 1,2,...$, *то и* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

Доказательство. Действительно для любого $\varepsilon > 0$ неравенство $|x_n - c| < \varepsilon$ выполняется при всех $n = 1,2,...$

Последовательность $\{x_n\}$ с $x_n = const$ называется *стационарной*.

Предел модуля

Теорема 7. *Если последовательность* $\{x_n\}$ *сходится и* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, *то последовательность* $\{|x_n|\}$ *тоже сходится и* $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.

Для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число N такое, что для всех номеров $n > N$ выполнено $|x_n - a| < \varepsilon$. По основному модульному неравенству для таких n будет выполнено также и неравенство $||x_n| - |a|| \le |x_n - a| < \varepsilon$, которое доказывает теорему.

Предельный переход в неравенствах

Теорема 8. *Если последовательности* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ *сходятся и* $x_n \le y_n$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Согласно определению предела, найдутся число N_1 такое, что при всех $n > N_1$ будет выполнено $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, и число N_2 такое, что при всех $n > N_2$ будет выполнено $b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon$. Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда при $n > N$ будут выполнены оба неравенства, откуда последовательно получаем:

$\underline{a - \varepsilon} < x_n \le y_n < \underline{b + \varepsilon}$.

Из подчеркнутого следует $a - b < 2\varepsilon$. Так как ε было выбрано произвольно, то это возможно, только если $a - b \le 0$, т. е. $a \le b$, что и требовалось доказать.

Свойство линейности

Теорема 9. *Если последовательности* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ *сходятся и* α, β — *любые числа, то последовательность* $\{\alpha x_n + \beta y_n\}$ *тоже сходится и*

$\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \beta \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Доказательство. Если $|\alpha| + |\beta| = 0$, то $\alpha = \beta = 0$ и утверждение теоремы тривиально. Поэтому считаем, что $|\alpha| + |\beta| > 0$.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число N такое, что для всех номеров $n > N$ выполнены неравенства $|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta|}$, $|y_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta|}$. При таких n имеем

$$\underline{|(\alpha x_n + \beta y_n) - (\alpha a + \beta b)|} = |\alpha(x_n - a) + \beta(y_n - b)| \le |\alpha| \cdot |x_n - a| + |\beta| \cdot |y_n - b| <$$

$$< |\alpha| \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta|} + |\beta| \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta|} = \underline{\varepsilon}.$$

Подчеркнутое и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \beta \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Предельный переход в произведении и частном

Теорема 10. *Если последовательности* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ *сходятся, то последовательность* $\{x_n y_n\}$ *тоже сходится и* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. *Если дополнительно* $y_n \neq 0$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, *то сходится и последовательность* $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$, *причем* $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim x_n}{\lim y_n}$.

Доказательство. Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, $b \neq 0$. Докажем сначала, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ab$. Заметим, что

$$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab| \le |x_n y_n - x_n b| + |x_n b - ab| =$$
$$= |x_n| \cdot |y_n - b| + |b| \cdot |x_n - a|.$$

Последовательность $\{x_n\}$ сходится, поэтому она ограничена. Следовательно, существует число $K > 0$ такое, что $|x_n| < K$, $n = 1,2,\ldots$, и $|b| < K$. Для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число N такое, что при $n > N$ выполнены неравенства $|x_n - a| < \varepsilon/2K$ и $|y_n - b| < \varepsilon/2K$. Для таких номеров $n > N$ имеем оценку

$$|x_n y_n - ab| \le K \cdot |y_n - b| + |b| \cdot |x_n - a| < K \cdot \varepsilon/2K + K \cdot \varepsilon/2K = \varepsilon,$$

которая и доказывает наше утверждение.

Теперь докажем равенство $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim x_n}{\lim y_n}$. Для этого заметим, что

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{x_n b - a y_n}{y_n b}\right| = \left|\frac{x_n b - ab + ab - a y_n}{y_n b}\right| \le \frac{|x_n b - ab| + |ab - a y_n|}{|y_n| \cdot |b|} =$$
$$= \frac{1}{|y_n|} \cdot |x_n - a| + \frac{1}{|y_n|} \cdot \frac{|a|}{|b|} \cdot |y_n - b|.$$

Покажем, что числовая последовательность $\left\{\dfrac{1}{y_n}\right\}$ ограничена. Действительно, из условия $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ следует $\lim\limits_{n\to\infty} |y_n| = |b| > 0$. По свойству устойчивости найдется натуральное число N такое, что для всех номеров $n > N$ выполнено неравенство $|y_n| > \dfrac{|b|}{2}$, равносильное неравен-

ству $\frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|b|}$. Обозначив $K = \max\{\frac{1}{|y_1|},...,\frac{1}{|y_N|},\frac{2}{|b|}\}$, получим нужную нам оценку $\left|\frac{1}{y_n}\right| \le K$, справедливую для всех номеров $n = 1,2,...$

Обозначим $K_1 = \max\{K, K \cdot \frac{|a|}{|b|}\}$. Для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число N_1 такое, что при $n > N_1$ выполнены неравенства $|x_n - a| < \varepsilon/2K_1$ и $|y_n - b| < \varepsilon/2K_1$. Для таких номеров $n > N_1$ имеем оценку

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = K_1 \cdot |x_n - a| + K_1 \cdot |y_n - b| < K_1 \cdot \varepsilon/2K_1 + K_1 \cdot \varepsilon/2K_1 = \varepsilon,$$

которая и означает, что $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}$.

§ 4. Предел монотонной последовательности

Предел неубывающей последовательности

Теорема 11. *Если последовательность* $\{x_n\}$ *не убывает и ограничена сверху, то она сходится и* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}$.

Доказательство. По теореме о точной верхней грани определено число $a = \sup\{x_n\}$. Согласно определению $\sup$, для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется точка $x_{n_0} > a - \varepsilon$. Так как последовательность $\{x_n\}$ не убывает, то и для всех номеров $n > n_0$ будет выполнено $x_n \ge x_{n_0} > a - \varepsilon$. Остается заметить, что для всех членов последовательности выполнено $x_n \le a < a + \varepsilon$. Итак, при $n > n_0$ имеют место неравенства $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, а это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Число *e*

Обозначим через S_n конечную сумму $S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Здесь $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$ (читается «n факториал»). Рассмотрим числовую

последовательность $\{S_n\}$. Данная последовательность является возрастающей и ограничена сверху. Для доказательства ограниченности заметим, что

$$S_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3 .$$

По теореме о существовании предела неубывающей последовательности существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = e = 2{,}7182818284590\ldots$, который называется *экспонентой*.

Теорема 12. *Существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$.

Доказательство. Согласно биному Ньютона

$$T_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{n!}\frac{1}{n!} =$$

$$1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) <$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{n!} = S_n ,$$

т. е. $T_n < S_n < 3$. Далее заметим, что последовательность $\{T_n\}$ монотонно возрастает (в самом деле, T_{n+1} получается из T_n заменой множителей $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$ большими множителями $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)$ и прибавлением нового положительного последнего члена). Значит, существует $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$. Чтобы доказать равенство $T = e$, заметим, что во всяком случае $T_m > 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)$ для значений $m > n$. Не изменяя n, заставим теперь m неограниченно возрастать. По теореме о предельном переходе в неравенствах будем иметь $T \ge S_n$. Таким образом, $T \ge S_n > T_n$. Устремляя здесь n к бесконечности, получим $T \ge e \ge T$, т. е. $T = e$, что и требовалось доказать.

Логарифмы с основанием e называются *натуральными* и обозначаются $\log_e a = \ln a$, $\ln a = \frac{\lg a}{\lg e}$.

§ 5. Подпоследовательности и частичные пределы

Понятие подпоследовательности

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ (1)

Зафиксировав какую-либо строго возрастающую последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$, отметим в последовательности (1) элементы с номерами $n_1, n_2, \dots$ и запишем их в строчку. Получим новую последовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} = x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$, которая называется *подпоследовательностью* исходной последовательности (1).

Частичные пределы последовательности

Пределы подпоследовательностей (возможно и бесконечные) называются *частичными пределами* последовательности $\{x_n\}$.

Пример 5. $x_n = (-1)^n$, $n = 1,2,\dots$ Последовательность имеет вид $-1,\ 1, -1,\ \dots$ Она, как мы уже видели, расходится, однако подпоследовательность с нечетными номерами $x_{2k-1} = -1$, $k = 1,2,\dots$ сходится и $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = -1$. Аналогично $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = 1$. Нетрудно убедиться, что других частичных пределов данная последовательность не имеет.

Теорема 13. *Любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу.*

Доказательство. Пусть $\{x_{n_k}\}$ — подпоследовательность сходящейся последовательности $\{x_n\}$. После некоторого номера N для любого $\varepsilon > 0$ все x_n удовлетворяют неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$, где $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Тогда и все x_{n_k} удовлетворяют этому неравенству для всех $n_k > N$, что и доказывает теорему.

Верхний и нижний предел последовательности

Обозначим через C множество всех частичных пределов последовательности $\{x_n\}$. Далее мы увидим, что это множество всегда не пусто.

Нижним пределом последовательности $\{x_n\}$ называется число $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \inf C$.

Верхним пределом последовательности $\{x_n\}$ называется число $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \sup C$.

Пример 6. $x_n = (-1)^n$, $n = 1,2,...$ Здесь $C = \{-1, 1\}$, поэтому $\underline{\lim}_{n\to\infty}(-1)^n = -1$, $\overline{\lim}_{n\to\infty}(-1)^n = 1$.

Пример 7. $x_n = \dfrac{1}{n}$, $n = 1,2,...$ Здесь $C = \{0\}$, поэтому $\underline{\lim}_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = \overline{\lim}_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 14. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ *тогда и только тогда, когда* $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = a$.

Доказательство предоставляем читателю.

§ 6. Основные теоремы о последовательностях

Теорема о пределе промежуточной последовательности

Теорема 15. *Пусть даны три последовательности* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{a_n\}$, *которые при всех* $n = 1,2,...$ *удовлетворяют неравенствам* $x_n \le a_n \le y_n$. *Если последовательности* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ *сходятся к одному пределу* $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a$, *то промежуточная последовательность* $\{a_n\}$ *сходится к этому же пределу* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Доказательство. Из определения предела следует, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число N такое, что для всех номеров $n > N$ выполнены неравенства $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ и $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$. Отсюда имеем $\underline{a - \varepsilon} < x_n \le \underline{a_n} \le y_n < \underline{a + \varepsilon}$. Подчеркнутое означает, что $\lim a_n = a$.

Эту теорему иногда в шутку называют «принципом двух милиционеров» — милиционеры $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ под руки ведут нарушителя $\{a_n\}$ в отделение a.

Принцип Кантора о вложенных отрезках

Теорема 16. *Если имеется последовательность вложенных отрезков* $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset ...$, *длины которых* $b_n - a_n$ *стремятся*

к нулю, то существует единственная точка ξ, принадлежащая одновременно всем отрезкам $\xi \in \bigcap_{i=1}^{\infty}[a_i, b_i]$.

Доказательство. Рассмотрим два числовых множества $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ и $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m, \dots\}$. Нетрудно увидеть, что $A \le B$, т. е. $a_n \le b_m$ для любых номеров n и m. Для этого достаточно разобрать три возможных случая взаимного расположения отрезков $[a_n, b_n]$ и $[a_m, b_m]$.

1) $n = m \Rightarrow a_n < b_n$,

2) $n < m \Rightarrow [a_n, b_n] \supset [a_m, b_m] \Rightarrow \underline{a_n} \le a_m < \underline{b_m}$,

3) $n > m \Rightarrow [a_n, b_n] \subset [a_m, b_m] \Rightarrow \underline{a_n} < b_n \le \underline{b_m}$.

По аксиоме непрерывности существует точка ξ такая, что $A \le \xi \le B$, т. е. $a_n \le \xi \le b_m$ для любых n и m. В частности, при $n = m$ получим $a_n \le \xi \le b_n$, и существование точки ξ доказано.

Единственность почти очевидна. В самом деле, пусть ξ_1, ξ_2 — две точки, принадлежащие всем отрезкам $[a_n, b_n]$. Тогда $0 \le |\xi_1 - \xi_2| \le b_n - a_n$ для всех $n = 1,2,\dots$ Устремляя здесь n к бесконечности и учитывая, что $b_n - a_n \to 0$, получим $|\xi_1 - \xi_2| = 0$, т. е. $\xi_1 = \xi_2$, и единственность тоже доказана.

Принцип Больцано–Вейерштрасса о сходящейся подпоследовательности

Теорема 17. *Всякая ограниченная последовательность содержит в себе сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена. Тогда найдется отрезок $[a, b]$, целиком ее содержащий, $\{x_n\} \subset [a, b]$.

Покажем, что существует точка $\xi \in [a, b]$, в любой окрестности $U(\xi)$ которой содержится бесконечно много членов из $\{x_n\}$.

Предполагая противное, мы должны констатировать, что для любой точки $t \in [a, b]$ найдется ее окрестность $V(t)$, содержащая разве лишь конечное число членов из $\{x_n\}$. Таким образом, мы имеем систему интервалов $\Sigma = \{V(t)\}_{t \in [a,b]}$, образующую покрытие отрезка $[a, b]$.

По лемме о покрытиях, существует конечная подсистема интервалов $\Sigma' = \{V(t_1), V(t_2), \dots, V(t_p)\}$, также покрывающая отрезок$[a, b]$. Поскольку каждый из этих интервалов содержит конечное число членов последовательности $\{x_n\}$, то и весь отрезок $[a, b]$ содержит разве лишь конечное число членов из $\{x_n\}$. Но это противоречит включению $\{x_n\} \subset [a,b]$.

Полученное противоречие показывает, что наше предположение было неверно. Итак, существует точка $\xi \in [a, b]$, в любой окрестности $U(\xi)$ которой содержится бесконечно много членов из $\{x_n\}$.

Используя этот факт, мы легко выделим из последовательности $\{x_n\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$.

Для этого рассмотрим последовательность окрестностей точки ξ, диаметры которых стремятся к нулю $U_k(\xi) = (\xi - 1/k, \xi + 1/k)$, $k = 1,2,\dots$

В интервале $U_1(\xi)$ выберем точку x_{n_1}.

В интервале $U_2(\xi)$ выберем точку x_{n_2} с номером $n_2 > n_1$. Это возможно, т. к. $U_2(\xi)$ содержит бесконечно много членов из $\{x_n\}$.

…

В интервале $U_k(\xi)$ выберем точку x_{n_k} с номером $n_k > n_{k-1}$. Это возможно по той же причине.

…

Продолжая подобные построения бесконечно, мы получим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такую, что для всех номеров $k = 1,2,\dots$ выполнены неравенства $\xi - 1/k < x_{n_n} < \xi + 1/k$, означающие ее сходимость к точке ξ.

Теорема доказана.

Замечание 1. Если последовательность $\{x_n\}$ не ограничена, например, сверху, то легко построить ее подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, для которой $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = +\infty$. Следовательно, какой бы ни была последовательность $\{x_n\}$, множество ее частичных пределов всегда не пусто.

Фундаментальные последовательности и критерий Коши

Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной*, или *последовательностью Коши*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ най-

дется число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех номеров $n > N$ и любых чисел $p = 1,2,...$ выполнено неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

Теорема 18 (критерий Коши). *Числовая последовательность* $\{x_n\}$ *сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Доказательство. Сначала докажем необходимость условия фундаментальности. Именно, пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится. Покажем, что она фундаментальна.

Обозначим $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Выбрав произвольно число $\varepsilon > 0$, найдем число N такое, что при всех $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon/2$. Тогда для любого числа $p = 1,2,...$ также будет выполнено $|x_{n+p} - a| < \varepsilon/2$. Следовательно, при всех $n > N$ и $p = 1,2,...$ имеем

$$\underline{|x_{n+p} - x_n|} = |x_{n+p} - a + a - x_n| \le |x_{n+p} - a| + |x_n - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \underline{\varepsilon}.$$

Подчеркнутое означает, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна.

Теперь докажем достаточность, т. е. если последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, то она сходится.

Покажем сначала, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена. По определению фундаментальности, для $\varepsilon_0 = 1$ найдется номер n_0 такой, что для любых чисел $p = 1,2,...$ выполнены неравенства $|x_{n_0+p} - x_{n_0}| < 1$. Отсюда, используя основное модульное неравенство, заключаем $|x_{n_0+p}| - |x_{n_0}| < 1$, т. е. $|x_{n_0+p}| < |x_{n_0}| + 1$ для любых $p = 1,2,...$ Обозначив

$$K = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_{n_0-1}|, |x_{n_0}| + 1\},$$

получим, что $|x_n| \le K$ при всех $n = 1,2,...$, и ограниченность последовательности $\{x_n\}$ доказана.

По принципу Больцано–Вейерштрасса из последовательности $\{x_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Обозначим $a = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$.

Из определений предела и фундаментальности следует, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся число N_1 такое, что при $n_k > N_1$ выполнено неравенство $|x_{n_k} - a| < \varepsilon/2$ и число N_2 такое, что при всех $p, q > N_2$ выполнено неравенство $|x_p - x_q| < \varepsilon/2$. Полагая $N = \max\{N_1, N_2\}$ и выбирая произвольно номер $n_k > N$ (это возможно,

т. к. $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$), получим, что для всех номеров $n > N$ будет выполнено неравенство

$$|x_n - a| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - a| \le |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

которое и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Теорема доказана.

§ 7. Замечательные (важнейшие) пределы

Теорема 19. *Пусть последовательность* $x_n \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Имеют место следующие предельные равенства.*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin x_n}{x_n} = 1$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a (1 + x_n)}{x_n} = \log_a e$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^{x_n} - 1}{x_n} = \ln a$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1 + x_n)^{\mu} - 1}{x_n} = \mu$.

Доказательство. Равенство 1 доказывается геометрически. Оно выражает собой тот факт, что отношение длины дуги окружности к длине, стягивающей ее хорды, стремится к 1, когда соответствующий центральный угол неограниченно уменьшается.

Равенство 2 нами уже было установлено для частного случая $x_n = 1/n$.

Равенство 3 можно обосновать так:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a (1 + x_n)}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \log_a (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = \log_a \lim_{n\to\infty} (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = \log_a e.$$

Сомнения, вызванные законностью перестановки символов lim и log, рассеются, когда будет изучена тема «Непрерывные функции».

Равенство 4:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{x_n} - 1}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{x_n} - 1}{\log_a [1 + (a^{x_n} - 1)]} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a.$$

Наконец, равенство 5:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1 + x_n)^{\mu} - 1}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\mu \ln(1 + x_n)} - 1}{\mu \ln(1 + x_n)} \cdot \mu \cdot \frac{\ln(1 + x_n)}{x_n} = \mu.$$

Здесь предполагается $\mu \ne 0$. В случае $\mu = 0$ равенство 5 тривиально.

§ 8. Сравнение последовательностей

Последовательность, бесконечно малая относительно другой последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно малой относительно последовательности* $\{y_n\}$ и обозначается $x_n = o(y_n)$, если существуют последовательность $\{\alpha_n\}$ и номер n_0 такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ и $x_n = \alpha_n \cdot y_n$ для всех $n \geq n_0$.

Если $y_n \neq 0$ при всех $n = 1, 2, \ldots$, то условие $x_n = o(y_n)$ эквивалентно равенству $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 0$.

Важные примеры сравнения роста последовательностей

Теорема 20. *Имеют место следующие предельные равенства:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a n}{n^\mu} = 0$, т. е. $\log_a n = o(n^\mu)$, где $\mu > 0$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^\mu}{a^n} = 0$, т. е. $n^\mu = o(a^n)$, где $|a| > 1$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$, т. е. $a^n = o(n!)$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$, т. е. $1 = 0(\sqrt[n]{n!})$.

Эквивалентные последовательности и их применение для вычисления пределов

Последовательность $\{x_n\}$ *эквивалентна последовательности* $\{y_n\}$ и обозначается $x_n \approx y_n$, если существуют последовательность β_n и номер n_0 такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 1$ и $x_n = \beta_n \cdot y_n$ для всех $n \geq n_0$.

Если $y_n \neq 0$ при всех $n = 1, 2, \ldots$, то условие $x_n \approx y_n$ эквивалентно равенству $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 1$.

Теорема 21. $x_n \approx y_n$ *тогда и только тогда, когда* $x_n = y_n + o(y_n)$.

Доказательство. В самом деле, условие $x_n \approx y_n$ означает, что $x_n = \beta_n \cdot y_n$ при $n \geq n_0$, с $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 1$. Последовательность β_n может быть представлена в виде $\beta_n = 1 + \alpha_n$, с $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Следовательно, $x_n = y_n + \alpha_n \cdot y_n$ при $n \geq n_0$, т. е. $x_n = y_n + o(y_n)$.

При вычислении пределов сомножители можно заменять на эквивалентные величины. Действительно, пусть $x_n \approx \alpha_n$. Тогда

$$\underline{\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\alpha_n} \cdot \frac{\alpha_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\alpha_n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{y_n} = \underline{\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{y_n}}.$$

Таблица эквивалентных последовательностей

Теорема 22. *Пусть последовательность* $x_n \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Имеют место следующие эквивалентности:*

1) $a^{x_n} \approx 1$, где $a > 0$;
2) $x_n^{x_n} \approx 1$, где $x_n > 0$. В частности, $\sqrt[n]{n} \approx \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} \approx 1$;
3) $\sin x_n \approx \operatorname{tg} x_n \approx \ln(1 + x_n) \approx e^{x_n} - 1 \approx x_n$;
4) $(1 + x_n)^{\mu} - 1 \approx \mu x_n$;
5) $(1 + \alpha x_n)^{1/x_n} \approx e^{\alpha}$;
6) $n! \approx \sqrt{2\pi n}\ n^n e^{-n}$ (формула Стирлинга).

§ 9. Предел числовой функции

Предел по Гейне (на языке последовательностей)

Пусть функция $f(x)$ задана на некотором множестве $E \subset R$, для которого точка x_0 является предельной (т. е. в любой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 найдется точка $x \in E$, отличная от x_0). Заметим, что точка x_0 может как принадлежать, так и не принадлежать множеству E.

Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0 *относительно множества* E и обозначается $A = \lim\limits_{x\to x_0,\, x\in E} f(x)$, если для любой

последовательности $\{x_n\}$ точек $x_n \in E$, удовлетворяющей условиям $x_n \neq x_0$, $n=1,2,...$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Замечание 2. В том случае, когда множество E является проколотой окрестностью точки x_0, говорят просто о пределе в точке и обозначают его $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Пример 8. $f(x) = C \equiv const$.

Возьмем произвольную точку x_0 и последовательность точек $\{x_n\}$, удовлетворяющую условиям $x_n \neq x_0$, $n=1,2,...$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Соответствующие значения функции $f(x_n) = C$, $n=1,2,...$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} C = C$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$.

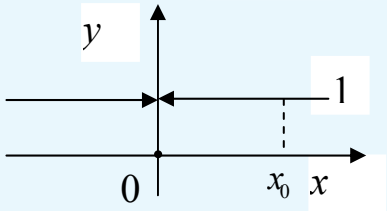
Пример 9. $f(x) = 5x+1$.

Покажем, что для любой точки x_0 будет $\lim\limits_{x\to x_0}(5x+1) = 5x_0+1$. Действительно возьмем любую последовательность точек $\{x_n\}$ с условиями $x_n \neq x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Соответствующие значения функции $f(x_n) = 5x_n+1$. Используя арифметические операции с пределами последовательности, имеем:

$$\lim_{x\to x_0}(5x_n+1) = 5\lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} 1 = 5x_0+1.$$

Пример 10.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

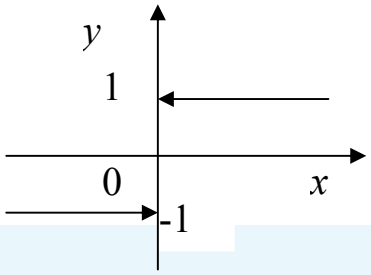


Если $x_0 \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$, т. к. для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0, значения функции $f(x_n) = 1$ при «почти всех» n.

Если $x_0 = 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$, т. к. для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к 0 и $x_n \neq 0$, значения функции $f(x_n) = 1$ при всех n. Обратим внимание на то, что предел здесь не совпадает со значением функции, и вообще в точке 0 $f(x)$ может быть даже не задана.

Пример 11.

$f(x) = \operatorname{sgn} x$ — знак числа x.



Если $x_0 \neq 0$, то при $x_0 > 0$ $\lim\limits_{x \to x_0} \operatorname{sgn} x = 1$,

при $x_0 < 0$ $\lim\limits_{x \to x_0} \operatorname{sgn} x = -1$.

Рассмотрим случай $x_0 = 0$.

Если бы предел существовал, то он был бы одинаковым как при $x_n \to 0$, $x_n > 0$, так и при $x_n \to 0$, $x_n < 0$. Но последовательность значений функции $\{\operatorname{sgn} x_n\}$ в этих случаях имеет разные пределы (в первом случае 1, во втором –1). Значит, предел $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$ не существует.

Пример 12. Функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x \text{ — рациональное число} \\ 0, \text{если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

Возьмем любую точку x_0. Выберем последовательность рациональных чисел $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$. Тогда $D(x_n) = 1$ и $\lim\limits_{n \to \infty} D(x_n) = 1$. Если же выбрать последовательность иррациональных чисел $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, то $D(x_n) = 0$ и $\lim\limits_{n \to \infty} D(x_n) = 0$. Следовательно, ни в одной точке предела нет.

Предел по Коши (на языке *ε-δ*)

Пусть функция $f(x)$ задана на множестве E, и точка x_0 является предельной для E.

Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0 *относительно множества* E и обозначается $A = \lim\limits_{x \to x_0,\, x \in E} f(x)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех точек $x \in E$, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Пример 13. Показать, что функция $f(x) = 3x–5$ имеет в точке $x=2$ предел, равный 1. Каким должно быть δ, если ε равно 1, $\frac{1}{2}$, и $\frac{1}{100}$?

Возьмем любое $\varepsilon>0$. Задача состоит в том, чтобы по ε найти такое $\delta>0$, при котором из неравенства $|x-2|<\delta$ следовало бы неравенство $|(3x-5)-1|<\varepsilon$. Последнее преобразуется к виду $|3x-6|<\varepsilon$ или $|x-2|<\varepsilon/3$. Отсюда видно, что можно взять $\delta = \varepsilon/3$. В частности, если $\varepsilon = 1$, то $\delta = 1/3$; если $\varepsilon = 1/2$, то $\delta = 1/0$; если $\varepsilon = /100$, то $\delta = 1/300$.

Эквивалентность двух определений

Теорема 23. *Определения предела функции по Гейне и по Коши эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ по Коши, т. е. для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех точек $x \in E$, удовлетворяющих условию $0 < | x - x_0 | < \delta$, выполнено неравенство $| f(x) - A | < \varepsilon$.

Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}$ точек $x_n \in E$, удовлетворяющую условиям $x_n \neq x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. По определению предела последовательности существует число N такое, что для всех номеров $n > N$ выполнено неравенство $0 < | x_n - x_0 | < \delta$. Но тогда при таких $n > N$ выполнено и неравенство $| f(x_n) - A | < \varepsilon$, означающее $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Этим доказано, что $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ по Гейне.

Пусть теперь $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ по Гейне. Покажем, что тогда выполнено и условие определения предела по Коши.

Предполагая противное, найдем число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого числа $\delta > 0$ найдется точка $x_\delta \in E$, удовлетворяющая условию $0 < | x_\delta - x_0 | < \delta$, для которой выполнено неравенство $| f(x_\delta) - A | \geq \varepsilon_0$.

Выберем последовательность значений $\delta_n \to 0$, $n \to \infty$, например, $\delta_n = 1/n$, $n = 1, 2, ...$ Соответствующую последовательность точек $\{x_{\delta_n}\}$ обозначим просто $\{x_n\}$, $x_n \equiv x_{\delta_n}$, $n = 1, 2, ...$

Последовательность $\{x_n\}$ по построению удовлетворяет условиям $x_n \in E$, $x_n \neq x_0$, и, в силу неравенства $0 < | x_n - x_0 | < \delta_n$, условию $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. В то же время соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ удовлетворяет неравенствам $| f(x_n) - A | \geq \varepsilon_0$, а

значит, соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ не имеет места. Но это противоречит заданному определению Гейне. Полученное противоречие доказывает теорему.

§ 10. Основные свойства функций, имеющих предел

Единственность предела

Теорема 24. *В данной точке функция может иметь только один предел.*

Доказательство. Пусть $A_1 = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $A_2 = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Произвольно зафиксируем последовательность $\{x_n\}$ точек $x_n \in E$, $x_n \neq x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. По Гейне, для последовательности значений функции $\{f(x_n)\}$ выполнены оба равенства $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A_1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A_2$. Но сходящаяся последовательность может иметь только один предел, значит, $A_1 = A_2$.

Локальная ограниченность функции, имеющей предел

Теорема 25. *Если функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Воспользуемся определением предела по Коши. Для $\varepsilon_0 = 1$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для всех точек $x \in E$, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполнены неравенства $|f(x) - A| < 1$, из которого следует $|f(x)| < |A| + 1$. Если в точке x_0 функция не задана, то обозначим $K = |A| + 1$, если же задана, то полагаем $K = \max\{|A| + 1, |f(x_0)|\}$. Тогда в δ-окрестности $U(x_0, \delta)$ точки x_0 будет выполнена оценка $|f(x)| \le K$. Таким образом, функция $f(x)$ ограничена в окрестности точки x_0.

Свойство устойчивости

Теорема 26. *Пусть функция* $f(x)$ *имеет предел в точке* x_0, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, *причем* $A < p$. *Тогда найдется проколотая окрестность* $\overset{\circ}{U}(x_0)$ *точки* x_0, *в которой выполнено неравенство* $f(x) < p$.

Доказательство. Выберем число $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы было выполнено неравенство $A + \varepsilon < p$. Согласно определению Коши, найдется проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}(x_0)$ точки x_0, в которой выполнено неравенство $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon < p$.

Предел модуля

Теорема 27. *Если функция* $f(x)$ *имеет в точке* x_0 *предел* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, *то функция* $|f(x)|$ *имеет предел* $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |A|$.

Доказательство. Выберем любую последовательность $\{x_n\}$ точек $x_n \in E$, $x_n \neq x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Согласно определению Гейне, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n)| = |A|$. Так как последовательность $\{x_n\}$ была произвольной, заключаем, что $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |A|$.

Предельный переход в неравенствах

Теорема 28. *Пусть для функций* $f(x)$ *и* $g(x)$ *в некоторой проколотой окрестности точки* x_0 *выполнено неравенство* $f(x) \le g(x)$. *Если* $f(x)$ *и* $g(x)$ *имеют предел в точке* x_0, *то* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Доказательство. Обозначим $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$. Выберем любую последовательность $\{x_n\}$ точек $x_n \in E$, $x_n \neq x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Согласно определению Гейне, последовательности значений $\{f(x_n)\}$ и $\{g(x_n)\}$ сходятся соответственно к A и B. Начиная с некоторого номера n_0, последовательность $\{x_n\}$ попадет в указанную в условии окрестность точки x_0, и для всех номеров $n > n_0$ будут выполнены неравенства $f(x_n) \le g(x_n)$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \le \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)$, т. е. $A \le B$.

Арифметические операции над пределами функций

Теорема 29. *Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *имеют предел в точке* x_0, *то: 1) существует предел их линейной комбинации* $\alpha f(x)+\beta g(x)$, $\alpha,\ \beta \in R$, *причем* $\lim\limits_{x\to x_0}[\alpha f(x)+\beta g(x)]=\alpha \lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\beta \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$; *2) существует предел произведения* $f(x)\cdot g(x)$, *причем* $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=$ $=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$; *3) при условии* $g(x)\neq 0$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$, *существует предел частного* $f(x)/g(x)$, *причем* $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)/g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)/\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Доказательство. Все три свойства доказываются единообразно с использованием определения предела по Гейне. Докажем, например, (3).

Выберем любую последовательность $\{x_n\}$ точек $x_n \in E$, $x_n \neq x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Тогда последовательности значений $\{f(x_n)\}$, $\{g(x_n)\}$ сходятся, причем $g(x_n)\neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)\neq 0$. По теореме о предельном переходе в частном для последовательностей отсюда следует, что последовательность $\{f(x_n)/g(x_n)\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n)/g(x_n)]=$ $=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)/\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)$. Поскольку последовательность $\{x_n\}$ была выбрана произвольно, имеем $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)/g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)/\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Теорема о пределе промежуточной функции

Теорема 30. *Пусть даны функции* $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$, *удовлетворяющие в некоторой проколотой окрестности точки* x_0 *неравенствам* $f(x)\le\varphi(x)\le g(x)$. *Если функции* $f(x)$, $g(x)$ *имеют общий предел в точке* x_0 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$, *то промежуточная функция* $\varphi(x)$ *имеет этот же предел* $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A$.

Доказательство. Выберем любую последовательность $\{x_n\}$ точек $x_n \in E$, $x_n \neq x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Согласно определению Гейне, последовательности значений $\{f(x_n)\}$ и $\{g(x_n)\}$ сходятся к общему пределу A. Начиная с некоторого номера n_0, последовательность $\{x_n\}$ попадет в

указанную в условии окрестность точки x_0, и для всех номеров $n > n_0$ будут выполнены неравенства $f(x_n) \le \varphi(x_n) \le g(x_n)$. По теореме о пределе промежуточной последовательности получим $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) = A$. Поскольку последовательность $\{x_n\}$ была выбрана произвольно, имеем $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = A$.

Критерий Коши существования предела функции

Теорема 31 (критерий Коши). *Функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0 тогда и только тогда, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых двух точек $x_1, x_2 \in E$, удовлетворяющих условиям $0 < |x_1 - x_0| < \delta$, $0 < |x_2 - x_0| < \delta$, выполнено неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.*

Доказательство. Необходимость условия без труда доказывается с использованием определения предела по Коши.

Докажем достаточность. Предполагая выполненным условие теоремы, покажем, что существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Выберем любую последовательность $\{x_n\}$ точек $x_n \in E$, $x_n \ne x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Покажем, что соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ является фундаментальной.

Выберем любое число $\varepsilon > 0$. По условию найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых двух точек $x_1, x_2 \in E$, удовлетворяющих условиям $0 < |x_1 - x_0| < \delta$, $0 < |x_2 - x_0| < \delta$, выполнено неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, то найдется число N такое, что для всех номеров $n > N$ будет выполнено неравенство $0 < |x_n - x_0| < \delta$. Следовательно, при всех $n > N$ и $p = 1, 2, \ldots$ будет выполнено $|f(x_{n+p}) - f(x_n)| < \varepsilon$, и фундаментальность доказана.

Согласно критерию Коши для последовательностей существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$. Осталось показать, что данный предел не зависит от выбора последовательности точек $\{x_n\}$. По определению Гейне, это будет означать, что существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Но если бы для двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{x_n^*\}$ пределы были различны, то для последовательности, у которой на четных местах стоят элементы $\{x_n\}$, а на нечетных — $\{x_n^*\}$, предела бы не существовало.

§ 11. Односторонние пределы функции

Понятие односторонних пределов

Будем считать, что функция $f(x)$ задана в правой полуокрестности точки x_0, т. е. на множестве $E=(x_0,b)$. Тогда предел функции $f(x)$ в точке x_0 относительно множества E называют *пределом в точке* x_0 *справа* и обозначают $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0,\, x>x_0} f(x)$.

Аналогично, считая, что функция $f(x)$ задана в левой полуокрестности точки x_0, т. е. на множестве $E=(a,x_0)$, предел функции $f(x)$ в точке x_0 относительно множества E называют *пределом в точке* x_0 *слева* и обозначают $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0,\, x<x_0} f(x)$.

Связь предела в точке с односторонними пределами

Теорема 32. *Если функция* $f(x)$ *задана в некоторой проколотой окрестности точки* x_0, *то* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ *тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A$.

Доказательство этой теоремы оставляем читателю.

§ 12. О бесконечных пределах функции

Желая определить понятие $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, когда x_0 и A могут принимать бесконечные значения, будем опираться на понятие бесконечных пределов последовательности и определение предела по Гейне. А именно, вышеприведенный символ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ означает, что для

любой последовательности точек $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, соответствующая последовательность значений функции $f(x_n) \to A$.

Пример 14. Запись $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ означает, что для любой последовательности точек $x_n \to -\infty$ соответствующая последовательность значений функции $f(x_n) \to +\infty$.

Бесконечные пределы легко определить и по Коши, используя понятие окрестностей бесконечных точек. А именно, символ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ означает, что для любой окрестности $U(A)$ точки A найдется окрестность $V(x_0)$ точки x_0 такая, что для всех точек $x \in V(x_0)$, $x \neq x_0$, выполнено $f(x) \in U(A)$.

Пример 15. Запись $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ означает, что для любого числа M найдется число P такое, что для всех точек $x < P$ выполнено $f(x) > M$.

§ 13. Замечательные пределы

Теорема 33. *Имеют место следующие предельные равенства:*

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$;

2) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1$;

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$;

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + x)^{\mu} - 1}{x} = \mu$.

Доказательство этих равенств основано на соответствующих замечательных пределах последовательностей и определении Гейне.

§ 14. Сравнение функций. *O*-символика

O-большое

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы в некоторой проколотой окрестности точки x_0.

Функция $f(x)$ называется *ограниченной относительно функции* $g(x)$ *при* $x \to x_0$ и обозначается $f(x) = O(g(x))$, $x \to x_0$, если существуют проколотая окрестность Ω точки x_0 и число $K > 0$ такие, что при всех $x \in \Omega$ выполнено неравенство $|f(x)| \le K \cdot |g(x)|$.

Если $g(x) \ne 0$ при всех $x \in \Omega$, то условие $f(x) = O(g(x))$, $x \to x_0$, эквивалентно неравенству $|f(x)/g(x)| \le K$, $x \in \Omega$.

o-малое

Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой относительно функции* $g(x)$ *при* $x \to x_0$ и обозначается $f(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$, если существуют проколотая окрестность Ω точки x_0 и функция $\alpha(x)$ в Ω такие, что $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ и $f(x) = \alpha(x) \cdot g(x)$ при всех $x \in \Omega$.

Если $g(x) \ne 0$ при всех $x \in \Omega$, то условие $f(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$ эквивалентно равенству $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)/g(x)] = 0$.

Важные примеры сравнения роста функций

Теорема 34. *Имеют место следующие предельные равенства:*

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\log_a x}{x^\mu} = 0$, т. е. $\log_a x = o(x^\mu)$, $x \to +\infty$, где $\mu > 0$;

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\mu}{a^x} = 0$, т. е. $x^\mu = o(a^x)$, $x \to +\infty$, где $a > 1$.

Доказательство этих соотношений будет дано в главе 3 § 5 «Раскрытие неопределенностей по правилу Бернулли–Лопиталя».

Эквивалентные функции

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы в некоторой проколотой окрестности точки x_0.

Функция $f(x)$ *эквивалентна функции* $g(x)$ *при* $x \to x_0$ и обозначается $f(x) \approx g(x)$, $x \to x_0$, если существуют проколотая окрестность Ω точки x_0 и функция $\beta(x)$ в Ω такие, что $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 1$ и $f(x) = \beta(x) \cdot g(x)$ при всех $x \in \Omega$.

Если $g(x) \neq 0$ при всех $x \in \Omega$, то условие $f(x) \approx g(x)$, $x \to x_0$ эквивалентно равенству $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x)/g(x)] = 1$.

Теорема 35 (критерий эквивалентности). $f(x) \approx g(x)$, $x \to x_0$ *тогда и только тогда, когда* $f(x) = g(x) + o(g(x))$, $x \to x_0$.

Доказательство этой теоремы таково же, как и в случае последовательностей.

Таблица эквивалентных функций

Теорема 36. *При* $x \to 0$ *имеют место следующие эквивалентности.*

1) $\sin x \approx x$;
2) $\operatorname{tg} x \approx x$;
3) $\arcsin x \approx x$;
4) $\operatorname{arctg} x \approx x$;
5) $1 - \cos x \approx x^2/2$;
6) $\ln(1+x) \approx x$;
7) $e^x - 1 \approx x$;
8) $(1+x)^\mu - 1 \approx \mu x$.

Разложение основных элементарных функций до первого порядка малости

Учитывая критерий эквивалентности функций, предыдущую теорему можно сформулировать следующим образом.

Теорема 37. *При* $x \to 0$ *имеют место следующие разложения.*

1) $\sin x = x + o(x)$;
2) $\operatorname{tg} x = x + o(x)$;
3) $\arcsin x = x + o(x)$;
4) $\operatorname{arctg} x = x + o(x)$;
5) $\cos x = 1 - x^2/2 + o(x^2)$;
6) $\ln(1+x) = x + o(x)$;
7) $e^x = 1 + x + o(x)$;
8) $(1+x)^\mu = 1 + \mu x + o(x)$.

В дальнейшем будут получены разложения указанных функций до любого порядка малости.

Правила действий с символами *O*-большое и *o*-малое

Теорема 38. *Имеют место следующие соотношения.*

1) *Если* $f \approx g$, *то* $o(f) = o(g)$;
2) $o(f) \pm o(f) = o(f)$;
3) $o(f) \cdot o(g) = o(fg)$;
4) $g \cdot o(f) = o(fg)$;
5) $o(cf) = o(f)$, *если* $c \equiv const$;
6) $c \cdot o(f) = o(f)$, *если* $c \equiv const$;
7) $o(o(f)) = o(f)$;
8) *Если* $f \approx g$, *то* $O(f) = O(g)$;

9) $O(f)\pm O(f)=O(f)$;

10) $O(f)\cdot O(g)=O(fg)$;

11) $g\cdot O(f)=O(fg)$;

12) $O(cf)=O(f)$, *если* $c\equiv const$;

13) $c\cdot O(f)=O(f)$ *если* $c\equiv const$;

14) $O(O(f))=O(f)$;

15) $o(O(f))=O(o(f))=o(f)$;

16) $o(f)\cdot O(g)=o(fg)$;

17) $O(f)\pm o(f)=O(f)$;

18) *Если* $g=O(1)$, *то* $o(fg)=o(f)$.

Доказательство. Докажем, например, свойство 16.

$o(f)\cdot O(g)=\alpha(x)\cdot f(x)\cdot\Lambda(x)\cdot g(x)=\alpha(x)\Lambda(x)\cdot f(x)g(x)$, где функция $\alpha=\alpha(x)\to 0$, $x\to x_0$, а функция $\Lambda=\Lambda(x)$ ограничена в некоторой проколотой окрестности точки x_0. Но тогда функция $\alpha(x)\Lambda(x)\to 0$, $x\to x_0$, следовательно $\alpha(x)\Lambda(x)\cdot f(x)g(x)=o(fg)$.

Другие свойства доказываются аналогично.

Применение разложения для вычисления пределов

В случае последовательностей было показано, что при вычислении пределов можно заменять сомножители на эквивалентные величины. Разложения, представляющие собой точные равенства, еще более расширяют вычислительные возможности. Элементарные функции, входящие в исследуемое аналитическое выражение, разлагаются до нужного порядка малости, далее, используя правила действия с символами O-большое и o-малое, проводятся максимально возможные упрощения. Наконец, если в полученном в итоге выражении в качестве сомножителя входит величина $f(x)+o(f)$, то ее заменяют просто на $f(x)$. Такие преобразования позволяют максимально упростить предел — вычислить его.

Пример 16.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-\ln\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x+o(\sin x)-\ln([1+[\cos x-1])-1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+o(x)+o(x)-(\cos x-1)-o(\cos x-1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+2o(x)-\cos x+o(x^2/2)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+o(x)-(1+o(x))+o(o(x))}{x}==\lim_{x\to 0}\frac{1+x+o(x)-1+o(x)+o(x)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+o(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1.$$

§ 15. Непрерывные функции

Непрерывность в точке

Пусть функция $f(x)$ задана на множестве E, и точка $x_0 \in E$ является предельной для E.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если в точке x_0 существует предел, равный значению функции в этой точке, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

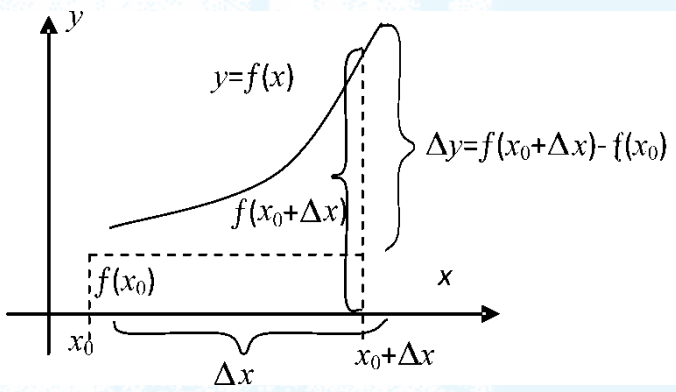
Пример 17. $f(x) = C \equiv const$ непрерывна в любой точке $x_0 \in R$.

Пример 18. $f(x) = x^2$ непрерывна в любой точке $x_0 \in R$.

Пример 19. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ непрерывна в любой точке $x_0 \neq 0$. В точке x_0 эта функция не является непрерывной, т. е. разрывна.

Заметим, что равенство $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ можно переписать в виде $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x \to x_0} x\right)$, что означает возможность предельного перехода под знаком функции. Таким образом, если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то сложная в идейном смысле операция вычисления ее предела при $x \to x_0$ заменяется более простой операцией вычисления значения $f(x_0)$.

Задача. Соответственно двум определениям предела функции дать два определения непрерывности функции: «на языке последовательностей» и на «языке $\varepsilon - \delta$».



Предположим, что аргумент x при своем изменении переходит от значения x_0 к новому значению x_1. Величина $x_1 - x_0$ называется приращением аргумента и обозначается Δx (читается дельта x). В соответствие с этим, функция $f(x)$ изменит свое значение с $f(x_0)$ на $f(x_0 + \Delta x)$.

Разность $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется приращением функции в точке x_0, вызванным приращением аргумента Δx, обозначается Δy.

Используя введенные термины, можно дать другое равносильное определение непрерывности функции в точке.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если сколь угодно малому приращению аргумента в этой точке соответствует сколь угодно малое приращение функции, т. е. из условия $\Delta x \to 0$ следует условие $\Delta y \to 0$ (в самом деле, это означает $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) - f(x_0) \right] = 0$).

Непрерывность на множестве

Функция $f(x)$ *непрерывна на множестве* E, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Односторонняя непрерывность

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0 *справа*, если предел справа в точке x_0 равен значению функции в этой точке $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0 *слева*, если предел слева в точке x_0 равен значению функции в этой точке $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.

Теорема-задача. *Функция* $f(x)$ *непрерывна в точке* x_0 *тогда и только тогда, когда она непрерывна в этой точке и справа и слева.*

§ 16. Свойства непрерывных функций

Общая характеристика свойств

Общие свойства непрерывных функций вытекают из свойств функций, имеющих предел. В ряде случаев формулировка этих свойств может быть усилена за счет того, что при непрерывности значение предела имеет вид $f(x_0)$, а вместо проколотой окрестности точки x_0 выбирается ее обычная окрестность.

Локальная ограниченность непрерывной функции

Теорема 39. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.*

Доказательство. Данное утверждение является прямым следствием теоремы о локальной ограниченности функции, имеющей предел.

Свойство устойчивости

Теорема 40. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) < p$. Тогда найдется окрестность $U(x_0)$ точки x_0, в которой выполнено неравенство $f(x) < p$.*

Доказательство. Эта теорема является следствием свойства устойчивости для функций, имеющих предел. Стоит лишь заметить, что в данном случае значение предела $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Непрерывность модуля функции

Теорема 41. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то функция $|f(x)|$ также непрерывна в точке x_0.*

Арифметические операции с непрерывными функциями

Теорема 42. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то в точке x_0 непрерывны также функции $\alpha f(x) + \beta g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ и $f(x)/g(x)$ (последняя при дополнительном условии $g(x_0) \neq 0$).*

Непрерывность сложной функции

Теорема 43. *Пусть даны две функции* $y = g(x): X \to Y$ *и* $z = f(y): Y \to Z$. *Если функция* $g(x)$ *непрерывна в точке* x_0, *а функция* $f(y)$ *— в точке* $y_0 = g(x_0)$, *то сложная функция* $z = f(g(x)): X \to Z$ *непрерывна в точке* x_0.

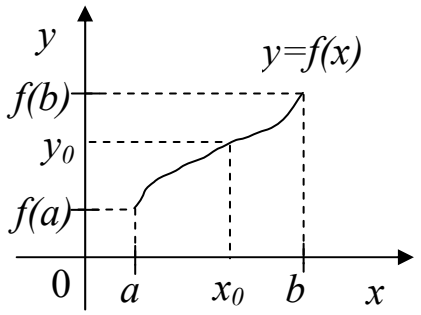
Доказательство. Выберем любую последовательность $\{x_n\}$ точек $x_n \in X$, $x_n \to x_0$. Нам надо проверить, что последовательность $f(g(x_n)) \to f(g(x_0))$.

По условию непрерывности функции $g(x)$ мы имеем $y_n \equiv g(x_n) \to g(x_0) = y_0$, откуда по непрерывности функции $f(y)$ получим $f(y_n) \to f(y_0)$, что и требовалось.

Непрерывность обратной функции

Теорема 44. *Пусть функция* $y = f(x)$ *непрерывна и строго возрастает на отрезке* $[a,b]$. *Тогда существует обратная функция* $x = f^{-1}(y)$, *которая будет строго возрастающей и непрерывной на отрезке* $[f(a), f(b)]$.

Доказательство. Существование обратной функции $x = f^{-1}(y)$ будет доказано позднее.



Убедимся в строгом возрастании обратной функции. Если это не так, найдутся точки $y_1 < y_2$ такие, что $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$. Так как функция f строго возрастает, мы получаем отсюда $f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2))$, т. е. $y_1 \geq y_2$. Противоречие.

Докажем теперь непрерывность функции $x = f^{-1}(y)$ в любой точке $y_0 \in [f(a), f(b)]$. Для этого выберем произвольную последовательность

точек $y_n \in [f(a), f(b)]$ с условием $y_n \to y_0$ и проверим, что соответствующая последовательность значений $x_n \equiv f^{-1}(y_n)$ сходится к величине $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Предполагая противное, получим, что за пределами некоторой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 находится бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$. Следовательно существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, члены которой удовлетворяют неравенствам $x_{n_k} \geq x_0 + \delta$, либо подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, члены которой удовлетворяют неравенствам $x_{n_k} \leq x_0 - \delta$.

В первом из этих случаев в силу монотонности имеем цепочку неравенств $\underline{y_{n_k}} = f(x_{n_k}) \geq \underline{f(x_0 + \delta)} > f(x_0) = \underline{y_0}$. Аналогично во втором случае имеем $\underline{y_{n_k}} = f(x_{n_k}) \leq f(x_0 - 5) < f(x_0) = y_0$. В любом случае подчеркнутое противоречит сходимости $y_{n_k} \to y_0$ при $k \to \infty$.

§ 17. Непрерывность элементарных функций

Если функция определена и элементарна на некотором интервале (a,b), то она непрерывна на этом интервале.

§ 18. Точки разрыва и их классификация

Определение 1. Будем говорить, что функция $f(x)$ *имеет разрыв* в точке $x_0 \in \mathrm{N}$, если $f(x)$ не имеет конечного предела в точке x_0 либо конечный предел в точке x_0 существует, но не совпадает со значением функции в этой точке, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Определение 2. Если в точке разрыва x_0 существует $\lim\limits_{x \to x_{0-0}} f(x) = A$ и существует $\lim\limits_{x \to x_{0+0}} f(x) = B$ ($A \neq B$), то разрыв функции называется *разрывом первого рода* (B-A — скачок функции $f(x)$ в точке x_0).

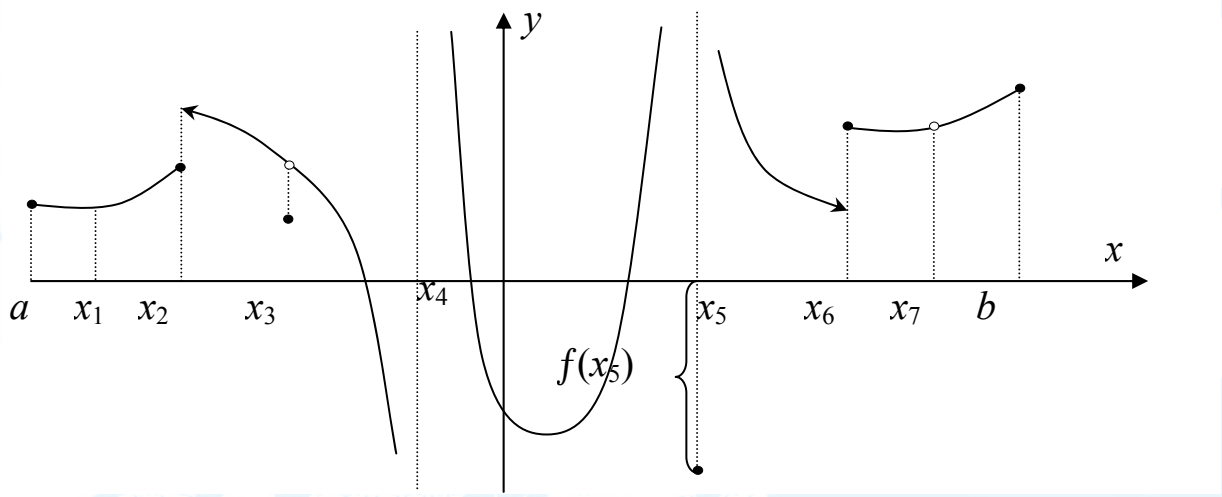
К разрывам первого рода относятся так называемые устранимые разрывы, а именно, если $\lim\limits_{x \to x_{0-0}} f(x) = \lim\limits_{x \to x_{0+0}} f(x) \neq f(x_0)$, то разрыв уст-

раним в том смысле, что достаточно изменить значение функции в точке x_0, положив $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, и функция станет непрерывной.

Пример 20. Функция $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ в точке x=0 не определена, но известно, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$. Если мы дополнительно примем, что $f(0)=1$, то функция $f(x)$ окажется непрерывной в точке x_0.

Определение 3. Если хотя бы один из пределов $f(x_0\text{-}0)$ и $f(x_0+0)$ не существует или бесконечен, то точка x_0 называется *точкой разрыва второго рода* функции $f(x)$.

Пример 21. Рассмотрим приведенную на рисунке функцию.



В точке a функция непрерывна справа, т. к. $f(a+0) = f(a)$.

В точке x_1 функция непрерывна, т. к. $\lim\limits_{x\to x_1} f(x) = f(x_1)$.

В точке x_2 функция имеет разрыв первого рода, т. к. $f(x_2–0)= =f(x_2)\neq f(x_2+0)$, но непрерывность слева имеет место.

В точке x_3 функция имеет устранимый разрыв первого рода, т. к. существует $\lim\limits_{x\to x_3} f(x) \neq f(x_3)$.

В точке x_4 функция имеет разрыв второго рода, т. к. $\lim\limits_{x\to x_4-0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to x_4+0} f(x) = +\infty$.

В точке x_4 функция имеет разрыв второго рода. Положение, аналогичное точке x_5, хотя и существует $f(x_5)$.

В точке x_7 функция не определена, однако предел функции в этой точке существует и конечен. Приняв этот предел за значение $f(x_7)$, получим функцию, доопределенную и непрерывную в точке x_7.

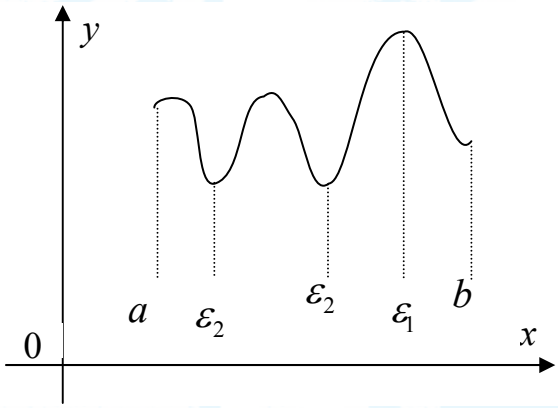
В точке b функция непрерывна слева, т. к. $f(b\text{-}0) = f(b)$.

Замечание 3. Все элементарные функции непрерывны в областях их существования.

§ 19. Свойства непрерывных функций на отрезке

Теорема Вейерштрасса

Функция, непрерывная в замкнутом интервале, достигает на этом интервале, по меньшей мере, один раз наибольшего и наименьшего значений. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Теорема утверждает существование в $[a, b]$ по меньшей мере одной точки ε_1, ($\varepsilon_1 \in [a, b]$) и по меньшей мере одной такой точки ε_2 ($\varepsilon_1 \in [a, b]$) таких, что $f(x) \le f(\varepsilon_1)$ и $f(x) \ge f(\varepsilon_2)$ для всех $x \in [a, b]$.



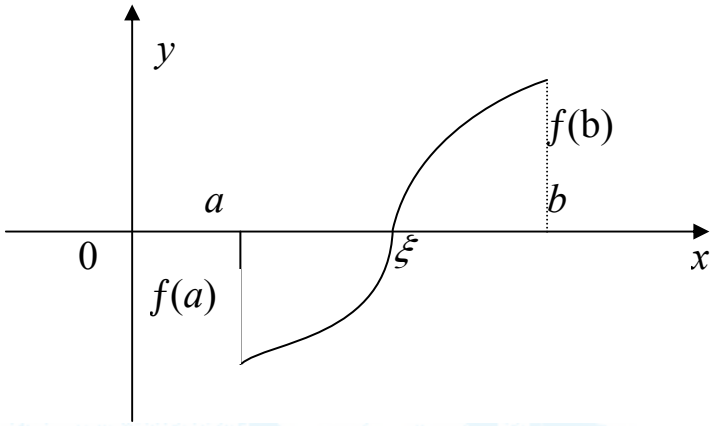
Контрпример. Теорема становится, вообще говоря, неверной, если отрезок заменить интервалом. В самом деле, например, функция $y=x$ непрерывна в любом открытом интервале (a, b), но не достигает в нем ни наибольшего ни наименьшего значений: она достигает этих значений как раз на концах отрезка, но они исключены.

Теорема Больцано–Коши (первая)

Функция, непрерывная в замкнутом интервале и принимающая на концах этого интервала значения разных знаков, по меньшей мере один раз обращается в нуль внутри интервала.

Допустим, что $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, и что $f(a) < 0$, а $f(b) > 0$ (или $f(a)>0$ и $f(b)<0$). Теорема утверждает существование по меньшей мере одной такой точки ξ, $a < \xi < b$, $f(\xi) = 0$.

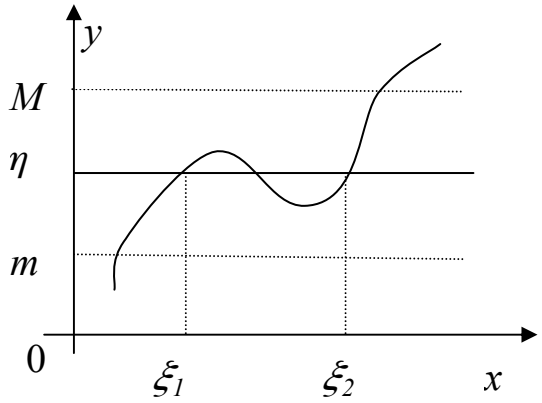
Геометрически это означает, что непрерывная кривая при переходе с одной полуплоскости на другую по отношению к Оx непременно пересекает эту ось.



Теорема Больцано–Коши (вторая)

Функция, непрерывная в замкнутом интервале, принимает внутри интервала по меньшей мере один раз любое значение, заключенное между ее значениями на концах интервала.

Пусть $f(a) = m$, $f(b) = M$. Возьмем какое-нибудь число η $m < \eta < M$. Теорема утверждает существование в $[a, b]$ по меньшей мере одной такой точки ξ $(a < \xi < b)$, что $f(\xi)=\eta$.



Геометрически это означает, что любая прямая $y = \eta$, проходящая между m и M, пересечет по меньшей мере один раз кривую $f(x)$.

Абсцисса точки пересечения и будет тем значением $x = \xi$, при котором $f(\xi) = \eta$. Другими словами, непрерывная функция, переходя от одного своего значения к другому, обязательно проходит через все промежуточные значения.

Типовые задачи и алгоритмы их решения

Пример 22. Пользуясь определением предела функции в точке, доказать, что функция $f(x) = x^2 - 3x - 1$ имеет в точке $x = 2$ предел, равный –3, т. е. $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2 - 3x - 1\right) = -3$.

Решение. Этот пример проще решить, используя определение предела функции «на языке последовательностей». Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность значений x, сходящихся к 2, т. е. $x_n \to 2$. Тогда, применив теорему о пределе произведения, получим

$$\lim_{x_n\to 2} x_n^{\,2} = \lim_{x_n\to 2}\left(x_n \cdot x_n\right) = 2\cdot 2 = 4,$$

$$\lim_{x_n\to 2} 3x_n = 3\cdot 2 = 6.$$

По теореме о пределе суммы и разности получим:

$$\lim_{x_n\to 2} f(x_n) = \lim_{x_n\to 2}\left(x_n^{\,2} - 3x_n - 1\right) = 4 - 6 - 1 = -3.$$

Поскольку последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ выбиралась произвольной (с одним лишь требованием, чтобы $x_n \to 2$), на основании определения предела функции заключаем, что $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2 - 3x - 1\right) = -3$.

Пример 23. Найти предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4 + 3n^3 + 1}{3n^4 - 2n^2 + 1}$.

Решение. Здесь числитель $n^4 + 3n^3 + 1 \approx n^4$, т. к. n^4 — главный член в сумме, относительно которого другие слагаемые бесконечно малы ($n \to \infty$). Аналогично, знаменатель — $3n^4 - 2n^2 + 1 \approx 3n^4$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4 + 3n^3 + 1}{3n^4 - 2n^2 + 1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4}{3n^4} = \dfrac{1}{3}$.

Пример 24. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\ln(\cos x)^{1/x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}}$. Вычислим предел в показателе экспоненты

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+(\cos x-1))}{x^2} = \left[\ln(1+(\cos x-1)) \approx \cos x - 1, \text{ т.к. } \cos x - 1 \to 0\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}, \text{ т. к. } 1-\cos x \approx \frac{x^2}{2}.$$

Итак, окончательный ответ $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-1/2}$.

Пример 25. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{1/2}-1\right) = \lim_{x\to+\infty} x^2\,\frac{1}{2}\frac{1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

т. к. $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{1/2} - 1 \approx \frac{1}{2}\frac{1}{x^2}$.

Резюме

Рассмотрены предел последовательности и его свойства, предел функции и методы его вычисления, а также нахождение асимптот функции, исследование функции с помощью основных теорем о непрерывных функциях.

Глава 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Геометрия — правительница всех мысленных изысканий.
М. В. Ломоносов

Цели и задачи

Сформировать представление о понятиях производной, дифференцируемости, дифференциала и их геометрической интерпретации.

Знать формулы дифференцирования арифметических операций, сложной и обратной функции, основные теоремы дифференциального исчисления (Ферма, Роля, Лагранжа, Коши), формулу Тейлора с остаточным членом в различных формах.

Уметь находить производные от функций любой сложности, проводить полное исследование функций и строить эскизы графиков, находить пределы с помощью правил Бернулли–Лопиталя и формулы Тейлора.

§ 1. Производная

Основные определения

Пусть $y = f(x)$ — функция, определенная на множестве E и пусть $x_0 \in E$ точка сгущения множества E.

Определение 1. *Производной функции $y=f(x)$ в точке* x_0 называется предел отношения приращения функции в этой точке к вызвавшему его приращению аргумента при условии, что последнее стремится к нулю, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Важнейшие частные случаи данного понятия:

1) $E=[x_0, a)$.

В этом случае $f'_E(x_0)$ называется производной справа и обозначается $f'_+(x_0)$.

2) $E=(a, x_0]$.

$f'_E(x_0)$ называется производной слева и обозначается $f'_-(x_0)$.

3) $E = (a, b)$, $x_0 \in (a, b)$.

Производная берется по полной окрестности точки x_0, обозначается $f'(x_0)$ и называется просто производной без указания множества, по которому она берется.

Обозначения:

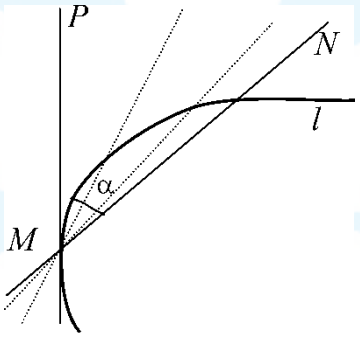
1) $\frac{dy}{dx}$ или $\frac{df}{dx}(x_0)$ (Лейбниц);

2) y' или $f'(x_0)$ (Лагранж);

3) Dy или $D\square(x_0)$ (Коши);

4) $\dot{y}$ или $\dot{y}(x_0)$ (Ньютон).

Геометрический смысл производной



Определение 2. Прямая *MP* называется *касательной* к кривой *l* в точке *M*, если угол α между ней и секущей стремится к нулю при неограниченном приближении по кривой точки *N* к точке *M*.

Теорема 1. *Производная функции $f(x)$ в данной точке x_0 геометрически представляет собой угловой коэффициент касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$, т. е. тангенс угла между касательной и положительным направлением оси* O*x*.

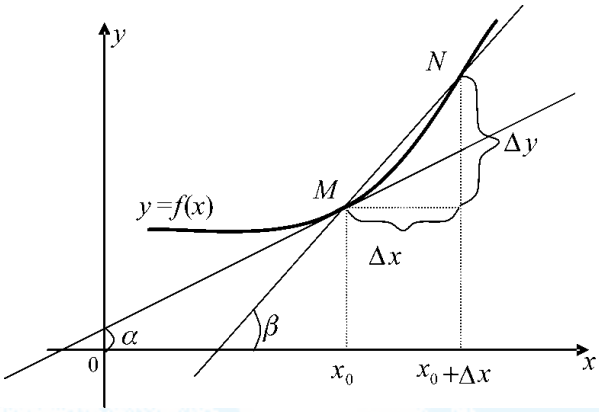
Доказательство. Пусть в точке x_0 существует $f(x_0)$. Дадим значению аргумента x_0 приращение Δx и обозначим через *N* точку $(x_0, +\Delta x, f(x_0+\Delta x))$. Секущая *MN* образует с положительным направлением оси O*x* некоторый угол β. Как видно из чертежа, $\operatorname{tg}\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, или $\beta = \operatorname{arctg}\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если устремить $\Delta x \to 0$, то на графике произойдет следующее:

1) точка *N* будет неограниченно приближаться к точке *M*, двигаясь по кривой $y = f(x)$;

2) секущая *MN* будет поворачиваться вокруг точки *M*;

3) соответственно будет изменяться и угол β. Так как по условию $f(x_0)$ существует, то в силу непрерывности функции $\operatorname{arctg} x$, можно записать $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\operatorname{arctg}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{arctg}\left(\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \operatorname{arctg} f'(x_0)$. Но тогда существует

предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\beta = \operatorname{arctg} f'(x_0)$, т. е. предельное значение угла β, которое обозначим через α. Таким образом, $\operatorname{arctg} f'(x_0)=\alpha$ или $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$.



Вычисление производных основных элементарных функций

1) Пусть $y = C = \text{const}$, тогда $\Delta y = 0$ и для всех $\Delta x \neq 0$ будет выполняться $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=0$. Следовательно, $y' = 0$.

2) Степенная функция $y = x^{\mu}$, $\mu \in R$. Придадим некоторому значению x приращение Δx, тогда соответствующее приращение функции y представится в виде:

$$\Delta y=(x+\Delta x)^{\mu}-x^{\mu}. \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^{\mu}-x^{\mu}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}x^{\mu-1}\frac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\mu}-1}{\dfrac{\Delta x}{x}}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}x^{\mu-1}\frac{\mu\cdot\dfrac{\Delta x}{x}}{\dfrac{\Delta x}{x}}=\mu\cdot x^{\mu-1}.$$ Получаем, что $y'=\left(x^{\mu}\right)'=\mu x^{\mu-1}$.

3) Показательная функция $y=a^x$, где $0<a\neq 1$. Представим эту функцию в виде $y=e^{x\ln a}$. Тогда $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{e^{(x+\Delta x)\ln a}-e^{x\ln a}}{\Delta x}=e^{x\ln a}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{e^{\Delta x\ln a}-1}{\Delta x}=$

$$=e^{x\ln a}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\ln a}{\Delta x}=e^{x\ln a}\ln a=a^x\ln a.$$

Таким образом, $y'=\left(a^x\right)'=a^x\ln a$. В частности, если $y=e^x$, то $y'=e^x$.

4) Логарифмическая функция: $y=\log_a x$, где $0<a\square 1$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}=$$

$\left(\text{обозначим } \frac{\Delta x}{x}=\varepsilon, \text{если } \Delta x\to 0, \text{ то } \varepsilon\to 0\right)=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(1+\varepsilon)}{\varepsilon}=$

$=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln a\cdot\varepsilon}=\frac{1}{x}\frac{1}{\ln a}=\frac{1}{x\ln a}$. То есть $y'=\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x\ln a}$. В частности, $\left(\ln x\right)'=\frac{1}{x}$.

5) Пусть $y=\sin x$.

$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(x+\Delta x\right)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}$. Так как функция $\cos x$ непрерывна и $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, то получаем $y'=(\sin x)'=\cos x$.

Аналогичными рассуждениями устанавливаем, что $\left(\cos x\right)'=-\sin x$.

6) $y=\operatorname{tg}x$. $y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\left(x+\Delta x\right)-tg\ x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\sin\left(x+\Delta x\right)}{\cos\left(x+\Delta x\right)}-\frac{\sin x}{\cos x}}{\Delta x}=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(x+\Delta x\right)\cos x-\sin x\cos\left(x+\Delta x\right)}{\Delta x\cos\left(x+\Delta x\right)\cos x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\left[\sin\left(x+\Delta x\right)+\sin\Delta x\right]-\frac{1}{2}\left[\sin\left(x+\Delta x\right)-\sin\Delta x\right]}{\Delta x\cos\left(x+\Delta x\right)\cos x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{\cos\left(x+\Delta x\right)\cos x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x.$$

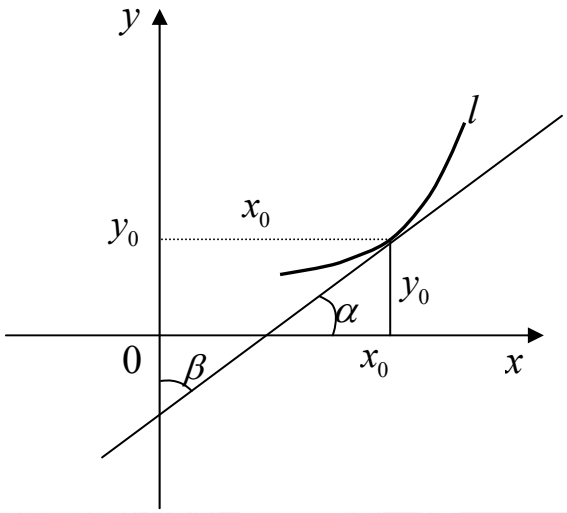
Итак, $y'=(\operatorname{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$. Подобным образом можно установить, что $y'=(\operatorname{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$.

Производная обратной функции

Пусть дана функция $y = f(x)$ и $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

x = g(y) — обратная функция.

Пусть *l* линия является графиком функции *y = f(x),* тогда $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$, уравнение линии *l* можно записать также в виде *x = g(y).* Производная этой функции по переменной *y* равна угловому коэффициенту той же касательной, но уже относительно О*y*, т. е. $g'(y_0) = \operatorname{tg} \beta$, но $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$, значит $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, отсюда $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.



Теорема 2. *Пусть y = f(x) — функция, определенная на (a, b) и удовлетворяющая условиям:*

а) в точке $x_0 \in (a, b)$ существует $f'(x_0) \neq 0$;

б) существует обратная к f(x) функция x=g(y), непрерывная в точке $y_0 = f(x_0)$.

Тогда для обратной функции x=g(y) существует производная в точке y_0, причем $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Доказательство. Зададим значению y_0 произвольное приращение Δy. Тогда функция *x=g(y)* получит приращение Δx. Заметим, что

$\Delta y \neq 0$ и $\Delta x \neq 0$, т. к. функция *f(x)* определена однозначно $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$, если теперь устремить $\Delta y \to 0$, то в силу непрерывности *x=g(y)* в точке x_0, будем иметь $\Delta x \to 0$, поэтому $g'(y_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}$.

В качестве примера найдем производные обратных тригонометрических функций:

y=arcsin *x*, $x \in (-1,1)$. Она будет обратной для функции *x*=sin *y*, рассматриваемой на $\left(-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right)$. На этом промежутке $x'_y = \cos y \neq 0$, следовательно $(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (-1<*x*<1), т. е. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Перед корнем берем знак +, потому что cos *y*>0 на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Функция *y*=arctg *x* определена на $(-\infty;+\infty)$ и является обратной для функции *x*=tg *y*. Так как $x'_y = \frac{1}{\cos^2 y} = \sec^2 y \neq 0$ на $\left(-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right)$, то $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$ $(-\infty < x < \infty)$, т. е. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Аналогично устанавливается, что

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 < x < 1)$;

$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ $(-\infty < x < \infty)$.

Поскольку логарифмическая и показательная функция являются взаимно обратными, то, зная одну из них, легко получить производную другой.

Например, производная показательной функции $y = a^x$, может быть получена следующим образом: $(a^x)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y \ln a}} = y \ln a = a^x \ln a$.

Таблица производных

Подводя итог наших вычислений, приходим к следующей таблице производных. Ее необходимо выучит наизусть.

1) $C' = 0$;

2) $(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$;

3) $(a^x)' = a^x \ln a$;

4) $(e^x)' = e^x$;

5) $(\log_a x) = \dfrac{1}{x \ln a}$;

6) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

7) $(\sin x)' = \cos x$;

8) $(\cos x)' = \sin x$;

9) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

10) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

11) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

12) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

13) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

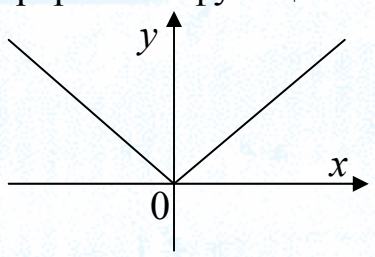
14) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Дифференцируемость и непрерывность

Теорема 3. *Пусть y = f(x) — функция, определенная на множестве E, и пусть* $x_0 \in E$ *— точка сгущения E, тогда если существует* $f'_E(x_0)$, *то f(x) непрерывна в точке* x_0.

Доказательство. Так как $y = f(x)$ дифференцируема в x_0 по множеству E, то существует конечный предел $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, поэтому необходимо $f(x) - f(x_0) \to 0$ при $x - x_0 \to 0$, т. е. $f(x) \to f(x_0)$ при $x \to x_0$.

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, т. е. не всякая непрерывная функция является дифференцируемой.

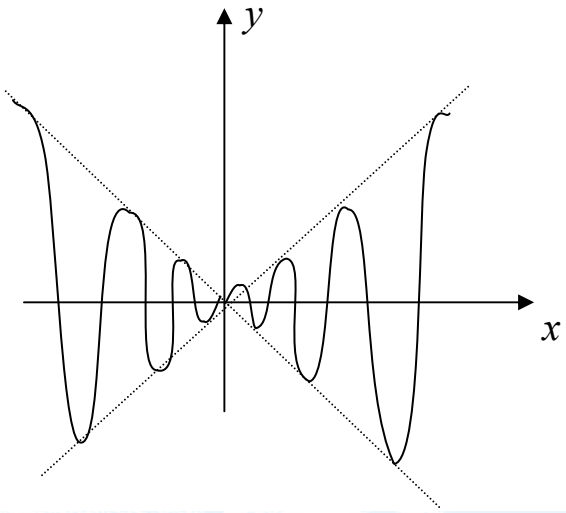


Пусть $y = |x|$. В точке $x = 0$. Эта функция непрерывна, т. к. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$, однако производной в этой точке не существует.

Действительно, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{|x|}{x}$. Найдем односторонние пределы $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0-0}-\dfrac{x}{x}=-1$, $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{x}{x}=1$.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ не существует.

Пример 1. Приведем пример функции, непрерывной в точке $x = 0$, но не имеющей ни правой, ни левой производной в этой точке. Дана функция $y=x\sin\dfrac{1}{x}$. Доопределим ее по непрерывности в нуле, положив $y = f(x)$, $f(0)=0$.



$$\begin{cases} f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}, \text{ при } x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{\Delta x\sin\dfrac{1}{\Delta x}-0}{\Delta x}=\sin\frac{1}{\Delta x}.$$

Но при $\Delta x\to 0$ величина $\sin\dfrac{1}{\Delta x}$ не стремится ни к какому пределу.

Простейшие правила вычисления производных

Теорема 4. *Пусть f и g — две функции, имеющие производные в точке* x_0, *и c = const (постоянная). Тогда в точке* x_0:

1) $c' = 0$;

2) $(cf)' = cf'$;

3) $(f \pm g)' = f' \pm g'$;

4) $(fg)' = f'g + fg'$;

и если $g(x_0) \neq 0$, то

5) $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$;

6) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$.

Доказательство. Докажем, например, (6). Остальные доказываются аналогично. Придадим значению x_0 приращение Δx. Тогда функции f и g получат приращения соответственно Δf и Δg. Имеем

$$\Delta y = \frac{f + \Delta f}{g + \Delta f} - \frac{f}{g} = \frac{fg + g\Delta f - gf - \Delta g f}{g(g + \Delta g)} = \frac{g\Delta f - f\Delta g}{g(g + \Delta g)}.$$

Разделим обе части равенства на Δx. Получим:

$\frac{\Delta f}{\Delta g} = \frac{g\frac{\Delta f}{\Delta x} - f\frac{\Delta g}{\Delta x}}{g(g + \Delta g)}$ (*). Перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$.

По условию существуют $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = g'$.

Из существования g' следует непрерывность g, т. е. $\Delta g \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Следовательно, существует предел всей правой части **(*)**, но тогда существует предел и левой части. Получим:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{g \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} - f \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}}{g \lim\limits_{\Delta x \to 0} (g + \Delta g)} = \frac{gf' - fg'}{g^2}, \text{ т. е. } \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}.$$

Дифференцирование сложной функции (композиции функций)

Пусть $y = f(x)$ и $u = g(x)$ — функции, определенные на интервалах (c, d) и (a, b) соответственно. Существует сложная функция $y = f(g(x))$ (композиция $h = f \circ g$) и справедлива следующая теорема:

Теорема 5. *Производная сложной функции равна производной заданной функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную этого аргумента по независимой переменной.*

Доказательство. Пусть $y = f(u)$, $u = g(x)$. Докажем, что $y' = f'(u)u' = f'(u)g'(x)$.

Зададим переменной x приращение Δx. Оно влечет приращение Δy промежуточного аргумента $u = g(x)$, которое приведет к изменению функции на некоторую величину Δy. Для нахождения производной y' нужно найти $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Допустим, что при всех достаточно малых Δx приращение $\Delta y \neq 0$, тогда отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ можно представить в виде: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$. Но тогда: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$ ($\Delta u \to 0$ при $\Delta x \to 0$, ибо $u=g(x)$ — функция непрерывная). Теперь, т. к. $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u)$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = g(x)$, мы приходим к доказываемой формуле.

Предположим теперь, что цепочка состоит не из двух, а из трех функций: $y = f(u)$, $u = g(v)$, $v = \psi(x)$, согласно доказанному правилу имеем: $y' = f'(u)u'$, где u' — производная от u, рассматриваемая как функция независимой переменной x. По тому же правилу: $u' = g'(v)v' = g'(v) \cdot \psi'(x) \Rightarrow y' = f'(u)g'(v) \cdot \psi'(x)$.

Таким же образом выводится формула и для любого числа промежуточных аргументов.

Пример 2. $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{100}$. Произведем замену: $u = \left(x + \frac{1}{x}\right)$.

$y' = \left(u^{100}\right)'$;

$$y' = 100u^{99} \cdot u' = 100\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{99} \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right)' = 100\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{99} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

Пример 3. $y=\left[\dfrac{1-\left(1-x^2\right)^2}{1+\left(1-x^2\right)^2}\right]^3$. Выделим промежуточные аргументы следующим образом: $y=u^3$, $u=\dfrac{1-v}{1+v}$, $v=w^2$, $w=1-x^2$.

Находим производную, применив правило:

$y'=(u^3)'u'v'w'=3u^2\cdot\left(\dfrac{-2v}{(1+v)^2}\right)\cdot 2w\cdot(-2x)$, подставляя вместо w, v, u их выражения через x, получаем $y'=3\left[\dfrac{1-(1-x^2)^2}{1+(1-x^2)^2}\right]^2\cdot\dfrac{-2}{[1+(1-x^2)^2]^2}\cdot$ $\cdot 2(1-x^2)\cdot(-2x)$.

Пример 4. Очень важный пример.

а) Пусть $y(x)=\left[u(x)\right]^{v(x)}$, логарифмируем $\ln y(x)=v(x)\ln[u(x)]$, тогда по правилу (4) получаем: $y'(x)=v'(x)\ln\left[u(x)\right]+v(x)\dfrac{1}{\left[u(x)\right]}u'(x)\Rightarrow$ $y'(x)=y(x)\left(v'(x)\ln\left[u(x)\right]+\dfrac{v(x)u'(x)}{\left[u(x)\right]}\right)$. Подставив вместо $y(x)$ исходную функцию, имеем: $y'=u^v\left(v'\ln u+v\dfrac{u'}{u}\right)$ или окончательно: $y'=u^v v'\ln v+u^{v-1}vu'$.

б) Пусть $y=\cos x^{\sin x}$. Применим формулу, полученную выше: $y'=\cos x^{\sin x}\ln\cos x\cdot\cos x+\sin x\cdot\cos x^{\sin x-1}\left(-\sin x\right)$.

§ 2. Дифференциал

Наводящие соображения

Пусть $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, тогда если приращение $\Delta x=x-x_0\to 0$, то приращение $\Delta f=f\left(x\right)-f(x_0)\to 0$. Выберем Δx бесконечно малой величиной, тогда бесконечно малая Δf допускает выделение главной части относительно Δx, т. е. $\Delta f\sim c\left(\Delta x\right)^k$, где c = const, k>0. Предположим еще, что главная часть линейна относительно Δx,

т. е. $\Delta f \sim c(\Delta x)$, $\Delta x > 0$ (линейность означает, что k = 1). Величина $c(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$ является главной линейной частью приращения функции и называется *дифференциалом функции* $f(x)$.

Определение 3. Пусть $y = f(x)$ — функция, заданная на интервале (a, b). Предположим, что для точки $x_0 \in (a, b)$ выполнено

$$\Delta f = A\Delta x + o(\Delta x)(\Delta x \to 0), \qquad (1)$$

тогда величина $A\Delta x = A(x - x_0)$ называется *дифференциалом функции* $f(x)$ в точке x_0 и обозначается dy или $df(x_0)$.

Дифференциал аргумента dx по определению равняется Δx.

$$dx = \Delta x.$$

Пример 5. Найдем дифференциал функции $y = x^3$ в точке x_0. Δx — бесконечно малая, $x_0 \neq 0$, $\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$, $dy = y'\Delta x = 3x^2\Delta x$.

Теорема 6. *Если приращение функции $y = f(x)$ представимо в виде:*

(1) $\Delta f = A\Delta x + o(\Delta x)$ *при* $\Delta x \to 0$,

то функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 *и*

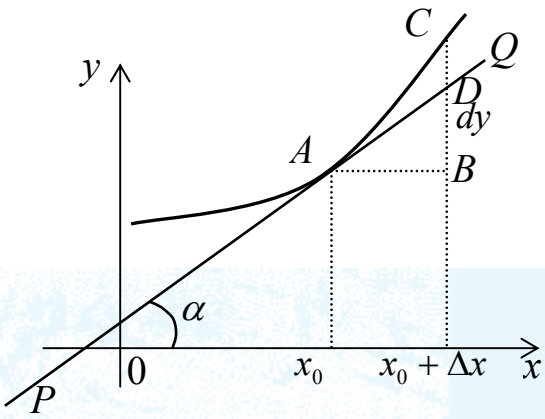
(2) $df(x_0) = f'(x_0)dx$, *где* $dx = \Delta x$.

Обратно. Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0 (имеет производную), то ее приращение представимо в виде (1).

Геометрический смысл дифференциала

Как известно, $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент касательной PQ к кривой $f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$ следовательно, $f'(x_0) = \mathrm{tg}\alpha = \dfrac{BD}{\Delta x}$. С другой стороны, $dy = f'(x_0)\Delta x$, значит $dy = BD$.

Таким образом, если изменять аргумент от некоторого значения x_0 к значению $x_0 + \Delta x$, то дифференциал функции геометрически представит собой приращение ординаты касательной PQ, в то время как приращение функции $\Delta y = BC$ есть приращение ординаты самой кривой $y = f(x)$. Так как $\Delta x = dx$, то выражение дифференциала функции можно представить в окончательном виде.



$dy = f'(x)dx \Rightarrow f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, т. е. производную можно рассматривать и как частное от деления дифференциала функции на дифференциал аргумента.

Инвариантность формы дифференциала

Пусть $y = f(u)$ и $u = g(x)$ — функции, определенные таким образом, что существует сложная функция $y = f[g(x)]$. Предположим, что существуют производные $f'(u)$ и $g'(x)$, тогда сложная функция также дифференцируема, и ее производная вычисляется по формуле: $\dfrac{dy}{dx} = f'(u)g'(x) = f\left[g(x)\right]g'(x)$.

Найдем дифференциал двумя способами:

а) $dy = f'[g(x)]g'(x)dx$;

б) $dy = f'(u)du$.

Подставляя в (б) $du = g'(x)dx$, получим $du = f'[g(x)]g'(x)dx$. Пришли к выражению из (а).

Мы всегда имеем право писать дифференциал в форме (б) независимо от того, будет ли u независимой переменной или зависимой. Разница лишь в том, что если за независимую переменную выбрать x, то du означает не произвольное приращение Δu, а дифференциал u как функции $g(x)$.

Это свойство называется *инвариантностью* формы дифференциала.

Пример 6. Пусть u и v — дифференцируемые функции от x. Найти дифференциал функции $y = \operatorname{arctg}\frac{u}{v}$.

Используя свойство инвариантности дифференциала, находим:

$$dy = d(\operatorname{arctg}\frac{u}{v}) = \frac{1}{1+\left(\frac{u}{v}\right)^2} d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{u}{v}\right)^2}\frac{vdu - udv}{v^2} = \frac{vdu - udv}{u^2+v^2}.$$

Приближенные вычисления с помощью дифференциала

Пусть *y=f(x)* имеет производную в точке x_0, т. е. существует $f'(x_0)$. Тогда если $x - x_0 = \Delta x$, то $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ и $df = f'(x_0)(x - x_0)$. Так как $\Delta f \approx df$, то $f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0)$ или $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Эта формула (*формула малых приращений*) дает возможность приближенно заменять произвольную функцию, имеющую производную, линейной функцией. При этом точность при такой замене тем больше, чем ближе x к x_0. Геометрически эта замена означает, что участок кривой *f(x)* в окрестности точки $(x_0, f(x_0))$ заменяется отрезком касательной к кривой в этой точке $y - y_0 = k(x - x_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, а угловой коэффициент $k = f'(x_0)$.

В частности, если x_0=0, то приближенная формула запишется в виде $f(x) \approx f(0) + f'(0)x$.

Подставляя вместо *f(x)* различные функции, получим, что для x, достаточно близких к нулю, $\sin x \approx x$, $\operatorname{tg} x \approx x$, $e^x \approx 1 + x$, $\ln(1+x) \approx x$, $(1+x)^m \approx 1 + mx$.

Пример 7. Вычислить $\sqrt[3]{1,02}$.

Рассмотрим функцию $y = \sqrt[3]{x}$ и вычислим ее производную в x_0=1 $y'_{(1)} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\Big|_{x=1} = 1$. По формуле малых приращений имеем $\Delta x = 0,02$ $\sqrt[3]{1+0,02} \approx \sqrt[3]{1} + \frac{1}{3}\Delta x = 1 + \frac{1}{3}0,02 = 1,0066.$

Пример 8. Найти приближенное значение $\sin 29°$.

Рассмотрим функцию y=sin x. Ее производная в точке $x=\frac{\pi}{6}$ равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$, по формуле малых приращений получим $\left(\Delta x=-\frac{\pi}{180^\circ}\right)$.

$$\sin 29^\circ=\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{180}\right)\approx\sin\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180}=0,484.$$

§ 3. Производные и дифференциалы высших порядков

Определение 4. Производная от производной некоторой функции называется *производной второго порядка* или второй производной. $f''(x)=\left(f'(x)\right)'$. Производные, начиная со второй, называются *производными высших порядков.*

Общие формулы для производных любого порядка

а) $\left(x^m\right)^{(n)}$;

$\left(x^m\right)'=mx^{m-1}$; $\left(x^m\right)^2=m\left(m-1\right)x^{m-2}$;

$\left(x^m\right)^{(n)}=m\left(m-1\right)....\left(m-n+1\right)x^{m-n}$.

б) Пусть y = ln$x$. Найдем $y^{(n)}$.

$y'=\frac{1}{x}=x^{-1}$;

$$y^{(n)}=\left(x^{-1}\right)^{(n-1)}=(-1)(-2)...(-n+1)x^{-n}=\left(-1\right)^{n-1}(n-1)!x^{-n}=\frac{(-1)^{(n-1)}(n-1)!}{x^n}.$$

в) $y=a^x$ $y'=a^x\ln a$ $y''=a^x\ln^2 a$;

$y^{(n)}=a^x\ln^n a$, в частности $\left(e^x\right)^{(n)}=e^x$.

г) y=sin x найдем $y^{(n)}$;

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y'' = -\sin x = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right);\ y''' = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right);$$

$$y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

д) $\left(\cos x\right)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$

Формула Лейбница

Покажем, что производную порядка n от произведения $f \cdot g$ можно вычислить по *формуле Лейбница:*

$$\left(fg\right)^{n} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i f^{(n-i)} g^{i}.$$

$\left(fg\right)' = f'g + g'f$; $\left(f \cdot g\right)^{(2)} = f''g + f'g + g''f + f'g = f''g + 2f'g' + fg$.

Полагая $f^{(0)} = f$, можно записать:

$$\left(fg\right)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i f^{(n-i)} g^{(i)} = f^{(n)} g^{(0)} + nf^{(n-1)} g' + \frac{n\left(n-1\right)}{2!} f^{(n-2)} g^{(2)} +$$

$$+ \ldots + \frac{n\left(n-1\right)\ldots\left(n-k+1\right)}{k!} f^{(n-k)} g^{(k)} \ldots + f^{(0)} g^{(n)}.$$

Доказательство последней формулы проводится методом математической индукции.

Замечание о дифференциале высших порядков

Пусть $y = f(x)$ — функция, определенная на интервале (a, b) и дифференцируемая в каждой точке из $(a; b)$, тогда $dy = f'(x)dx$.

Определение 5. Дифференциал от дифференциала функции $y = f(x)$ в некоторой точке называется *дифференциалом второго порядка* и обозначается $d\left(dy\right) = d^2(y)$. Вообще, дифференциал от дифференциала $(n$-1)-го порядка называется дифференциалом n-го порядка и обозначается $d^n(y)$. При этом дифференциал независимой переменой рассматривается как постоянная.

$$d^2y = d\left(dy\right) = \left(y'dx\right)' dx = y''dx^2 \ ;$$

$$d^n y = d\left(d^{(n-1)}y\right) = \left(y^{(n-1)}dx^{(n-1)}\right)' dx = y^{(n)}dx^n .$$

Из этих выражений следует, что для любого n: $d^n y = y^{(n)}dx^n$ и $y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n}$. Дифференциалы второго и более высоких порядков не обладают инвариантностью формы, т. е. выражения $d^n y = y^{(n)}dx^n$ или $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n y}{dx^n}$ при $n > 1$ не обладают свойством инвариантности.

В самом деле, пусть $y = f(u)$ и $u = g(x)$, тогда $dy = f'_u(u)du$;

$d^2y = d\left(f'_u(u)du\right)$, здесь $du = g'(x)dx$;

$d^2y = f''_{uu}(u)du^2 + f'(u)d^2u$, здесь $d^2u = g''(x)(dx)^2$.

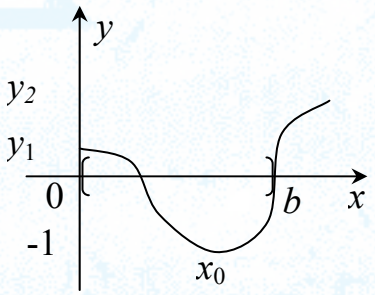
§ 4. Основные теоремы дифференциального исчисления

Определение 6. Пусть $f(x)$ — функция, определенная на множестве X. Будем говорить, что $f(x)$ имеет *локальный максимум (локальный минимум)* в точке $x \in x_0$, если существует такая δ-окрестность этой точки, для которой

$$f(x_0) = \max_{x \in O_\delta(x_0)} f(x) \qquad \left(f(x_0) = \min_{x \in O_\delta(x_0)} f(x)\right).$$

Локальный максимум и локальный минимум *называют локальными экстремумами.*

Замечание 1. В отличие от локальных максимумов и минимумов максимум и минимум ко всему множеству называют *глобальным и максимумом и минимумом*. На представленном рисунке:



Глобальный max равен 2 (в точке b).
Локальный max равен 1 (в точке 0).
Глобальный min равен -1 (в точке x_0).
Локальный min равен -1 (в точке x_0).

Необходимое условие локального экстремума (теорема Ферма)

Теорема 7. *Пусть $y = f(x)$ — функция, дифференцируемая на (a, b) и имеющая локальный экстремум в точке $x \in (a, b)$, тогда* $f'(x) = 0$.

Доказательство. Выберем окрестность $U = (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ точки x_0, для которой $f(x_0) = \min\limits_{x \in U} f(x)$, тогда для любого $x \in U \Rightarrow f(x) - f(x_0) \geq 0$, поэтому $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ (1) при $\begin{matrix} x \in U \\ x \geq x_0 \end{matrix}$ и $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ (2) при $\begin{matrix} x \in U \\ x \geq x_0 \end{matrix}$. Переходя к пределу в (1) при $x \to x_0$ и пользуясь теоремой о предельном переходе в неравенствах, получаем, что $f'_+(x_0) \geq 0$ (3), аналогично из (2) следует, что $f'_-(x_0) \leq 0$ (4). Исходя из $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, а также пользуясь (3) и (4), получаем $f'(x) = 0$.

Аналогично рассуждаем, когда точка x_0 — точка локального max.

Контрпример 1. Функция $y = |x|$ имеет в точке $x = 0$ min, однако производная в этой точке не существует.

Контрпример 2. Функция $y = x$ на $[0,1]$ имеет экстремумы на концах отрезка, однако производные в этих точках не равны 0, т. е. в условиях теоремы Ферма круглые скобки нельзя заменить на квадратные.

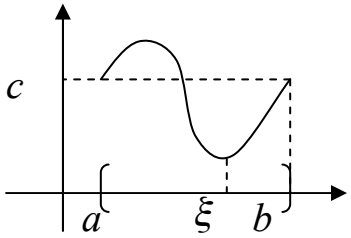
Контрпример 3. $y = x^3$ на $(-1,1)$.

Данная функция имеет в точке $x_0 = 0$ производную, равную нулю, но не имеет локального экстремума. Таким образом, равенство нулю производной в точке является необходимым, но не достаточным условием локального экстремума.

Теорема Ролля

Пусть $y = f(x)$, функция непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), причем $f(a) = f(b) = c$, тогда существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $f'(\xi) = 0$.

Доказательство. Если $f(x) = \text{const}$, то для всех $x \in [a, b]$ $f'(x) = 0$, как производная от постоянной. В этом случае за точку ξ можно взять любую точку из (a, b). Пусть теперь $f(x) \neq \text{const}$. Так как она непрерывна на замкнутом интервале $[a, b]$, то принимает на этом отрезке



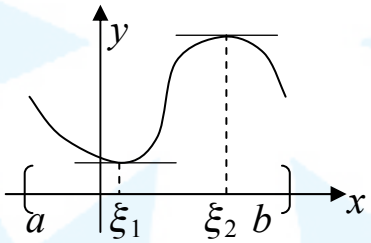
наибольшее и наименьшее значения (теорема Вейерштрасса), причем хотя бы одно из них отлично от c.

Рассмотрим два случая: 1) $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x) \neq C$; 2) $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x) \neq C$.

В первом случае существует точка ξ такая, что $f(\xi) = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Причем ξ не может совпадать с концами отрезка $[a, b]$, и мы находимся в условиях теоремы Ферма, поэтому $f'(\xi) = 0$. Во втором случае доказательство аналогично.

Геометрически теорема Ролля означает, что если непрерывная кривая изображает дифференцируемую функцию, то между двумя точками, лежащими на одинаковой высоте, всегда имеется точка, в которой касательная параллельна оси Оx (таких точек может оказаться и несколько).

Контрпример. Данная функция принимает на концах отрезка равные значения, дифференцируема на (a, b), однако производная не равна 0 (нарушена непрерывность на замкнутом интервале (отрезке)).



Следствие (теорема Лагранжа).

Пусть $y = f(x)$, функция непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Тогда существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Теорема Коши

Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и дифференцируемы на (a, b). Предположим, что для любого $x \in (a, b)$ $g'(x) \neq 0$.

Тогда $g(a) \neq g(b)$ и существует $\xi \in (a, b)$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Доказательство. Тот факт, что $g(a) \neq g(b)$ следует из теоремы Ролля. Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(x) = kg(x) + c$, где постоянные k и c выбраны так, чтобы $\varphi(a) = f(a)$ $\varphi(b) = f(b)$.

$\varphi(a) = f(a) = kg(a) + c$; $\varphi(b) = f(b) = kg(b) + c$; $k = \dfrac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)}$.

Тогда функция $F(x) = f(x) - \varphi(x)$ удовлетворяет условию теоремы Ролля (на концах принимает значения, равные 0).

Поэтому существует точка $\xi \in (a,b)$ такая, что $f'(\xi) = 0$, т. е. $f'(\xi) - \varphi'(\xi) = f'(\xi) - kg'(\xi) = 0$. Подставляя вместо k соответствующее значение, получаем:

$$f'(\xi) - \frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} g'(\xi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)},$$

что и требовалось доказать.

Замечание 2. Теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши, если положить $g(x) = x$.

§ 5. Раскрытие неопределенности по правилу Бернулли–Лопиталя

Неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$

Теорема 8. *Пусть $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — функции, определенные на отрезке $[a, b]$ и обладающие следующими свойствами:*

а) $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \lim\limits_{x \to b} g(x) = 0$;

б) *для любого $x \in [a, b)$ существуют $f'(x)$ и $g'(x)$, причем $g'(x) \neq 0$;*

в) *существует конечный или бесконечный предел* $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = k$.

Тогда существует $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k$.

Доказательство. Доопределим по непрерывности $f(x)$ и $g(x)$ в точке $x = b$, положив $f(b) = g(b) = 0$, тогда функции f и g непрерывны на $[a, b]$. Пользуясь теоремой Коши, применяя ее к $[x, b]$, получаем $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)} = \dfrac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, где $\xi \in (x, b)$ (*). При $x \to b$ и в силу свойства (в) и (*) получаем $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to \xi_x} \dfrac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = k$.

Замечание 3. Из доказательства теоремы видно, что она остается справедливой и для полуинтервала $(a, b]$.

Пример 9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx - x}{x - \sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 - \cos^2 x}{(1 - \cos x)\cos^2 x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = 2$.

Теорема 9. *Пусть $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — функции, определенные на промежутке $[c, +\infty)$ и обладающие на нем следующими свойствами:*

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$;

б) *существуют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$, причем $g'(x) \neq 0$;*

в) *существует конечный или бесконечный предел* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = k$.

Тогда существует $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = k$.

Доказательство. Рассмотрим функции $f_1(t) = f\left(\dfrac{1}{t}\right)$ и $g_1(t) = g\left(\dfrac{1}{t}\right)$, $t \in \left(0, \dfrac{1}{c}\right]$ $c \neq 0$ и $c > 0$.

Тогда, очевидно, $\lim\limits_{t\to 0} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{t\to 0} g(x) = 0$, $g_1'(t) = g'\left(\dfrac{1}{t}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{t^2}\right) \neq 0$,

$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f_1'(t)}{g_1'(t)} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f'\left(\dfrac{1}{t}\right)\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\dfrac{1}{t}\right)\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f'\left(\dfrac{1}{t}\right)}{g'\left(\dfrac{1}{t}\right)} = k$. Согласно теореме 8, можем заключить, что $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f_1(t)}{g_1(t)} = k$, т. е. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = k$.

Неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$

Теорема 10. *Пусть $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — функции, определенные на полуинтервале $[a, b)$ и удовлетворяющие там условиям:*

а) $\lim\limits_{x\to b} f(x) = +\infty$ *и* $\lim\limits_{x\to b} g(x) = +\infty$;

б) *для любого* $x \in [a, b)$ *существует* $f'(x)$ *и* $g'(x)$, *причем* $g'(x) \neq 0$;

в) *существует конечный или бесконечный предел* $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = k$.

Тогда существует $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k$.

Другие виды неопределенности

а) неопределенность вида $0 \cdot \infty$.

Пример 10. $\lim\limits_{x \to +0} x^{\alpha} \cdot \ln x (\alpha > 0) = \lim\limits_{x \to +0} \dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x^{\alpha}}} = \lim\limits_{x \to +0} \dfrac{\dfrac{1}{x}}{(-\alpha)\dfrac{1}{x^{\alpha+1}}} = 0$.

б) неопределенность вида $\infty - \infty$.

Раскрывается после следующих преобразований:

$$\lim_{x \to b}[f(x) - g(x)] = \lim_{x \to b}\left[\frac{1}{\dfrac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\dfrac{1}{g(x)}}\right] = \lim_{x \to b} \frac{1}{\dfrac{g(x) - f(x)}{f(x) \cdot g(x)}} = \lim_{x \to b} \frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{g(x)^{-1} f(x)^{-1}} = \lim_{x \to b} \frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{g(x)} \cdot \dfrac{1}{f(x)}}.$$

Неопределенности вида $0 \cdot \infty$ и $\infty - \infty$ легко преобразуются к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Пример 11. Найти $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sec x - tgx)$.

При $x \to \dfrac{\pi}{2}$ неопределенность $[\infty - \infty]$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{4 - \sin x}{\cos x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0.$$

Неопределенности вида 0^0, 1^{∞}, ∞^0.

Раскрываются после предварительного логарифмирования.

$A = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$ (1^{∞}). Преобразуем:

$$\ln A = \ln \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln \dfrac{\sin x}{x}}{x^2} \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{(\ln \sin x - \ln x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{1}{x}}{2x} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2 \sin x}$$

и далее

$$\ln A=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{2x\sin x+x^2\cos x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\sin x+x\cos x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{2\cos x+\cos x-x\sin x}=$$

$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{3\cos x-x\sin x}=-\frac{1}{6}$. Откуда $A=e^{-\frac{1}{6}}=\frac{1}{\sqrt[6]{e}}$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[6]{e}}$.

Заметим, что при неопределенностях вида 0^0, 1^∞, ∞^0 функция предварительно логарифмируется и, значит, сначала находится предел не заданной функции, а ее логарифма, а затем уже по пределу логарифма находят предел функции (что допустимо вследствие непрерывности логарифмической функции).

Замечание 4. Может случиться, что $f'(x)$ и $g'(x)$ также совместно стремятся к 0 или к ∞ при $x\to x_0$ (или $x\to\infty$). Применяя к их отношению снова правило Лопиталя, получим: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}$.

Иногда оказывается необходимым многократно повторить раздельное дифференцирование числителя и знаменателя, и если в конце концов при каком-нибудь n $\lim\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ существует, то можно утверждать существование и предела $\frac{f(x)}{g(x)}$, причем $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$.

Пример 12. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}$. Имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя правило Бернулли–Лопиталя n раз, получаем:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}=0.$$

Пример 13. Приведем пример, когда отношение функции имеет предел, а отношение их производных не стремится ни к какому пределу. Так,

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+\sin x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1$, но вместе с тем $\frac{(x+\sin x)'}{x'}=\frac{1+\cos x}{1}$ при $x\to+\infty$ постоянно колеблется между 0 и 2 и, значит, не имеет предела. Этот пример не противоречит правилу Бернулли–Лопиталя — просто к нему правило неприложимо.

Пример 14. $A=\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$; случай ∞^0.

Преобразовываем: $\ln A=\ln\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\operatorname{ctg} x}{\ln x}$. Мы пришли к случаю $\dfrac{\infty}{\infty}$. Применяя правило Бернулли–Лопиталя,

$$\ln A=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{\operatorname{ctg} x\sin^2 x}}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{\cos x\cdot\sin x}=-1;\ \text{откуда } A=\frac{1}{e}.$$

Пример 15. $A=\lim\limits_{x\to 0}x^x$; случай 0^0.

Преобразуем $\ln A=\ln\lim\limits_{x\to 0}x^x=\lim\limits_{x\to 0}x\ln x$. Мы пришли к известному случаю $0\cdot\infty$. Имеем: $\ln A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ и дальше по правилу Бернулли–Лопиталя: $\ln A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$; откуда $A=1$.

§ 6. Формула Тейлора

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

В математическом анализе формула Тейлора является одной из важнейших. Она имеет много теоретических приложений и является основой приближенных вычислений.

Известно, что наиболее простыми функциями в смысле вычисления их значений являются многочлены. Возникает вопрос о возможности замены функции f в окрестности точки x_0 многочленом некоторой степени.

Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то ее приращение можно представить в виде: $\Delta f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$, т. е. $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$.

Другими словами, существует многочлен первой степени

$$P_1(x)=f(x_0)+b_1(x-x_0)$$

такой, что при $x \to x_0$ $f(x) = P_1(x) + o(x - x_0)$, причем $P_1(x)$ удовлетворяет условиям $P_1(x_0) = f(x_0)$, $P_1(x_0) = b_1 = f'(x_0)$.

Поставим более общую задачу. Пусть функция, определенная в некоторой окрестности точки x_0, имеет в этой точке n производных $f'(x_0), f''(x_0), ..., f^{(n)}(x_0)$. Требуется выяснить, существует ли многочлен $P_n(x)$ степени не выше n такой, что

$$f(x) = P_n(x) + o(x - x_0)^n. \tag{2}$$

Найдем многочлен степени не выше n:

$$P_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + ... + b_n(x - x_0)^n \tag{3}$$

при условии, что значения многочлена $P_n(x)$ и всех его производных до n-го порядка включительно в точке x_0 совпадают со значениями функции $f(x)$ и ее соответствующих производных в той же точке $f(x_0) = P_n(x_0)$,

$$f'(x_0) = P_n'(x_0), ..., f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0). \tag{4}$$

Определим коэффициенты $b_0, b_1, ..., b_{(n)}$ многочлена (3) так, чтобы они удовлетворяли условиям (4).

Найдем предварительно производные от $P_n(x)$:

$$\begin{aligned} P_n'(x) &= b_1 + 2b_2(x - x_0) + 3b_3(x - x_0)^2 + ... + nb_n(x - x_0)^{n-1} \\ P_n''(x) &= 2 \cdot 1 \cdot b_2 + 3 \cdot 2 \cdot b_3(x - x_0) + ... + n(n-1)b_n(x - x_0)^{n-2} \\ P_n'''(x) &= 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot b_3 + ... + n(n-1)(n-2)b_n(x - x_0)^{n-3} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_n^{(n)}(x) &= n(n-1)(n-2)...2 \cdot 1 \cdot b_n. \end{aligned} \tag{5}$$

Подставляя в левые и правые части равенств (3) и (4), а вместо x значение x_0, находим коэффициенты b_i $i = 0, ..., n$.

$$\left.\begin{aligned} &f(x_0) = P_n(x_0) = b_0 \\ &f'(x_0) = P_n'(x_0) = b_1 \\ &f''(x_0) = P_m''(x_0) = 2 \cdot 1 \cdot b_2 \\ &f'''(x_0) = P_n'''(x_0) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot b_3 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0) = n!b_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &b_0 = f(x_0) \\ &b_1 = f'(x_0) \\ &b_2 = \frac{1}{2!}f''(x_0) \\ &b_3 = \frac{1}{3!}f'''(x_0) \\ &\dots\dots\dots \\ &b_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0). \end{aligned}\right.$$

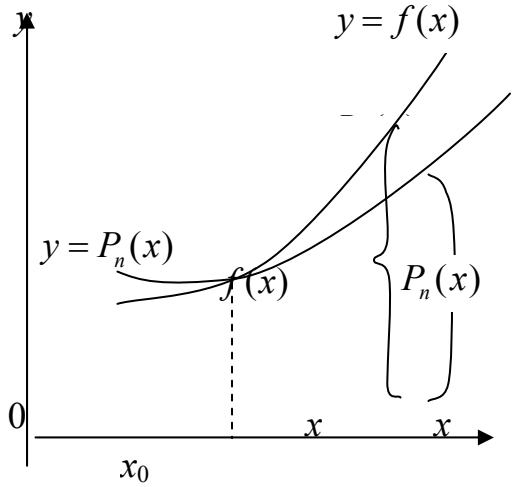
Подставляя найденные значения коэффициентов в равенство (3), получаем следующий многочлен:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

который называется *многочленом Тейлора* функции $f(x)$.

Докажем, что многочлен Тейлора удовлетворяет условию (2). Обозначим через $R_n(x)$ разность значений данной функции и построенного многочлена Тейлора: $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$.

На рисунке приведены графики функции $y = f(x)$ и ее многочлена Тейлора в окрестности точки x_0. Как видно, $R_n(x)$ есть погрешность, возникающая при замене функции $f(x)$ многочленом $P_n(x)$ и окрестности точки x_0. Для тех значений x из окрестности точки x_0, для которых погрешность $R_n(x)$ достаточно мала, многочлен $P_n(x)$ дает приближенное представление.



Согласно определению многочлена $P_n(x)$, из условий (4) следует, что $R_n(x_0) = R'_n(x_0) = \ldots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$. Докажем, что $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$. Применим n раз правило Лопиталя для раскрытия неопределенности $\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n}$ вида $\frac{0}{0}$ $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{R'_n(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \ldots$

$\ldots = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)} = \frac{R_n^n(x_0)}{n!} = 0$, т. е. $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$. Таким образом, доказана следующая важная теорема.

Теорема 11. *Если функция* $y = f(x)$ *определена и n раз дифференцируема в окрестности точки* x_0, *то при* $x \to x_0$ *имеет место формула* $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^n + o(x - x_0)^n$ *или в более краткой форме записи* $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o(x - x_0)^n$, (6)

где $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$ *— остаточный член в форме Пеано.*

Формула (6) называется формулой Тейлора n-го порядка с остаточным членом в форме Пеано.

Если в формуле Тейлора (6) положить $x_0 = 0$, получим частный вид формулы Тейлора, называемый обычно (и ошибочно!) *формулой Маклорена.*

$$f(x) = f(0) - f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n).$$

Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа

Потребуем, чтобы функция $f(x)$ имела n+1 производную в окрестности точки x_0. Введем новую функцию $g(x) = (x - x_0)^{n+1}$. Очевидно, что $g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n)}(x_0) = 0$, $g^{(n+1)}(x_0) = (n+1)! \neq 0$. Применим к функциям $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ и $g(x) = (x - x_0)^{n+1}$ теорему Коши. Тогда в силу условия $R_n(x_0) = R_n'(x_0) = \ldots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$ получим:

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{R_n'(C_1)}{g_n'(C_1)} = \frac{R_n'(C_1) - R_n'(x_0)}{g_n'(C_1) - g'(x_0)} = \frac{R_n''(C_2)}{g_n''(C_2)} = \ldots \frac{R_n^{(n)}(C_n)}{g_n^{(n)}(C_n)} =$$

$$= \frac{R_n^{(n)}(C_n) - R_n^{(n)}(x_0)}{g_n^{(n)}(C_n) - g^{(n)}(x_0)} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)},$$

где $C_1 \in \left]x_0; x\right[; C_2 \in \left]x_0; C_1\right[; \ldots, C_n \in \left]x_0; C_{n-1}\right[; \xi \in \left]x_0; C_n\right[\subset \left]x_0; x\right[$.

Таким образом, мы показали, что $\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)}$, где $\xi \in \left]x_0; x\right[$.

С учетом того, что $g(x) = (x - x_0)^{n+1}$, $g^{(n+1)}(\xi) = (n+1)!$ $R_n^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi)$,

имеем $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, $\xi \in \left]x_0; x\right[$. (7)

Формулу (7) называют остаточным членом формулы Тейлора в форме Лагранжа.

Так как $\xi \in \left]x_0; x\right[$, то ξ можно представить так: $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, где $0<\theta<1$, т. е. остаточный член в форме Лагранжа можно записать в виде $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$.

Таким образом, формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеет вид:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n +$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \text{ где } \quad \xi \in \left]x_0; x\right[.$$

Если в формуле Тейлора положить $x_0 = 0$, получим формулу Маклорена. Так как $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0<\theta<1$, то при $x_0 = 0$ $\xi = \theta \cdot x$, поэтому остаточный член формулы Маклорена $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$ $0<\theta<1$, а сама формула Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа имеет вид: $f(x) = f(0) + \dfrac{f'(0)}{1!}x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$, (8)

где $0<\theta<1$.

Приложения формулы Тейлора

Если функция $f(x)$ определена в окрестности $O_\delta(x_0)$, то для выделения ее главной части удобно использовать формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены в $O_\delta(x_0)$ и при $x \to x_0$ возможно представление $f(x) = g(x) + o(g(x))$. (9)

Тогда функция $g(x)$ называется главной частью функции $f(x)$ в окрестности точки x_0.

Из формулы (9) следует, что $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 + \dfrac{o(g(x))}{g(x)} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, т. е. при $x \to x_0$ главная часть $g(x)$ и сама функция $f(x)$ являются эквивалентными.

Пример 16. Выделить главную часть функции $f(x)=x^3+2x+1$ в $O_\delta(\infty)$.

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x+1}{x^3}=1$, то функция $g(x)=x^3$ является главной частью $f(x)$ в $O_\delta(\infty)$.

Следует заметить, что, если не задан вид функции, ее главная часть определяется неоднозначно.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано дает общий метод выделения главной части функции $f(x)$ в окрестности рассматриваемой точки x_0. Из формулы (6) следует, что главной частью функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 является ее многочлен Тейлора.

Для выделения главной части функции удобно использовать основные разложения с остаточными членами в форме Пеано.

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n);$$

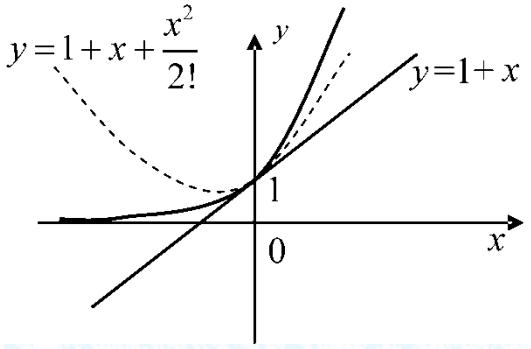
$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1});$$

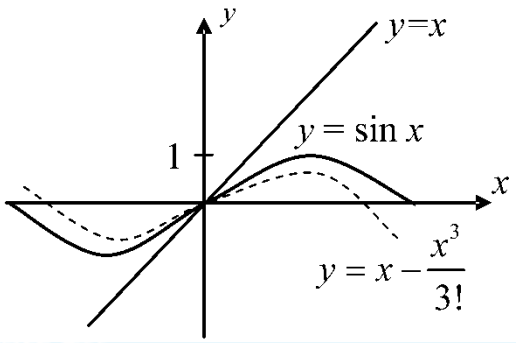
$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n});$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n);$$

$$(1+x)^\gamma=1+\gamma x+\frac{\gamma(\gamma-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\gamma(\gamma-1)\ldots(\gamma-n+1)}{n!}x^n+o(x^n).$$

Таким образом, используя многочлен Тейлора функции $f(x)$ в окрестности точки x_0, можно записать асимптотические (приближенные) формулы для $f(x)$ в $O_\delta(0)$: $e^x\approx 1+x$ $e^x\approx 1+x+\dfrac{x^2}{2!}$, $\sin x\approx x$, $\sin x\approx x-\dfrac{x^3}{3!}$. Повышая степень многочлена Тейлора, можно получить более точные приближения функции. Графики функций $y=e^x$, $y=\sin x$ и их многочленов Тейлора изображены на рисунках:





Если известны значения функции и ее производных в точке x_0, то для вычисления приближенных значений функции в $O_\delta(x_0)$ удобно использовать формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Значения *f(x)* в $O_\delta(x_0)$ вычисляются по формуле

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

погрешность приближения $|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|, x_0 < \xi < x$.

Пример 17. Вычислить $e^{0,1}$ с точностью до 0,001.

Решение. Запишем формулу Маклорена для e^x: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$, $R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$ $0<\theta<1$, при x=0,1 имеем $e^{0,1} \approx 1 + \frac{0,1}{1!} + \frac{0,01}{2!} + \ldots + \frac{(0,1)^n}{n!}$.

Погрешность приближения не должна превышать 0,001, следовательно $R_n(x) = \frac{e^{0,1\cdot\theta}(0,01)^{n+1}}{(n+1)!} < 0,001$.

Поскольку $e^{0,1\cdot\theta} < 2$, то $\frac{2}{10^{n+1}(n+1)!} < 0,001$. Полагая n = 1, 2, 3 …, находим, что последнее неравенство выполняется, начиная с $n = 3$ $e^{0,1} = 1 + \frac{0,1}{1} + \frac{0,01}{2!} + \frac{0,001}{3!} = 1,055$.

Пример 18. С помощью локальной формулы Тейлора вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{\operatorname{tg}^4 x}.$$

Сохраняя в знаменателе и числителе члены до четвертого порядка относительно x, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{\operatorname{tg}^4 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\cos x}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left[1+\frac{1}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2}x^4+o(x^4)\right]\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right]}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8}x^4+o(x^4)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{3}+\frac{o(x^4)}{x^4}\right]=\frac{1}{3}.$$

Пример 19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x+\frac{x^3}{6}}{x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^5}{120}+o(x^5)}{25}=\dfrac{1}{120}.$

$(\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5))$.

Пример 20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(x^3-x^2+\frac{x}{2})e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]=$

$$=\lim_{x\to\infty}x^3\left[(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2})(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+o(x^3))-(1+\frac{1}{2x^6}+o(\frac{1}{x^6})\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}x^3\left(\begin{array}{l}1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+o(\frac{1}{x^3})-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x^3}-\frac{1}{6x^4}+\\+o\left(\frac{1}{x^4}\right)+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2x^3}+\frac{1}{4x^4}+\frac{1}{12x^5}+o\left(\frac{1}{x^5}\right)-\\-1-\frac{1}{2x^6}+o\left(\frac{1}{x''}\right)\end{array}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}x^3\left(\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)=\frac{1}{6}.$$

Пример 21. Сколько нужно взять членов в формуле Маклорена для функции $f(x) = e^x$, чтобы получить многочлен, представляющий эту функцию на [-1, 1] с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

$f(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(x) = e^x$.

Вычислим значение функции e^x и ее (n-1) первых производных в точке x=0, а значение n-й производной в точке $\xi = \theta x$ ($0 < \theta < 1$).

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0, \qquad f^{(n)}(\xi) = e^{\xi} = e^{\theta x}$$

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n(x).$$

$R_n(x) = \dfrac{x^n}{n!} e^{\theta x}$, т. к. по условию $0 < \theta < 1$, то $|R_n(x)| < \dfrac{|x|^n}{n!} e^{\theta x} < \dfrac{1}{n!} e < \dfrac{3}{n!}$, следовательно, если $\dfrac{3}{n!} \le 0{,}001$, то заведомо будет выполняться неравенство $|R_n(x)| \le 0{,}001$. Для этого достаточно будет взять $n \ge 7$ (7! = 5040). Таким образом, в формуле Маклорена достаточно взять 7 членов.

§ 7. Исследование функций с помощью производных

Возрастание и убывание функции

С помощью производной функции можно произвести полное ее исследование (найти промежутки возрастания и убывания, экстремумы, точки перегиба, промежутки выпуклости и вогнутости, асимптоты графика) и построить график этой функции.

Теорема 12. *Для того, чтобы дифференцируемая на* $]a, b[$ *функция не убывала (не возрастала) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы* $f'(x) \ge 0$ ($f'(x) \le 0$) *для всех* $x \in]a, b[$. *Если же для любого* $x \in]a, b[$ $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), *то функция f возрастает (убывает) на этом интервале.*

Другими словами:

$f(x)$ *не убывает на* $]a, b[$ $\in$ *для любого* $x \in]a, b[$ $f'(x) \ge 0$;

$f(x)$ *возрастает на* $]a, b[$ $\in$ *для любого* $x \in]a, b[$ $f'(x) > 0$;

$f(x)$ не возрастает на $]a, b[\in$ для любого $x\in]a, b[$ $f'(x) \le 0$;

$f(x)$ убывает на $]a, b[\in$ для любого $x\in]a, b[$ $f'(x) < 0$.

Разберем, например, (1). Рассмотрим случай неубывающей функции.

Необходимость ($\Rightarrow$). Пусть $f(x)$ не убывает на $]a, b[$. Тогда для любого $x\in]a, b[$ при $\Delta x > 0$

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \ge 0 \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \ge 0$ для любого $x\in]a, b[$.

Достаточность ($\Leftarrow$). Пусть $f'(x) \ge 0$ для $x\in]a, b[$. Тогда по формуле Лагранжа имеем $f(x_2) - f(x_1) = f'(x)(x_2 - x_1)$. Так как $f'(\xi) \ge 0$ ($x_1<\xi<x_2$), то для всех $x_1, x_2\in]a, b[$ с $x_1<x_2$ выполнено $f(x_2) - f(x_1) \ge 0$, т. е. f не убывает на $]a, b[$.

Подчеркнем, что условия теоремы для возрастания и убывания функции достаточны, но не необходимы.

Геометрический смысл теоремы состоит в следующем: касательная к графику возрастающей на $]a, b[$ функции ($f'(x)>0$) составляет острый угол с осью Оx; касательная к графику убывающей на $]a, b[$ функции ($f'(x)<0$) образует тупой угол с осью Оx. Если функция $f(x)$ на $]a, b[$ является постоянной: $f(x) = C$, $C = \text{const}$, то $f'(x)=0$ и касательная к графику функции параллельна оси Оx.

Достаточные условия существования экстремума

Выяснить, какая из критических точек функции будет точкой ее локального экстремума, можно с помощью трех достаточных признаков существования экстремума функции.

Теорема 13 *(первый достаточный признак существования экстремума функции).*

Пусть x_0 — критическая точка непрерывной функции $f(x)$. Если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с «+» на «–», то x_0 — точка локального максимума; если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с «–» на «+», то x_0 — точка локального минимума; если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 не меняет знак, то x_0 не является точкой локального экстремума.

Доказательство. Пусть x_0 — точка возможного экстремума, причем $f'(x) > 0$ для всех $x \in O_\delta(x_0 - 0)$ и $f'(x) < 0$ для всех $x \in O_\delta(x_0+0)$.

Тогда при $f'(x) > 0$ для всех $x \in O_\delta(x_0 - 0) \Rightarrow f(x_0) > f(x)$, при $f'(x) < 0$ для всех $x \in O_\delta(x_0+0) \Rightarrow f(x_0) > f(x)$.

Следовательно, существует окрестность $O_\delta(x_0)$ точки x_0 такая, что $f(x_0) > f(x)$, т. е. точка x_0 является точкой локального максимума.

Теорема 14 *(второй достаточный признак существования экстремума).*

Стационарная точка x_0 функции $f(x)$, дважды дифференцируемой в $O_\delta(x_0)$, является точкой локального минимума $f(x)$, если $f''(x) > 0$, и точкой локального максимума, если $f''(x) < 0$.

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы и $f''(x) > 0$. Тогда $f'(x)$ в $O_\delta(x_0)$ возрастает, но $f'(x_0) = 0$, следовательно, в $O_\delta(x_0)$ $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+». Согласно предыдущей теореме точка x_0 является точкой локального минимума функции $f(x)$.

Если $f''(x) < 0$, то $f'(x)$ в $O_\delta(x_0)$ убывает, но $f'(x_0) = 0$, следовательно, в окрестности $O_\delta(x_0)$ производная $f'(x)$ меняет знак с «+» на «–». Согласно теореме 8 точка x_0 является точкой локального максимума функции $f(x)$, что и требовалось доказать.

Теорема 15. *Пусть функция $f(x)$ n раз непрерывно дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.*

Тогда:

1) *Если n — четное и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 — точка локального максимума.*

2) *Если n — четное и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 — точка локального минимума.*

3) *Если n — нечетное, то x_0 не является точкой локального экстремума.*

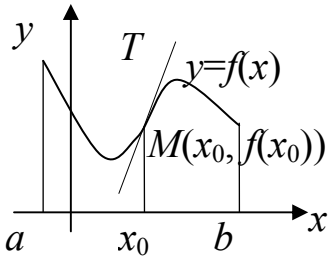
Исследование функции на выпуклость и вогнутость. Точки перегиба функции

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *выпуклым вниз* (или вогнутым) на $]a, b[$, если дуга кривой $y = f(x)$ распо-

ложена выше любой касательной, проведенной к графику данной функции.

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *выпуклым вверх* (или выпуклым) на $]a, b[$, если дуга кривой $y = f(x)$ расположена ниже любой касательной, проведенной к графику данной функции.

Точка $M(x_0, f(x_0))$ графика дифференцируемой функции $y = f(x)$, в которой направление выпуклости меняется на противоположное, называется *точкой перегиба*.



Пусть функция $f(x)$ имеет вторую производную $f''(x)$, непрерывную в точке x_0. Составим уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$:

$Y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, здесь $y_0 = f(x_0)$, а через Y обозначена текущая ордината касательной в отличие от текущей ординаты y из уравнения кривой $y = f(x)$. Разность ординат y-Y, соответствующих одной и той же абсциссе, будет равна:

$$r = y - Y = y - y_0 - f'(x_0)(x - x_0) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

С помощью формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа при $n = 1$ можем записать:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2,$$

следовательно, $r = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2$, где точка ξ находится между x и x_0. Из этой формулы следует, что r имеет такой же знак, что и $f''(\xi)$.

Возможны следующие случаи:

Случай 1. $f''(x_0) > 0$. Так как по условию $f''(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f''(x_0) > 0$, то для всех точек x, достаточно близких к x_0, будет выполнено $f''(x) > 0$. Поскольку точка ξ находится между x и x_0, то за счет приближения x к x_0 (как слева, так и справа от x_0), получим $f''(\xi) > 0$. Но тогда будет и $r > 0$, т. е. $y - Y > 0$ или $y > Y$. Тем же самым доказано, что в некоторой окрестности точки x_0 кривая лежит над касательной, т. е. в точке M кривая направлена выпуклостью вниз.

Случай 2. $f''(x_0) < 0$. Совершенно аналогично доказывается, что в этом случае в точке $M(x_0, y_0)$ кривая выпукла вверх.

Случай 3. $f''(x_0) = 0$. Если при этом $f''(x_0)$ слева и справа от точки x_0 имеет разные знаки, то это означает, что при переходе через точку x_0 разность r меняет знак, т. е. кривая переходит с одной стороны касательной на другую. В точке M имеется перегиб, и эта точка определяет участок, где кривая направлена выпуклостью вверх, от участка, где кривая направлена выпуклостью вниз.

Наличие только равенства $f''(x_0) = 0$ еще не обеспечивает наличие перегиба у кривой в точке x_0.

Например, если $f(x) = x^4$, то $f''(x) = 12x^2$ и $f''(0) = 0$. Однако кривая, изображающая эту функцию, в точке $x = 0$ перегиба не имеет.

Заметим также, что в точке x_0 может быть перегиб и в том случае, когда $f''(x_0)$ не существует. Достаточно, чтобы $f''(x)$ меняла знак при переходе через эту точку.

Полученные результаты можно представить в виде следующей таблицы.

$f''(x)$ при $x_0 - \delta < x < x_0$	$f''(x_0)$	$f''(x)$ при $x_0 < x < x_0 + \delta$	Заключение о кривой в точке x_0
	>0		Выпукла вниз
	<0		Выпукла вверх

<0	=0	>0	Перегиб
>0	не сущ.	<0	

Асимптоты графика функции

При исследовании поведения функции на бесконечности, т. е. при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$, или вблизи точек разрыва второго рода часто оказывается, что расстояния между точками графика функции и точек некоторой прямой с теми же абсциссами сколь угодно малы. Такую прямую называют *асимптотой* графика.

Различают асимптоты вертикальные (т. е. параллельные оси ординат) и наклонные. Частным случаем наклонной является горизонтальная асимптота.

1) Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов в точке x_0 равен бесконечности, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \pm\infty$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \pm\infty$.

Очевидно, что непрерывные на R функции вертикальных асимптот не имеют; такие асимптоты существуют только в точках разрыва второго рода функции $y = f(x)$. Следовательно, для отыскивания вертикальных асимптот графика функции надо определить те значения x, при которых хотя бы один из односторонних пределов функции бесконечен.

2) Прямая $y = kx+b$ называется наклонной (если $k = 0$ — горизонтальной) асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), если функцию $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = kx+b+\alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$).

Теорема 16. *Для того, чтобы график функции y=f(x) имел наклонную асимптоту y = kx+b, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx] = b$. (*)

Доказательство. *Необходимость.* Предполагаем, что $y = kx+b$ — наклонная асимптота графика функции $y = f(x)$. Тогда справедливо представление $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to +\infty$.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(k+\dfrac{b}{x}+\dfrac{\alpha(x)}{x}\right)=k$

$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim\limits_{x\to\infty}(b+\alpha(x))=b$.

Достаточность. Пусть существуют пределы (*), тогда согласно следствию: (если при $x\to x_0$ функция $f(x)$ имеет предел, то в $O_\delta(x_0)$ она представима в виде $f(x)=kx+b+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x\to x_0$); из второго равенства (*) получаем $f(x)=kx+b+\alpha(x)$ при $x\to+\infty$. Последнее представление функции $f(x)$ означает, что прямая $y=kx+b$ является наклонной асимптотой графика функции $y=f(x)$.

Итак, теорема доказана для случая $x\to+\infty$. Доказательство теоремы для случая $x\to-\infty$ производится аналогично.

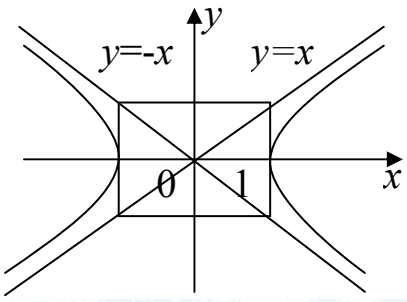
Замечание 5. При нахождении наклонных асимптот графика функции возможны следующие случаи: 1) оба предела (*) существуют и не зависят от знака бесконечности, тогда прямая $y=kx+b$ называют двусторонней асимптотой; 2) оба предела (*) существуют, но при $x\to\pm\infty$ они различны, тогда имеем две односторонние наклонные асимптоты; 3) если хотя бы один из пределов (*) не существует, то наклонных асимптот нет.

Пример 22. Найти асимптоты гиперболы $x^2-y^2=1$.

Решение. Запишем функцию в явном виде: $y=\pm\sqrt{x^2-1}$. Функция определена и непрерывна на множестве $]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$.

Находим пределы (*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\pm\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)=\pm1\Rightarrow k=\pm1$,

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}(\pm\sqrt{x^2-1}\mp x)=\pm\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}=0\Rightarrow b=0.$$



Асимптотами гиперболы являются прямые $y=\pm x$.

Общая схема исследования функции

Исследование дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ на $D(f)$ (за исключением, быть может, конечного множества точек) и построение ее графика можно выполнять по приводимой ниже схеме:

1. Находим $D(f)$, определяя точки разрыва, нули, периодичность, симметрию.
2. Находим асимптоты графика функции (если они существуют).
3. С помощью первой производной функции определяем стационарные точки и интервалы монотонности. Находим локальные экстремумы на $D(f)$.
4. Находим точки пересечения с осями координат.
5. С помощью второй производной определяем интервалы вогнутости и выпуклости графика функции, точки перегиба.
6. По результатам исследований строим график функций, для удобства сводя их в таблицу, построение которой покажем на примерах.

Пример 23. Исследовать и построить график функции $y = \frac{x^3}{3-x^3}$.

Решение.

1. Функция существует всюду, кроме точек $x = \pm\sqrt{3}$. Функция нечетная, т. к. $f(-x) = -f(x)$. Следовательно, ее график симметричен относительно начала координат. На этом основании можно ограничиться исследованием и построением графика только для $0 \le x < +\infty$. Затем, пользуясь симметричностью, можно будет легко получить и остальную часть графика.

2. Выясним вопрос об асимптотах.

а) Функция имеет разрыв второго рода в точке $x = \sqrt{3}$, причем $\lim_{x\to\sqrt{3}-0} \frac{x^3}{3-x^3} = +\infty$, $\lim_{x\to\sqrt{3}+0} \frac{x^3}{3-x^3} = -\infty$. Следовательно, прямая $x = \sqrt{3}$ является вертикальной асимптотой прямой.

б) $\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{3-x^2} = \infty$. Следовательно, горизонтальных асимптот нет.

в) $a = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{3-x^2} = -1$, $b = \lim_{x\to\infty}\big(y - (-x)\big) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{3-x^2} + x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{3-x^2} = 0$. Следовательно прямая $y = -x$ является наклонной асимптотой данной кривой. Так как пределы найдены для $x \to \infty$ (т. е. они одинаковы и при $x \to +\infty$, и при $x \to -\infty$), то к асимптоте $y = -x$ график функции будет приближаться как при удалении вправо, так и влево.

3. Найдем производную и приравняем ее к нулю $\dfrac{x^2(3-x)(3+x)}{(3-x^2)^2}=0$.

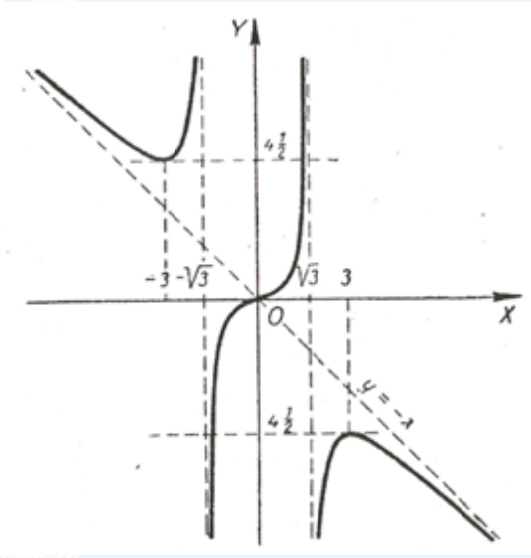
Откуда $x^2(3-x)(3+x)=0$. Последнее имеет место при $x=-3$, $x = 0$, $x = 3$. Нам придется исследовать на экстремум только точки $x = 3$ и $x=-3$ (точку $x = 0$ на экстремум не исследуем, т. к. она является крайней точкой области $[0;+\infty)$). Знак производной слева и справа от точки $x = 3$, очевидно, будет зависеть от знака числителя в выражении производной, т. к. знаменатель всегда положителен. В окрестности точки $x = 3$ имеем: $y' > 0$ при $x < 3$ и $y' < 0$ при $x > 3$. Следовательно, в точке $x = 3$ функция имеет максимум, $y|_{x=3}=-4\frac{1}{2}$. Ввиду симметричности при $x=-3$ и $y|_{x=-3}=4\frac{1}{2}$ будем иметь локальный минимум.

4. Так как $y = 0$ только при $x = 0$, то пересечение с осями координат происходит только в начале координат.

5. Определим точки перегиба и интервалы, на которых функция сохраняет направление вогнутости. Находим вторую производную:

$$y''=\left(\frac{9x^2-x^4}{(3-x^2)^2}\right)'=\frac{(3-x^2)^2(18x-4x^3)+(9x^2-x^4)(3-x^2)\cdot 4x}{(3-x^2)^4}=\frac{6x(9+x^2)}{(3-x^2)^3}.$$

Мы видим, что $y'' = 0$ при $x = 0$, $y'' > 0$ при $x > 0$ и $y'' < 0$ при $x < 0$. Следовательно, в начале координат кривая имеет перегиб (впрочем, наличие перегиба в начале координат обнаруживалось бы и после симметричного продолжения графика налево от оси Oy). Иногда направление вогнутости может измениться при переходе через разрыв кривой, поэтому следует выяснить знак y'' и около точек разрыва функции. В данном случае $y'' > 0$ на промежутке $(0,\sqrt{3})$ и $y'' < 0$ на промежутке $(\sqrt{3},+\infty)$. Следовательно, кривая вогнута вверх на $(0,\sqrt{3})$ и вогнута вниз на $(\sqrt{3},+\infty)$.



6. На основании проведенного исследования и того факта, что функция симметрична относительно начала координат, построим график функции.

Пример 24. $y = tg^2 \ln x$.

Решение. По правилу дифференцирования сложной функции находим:

$$y' = 2tg \ln x \cdot \frac{1}{\cos^2 \ln x} \cdot \frac{1}{x}.$$

Пример 25. Исследовать функцию $y = x^2 - \ln x^2$ на монотонность.

Решение. Множество задания функции: $x \neq 0$. Находим производную $y' = 2x - \frac{2}{x} = 2\frac{x^2 - 1}{x}$. Производная определена при $x \neq 0$. Находим нули производной $y' = 0$ при $x = 1, -1$. При $x = 0$ производная не существует. Определяем промежутки знакопостоянства y': при $x \in (-\infty, -1)$ $y' < 0$, т. к. $y'(-2) < 0$, при $x \in (-1, 0)$ $y' > 0$, т. к. $y'(-\frac{1}{2}) > 0$, при $x \in (0,1)$ $y' < 0$, при $x \in (1, +\infty)$ $y' > 0$.

Ответ: $y(x)$ строго возрастает на промежутках $[-1, 0)$ и $[1, +\infty)$; $y(x)$ строго убывает на промежутках $(-\infty, -1]$ и $(0,1]$.

РЕЗЮМЕ

Рассмотрены понятие производной и ее геометрическая интерпретация, основные теоремы дифференциального исчисления, формула Тейлора, а также исследование функции с помощью производной.

Глава 4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Смысл там, где змеи интегралы,
Меж цифр и букв, меж d и f.
В. Я. Брюсов

Цели и задачи

Сформировать представление об основных классах интегрируемых функций, геометрических приложениях определенного интеграла.

Знать таблицу неопределенных интегралов, понятия определенного и несобственного интегралов, основную теорему анализа, методы и подстановки для нахождения неопределенного интеграла.

Уметь применять метод подведения под знак дифференциала, интегрирование по частям, методы интегрирования квадратных трехчленов, рациональных и тригонометрических функций, технику интегрирования для нахождения длин кривых, площадей и объемов тел.

§ 1. Первообразная

Как известно, основная задача дифференциального исчисления заключается в отыскании производной или дифференциала заданной функции $y = f(x) \Rightarrow y' = f'(x)$. Рассмотрим обратную задачу. По заданной функции $f(x)$ восстановить такую функцию $F(x)$, для которой $f(x)$ была бы производной, т. е. $F'(x) = f(x)$. Такую функцию $F(x)$ принято называть *первообразной* для $f(x)$.

Определение 1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* (или примитивной) для функции $f(x)$ на некотором множестве X, если для любого $x \in X$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Пример 1. Функция $\sin(x)$ является первообразной для функции $\cos(x)$ на всей оси Ox, т. к. для любого $x \in R$ мы будем иметь $(\sin x)' = \cos x$.

Из этого примера важно заметить, что первообразной для функции $\cos(x)$ является не только $\sin(x)$, но и функция $\sin(x) + C$, где C — лю-

бая постоянная, т. к. $(\sin x + C)' = \cos x$. Указанное обстоятельство справедливо для любой функции $f(x)$, имеющей первообразную.

А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $F(x)$ — какая-нибудь первообразная для функции □(x) на некотором множестве X, тогда функция $F(x)+C$, где C — любая постоянная, также будет первообразной для $f(x)$.*

Обратно, всякая первообразная для $f(x)$ на множестве X может быть представлена в виде $F(x)+C$.

Доказательство. Так как производная от постоянной равна нулю, то $\left[F(x)+C\right]'' = F'(x) = f(x)$, т. е. наряду с $F(x)$ функция $F(x)+C$ есть также первообразная для $f(x)$.

Покажем теперь, что любая первообразная для $f(x)$ представима в виде $F(x)+C$. В самом деле, пусть $\Phi(x)$ — произвольная первообразная для $f(x)$ на данном множестве X, так что на X производная $\Phi'(x) = f(x)$, значит функции $\Phi(x)$ и $F(x)$ на множестве X имеют одну и ту же производную, тождественно равную 0, т. е. $\left[\Phi(x) - F(x)\right]' =$ $= \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

Как известно, производная от функции равна нулю тогда и только тогда, когда функция постоянна, следовательно, $\Phi(x) - F(x) = C_0 \Rightarrow$ $\Phi(x) = F(x) + C_0$. Таким образом, первообразная $\Phi(x)$ получается из выражения $F(x)+C$ надлежащим выбором произвольной постоянной $C = C_0$.

Определение 2. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Итак, по определению $\int f(x)dx \overset{def}{=} \left\{F(x)+C\right\} \quad C \in R$. (1)

В силу установившейся традиции равенство (1) без явного обозначения множества справа, т. е. вида $\int f(x)dx = F(x) + C$, при этом C называется произвольной постоянной.

§ 2. Основные свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;
3. $\int f'(x)dx = f(x) + C$;
4. $\int d(f(x)) = f(x) + C$.

Докажем, например, (1). Из определения определенного интеграла $\left(\int f(x)dx\right)' = \left[F(x) + C\right]' = F'(x) = f(x)$.

Доказательство (2), (3), (4) аналогичны (дать самостоятельно).

§ 3. Таблица основных интегралов

1. $\int dx = x + C$.
2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$.
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
4. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$.
5. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C, \quad |x| < |a|$.
6. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0\ \ a \neq 0$, в частности $\int e^x dx = e^x + C$.
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$.
9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{arctg} x + C$.

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

11. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a-x}{a+x}\right|$ $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C, |a| > |x|$.

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

13. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$.

14. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

§ 4. Основные правила интегрирования

1) Интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме интегралов слагаемых:

$$\int\left[f(x) + g(x) - \Psi(x)\right]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx - \int \Psi(x)dx.$$

Доказательство. $\left(\int\left[f(x) + g(x) - \Psi(x)\right]dx\right)' = f(x) + g(x) - \Psi(x)$

$$\left(\int f(x)dx + \int g(x)dx - \int \Psi(x)dx\right)' = \left(\int f(x)dx\right)' + \left(\int g(x)dx\right)' - \left(\int \Psi(x)dx\right)' =$$
$$= f(x) + g(x) - \Psi(x).$$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx;$$

$$\left(\int kf(x)dx\right)' = kf(x);$$

$$\left(k\int f(x)dx\right)' = k\left(\int f(x)dx\right)' = kf(x).$$

3) Свойство инвариантности формул интегрирования.

Всякая формула интегрирования сохраняет свой вид при подстановке в нее вместо независимой переменной любой дифференцируемой функции от нее, т. е. если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то и $\int f(u)du = F(u) + C$, где u = £(x) — любая дифференцируемая функция от x.

Доказательство. Из того, что $\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow F'(x) = f(x)$. Возьмем теперь функцию $F(u)=F[£(x)]$ для ее дифференциала в силу инвариантности вида первого дифференциала функции имеем: $d(F(u)) = F'(u)du = f(u)du$, отсюда $\int f(u)du = \int dF(u) = F(u) + C$.

Это правило очень важно. Основная таблица интегралов в силу данного правила оказывается справедливой независимо от того является ли переменная интегрирования независимой переменной или любой дифференцируемой функцией ее, таким образом, основная таблица сразу значительно расширяется.

Пример 2. $\int 2xe^{x^2}dx$.

Решение. Замечаем, что $d(x^2) = 2xdx$.

Тогда $\int 2xe^{x^2}dx = \int e^{x^2}d(x^2) = \int e^u du\Big|_{u=x^2} = e^u + C = e^{x^2} + C$.

Как показывает этот пример, нужно стараться так преобразовать подынтегральное выражение, чтобы оно приняло вид подынтегрального выражения одного из интегралов основной таблицы.

§ 5. Методы интегрирования

Метод подстановки (или замены в неопределенном интеграле)

Пусть мы имеем интеграл $\int f(x)dx$. Введем новую переменную t, вместо x, положив $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ монотонна (из монотонности функции $x = \varphi(t)$ вытекает существование обратной функции $t = \Psi(x)$) и дифференцируема (из дифференцируемости следует непрерывность), тогда будет справедлива формула $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt$. (2)

Действительно, используя свойство (2) неопределенного интеграла, продифференцируем обе части этого равенства. С одной стороны, $d\int f(x)dx = f(x)dx$, а с другой — $d\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt = d\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt =$ $= f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt = f(x)dx$ (т. к. $dx = \varphi'(t)dt$).

Таким образом, обе части формулы (2) имеют один и тот же дифференциал и потому выражают собой одно и то же семейство первообразных для функции $f(x)$. Это и доказывает равенство (2) в том

смысле, что правая и левая части его могут отличаться между собой разве лишь на постоянное слагаемое.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx$.

Здесь полезно применить подстановку $x = t^6$, освобождающую нас от радикалов. Дифференцируем это равенство: $dx = 6t^5 dt$. Тогда

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx = \int \frac{t^3 6t^5 dt}{t^2+1} = 6\int \frac{t^8}{t^2+1}dt = 6\int \left(t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1} \right) dt =$$

$$= 6\left(\frac{1}{7}t^7 - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t \right) + C.$$

Таким образом, $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1} = 6\left(\frac{1}{7}\sqrt[6]{x^7} - \frac{1}{5}\sqrt[6]{5} + \frac{1}{3}\sqrt{x} - \sqrt[6]{x} + \operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} \right) + C$.

Замечание. При замене переменной часто бывает выгоднее задавать x не как функцию t, а, наоборот, задавать t как функцию от x и писать подстановку в виде $t=\Psi(x)$. Теоретически оба способа равнозначны, т. к. если функция $x=\varphi(x)$ монотонна, то всегда можно выразить t как функцию x и написать $t=\Psi(x)$ (или $t = \varphi^{-1}(x)$). Однако при вычислении некоторых интегралов подстановка $t=\Psi(x)$ может оказаться более удобной. К сожалению, нельзя дать общих правил, по которым следует выбирать ту или иную подстановку применительно к заданному интегралу; умение разыскивать удачные подстановки достигаются практикой.

Отдельные замечания, относящиеся к определенным типам подинтегральных выражений, будут сделаны ниже вместе с указанием типичных подстановок. Однако не следует слепо придерживаться какого-то установившегося шаблона в выборе подстановки. Весьма часто встречаются интегралы, которые могут быть вычислены с помощью различных подстановок, и искусство вычислителя состоит в том, чтобы применить ту из них, которая быстрее и проще приведет к цели.

Пример 4. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x+2}}$.

Решение. Воспользуемся подстановкой $t=\sqrt[3]{x+2}$, $x=t^3-2$, $dx=3t^2dt$. Имеем $\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{x+2}}=3\int\frac{\left(t^3-2\right)t^2dt}{t}=3\int\left(t^4-2t\right)dt=3\left(\frac{1}{5}t^5-t^2\right)+C=$ $=\frac{3}{5}\sqrt[3]{\left(x+2\right)^5}-3\sqrt[3]{\left(x+2\right)^2}+C$.

Замечание. Вообще, если подынтегральное выражение не содержит других иррациональностей, кроме корня из линейной функции $\sqrt[n]{ax+b}$, то следует применять подстановку $t=\sqrt[n]{ax+b}$.

Интегралы от функций, содержащих трехчлен

Определение 3. Квадратный трехчлен, у которого коэффициент при x в первой степени равен нулю, называется *каноническим* (ax^2+c).

Лемма. *Всякий квадратный трехчлен можно привести к каноническому виду.*

Доказательство.

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x\right]+c=a\left[x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right]+c=$$

$$=a\left[x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right]+c-\frac{b^2}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)=at^2\pm k,$$

где $t=x+\frac{b}{2a}$, $c-\frac{b^2}{4a}=\pm k^2\Rightarrow ax^2+bx+c=a\left[t^2\pm d^2\right]$, $t=x+\frac{b}{2a}$, $d=\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}$.

Теорема 2. *Интегралы от функций, содержащих квадратные трехчлены* $f_1(x)=ax^2+bx+c$; $f_2(x)=\frac{1}{ax^2+bx+c}$; $f_3(x)=\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$; $f_4(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$; $f_5(x)=\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$; $f_6(x)=\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, *выражаются в конечном виде через многочлены, логарифм, арксинус, арктангенс и через квадратные корни трехчленов.*

Доказательство.

1) $\int\left(ax^2+bx+c\right)dx=a\frac{x^3}{3}+b\frac{x^2}{2}+cx+C$.

2) $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{dx}{a\left[x^2+\frac{2b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}\right]+c-\frac{b^2}{4a^2}} =$

$$= \int \frac{dx}{a\left[x+\frac{b}{2a}\right]^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{t^2 \pm d^2} = \frac{1}{a}\begin{cases} \frac{1}{d} arctg \frac{t}{d}, если\ t^2+d^2 \\ \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{t-d}{t+d}\right|, если\ t^2-d^2 \end{cases}.$$

3) $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}}{ax^2+bx+c}dx =$ (Выписываем знаменатель и находим его производную $\left(ax^2+bx+c\right)' = 2ax+b$) $=$

$= \frac{A}{2a}\int \frac{(2ax+b)}{ax^2+bx+c}dx + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{2a}\int \frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c} + S_2$

(интеграл из 2)) $= \frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)S_2$. Следовательно, интеграл $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$ равен двум интегралам, один из которых дает логарифм знаменателя, а второй сводится к виду $\int \frac{dt}{t^2 \pm d^2}$, т. е. выражается либо через логарифм дроби, либо через арктангенс.

4) $\int \sqrt{ax^2+bx+c}dx = \int \sqrt{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]}dx = \sqrt{a}\int \sqrt{t^2 \pm d^2}dt$

(возвратный интеграл. Интеграл такого вида находится через тригонометрические подстановки и будет нами рассмотрен далее.)

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm d^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|t+\sqrt{t^2 \pm d^2}\right| + C$, если $a > 0$, если $a < 0$ $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm d^2}} = \arcsin\frac{t}{d}$.

6) $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{(2ax+b)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Последний интеграл рассмотрен раньше и равен S_5. Первый же интеграл вычислим подведением под знак дифференциала.

$$\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{dU}{\sqrt{U}} = 2\sqrt{U} = 2\sqrt{ax^2+bx+c} + C.$$

Метод интегрирования по частям

Метод интегрирования по частям основан на обращении формулы дифференцирования произведения двух функций.

Пусть u и v — дифференциалы функции от x. Тогда $d(uv) = udv + vdu$, откуда $udv = d(uv) - vdu$. Проинтегрировав обе части этого равенства, получим формулу $\int udv = uv - \int vdu$. (3)

Она называется формулой *интегрирования по частям* и позволяет свести вычисление интеграла $\int udv$ к вычислению интеграла $\int vdu$, который может оказаться более простым для интегрирования.

Пример 5. $\int xe^x dx \left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{matrix} \right| = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$

Разобранный пример показывает, что применение метода интегрирования по частям состоит в том, что подынтегральное выражение $f(x)dx$ представляется в виде произведения двух множителей u и dv, причем последний содержит в себе и dx.

Общих правил для разложения подынтегрального выражения на указанные множители, к сожалению, дать нельзя. Однако следует иметь в виду, что разложение на множители подынтегрального выражения нужно проводить так, чтобы в результате дифференцирования одного множителя (т. е. u) и интегрирования другого множителя (т. е. dv) подынтегральное выражение vdu интеграла правой части формулы (3) по возможности легко интегрировалось. Разумеется, не всегда за счет указанной разбивки подынтегрального выражения на множители u и dv формула интегрирования по частям приводит к интегралу, более простому для интегрирования.

Замечание. Правило интегрирования по частям имеет более узкую область применения, чем метод замены переменной. Однако полезно запомнить семь типов интегралов, которые только и могут быть вычислены с помощью метода интегрирования по частям.

1) $\int e^x x^n dx$; 4) $\int x^n \ln^m x dx$; 6) $\int x^n \arcsin x dx$;

2) $\int \cos x \cdot x^n dx$; 5) $\int x^n \mathrm{arctg} x dx$; 7) $\int \ln x dx$.

3) $\int x^n \sin x dx$;

В первом, втором и третьем интегралах после n-кратного интегрирования по частям ($u = x^n$) получим табличные интегралы. В интегралах (4), (5), (6) и (7) выбираем трансцендентный множитель ($u = \ln x$; $u = \mathrm{arctg}\, x$; $u = \mathrm{arcsun}\, x$; $u = \ln^n x$).

Возвратные интегралы (приведение интеграла к самому себе)

$$I = \int \sqrt{x^2 + a} dx \left| \begin{array}{ll} u = \sqrt{x^2 + a} & du = \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2 + a}} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right| = x\sqrt{x^2 + a} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + a}}.$$

Вычислим второй интеграл $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \int \frac{(x^2 + a) - a}{\sqrt{x^2 + a}} dx =$ $= \int \sqrt{x^2 + a} dx - a \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \int \sqrt{x^2 + a} dx - a \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right|$. Подставляя последний результат в предыдущее равенство, находим $\int \sqrt{x^2 + a} dx = x\sqrt{x^2 + a} - \int \sqrt{x^2 + a} dx + a \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right|$.

Объединяя оба интеграла в левой части, будем иметь $2\int \sqrt{x^2 + a} dx = x\sqrt{x^2 + a} + a \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C$.

Отсюда $\int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C$. В результате интегрирования по частям получается равенство такого вида $I=uv+kI$, где $k \neq 1$. Объединяя его с интегралом в левой части, найдем ответ.

Если в результате повторного интегрирования получается ничего не дающее тождество, значит интегрирование проведено не рационально.

Полезно запомнить пять возвратных интегралов.

1) $\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx$; 3) $\int \sqrt{x^2 + a} dx$;

2) $\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx$; 4) $\int \cos(\ln x) dx$; 5) $\int \sin(\ln x) dx$.

Пример 6. В качестве еще одного примера применения метода интегрирования по частям выведем рекуррентную формулу для вычисления интеграла. $I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Применяя к этому интегралу формулу по частям, полагая

$$\left|\begin{matrix} u=\left(x^2+a^2\right)^n & du=\dfrac{-2nx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}} \\ dv=dx & v=x \end{matrix}\right|,$$

мы получим $I_n=\dfrac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+2n\int\dfrac{x^2dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}$.

Последний интеграл преобразуем следующим образом:

$$\int\frac{x^2dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}=\int\frac{x^2+a^2-a^2}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}dx=\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}-a^2\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}=I_n-a^2I_{n+1}.$$

Подставляя значение этого интеграла в предыдущее равенство, получим $I_n=\dfrac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+2nI_n-2na^2I_{n+1}$.

Откуда $I_{n+1}=\dfrac{x}{2na^2\left(x^2+a^2\right)}+\dfrac{2n-1}{2na^2}I_n$. (**)

Эта формула позволяет свести вычисление интеграла I_{n+1} к вычислению интеграла I_n и, следовательно, дает возможность шаг за шагом понизить значение n до 1 и в результате прийти к известному интегралу $I_1=\int\dfrac{dx}{x^2+a^2}=\dfrac{1}{a}arctg\dfrac{x}{a}$.

Такие формулы называются рекуррентными, т. е. «возвращающимися» к ранее полученным результатам. Полагая в (**) $n=1$, мы найдем $I_2=\dfrac{1}{2a^2}\dfrac{x}{x^2+a}+\dfrac{1}{2a^3}\text{arctg}\dfrac{x}{a}$.

§ 6. Интегрирование рациональных функций

Рациональной функцией (рациональной дробью) называется отношение двух многочленов $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\dfrac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_0}$, где b_j, a_i

$(i=\overline{0,m}; j=\overline{0,n})$ — вещественные числа, $m,n \in N$ (целые положительное числа).

Если $m \geq n$, то дробь неправильная, если же $m < n$ — дробь правильная.

Простые дроби и их интегрирование

Определение 4. Простейшими (элементарными) дробями называются дроби следующего вида: 1) $\frac{A}{x-a}$; 2) $\frac{A}{(x-a)^m}$, где $m=2,3,...$; 3) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$; 4) $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}$, где $m=2,3,...$ Кроме того, a,p,q,A,B — вещественные числа. Если в представленных дробях $\frac{p^2}{4}-q<0 \Rightarrow$ $\Rightarrow q-\frac{p^2}{4}>0$, то квадратный трехчлен не имеет вещественных корней.

Теорема 3. *Интеграл от любой простейшей дроби есть элементарная функция, выражающаяся через элементарные дроби, логарифмы и арктангенсы.*

Доказательство.

1) $\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{dx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a|+C$.

2) $\int \frac{A}{(x-a)^m}dx = A\int \frac{dx}{(x-a)^m} = A\int (x-a)^{-m}d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1}+C =$

$= \frac{A}{1-m}\frac{1}{(x-a)^{-1+m}}+C$.

3) $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$. Выпишем знаменатель и проведем с ним преобразования.

$$x^2+px+q = x^2+\frac{2p}{2}x+q = x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q =$$

$$= (x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4} = t^2+k^2,$$

где $t = x+\frac{p}{2}, k^2 = q-\frac{p^2}{4}$, $x = t-\frac{p}{2}, dx = dt$.

Далее заменим в исходном интеграле переменную x на переменную t. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{A(t-\frac{p}{2})+B}{t^2+k^2}dt = A\int \frac{tdt}{t^2+k^2} + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{dt}{t^2+k^2} =$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{d(t^2+k^2)}{t^2+k^2} + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{dt}{t^2+k^2} = \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| +$$

$$+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-p^2/4}}\operatorname{arctg}\frac{x+p/2}{\sqrt{q-p^2/4}} + C, \text{ где } k=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}.$$

4) $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}dx = \int \frac{At+(B-Ap/2)}{(t^2+k^2)^m}dt =$

$$= A\int \frac{tdt}{(t^2+k^2)^m} + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{dt}{\left(t^2+k^2\right)^m} == AK_1 + (B-\frac{Ap}{2})K_2,$$

где $K_1 = \int \frac{tdt}{(t^2+k^2)^m} = \frac{1}{2}\frac{(t^2+k^2)^{-m+1}}{-m+1} + C$, $K_2 = I_m = \int \frac{dt}{(t^2+k^2)^m}$.

Интеграл вида K_2 был рассмотрен ранее в примере 6.

Вывод. Простейшие дроби представленных видов интегрируются в конечном виде.

Основные теоремы алгебры

Теорема 4 (Гаусс). *Любое алгебраическое уравнение* $a_0 + a_1x + ... + a_nx^n = 0$, *где* $n \in N$, *имеет* n *корней (вещественных или комплексных). Если коэффициенты уравнения* $a_0,...,a_n$ *— вещественные числа, то каждому комплексному корню* $x_1 = \alpha + \beta i$ *соответствует другой комплексный корень* $x_2 = \alpha - \beta i$, *где* $i = \sqrt{-1}$ *— мнимая единица.*

Теорема 5. *Любой многочлен* n*-й степени* $f_n(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ (*) *может быть представлен в виде произведения* n *линейных сомножителей* $f_n(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$, *где* $x_1, x_2, ..., x_n$ *— корни уравнения* (*).

Замечания.

1. Если из n корней k корней равны между собой, т. е. $x_1 = x_2 = ... = x_k = x_0$, то x_0 называют корнем кратности k и вместо k одинаковых скобок можно записать одну вида $(x - x_0)^k$.

2. Если коэффициентами уравнения являются вещественные числа, то две скобки, соответствующие комплексно-сопряженным корням, можно записать в виде квадратного трехчлена $(x - x_1)(x - x_2) = (x - \alpha - \beta i)(x - \alpha + \beta i) = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = x^2 + px + q$.

3. Если рациональная дробь является неправильной $f(x) = \dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, то ее можно записать в виде $f(x) = R(x) + \dfrac{S(x)}{P_n(x)}$, где $R(x)$ — целая часть, а $\dfrac{S(x)}{P_n(x)}$ — правильная дробь. Добиться такого представления можно разделив столбиком числитель на знаменатель.

Теорема 6. *Каждая правильная дробь может быть представлена суммой конечного числа представленных выше простейших дробей, причем вид простейших дробей зависит от типов множителей, входящих в разложение знаменателя, а именно:*

а) Множителю вида $x - a$ соответствует дробь вида $\dfrac{A}{x - a}$.

б) Множителю вида $(x - a)^m$ соответствует m дробей вида $\dfrac{A_1}{x - a} + \dfrac{A_2}{(x - a)^2} + ... + \dfrac{A_m}{(x - a)^m}$, где $A_1, ..., A_m$ — некоторые неизвестные коэффициенты.

в) $x^2 + px + q$ соответствует дробь $\dfrac{Ax + B}{x^2 + px + q}$, где A, B — некоторые неизвестные коэффициенты.

г) Наконец, $\left(x^2 + px + q\right)^m$ соответствует m дробей $\dfrac{A_1 x + B_1}{x^2 + px + q} + \dfrac{A_2 x + B_2}{\left(x^2 + px + q\right)^2} + ... + \dfrac{A_m x + B_m}{\left(x^2 + px + q\right)^m}$.

Таким образом, получаем, что интеграл от любой рациональной функции выражается в конечном виде.

Правило для интегрирования рациональных функций

Выделяем целую часть и правильную дробь, если заданная дробь является неправильной. После чего целую часть интегрируем.

Находим корни знаменателя и раскладываем его на простые множители.

Представляем правильную дробь в виде суммы простейших дробей.

Простые дроби интегрируем.

Суммируем интегралы от целой части и простых дробей.

Пример 7. $\int \frac{x^4-2x^3+3x+4}{x^3+1}$.

Решение. Дробь неправильная. Разделим ее числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} x^4-2x^3+3x+4 & x^3+1 \\ \cline{2-2} -\underline{x^4 \qquad\quad +x} & x-2 \\ -2x^3+2x+4 & \\ -\underline{-2x^3 \qquad -2} & \\ -2x+6 & \end{array}.$$

Откуда $\frac{x^4-2x^3+3x+4}{x^3+1}=x-2+\frac{2x+6}{x^3+1}=x-2+2\frac{x+3}{x^3+1}$.

Разложим последнюю дробь на простейшие:

$$\frac{x+3}{x^3+1}=\frac{x+3}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

Отсюда получаем, $x+3=A(x^2-x+1)+(x+1)(Bx+C)$.

Далее, полагая $x=-1$, находим, что $2=3A \Rightarrow A=\frac{2}{3}$.

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получим:

$$x^2 \Big| A+B=0 \Rightarrow B=-\frac{2}{3}$$

$$x \Big| -A+B+C=1 \Rightarrow C=\frac{7}{3}.$$

Следовательно, $\frac{x+3}{x^3+1}=\frac{2}{3(x+1)}-\frac{2x-7}{3(x^2-x+1)}$.

Значит,

$$\int\frac{x^4-2x^3+3x+4}{x^3+1}=\int(x-2+2\frac{2}{3(x+1)}-\frac{2}{3}\frac{2x-7}{x^2-x+1})dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}-2x+\frac{4}{3}\ln|x+1|-\frac{2}{3}\left[\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx-6\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right]=$$

$$=\frac{x^2}{2}-2x+\frac{4}{3}\ln|x+1|-\frac{2}{3}\ln|x^2-x+1|+4\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

§ 7. Интегрирование иррациональных выражений и трансцендентных функций

Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции

1. Интегралы вида $\int\sin^n x\cos^m xdx$, где *m, n* — целые.

Основная задача нахождения таких интегралов сводится к понижению степени $\sin(x)$ или $\cos(x)$. Для этого можно воспользоваться тригонометрическими формулами приведения.

а) **Пусть одно из *m* и *n* нечетное, *m = 2p+1*.**

$\int\sin^n x\cos^m xdx=\int\sin^n x(1-\sin^2 x)^p d(\sin x)=\int t^n(1-t^2)^p dt$. Воспользуемся формулами $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, $\sin xdx=-d(\cos x)$, $\cos xdx=d(\sin x)$.

Пример 8.

$$\int\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\sin xdx=-\int\frac{(1-\cos^2 x)}{\cos^4 x}d(\cos x)=-\int\frac{1-t^2}{t^4}dt=\int\frac{dt}{t^2}-\int\frac{dt}{t^4}=$$

$$=-\frac{1}{t}+\frac{1}{3t^3}+C=-\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{3\cos^3 x}+C.$$

б) **Пусть *m, n* — четные неотрицательные.** Тогда воспользовавшись формулами: $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$; $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$; $\sin x\cos x=\frac{\sin 2x}{2}$ (*), получим $\int\sin^{2p} x\cos^{2q} xdx=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^p\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^q dx$.

Тогда указанный выше прием (а) не приводит к цели и предпочтительней прием, основанный на применении формул **(*)**, а именно пусть $m = 2k$, $n = 2l$, и $k > l$, $k = r + l$, тогда $\int \sin^{2k} x \cos^{2l} x dx =$

$$= \int \sin^{2r} x \left(\sin x \cos x\right)^{2l} dx = \frac{1}{2^{2l}} \int \sin^{2r} x \sin^{2l} 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2^{2l+r}} \int \left(1 - \cos 2x\right)^{r} \sin^{2l} 2x dx .$$

Применяя формулу бинома Ньютона и затем перемножая, мы получим сумму интегралов того же вида $\int \cos^{q} 2x \sin^{p} 2x dx$, но с показателями, меньшими первоначальных. Те из них, в которых хотя бы один из показателей p и q оказывается нечетным, вычисляются приемом (а). Интегралы, в которых оба показателя p и q четные, могут быть вычислены с помощью многократного применения формул (*).

Пример 9.

$$\int \sin^6 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x \sin^4 x dx = \frac{1}{16} \int \sin^2 2x (1 - \cos 2x)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{16} \int \sin^2 2x (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx = \frac{1}{16} \int \sin^2 2x dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x dx +$$

$$+ \frac{1}{16} \int \sin^2 2x \cos^2 2x dx = \frac{1}{32} \int \left(1 - \cos 4x\right) dx - \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d(\sin 2x) + \frac{1}{64} \int \sin^2 4x dx =$$

$$= \frac{1}{32} x - \frac{1}{128} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + \frac{1}{128} \int (1 - \cos 8x) dx = \frac{1}{32} x - \frac{1}{128} \sin 4x -$$

$$- \frac{1}{48} \sin^3 2x + \frac{1}{128} x - \frac{1}{1024} \sin 8x + C .$$

2. Интегралы вида $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$, где $m, n \in R$.

Подынтегральные функции легко приводятся к сумме первых степеней синусов и косинусов с помощью известных формул тригонометрии.

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\right],$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\right],$$

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right].$$

Пример 10.

$$\int \sin 3x \sin 5x dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos 2x - \cos 8x\right) dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x - \frac{1}{2}\int \cos 8x dx =$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C.$$

Пример 11.

$$\int \cos 2x \sin 4x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 6x + \sin 2x) dx = \frac{1}{2}\int \sin 6x dx + \frac{1}{2}\int \sin 2x dx =$$

$$= -\frac{1}{12}\cos 6x - \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

Существует подстановка, которая позволяет интегрировать любые выражения, содержащие $\sin(x), \cos(x)$. Об этом говорит следующая теорема.

Теорема 7. *Интегралы вида* $\int R(\cos x, \sin x) dx$ *всегда берутся в конечном виде. Для их выражения, кроме функций, встречающихся при интегрировании рациональных функций, нужны лишь еще тригонометрические функции.*

Доказательство. Пусть дан интеграл вида $\int R(\cos x, \sin x) dx$. Применим следующую подстановку $t = tg\frac{x}{2}$; $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ (эта подстановка возможна только на промежутках, не содержащих точек вида $2k\square$, $k \in Z$). Имеем:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1} = 2\frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{tg^2\frac{x}{2} + 1} = \frac{2t}{t^2 + 1};$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2};$$

$$\frac{x}{2} = \mathrm{arcctg}\, t; \quad \mathrm{dx} = \frac{2\mathrm{dt}}{1 + \mathrm{t}^2}.$$

В итоге получаем, что

$$\int R(\cos x; \sin x) dx = \int R\left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}; \frac{2t}{1 + t^2}\right)\frac{2dt}{1 + t^2} = \int R_1(t) dt,$$

а любая рациональная функция интегрируется до конца.

Подстановка $t = tg\frac{x}{2}$ называется *универсальной*, т. е. любое выражение, содержащее $\sin(x), \cos(x)$ при помощи этой подстановки интегрируется до конца.

Пример 12. $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{2(1+t^2)}{(1+t^2)2t} dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + c$.

Замечание. Возможны случаи, когда цель может быть достигнута с помощью более простых подстановок.

Если функция $R(\cos x, \sin x)$ не изменяется при одновременной замене $\sin x$ на $-\sin x$; $\cos x$ на $-\cos x$, то удобна подстановка $x = \mathrm{tg}\, x$ ($x = \mathrm{ctg}\, x$), где $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, т. е. $R(\cos x, \sin x) = R(-\cos x, -\sin x)$. Итак,

$$t = tgx\ ,\ x = \mathrm{arctg}x\ ,\ dx = \frac{dt}{1+t^2};$$

$$\sin x = \frac{\sin x}{1} = \frac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} = \frac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}}} =$$

$$= \frac{tgx}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}};\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}} = \frac{1}{1+t^2}.$$

Таким образом,

$$\int R(\cos x, \sin x)dx = \int R\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}; \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)\frac{dt}{1+t^2} = \int R_2(t)dt.$$

Если при замене $\sin x$ на $-\sin x$ подынтегральная функция изменяет знак, т. е. $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$, то рационализация достигается заменой $\cos x = t$, $-\sin x dx = dt$, $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-t^2}$ $dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

.

Если при замене $\cos x$ на $-\cos x$ $R(\cos x, \sin x)$ меняет знак, то рационализация достигается подстановкой $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$, $dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

Интегрирование квадратных иррациональностей

Если подынтегральная функция содержит квадратичные корни вида: $\sqrt{a^2-u^2}$, $\sqrt{a^2+u^2}$, $\sqrt{u^2-a^2}$, то удобны следующие соответствующие подстановки: $u=a\sin t$ (либо $u=a\cos t$; $u=a\,\mathrm{tg}\,t$ (либо $u=a\,\mathrm{ctg}\,t$); $u=a\sec t$ (либо $u=a\,\mathrm{cosec}\,t$).

Однако это утверждение не исключает другие подстановки.

Пример 13. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}=\left|\begin{matrix}x=\sin t; dx=\cos t dt\\ \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\cos t\end{matrix}\right|=\int\frac{\cos t dt}{\sin^2 t}=\int\frac{dt}{\sin^2 t}=$

$$=-\mathrm{ctg}t+C=-\frac{\cos t}{\sin t}+C=-\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}+C=\frac{-\sqrt{1-x^2}}{x}+C.$$

Интегрирование выражений, содержащих радикалы

1. Интегрирование функций вида $R\left(x,\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma\cdot x+\delta}}\right)$, где R — рациональная функция двух аргументов, m — натуральное число, $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ — некоторые константы.

При интегрировании таких функций полагают следующую замену $\frac{\alpha\cdot x+\beta}{\gamma\cdot x+\delta}=t^m$. После ее применения получается некоторая рациональная функция $\Psi(t)$ и интеграл запишется в виде $\int R(\Psi(t),t)\Psi'(t)dt$.

Пример 14. $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$.

Решение. Сначала преобразуем подынтегральную функцию $\frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}=\frac{1}{(x+2)^2}\sqrt[4]{\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^3}$. Теперь, полагая $\left(\frac{x+2}{x-1}\right)=t^4$, имеем $x=\frac{2+t^4}{t^4-1}, x+2=\frac{3t^4}{t^4-1}, dx=\frac{-12t^3}{t^4-1}dt$. Получили рациональную функ-

цию от переменной t. Тогда $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}} = \int \sqrt[4]{\left(\frac{(x+2)}{x-1}\right)^3} \frac{dx}{(x+2)^2} =$

$$= \int t^3 \frac{\left(t^4-1\right)^2}{9t^8} \cdot \frac{\left(-12t^3\right)}{\left(t^4-1\right)^2} dt = \int -4/3 \frac{dt}{t^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{t} + C = 4/3 \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} + C.$$

2. Интегрирование функций вида $\frac{R(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где $R(x)$ — рациональная функция. Выделяя из рациональной дроби $R(x)$ целую часть — многочлен $P(x)$, т. е. $R(x) = P(x) + \frac{\Phi(x)}{Q(x)}$ и представляя дробь $\frac{\Phi(x)}{Q(x)}$ в виде суммы простейших дробей, видим, что интегрирование функции $\frac{R(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ приводится к вычислению интегралов следующих типов:

а) $\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$, $P(x)$ — многочлен.

б) $\int \frac{Adx}{(x-\alpha)^k \sqrt{ax^2+bx+c}}$, A — константа.

в) $\int \frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^k \sqrt{ax^2+bx+c}}$, M, N — константы и трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней.

Укажем методы вычисления этих интегралов

а) Можно показать, что первообразную для функции $\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где $P(x)$ — многочлен степени n, следует искать в виде

$$\int \frac{P(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q(x) \cdot \sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (4)$$

где $Q(x)$ многочлен степени $(n-1)$ с неопределенными коэффициентами, а λ — неизвестная константа. Коэффициенты многочлена $Q(x)$ и число λ находятся при помощи дифференцирования тождества (4).

Пример 15. Вычислить $\int \frac{\left(x^3-2\right)dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

Решение.

Полагаем $\int \frac{\left(x^3-2\right)dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = (ax^2+bx+c)\sqrt{x^2+x+1} + \lambda\left(\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}\right)$.

Дифференцируя это тождество, имеем:

$$\frac{x^3-2}{\sqrt{x^2+x+1}} = (2ax+b)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{\left(ax^2+bx+c\right)\left(2x+1\right)}{2\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Откуда $2\left(x^3-2\right) = (4ax+2b)(x^2+x+1) + (ax^2+bx+c)(2x+1) + 2\lambda$. Для нахождения неопределенных коэффициентов a,b,c и λ запишем систему уравнений, приравняв коэффициенты при соответствующих степенях:

$$\begin{cases} 2 = 4a + 2a \\ 0 = 4a + 2b + a + 2b \\ 0 = 4a + 2b + b + 2c \\ -4 = 2b + c + 2\lambda \end{cases}.$$ Откуда $a = \frac{1}{3}, b = -\frac{5}{12}, c = -\frac{1}{24}, \lambda = -\frac{25}{16}$.

Следовательно,

$$\int \frac{x^3-2}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = \left(\tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{5}{12}x - \tfrac{1}{24}\right)\sqrt{x^2+x+1} - \tfrac{25}{16}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4}}} =$$

$$= \left(\tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{5}{12}x - \tfrac{1}{24}\right)\sqrt{x^2+x+1} - \tfrac{25}{16}\ln\left|x + \tfrac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1}\right| + C.$$

б) Интеграл вида $\int \frac{Adx}{\left(x-\alpha\right)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$ подстановкой $(x-\alpha) = \frac{1}{t}$ приводится к виду, рассмотренному в предыдущем пункте.

Пример 16. Вычислить $\int \frac{dx}{x^3(\sqrt{x^2+1})}$.

Решение. Положим $x = \frac{1}{t}$, тогда $dx = -1/t^2\,dt$ и для $t > 0$ имеем:

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}} = -\int \frac{t^3dt}{t^2\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} = -\int \frac{t^2dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\int \frac{t^2+1-1}{\sqrt{1+t^2}}dt = -\int \sqrt{1+t^2}dt +$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{-t\sqrt{1+t^2}}{2} - \tfrac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right| + \ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right| + C = -\frac{t\sqrt{1+t^2}}{2} +$$

$+1/2\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|+C$.

в) Рассмотрим вычисление интеграла $\int\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}\left(x^2+px|+q\right)}dx$.

Предположим сначала, что $ax^2+bx+c=\alpha(x^2+px+q)$, тогда $\int\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}\left(x^2+px+q\right)^m}dx=\int\frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+px+q\right)^{m+1/2}}dx$.

Поскольку $M_1x+N_1={M_1}/{2}\,(2x+p)+N_1-{M_1P}/{2}$, то $\int\frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+px+q\right)^{m+1/2}}dx=\ =C_1\int\frac{d(x^2+px+q)}{\left(x^2+px+q\right)^{m+1/2}}+B\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^{m+1/2}}$. Первый из полученных интегралов является табличным. Для вычисления интеграла $\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^{m+1/2}}$ применяется подстановка Абеля $t=\left(\sqrt{x^2+px+q}\right)'$.

В общем случае, в интеграле делают замену переменной так, чтобы во вновь полученных трехчленах одновременно исчезли слагаемые с первой степенью. Это достигается, например, с помощью дробно-линейной подстановки $x=\frac{\alpha\cdot t+\beta}{t+1}$, если $p\neq b/a$ и $x=t-\frac{p}{2}$, если $p=\frac{b}{a}$.

В результате получим интеграл $\int\frac{At+B}{(t^2+\lambda)^m\sqrt{\delta\cdot t^2+r}}dt$. Представим его в виде $\int\frac{Atdt}{(t^2+\lambda)^m\sqrt{\delta\cdot t^2+r}}+B\int\frac{dt}{(t^2+\lambda)^m\sqrt{\delta\cdot t^2+r}}$. К первому из этих интегралов применяем подстановку $U=\sqrt{\delta\cdot t^2+r}$, а ко второму — подстановку $V=\sqrt{\delta\cdot t^2+r}$.

Пример 17. Вычислить $\int\frac{(x+2)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$.

Решение. $\int\frac{(x+2)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}=\int\frac{xdx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}+\int\frac{2dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$.

$$\int\frac{xdx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dU}{(U+1)\sqrt{U+2}}=\frac{1}{2}\cdot\int\frac{2zdz}{(z^2-1)z}=\int\frac{dz}{z^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|+C=$$

$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2}-1}{\sqrt{x^2+2}+1}\right|+C$. Для вычисления интеграла $\int\frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$ положим $t=(\sqrt{x^2+2})'=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$. Тогда $t^2=\frac{x^2}{x^2+2}$, т. е.

$$x^2=\frac{2t^2}{1-t^2},t\sqrt{x^2+2}=x,\ dt\cdot\sqrt{x^2+2}+\frac{xtdx}{\sqrt{x^2+2}}=dx,\frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}=\frac{dt}{1-t^2}.$$

Следовательно, $\int\frac{2dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}=\int\frac{2dt}{1-t^2}\cdot\frac{1}{2t^2/1-t^2+1}=\int\frac{2dt}{1+t^2}=$

$=2arctg\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}+C$. В итоге получаем, что исходный интеграл равен

$$\int\frac{(x+2)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2}-1}{\sqrt{x^2+2}+1}\right|+2arctg\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}+C.$$

§ 8. Метод Остроградского

Иногда при интегрировании правильной рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ используют метод, суть которого состоит в выделении рациональной части первообразной.

Пусть $Q(x)$ имеет кратные корни (включая и комплексные). Составим многочлен $Q_2(x)$ так, чтобы все его корни были простые, и каждый корень $Q_2(x)$ являлся бы корнем многочлена $Q(x)$. Тогда $Q(x)=Q_1(x)Q_2(x)$, где корни $Q_1(x)$ есть корни многочлена $Q(x)$ с кратностями на единицу меньше. В частности, все простые корни $Q(x)$ будут корнями $Q_2(x)$ и не будут корнями $Q_1(x)$.

Справедливо соотношение $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\frac{R(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{\Phi(x)}{Q_2(x)}dx$, (5)

где $R(x)$ и $\Phi(x)$ — многочлены с неопределенными коэффициентами, степени которых соответственно на единицу меньше степеней много-

членов $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$. Неопределенные коэффициенты многочленов $R(x)$ и $\Phi(x)$ вычисляются при помощи дифференцирования равенства (5). Обычно метод Остроградского применяется, если многочлен $Q(x)$ имеет несколько корней большой кратности.

Пример 18. Вычислить $\int \frac{2x+12}{(x^2+4x+8)^2}dx$.

Решение. Полагаем $\int \frac{2x+12}{(x^2+4x+8)^2}dx = \frac{ax+b}{x^2+4x+8} + \int \frac{cx+d}{x^2+4x+8}dx$.

Дифференцируя это равенство, получаем $\frac{2x+12}{\left(x^2+4x+8\right)^2} =$

$= \frac{a(x^2+4x+8)-(2x+4)(ax+b)}{\left(x^2+4x+8\right)^2} + \frac{cx+d}{x^2+4x+8}$. Откуда

$$2x+12 = a(x^2+4x+8)-(2x-4)(ax+b)+(cx+d)(x^2+4x+8). \qquad (6)$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства (6).

$$\begin{cases} 0 = c \\ 0 = a - 2a + d + 4c \\ 2 = 4a - 4a + 2b + 4d + 8c \\ 12 = 8a - 4b + 8d \end{cases} \Rightarrow c = 0, a = d = b = 1.$$

Следовательно, $\int \frac{2x+12}{(x^2+4x+8)^2}dx = \frac{x+1}{x^2+4x+8} + \int \frac{dx(x+2)}{(x+2)^2+4} =$

$\frac{x+1}{x^2+4x+8} + \frac{1}{2} arctg \frac{x+2}{2} + C$.

§ 9. Определенный интеграл

Основные определения

Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a;b]$. Конечную совокупность точек $\{x_k\}_{k=0}^{n}$, где $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$, назовем разбиением отрезка и обозначим через T. Положим $M_k = \sup\limits_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)$, $m_k = \inf\limits_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)$, $(1 \le k \le n)$.

Тогда назовем $S(f,T)=\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$ *верхней суммой Дарбу*, а $s(f,T)=\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$ — *нижней суммой Дарбу* и положим $\underline{I}(f,[a;b])=\inf_T S(f,T)$, $\overline{I}(f,[a;b])=\sup_T s(f,T)$. При этом для любой ограниченной функции f на отрезке $[a;b]$ имеем $\overline{I}(f,[a;b])\le \underline{I}(f,[a;b])$.

Определение 5.

Если $\overline{I}=\underline{I}=I$, то функция f называется *интегрируемой* в смысле Римана на $[a;b]$ и число I называется определенным интегралом от f на $[a;b]$. Обозначать I будем так: $I=\int_a^b f(x)dx$.

Это определение эквивалентно следующему:

Пусть T — разбиение $[a;b]$ и $\{\xi_k\}_{k=1}^{k}$ — совокупность точек таких, что $x_{k-1}\le \xi_k \le x_k$, $k=\overline{1,n}$ тогда f интегрируема на $[a;b]$, если $\sigma=\lim_{\max(x_n - x_{k-1})\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_n - x_{k-1})$ существует и не зависит от выбора точек $\{\xi_k\}_{k=1}^{k}$, а также выбора разбиения T.

Таким образом, $\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$, где $\lambda=\max\{\Delta x_i\}$ (*).

Предел (*) будем понимать следующим образом: каждому числу $\varepsilon>0$ отвечает такое $\delta > 0$, что при любом способе дробления, при котором $\lambda < \delta$, и при любом выборе в соответствующих частотных промежутках значений ξ_i будет выполняться неравенство $\left|\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon$.

Из определения определенного интеграла как предела интегральной суммы непосредственно следует, что величина интеграла (*) (если он существует) зависит только от вида функции $f(x)$ и от чисел a и b. Следовательно, если $f(x)$ задана и пределы интегрирования a и b закреплены, то интеграл (*) определяется однозначно и представляет собой некоторое число.

Отсюда, в частности, следует, что определенный интеграл не зависит от переменной интегрирования. Поэтому x можно заменить лю-

бой другой буквой, и это не отразится на величине интеграла. Иными словами, определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, т. е. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = ... = \int_a^b f(u)du$.

Условия существования определенного интеграла

Закономерно возникает вопрос: для каких функций указанный предел (т. е. определенный интеграл) существует? Прежде всего, отметим, что имеются функции, от которых определенный интеграл заведомо не существует. Такими являются, например, все неограниченные функции.

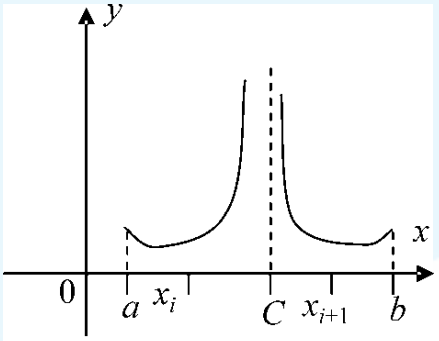


Рис. 4.1

Действительно, пусть функция $f(x)$ задана в промежутке $[a;b]$ и не ограничена в окрестности некоторой точки C внутри этого промежутка (рис. 4.1). Тогда, если разбить этот промежуток произвольным способом на части, то функция $f(x)$ будет неограниченной хотя бы в одной из них. Пусть, например, это произойдет в отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, содержащем точку C. В этом случае за счет надлежащего выбора точка ξ_i в промежутке $[x_i, x_{i+1}]$ слагаемое $f(\xi_i)\Delta x_i$ интегральной суммы, а вместе с ним и вся интегральная сумма могут быть сделаны по абсолютной величине сколь угодно большими.

Поэтому интегральная сумма не будет иметь конечного предела, а это означает, что определенный интеграл от неограниченной функции не существует.

Итак, если функция $f(x)$ интегрируема в $[a;b]$, то она необходимо **ограничена** в этом промежутке. Отсюда, вообще говоря, не следует, что всякая ограниченная функция интегрируема (т. е. установленное условие не является достаточным).

Поясним это на примере. Рассмотрим функцию Дирихле, которая определяется на сегменте [0, 1] следующим образом:

$$D(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \text{ — рационально} \\ 0, \text{ если } x \text{ — иррационально.} \end{cases}$$

Как мы видим, эта функция ограничена на [0, 1], однако не интегрируется на нем. В самом деле, если мы, составляя интегральные суммы σ, в качестве точек ξ_i будем брать, например, рациональные точки, то получим $\delta = 1$. Следовательно, и предел σ в этом случае при $\lambda \to 0$ (где λ — по-прежнему длина наибольшего частичного промежутка) будет тоже равен единице.

Если же все ξ_i брать иррациональными, то σ будет обращаться в нуль, и, значит, предел суммы σ при $\lambda \to 0$ в данном случае будет равен нулю. Таким образом, поведение интегральной суммы σ существенным образом зависит от выбора точек ξ_i и поэтому за счет одного лишь уменьшения λ интегральная сумма σ не может приблизиться ни к какому конечному пределу, а это значит, что функция $\Psi(x)$ не интегрируема в промежутке [0, 1].

Таким образом, для существования определенного интеграла от некоторой функции последняя, помимо ограниченности, очевидно должна обладать дополнительными свойствами, обеспечивающими ее интегрируемость.

Таким свойством, например, является **непрерывность**.

Теорема 8 (достаточное условие интегрируемости). *Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a, b]$, то она интегрируема на этом промежутке, т. е. существует интеграл* $\int_a^b f(x)dx$. (Оставим эту теорему без доказательства).

Не следует думать, что определенный интеграл существует только для непрерывных функций. Так, например, существует интеграл от функций, имеющих конечное число точек разрыва первого рода (таким образом, непрерывность функции является достаточным, но не необходимым условием ее интегрируемости).

Рассмотрим задачу.

Вычислить площадь плоской фигуры общего вида, а именно $aABb$, ограниченной сверху кривой $y=f(x)$, $a \le x \le b$, и с боков прямыми $x = a$ и $x = b$. Наконец, она ограничена снизу отрезком оси Оx. Такая фигура называется *криволинейной трапецией*. Итак, требуется найти (вычислить) площадь этой фигуры.

Разделим основание трапеции произвольным образом на конечное число частей, что равносильно дроблению промежутка [a, b], на котором задана функция $y = f(x)$, на n произвольных частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_i < x_{i+1} < ... < x_{n-1} < x_n = b$ и вычислим в этих точках ординаты кривой. Тогда в каждом из полученных промежутков $[x_i, x_{i+1}]$, где $i = \overline{0, n-1}$, выберем произвольную точку ξ_i, $(x_i \le \xi_i \le x_{i+1})$ и вычислим в ней координаты $f(\xi_i)$. Заменим приближенно i-ю полоску прямоугольником с основанием $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ и высотой, равной $f(\xi_i)$ (рис. 4.2).

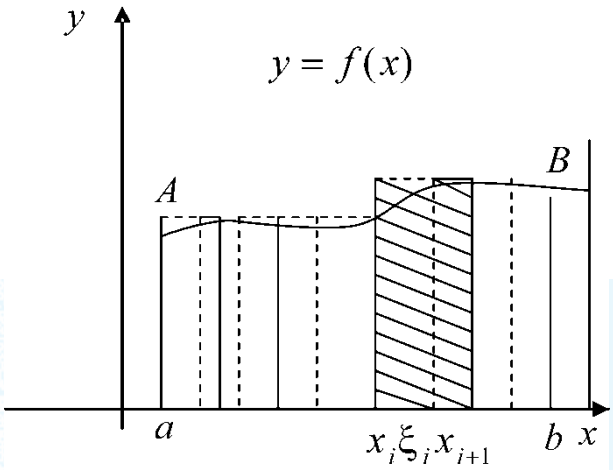


Рис. 4.2

В результате криволинейная трапеция заменится некоторой ступенчатой фигурой, составленной из отдельных прямоугольников. Так как площадь i-го прямоугольника равна $f(\xi_i)\Delta x_i$, то площадь всей ступенчатой фигуры, очевидно, станет равна:

$$P_{ступ} = f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + ... + f(\xi_{i-1})\Delta x_{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Естественно считать, что площадь при достаточно мелком дроблении промежутка [a, b] является приближенным значением площади P криволинейной трапеции, т. е. $P \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Что касается точного значения площади P, то оно получится как предел суммы площади указанных прямоугольников

$$P = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \text{, где } \lambda = \max\{\Delta x_i\}.$$

Напомним еще раз строгое аналитическое определение определенного интеграла, впервые данное для непрерывной функции в 1823 г. О. Коши (1789-1857). При этом Коши дал первое доказательство существования определенного интеграла от непрерывной функции. Позднее немецкий математик Б. Риман (1826-1866) показал, что определение, данное Коши, применимо к более широкому классу функ-

ций. Это позволило ему впервые высказать в общей форме определение интеграла и установить условия его существования.

Определение 6. Пусть функция $f(x)$ определена в промежутке $[a, b]$. Разобьем этот промежуток на n произвольных частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_i < x_{i+1} < ... < x_{n-1} < x_n = b$. В каждом из полученных частных промежутков $[x_i, x_{i+1}]$, где $i = \overline{0, n-1}$, выберем произвольную точку ξ_i $(x_i \le \xi_i \le x_{i+1})$. Вычислим значение функции $f(\xi_i)$ и умножим его на разность $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. После этого составим сумму Римана (иногда ее называют *интегральной*):

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i, \ \lambda = \max\{\Delta x_i\}. \qquad (7)$$

Если существует конечный предел интегральной суммы (7) при $\lambda \to 0$, не зависящий ни от способа дробления промежутка $[a, b]$, ни от выбора точек ξ_i, то этот предел называется *определенным интегралом* функции $f(x)$ по промежутку $[a, b]$ и обозначается символом $I = \int_a^b f(x)dx$ (ввел это обозначение Ж. Фурье (1768-1830).

Функция $f(x)$ называется *интегрируемой* в промежутке $[a, b]$, числа же a и b называются соответственно *нижним и верхним пределами* интегрирования.

Основные свойства определенного интеграла

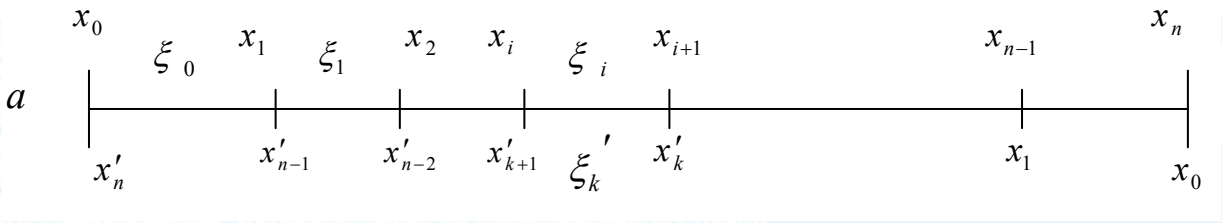
Свойство 1. Если переставить между собой пределы интегрирования, то определенный интеграл изменит только знак, т. е. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Доказательство. Пусть $a < b$. Составим интегральную сумму $\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ для дробления $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_i < x_{i+1} < ... < x_{n-1} < x_n = b$. Теперь поменяем местами a и b, т. е. будем считать a верхним пределом, а b нижним пределом интегрирования, сохраняя при этом все прежние точки дробления промежутка $[a, b]$ и все выбранные ранее точки ξ_i. Так как нумерация точек дробления промежутка всегда ведется в направлении от нижнего предела к верхнему, то прежние точ-

ки дробления x_i и точки ξ_i будут теперь занумерованы в обратном порядке:

$$b = x'_0 > x'_1 > x'_2 > \ldots > x'_i > x'_{i+1} > \ldots > x'_{n-1} > x'_n = a\,, \qquad (8)$$

где уже $\Delta x'_k = x'_{k+1} - x'_k < 0$, $(k = \overline{0, n-1})$.



Легко увидеть, что интегральная сумма $\sigma' = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x'_k$, составленная для точек дробления (8), отличается от прежней суммы σ только знаком $\sigma = -\sigma'$. (9)

Предел левой части этого равенства по условию существует и равен интегралу $\int_a^b f(x)dx$. Следовательно, существует и предел правой части и по определению этот предел и есть определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sigma'$. Переходя к пределу в равенстве (9) мы получим равенство (7).

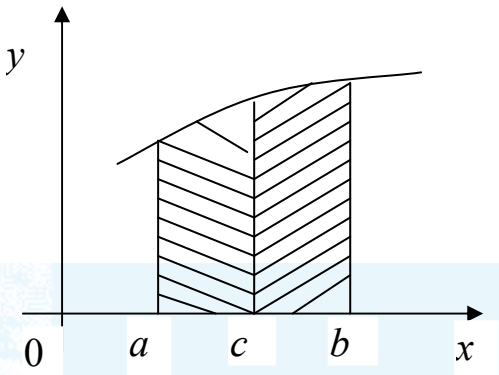
Свойство 2. (Аддитивность)

Каковы бы ни были числа a, b, c, всегда имеет равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,. \qquad (10)$$

Доказательство. Допустим сначала, что $a < c < b$. Так как предел интегральной суммы не зависит от способа дробления промежутка [a, b] на части, то будем дробить его так, чтобы точка всегда была точкой дробления промежутка. Если $c = x_m$, то интегральную сумму можно разбить на две: $\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{m-1} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=m}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$. Каждая из этих сумм является соответственной интегральной суммой функции $f(x)$ для промежутков [a, b], [a, c], [c, b]. Переходя к пределу при $\lambda = 0$, мы получим равенство (10).

Суть доказанного свойства состоит в том, что интеграл по всему промежутку оказывается равным сумме интегралов по частям. Другое взаимное расположение точек a,b,c легко сводится к рассмотренному случаю. Пусть, например, эти точки расположены так: $a<b<c$. Тогда по аналогии с доказанным будем иметь $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.



Откуда $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Установленное свойство интеграла в случае неотрицательной функции выражает простой геометрический смысл: *если криволинейная трапеция с основанием [a, b] разбита на две с основаниями [a, c] и [c, b], то площадь данной трапеции равна сумме площадей двух ее частей.*

Свойство 3. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла, т. е.: $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k\int_a^c f(x)dx$. (11)

Доказательство. Разобьем промежуток [a, b] произвольно на части и составим интегральную сумму для функции $kf(x)$. Очевидно, будем иметь $\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} k \cdot f(\xi_i)\Delta x_i = k\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$. Переходя в этом равенстве к пределу при λ→0, мы получим формулу (11).

Свойство 4. Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме их интегралов: $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$. (12)

Доказательство. Составим интегральную сумму для функции □(x) ±g (x). Очевидно, будем иметь:

$$\sum_{i=0}^{n-1} [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Остается в этом равенстве перейти к пределу при λ→0, чтобы получить формулу (12).

Эта формула легко распространяется на случай любого конечного числа слагаемых функций.

Свойство 5. Если $f(x)$ — неотрицательная на [a, b] функция, и нижний предел интеграла меньше верхнего, то и сам интеграл будет числом неотрицательным, т. е.: $\int_a^b f(x)dx \geq 0$. (13)

Доказательство. Пусть $a<b$ и $f(x)\geq 0$. Тогда при любом выборе ξ_i, будем иметь $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0$. Так как $f(\xi_i)\geq 0$ и $\Delta x_i \geq 0$, остается перейти к пределу при λ→0, чтобы получить неравенство (13).

Свойство 6. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы в промежутке [a, b], где $a<b$ и всегда выполнено $f(x)\leq g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$, (14)

т. е. неравенства можно почленно интегрировать.

Доказательство. Применяя предыдущее свойство к разности $g(x)-f(x)\geq 0$, получим $\int_a^b [g(x)-f(x)]dx \geq 0$. Но в силу свойства (10)

$$\int_a^b [g(x)-f(x)]dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx,$$

следовательно, $\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0$, откуда и получаем (14).

Замечание. Несколько труднее доказывается более точный результат, а именно если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в [a, b] и $f(x)\leq g(x)$, причем $f(x)$ не всюду равна $g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$ (т. е. равенство исключается).

Свойство 7. Если функция $f(x)$ задана в промежутке [a,b], и $a<b$, то $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$, (15)

т. е. абсолютная величина интеграла не превосходит интеграл от абсолютной величины подынтегральной функции.

Доказательство. Применяя предыдущее свойство, проинтегрируем почленно очевидное неравенство $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$. В результате получим $-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$, а это равносильно неравенству (15).

Свойство 8. Если m и M — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ в промежутке [a, b], где $a<b$, то $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

Доказательство. По условию для любого $x \in [a, b]$ имеем $m \le f(x) \le M$. Проинтегрировав почленно эти неравенства, получим $m\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b f(x)dx \le M\int_a^b f(x)dx$, отсюда, заметив, что $\int_a^b f(x)dx = b-a$, требуемое неравенство $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

Свойство 9. (Теорема о среднем). *Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке [a, b], то в этом промежутке существует хотя бы одна точка c, такая, что* $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$. (16)

Доказательство. Пусть $a<b$. Так как функция $f(x)$ непрерывна на [a, b], то по теореме Вейерштрасса она принимает в этом промежутке как свое наибольшее значение M, так и свое наименьшее значение m, так что для любого x из [a, b] будем иметь $m \le f(x) \le M$. Отсюда в силу свойства 8 находим $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$, откуда $m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M$. Положим $\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \mu, (m \le \mu \le M)$. Так как число μ заключено между наибольшим и наименьшим значениями непрерывной функции $f(x)$ на промежутке [a, b], то непрерывная функция $f(x)$, принимающая значение m и M, по 2-й теореме Больцано–Коши должна принимать и все промежуточные значения между ними. Следовательно, найдется такая точка c из [a, b], что будем иметь $f(c) = \mu$

или $\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \mu$ величину $f(c)$ принято называть средним значением функции $f(x)$ в промежутке $[a, b]$. Заметим, что формула остается справедливой не только при $a<b$, но и при $a>b$. В самом деле, если $a>b$, то в силу свойства 1 будем иметь $\int_b^a f(x)dx = f(c)(a-b)$ и остается переставить пределы интегрирования, чтобы получить нужную формулу для этого случая.

Замечание. Формула (16) имеет простой геометрический смысл. Действительно, пусть функция $f(x)$ неотрицательна на $[a, b]$. Тогда, как нам известно, интеграл слева формулы (16) выражает площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой $y = f(x)$, а правая часть этой формулы представляет площадь прямоугольника с тем же основанием и высотой, равной $f(c)$ (рис. 4.3). Таким образом, формула (16) геометрически выражает тот факт, что для площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху непрерывной кривой, всегда существует равновеликий ей прямоугольник с тем же основанием и высота его равна одной из ординат этой кривой.

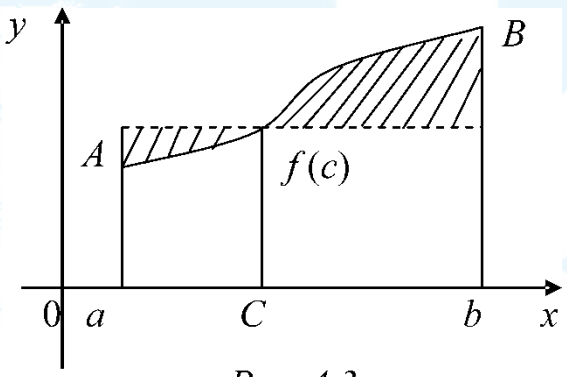
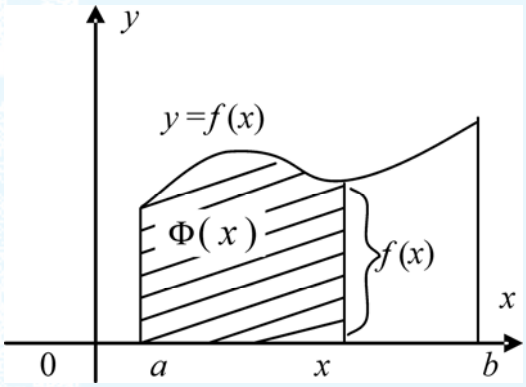


Рис. 4.3

Основная теорема анализа

Пусть функция f интегрируема на $[a, b]$, тогда f интегрируема и на $[a, x]$ $a \le x \le b$. Рассмотрим $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, $f(t) \ge 0$.

Следующую теорему будем считать основной.



Теорема 9 (Барроу). *Если* $f(x)$ *— непрерывная функция на* $[a, b]$ *и* $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$, *тогда* Φ *— дифференцируема на* $[a, b]$ *причем* $\Phi'(x)=f(x)$.

Доказательство.

По определению $\Phi'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}$. Тогда $\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)\Rightarrow$ $\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=\Phi(x)+\int_x^{\Delta x+x} f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$.

Применив теорему о среднем, получим $\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=f(c)\Delta x$, где $\Delta x<c<\Delta x+x$. Разделим обе части этого равенства на Δx, получим $\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=f(c)$. Если $\Delta x\to 0$, то $c\to x$, тогда в силу непрерывности $f(x)$ на $[a, b]$ будем иметь, что $f(c)$ стремится к $f(x)$. Поэтому в пределе получаем $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{i\to x} f(c)=f(x)$ или $\Phi(x)=f(x)$. Теорема доказана.

Следствие. Всякая непрерывная функция имеет первообразную.

Приведем еще одну теорему.

Теорема 10 (формула Ньютона–Лейбница). *Если* $F(x)$ *— какая-либо первообразная функции f(x), то справедлива формула* $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

Доказательство.

Раз $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ — тоже первообразная для $f(x)$, то выберем за первообразную $F(x)=\int_a^x f(t)dt+C$. Это равенство является справедливым для любого x. Выберем $x = a$. Тогда $F(a)=\int_a^a f(t)dt+C=C$. Теперь $x=b$. $\Rightarrow$ $F(b)=\int_b^b f(t)dt+C=C$. Значит

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b.$$

Правило. Значение определенного интеграла от непрерывной функции равно разности значений любой первообразной для нее при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Пример 19. Найти интегралы $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$, $\int_0^1 e^{2x} dx$, $\int_0^1 x^2 dx$.

Решение.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi/2} = -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = 1;$$

$$\int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(e^2 - e^0\right) = \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right); \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Замена переменной в определенном интеграле

Если функция $x = \varphi(t)$ удовлетворяет следующим условиям: 1) $\varphi(x)$ — непрерывная однозначная функция, заданная на $[\alpha, \beta]$ и имеющая в нем непрерывную производную $\varphi'(t)$; 2) значения функции $x = \varphi(t)$ при изменении t на отрезке $[\alpha, \beta]$ не выходят за пределы отрезка $[a, b]$; 3) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, тогда для непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$ справедлива формула замены переменной (или подстановки) в определенном интеграле: $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt$.

Часто вместо подстановки $x = \varphi(t)$ применяют обратную подстановку $t = \psi(x)$. В этом случае пределы α и β определяются непосредственно из равенств $\alpha = \psi(a)$ и $\beta = \psi(b)$. На практике замену переменной обычно производят с помощью монотонных непрерывно дифференцируемых функций. При этом замену пределов интегрирования удобно записывать в виде таблицы.

x	t
a	α
b	β

Пример 20. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{6 - 5\sin x + \sin^2 x}$.

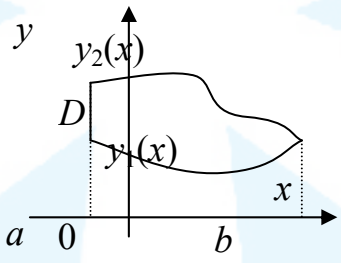
Решение. Применим подстановку $\sin x = t, \cos x dx = dt$. Обратная функция $x = \arcsin t$ ($0 \le x \le \frac{\pi}{2}$) при $0 \le t \le 1$ удовлетворяет всем условиям замены переменной. Следовательно,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{6-5\sin x+\sin^2 x} = \int_0^1 \frac{dt}{6-5t+t^2} = \int_0^1 \frac{d\left(t-\frac{5}{2}\right)}{\left(t-\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{4}} =$$

$$= ln\left|\frac{t-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}}{t-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}\right|\Bigg|_0^1 = \ln\left|\frac{t-3}{t-2}\right|\Bigg|_0^1 = \ln\frac{4}{3}.$$

§ 10. Геометрическое приложение определенного интеграла

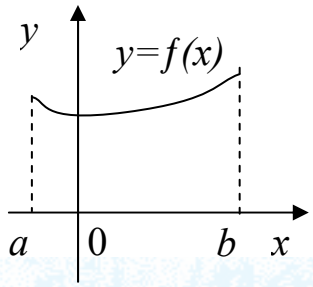
Площадь плоской области

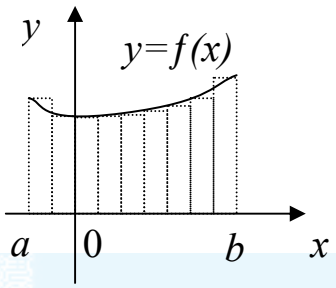


Пусть xOy — декартова система координат на плоскости. Стандартной относительно оси Ox *областью* D называется множество точек $M(x,y)$, для которых $a \le x \le b$, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — непрерывные функции на [*a, b*].

Геометрически это означает, что слева и справа область ограниченна соответственно отрезками прямых $x=a$, $x=b$, которые могут быть вырождающимися в точку. График функции $y = y_1(x)$, в свою очередь, является верхней, а график функции $y = y_2(x)$ нижней границей области D.

Аналогично, стандартная область относительно оси Oy — это множество точек $M(x,y)$, для которых $c \le y \le d$, $x_1(y) \le x \le x_2(y)$, где $x_1(y)$ и $x_2(y)$ — непрерывные функции на [*c*, *d*]. В этом случае область D сверху и снизу ограничена отрезками прямых $y=c$, $y=d$, слева и справа графиками функций $x=x_1(y)$ и $x=x_2(y)$. Рассмотрим частный случай стандартной относительно оси Ox области D, когда $y_1(x) \equiv 0$, а $y = f(x)$ — верхняя граница. Такую область называют *криволинейной трапецией*.





Пусть T: $a=x_0<x_1<x_2,\ldots<x_i<x_{i+1}<\ldots<x_n=b$ — разбиение отрезка $[a,b]$. Обозначим через $m_i=\min\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$ и $M_i=\max\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$, а через $s_T=\sum\limits_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})$ и $S_T=\sum\limits_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})$. Тогда s_T и S_T представляют собой площади фигур, составленных из прямоугольников, основаниями которых являются отрезки $[x_{i-1},x_i]$, а высотами — соответственно наибольшее и наименьшее значения функции $y=f(x)$ на этом отрезке. Первая из фигур содержит внутри себя рассматриваемую криволинейную трапецию, вторая содержится внутри нее. Естественно требовать, чтобы площадь S_D криволинейной трапеции D удовлетворяла соотношению $s_T\le S_D\le S_T$ при любом разбиении T. Так как функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то $\sup\limits_T s_T=\inf\limits_T S_T=\int\limits_a^b f(x)dx$.

Определение 7. *Площадью* S_D криволинейной трапеции D называется величина $S_D=\sup\limits_T s_T=\inf\limits_T S_T$. Сразу из определения следует, что $S_D=\int\limits_a^b f(x)dx$.

Площадь S_D стандартной относительно оси Оx области D:

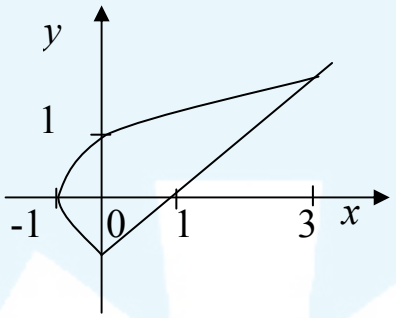
($D=\{(x,\ y);\ a\le x\le b,\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$) вычисляется по формуле $S_D=\int\limits_a^b\left[y_2(x)-y_1(x)\right]dx$.

Площадь S_D стандартной относительно оси Оy области D:

($D=\{(x,\ y);\ a\le x\le b,\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$) вычисляется по формуле $S_D=\int\limits_a^b\left[x_2(y)-x_1(y)\right]dx$. Если область D можно разбить на конечное

число областей D_i $1 \le i \le k$, $D = \bigcup_{i=1}^{k} D_i$ без общих внутренних точек, то площадь S_D равна сумме площадей S_{D_i}, т. е. $S_D = \sum_{i=1}^{k} S_{D_i}$.

Пример 21. Найти площадь области, ограниченной линиями $y = x - 1$; $y^2 = x + 1$.



Решение. Данная область является стандартной относительно оси Оx, а именно $D = \{(x, y) : -1 \le x \le 3, y_1(x) \le y \le \sqrt{x+1}\}$, где $y_1(x) = \begin{cases} -\sqrt{x+1}, & -1 \le x \le 0 \\ x - 1, & 0 < x \le 3 \end{cases}$. Также область является стандартной и относительно оси Оy, т. е. $D = \{(x, y) : -1 \le y \le 2, y^2 - 1 \le x \le y + 1\}$.

Площадь S_D данной области можно вычислить одним из двух способов.

1. $S_D = \int_{-1}^{3} (\sqrt{x+1} - y_1(x))dy = \int_{-1}^{0} 2\sqrt{x+1}dx + \int_{0}^{3} (\sqrt{x+1} - x + 1)dx =$

$$= \frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{0} + \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{3} - \frac{x^2}{2} + x\Big|_{0}^{3} = \frac{9}{2}.$$

2. $S_D = \int_{-1}^{2} (y + 1 - y^2 + 1)dy = \left(\frac{y^2}{2} + y - \frac{y^3}{3} + y\right)\Big|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}.$

Как видим, ответ получился одинаковым.

Вычисление площади области, ограниченной параметрически заданной кривой

Пусть область D ограничена непрерывной замкнутой кривой $\Gamma : x = x(t), y = y(t), \quad t \in [T_0, T_1], \quad x(T_0) = x(T_1), y(T_0) = y(T_1)$. Рассмотрим подробно простейший случай. Пусть отрезок $[T_0, T_1]$ делится точкой $\Gamma \in (T_0, T_1)$ так, что на каждом из отрезков $[\Gamma, T_1]$ и $[T_0, \Gamma]$ функция x строго монотонна и непрерывно дифференцируема. Тогда кривая Γ состоит из двух ветвей, каждая из которых есть график однозначной непрерывной функции: $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$.

Предположим еще, что для любого x выполнено соотношение $y_1(x) \le y_2(x)$. Тогда кривая $y = y_2(x)$ есть верхняя, а кривая $y = y_1(x)$ — нижняя границы области D. Если при возрастании t, кривая Γ проходит так, что область D остается слева (положительное направление обхода), то верхняя граница области D проходится справа налево (значение x убывает), а нижняя граница области D проходится слева направо (значение x возрастает) (рис. 4.4). Итак, если S_D — площадь области, то имеем: $S_D = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))dx =$

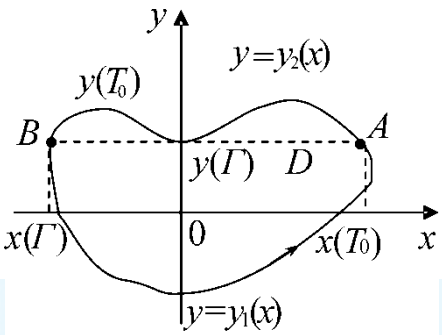


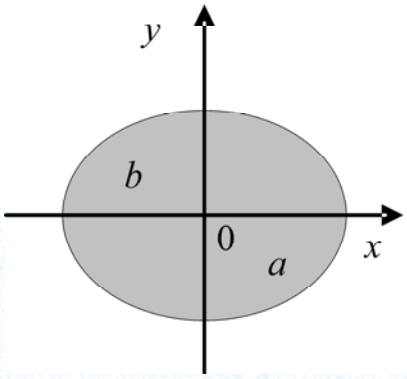
Рис. 4.4

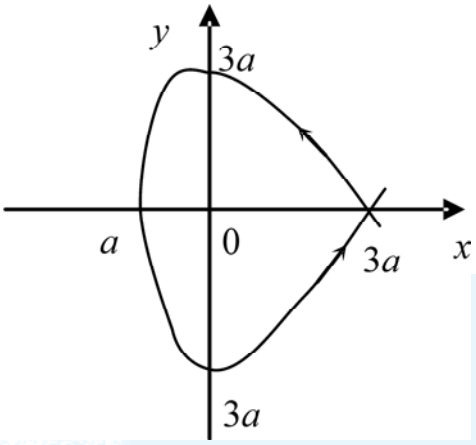
$= \int_a^b y_2(x) - \int_a^b y_1(x)dx$. Сделав в первом интеграле замену $x = x(t)$, $t \in [T_0, \Gamma)$, а во втором — $x = x(t)$, $t \in [\Gamma, T_1)$, получаем, что т. к. $y_2(x(t)) = y(t)$, $t \in (T_0, \Gamma]$ и $y_1(x(t)) = y(t)$, $t \in [\Gamma, T_0)$, то $S_D = -\int_{T_0}^{\Gamma} y(t)x_t'dt - \int_{\Gamma}^{T_1} y(t)x_t'dt = -\int_{T_0}^{T_1} y(t)x_t'dt$.

Таким же образом получаем, что если отрезок $[T_0, T_1]$ делится точкой $\Gamma \in (T_0, T_1)$ так, что на каждом из отрезков $[\Gamma, T_1]$ и $[T_0, \Gamma]$ функция y строго монотонна и непрерывно дифференцируема, то $S_D = \int_{T_0}^{T_1} x(t)y'_t\,dt$. Наконец, объединяя эти две формулы, получаем следующую: $S_D = \frac{1}{2}\int_{T_0}^{\Gamma_1} (x(t)y'(t) - y(t)x_t')dt$.

Замечание. *Можно доказать, что все эти три формулы справедливы и в более общем случае, когда непрерывная замкнутая кривая Г: x=x(t), y=y(t), t∈[T₀,T₁], проходится при изменении t от T₀ до T₁ таким образом, что ограничиваемая этой кривой область D остается слева. Какую из них удобнее применить, зависит от конкретного вида функций x=x(t) и y=y(t).*

Пример 22. Вычислить площадь эллипса $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$.





Решение. Ввиду симметрии кривой, достаточно вычислить площадь части эллипса, находящейся в I четверти.

$$S_D = 4\int_0^a y dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} b\sin ta(-\sin t)dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt =$$

$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = 2ab(t - \frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2ab\frac{\pi}{2} = \pi ab.$$

Пример 23. Найти площадь области, ограниченной петлей кривой $x = a(t^2 - 2t), y = (t^2 - 1)(t - 3), a > 0$.

Решение. Петля кривой проходится в положительном направлении при изменении t от –1 до 3. Для вычисления площади можно применить любую из трех формул, соответственно имеем:

$$S_D = -\int_{T_0}^{T_1} x'(t) y_t dt = -\int_{-1}^{3} a^2(t^2 - 1)(t - 3)(2t - 2)dt =$$

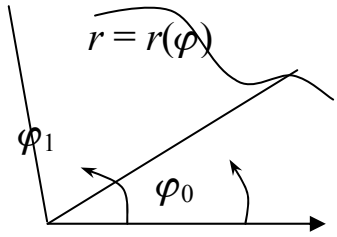
$$= \int_{-1}^{3} (t^4 - 4t^3 + 2t^2 + 4t - 3)dt = -2a^2(\frac{t^5}{5} - t^3 + \frac{2t^3}{3} + 4t^2 - 3t)\Big|_{-1}^{3} = 17\frac{1}{15}a^2$$

$$S_D = \int_{T_0}^{T_1} x(t) y'_t dt = \int_{-1}^{3} a^2(t^2 - 2t)(3t^2 - 6t - 1)dt = a^2(\frac{3}{5}t^5 - 3t^4 + \frac{11}{3}t^3 + t^2)\Big|_{-1}^{3} = 17\frac{1}{15}a^2$$

$$S_D = \frac{1}{2}\int_{T_0}^{T_1} (x(t) y'_t - x'_t y(t))dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{3} a^2(t^4 - 4t^3 + 7t^2 - 6t + 6)dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}(\frac{1}{5}t^5 - t^4 + \frac{7}{3}t^3 - 3t^2 + 6t)\Big|_{-1}^{3} = 17\frac{1}{15}a^2.$$

Рассмотрим на плоскости полярную систему координат. В этом случае аналогом криволинейной трапеции будет криволинейный сектор, т. е. множество точек $M(r,\varphi)$: $\varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1 (\varphi_1 - \varphi_0 \le 2\pi)$, $0 \le r \le r(\varphi)$, где $r(\varphi)$ — непрерывная функция на $[\varphi_0, \varphi_1]$. Площадь S_D криволинейного сектора



$$D = \{(r,\varphi) : \varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1, 0 \le r \le r(\varphi)\}$$

вычисляется по формуле $S_D = \dfrac{1}{2}\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^2(\varphi)d\varphi$.

Пример 24. Вычислить площадь одного лепестка розы $r = a\sin k\varphi$ $(a > 0)$.

Решение. Кривые, определяемые уравнением $r = a\sin k\varphi$, а также уравнением $r = a\cos k\varphi$, где a, k — постоянные величины, называются розами. Если k — четное число, то кривая имеет $2k$ лепестков, если k — нечетное, то кривая имеет k лепестков. Например, кривая $r = \sin 2\varphi$ имеет 4 лепестка, а кривая $r = \sin 3\varphi$ — три. Чтобы найти площадь одного лепестка, определим, как изменяется полярный угол φ, когда радиус-вектор описывает один лепесток. Положим в $r = a\sin k\varphi$ $r = 0$ и решим уравнение $a\sin k\varphi = 0$. Из него следует, что $\sin k\varphi = 0$, а отсюда $k\varphi = \pi n$, при $n = 0, \varphi = 0$. При $n = 1$ имеем $k\varphi = \pi$. Откуда $\varphi = \pi/k$. Таким образом, угол φ изменяется от 0 до π/k, а площадь одного лепестка равна:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{k}} a^2 \sin^2 k\varphi d\varphi = \frac{1}{2}a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{k}}\left(\frac{1-\cos 2k\varphi}{2}\right)d\varphi = \frac{1}{2}a^2\left(\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin 2k\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{k}} =$$

$$= \frac{1}{2}a^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{k} - \frac{1}{4}\sin 2k\frac{\pi}{k}\right) = \frac{\pi a^2}{4k}.$$

Длина дуги кривой

Определение 8. *Дугой* кривой Γ назовем образ отрезка $[T_0, T_1]$ при непрерывном биективном отображении $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [T_0, T_1]$ и обозначим Γ: $\{x(t), y(t), z(t)\}$, $t \in [T_0, T_1]$.

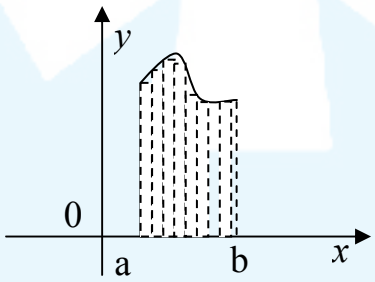
Пусть $\Gamma: T_0=t_0<t_1<t_2<...<t_n=T_1$ — разбиение отрезка $[T_0,T_1]$. Каждой точке разбиения Γ соответствует точка $M_k=(x(t_k),y(t_k),z(t_k))$, $0\le k\le n$ на кривой Γ. Через Γ_σ обозначим ломаную с вершинами $M_0,M_1,...,M_n$, а ее длину обозначим через $|\Gamma|=\sup\limits_{\Gamma}|\Gamma_\sigma|$.

Определение 9. *Длиной дуги* Γ называется число $|\Gamma|=\sup\limits_{\Gamma}|\Gamma_\sigma|$.

Заметим, что одна и та же линия может быть образом разных отрезков при разных биективных отображениях, т. е. может быть разными способами параметризована. Так, например, возьмем на декартовой плоскости xOy полуокружность с центром в начале координат, радиусом 1, лежащую в верхней полуплоскости. Эту линию можно представить как отображение $y=\sqrt{1-x^2}$, $-1\le x\le 1$ или, как отображение $x=\cos t$, $y=\sin t, 0\le t\le\pi$, или же, как отображение $x=1-t$, $y=\sqrt{2t-t^2}, 0\le t\le 2$ и т. д. (Здесь мы не будем рассматривать вопрос о том, когда разные параметрические задания кривой определяют одну и ту же линию). Отметим лишь, что длина дуги кривой есть ее внутренняя геометрическая характеристика, не зависящая от способа ее параметризации.

Пусть задана дуга кривой $\Gamma:\{x(x), y(t), z(t), t\in[T_0,T_1]\}$ и функции $x(t), y(t), z(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[T_0,T_1]$, тогда длина Γ вычисляется по формуле:

$$|\Gamma|=\int_{T_0}^{T_1}\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2+(z'_t)^2}\,dt. \qquad (17)$$



Приведем некоторые частные случаи формулы (17):

1. Если кривая Γ лежит в плоскости xOy, т. е. $z(t)\equiv 0$, то $|\Gamma|=\int_{T_0}^{T_1}\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt$.

2. Если кривая Γ лежит в плоскости xOy и является графиком непрерывно дифференцируемой функции $y=y(x)$ $x\in[a,b]$, то $|\Gamma|=\int_{T_0}^{T_1}\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx$.

3. Если плоская кривая задана в полярной системе координат как график непрерывно дифференцируемой функции $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_0, \varphi_1]$, то $|\Gamma| = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2 + (r'_\varphi)^2}\, d\varphi$.

Если кривая Γ замкнута, т. е. $x(T_0) = x(T_1)$, $y(T_0) = y(T_1)$, $z(T_0) = z(T_1)$, то Γ есть биективный образ не отрезка $[T_0, T_1]$, а промежутка (T_0, T_1). Все рассуждения и формулы для вычисления данной замкнутой кривой остаются без изменения.

Пусть задана дуга кривой Γ: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $t \in [T_0, T_1]$ и функции $x(t), y(t), z(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[T_0, T_1]$. Рассмотрим функцию $s(t) = \int\limits_{T_0}^{t} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}\, dt$, которая является длиной части кривой Γ от начальной точки $M_0 = (x(T_0), y(T_0), z(T_0))$ до точки $M = (x(t), y(t), z(t))$. Дифференциал функции $s(t)$ называется *дифференциалом дуги кривой* Γ и обозначается ds.

1. Если задана дуга кривой Γ: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $t \in [T_0, T_1]$, где функции $x(t), y(t), z(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[T_0, T_1]$, то $ds = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}\, dt \quad t \in [T_0, T_1]$.

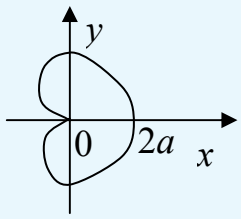
2. Если кривая Γ лежит в плоскости xOy, т. е. $z(t) \equiv 0$, то $ds = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt$.

3. Если кривая Г лежит в плоскости xOy и является графиком непрерывно дифференцируемой функции $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, то $ds = \sqrt{1 + (y'_t)^2}\, dt$.

4. Если плоская кривая задана в полярной системе координат как график непрерывно дифференцируемой функции $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_0, \varphi_1]$, то $ds = \sqrt{r^2 + (r'_\varphi)^2}\, d\varphi$.

Пример 25. Найти длину дуги кривой Γ: $r = a(1 + \cos\varphi), a > 0$.

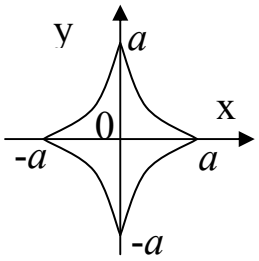
Решение. Поскольку Γ — замкнутая кривая, то она является биективным образом полуинтервала [0, 2π).



Так как $r_\varphi' = -a\sin\varphi$, а $r^2 + (r')^2 = a^2(2 + \cos\varphi) = 4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$,

то $|\Gamma| = \int\limits_0^{2\pi} 2a\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi = 4a\int\limits_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a$.

Пример 26. Вычислить длину астроиды: $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$.



Решение. Продифференцировав функции по t, получим: $x_t' = -3a\cos^2 t\sin t, y_t' = 3a\sin^2 t\cos t$. Тогда $\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = \sqrt{9a^2\sin^2 t\cos^2 t} = 3a|\sin t\cos t| = \frac{3a}{2}|\sin 2t|$. Теперь, т. к. $|\sin 2t|$ имеет период, равный $\pi/2$, то $L = 4\cdot\frac{3a}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2t dt = 6a$.

Замечание. Если бы мы забыли, что нужно брать арифметическое значение корня и положили бы $\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = 3a\sin t\cos t$, то получили бы неверный результат, т. к. $3a\int_0^{2\pi}\sin t\cos t dt = \frac{3a}{2}\sin^2 t\Big|_0^{2\pi} = 0$.

Объем тела вращения

Пусть $D=\{(x, y)$: $0 \le a \le x \le b$, $0 \le y \le y(x)$, $y\in[a, b]\}$ — криволинейная трапеция, а V^{ox} — тело, полученное вращением D вокруг оси Оx. Для разбиения T:

$a=x_0<x_1<...< x_k<x_{k+1}<...<x_n=b$ отрезка $[a, b]$ обозначим через D_T фигуру, составленную из прямоугольников, основаниями которых являются отрезки $[x_k, x_{k+1}]$. Фигура D_T содержится в криволинейной трапеции D.

При вращении D_T вокруг оси Оx получим тело V_T^{ox}, содержащееся внутри тела V^{ox}. Тело V_T^{ox} составлено из прямых круговых цилиндров, образованных вращением прямоугольников, содержащих фигуру D_T.

Высота каждого такого цилиндра есть $(x_{k+1} - x_k)$, а радиус основания — $m_k = \min\limits_{[x_k, x_{k+1}]} y(x)$. Поэтому $|V^{ox}|$ — объем тела V^{ox}, равный $\sum_{k=0}^{n-1}\pi m_k^2(x_{k+1} - x_k)$.

Определение 10. *Объемом* $|V^{ox}|$ *тела* V^{ox} назовем величину $\sup\limits_T \left|V_T^{ox}\right|$. Так как $|V^{ox}|$ есть нижняя сумма Дарбу непрерывной функции $\pi y^2(x)$, то $|V^{ox}| = \sup\limits_T \left|V_T^{ox}\right| = \pi \int\limits_a^b y^2(x)dx$.

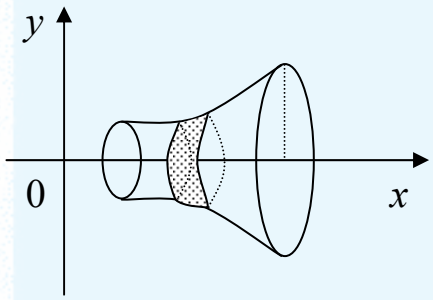
При вращении D_T вокруг оси Оy каждый из прямоугольников, составляющий D_T, образует цилиндрическое кольцо, высота которого есть m_k, а основанием является кольцо с внешним радиусом x_{k+1}, и внутренним x_k. Объем такого цилиндрического кольца равен $\pi m_k ({x_{k+1}}^2 - {x_k}^2)$. Тело V_T^{oy}, полученное вращением D_T вокруг оси Оy, есть объединение этих колец и поэтому его объем $|V_T^{oy}|$ равен $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \pi m_k (x_{k+1}^2 - {x^2}_k)$.

Представим разность $x_{k+1}^2 - {x^2}_k$ в виде $2x_k(x_{k+1}^2 - {x^2}_k) + (x_{k+1}^2 - {x^2}_k)^2$, тогда

$$\sum_{k=0}^{n-1} \pi m_k (x_{k+1}^2 - x_k^2) = \sum_{k=0}^{n-1} \pi m_k x_k (x_{k+1} - x_k) + \sum_{k=0}^{n-1} \pi m_k (x_{k+1} - x_k)^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \pi m_k x_k \Delta x_k + \sum_{k=0}^{n-1} \pi m_k x_k \Delta {x^2}_k .$$

Первая сумма — это нижняя сумма Дарбу для непрерывной функции $2\pi xy(x)$. Если параметр разбиения T есть $\lambda(T)$, то для второй суммы имеем $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \pi m_k \Delta x_k^2 < \lambda(T) \sum\limits_{k=0}^{n-1} \pi m_k \Delta x_k$. Следовательно, при $\lambda(T) \to T$ первая сумма стремится к $2\pi \int\limits_a^b xy(x)dx$, а вторая — к нулю, т. к. $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \pi m_k \Delta x_k = \int\limits_a^b \pi y(x)dx$.



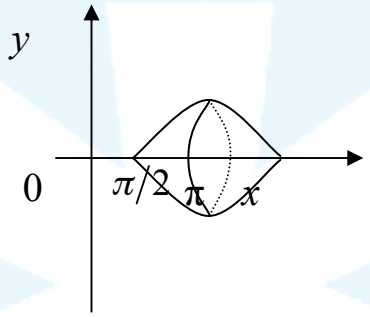
Определение 11. *Объемом* $|V_T^{oy}|$ *тела* V_T^{oy} будем называть $\sup\limits_T \left|V_T^{oy}\right|$.

Из предыдущих рассуждений следует, что $|V_T^{oy}| = \sup\limits_T \left|V_T^{oy}\right| = 2\pi \int\limits_a^b xy(x)dx$.

Пусть теперь D — область, ограниченная непрерывной замкнутой кривой Γ: $x(t)$, $y(t)$, $t\in[T_0,\ T_1]$, $x(T_0)=x(T_1)$, $y(T_0)=y(T_1)$, причем при изменении t от T_0 до T_1 кривая проходит так, что область D остается слева. Если D не пересекается с соответствующей осью координат, и функции x, y непрерывно дифференцируемы на $[T_0,\ T_1]$, то $\left|V^{ox}\right|=2\pi\int\limits_{T_0}^{T_1}\left|x(t)y(t)\right|y'(t)dt$ и $\left|V^{ox}\right|=\pi\int\limits_{T_0}^{T_1}x^2(t)y'(t)dt$.

Пример 27. Вычислить объем тела, образованного вращением одной арки циклоиды $x=a\left(t-\sin\ t\right)$, $y=a\left(1-\cos\ t\right)$ вокруг ее основания.

Решение.



$$V^{ox}=\int\limits_0^{2\pi}y^2x'(t)dt=\pi a^3\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\cos t\right)^3dt=$$

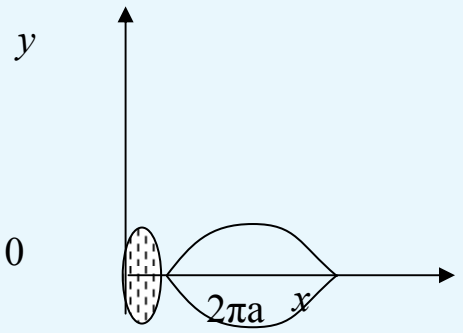
$$=\pi a^3\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\cos t\right)^3dt=$$

$$\pi a^3\int\limits_0^{2\pi}\left(1-3\cos t+3\cos^2t-\cos^3t\right)dt=$$

$$=\pi a^3\left(\frac{5}{2}t-4\sin t+\frac{3}{4}\sin 2t+\frac{1}{3}\sin^3t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=2\pi a^3.$$

Площадь поверхности вращения

Пусть $y=f(x)$ непрерывна на $[a,\ b]$ и $f(x)\geq 0$. Будем вращать $f(x)$ вокруг оси Оx. Полученная поверхность называется *поверхностью вращения* и записывается в виде



$$\left|S\right|=2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx.$$

Параметрическое же представление будет таким:

$$\left|S\right|=2\pi\int\limits_{T_0}^{T_1}y(t)\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}dt.$$

Пример 28. Найти площадь поверхности, полученной вращением кривой Г: $y=\sin\ x$, $0\leq x\leq\pi$ вокруг оси Оx.

Решение.

Введем в качестве параметра переменную x, тогда для точек кривой Γ получаем:

$\rho(t) = \rho(x) = y(x) = \sin\ x$,

$ds = \sqrt{1+[y'_x]^2} = \sqrt{1+\cos^2 x}$. Тогда $|S| = 2\pi\int\limits_0^{\pi} \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}dx =$

$$= 2\pi\left(\frac{-\cos}{2}\sqrt{1+\cos^2 x} - \frac{1}{2}\ln\left|\cos x + \sqrt{1+\cos^2 x}\right|\right)\Bigg|_0^{\pi} = = 2\pi\left(\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right).$$

§ 11. Несобственные интегралы

Несобственные интегралы первого рода

Определение 12. Пусть функция $f(x)$ задана в промежутке $[a,+\infty)$ и интегрируема в любой его части $[a, A]$, т. е. существует определенный интеграл $\int_a^A f(x)dx$ при любом $A>a$. Тогда, если существует конечный предел $\lim\limits_{A\to\infty}\int_a^A f(x)dx = I$, (18)

то его называют *несобственным интегралом первого рода*, или несобственным интегралом функции $f(x)$ в промежутке $[a,+\infty)$, и обозначают символом $I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$. (19)

В этом случае говорят, что несобственный интеграл (19) существует, или *сходится*. Если же предел (18) не существует или бесконечен, то говорят, что несобственный интеграл (19) не существует или *расходится*. Аналогично интегралу (19) вводится несобственный интеграл, следующего вида $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim\limits_{A\to-\infty}\int_A^a f(x)dx$. Наконец, как сумму подобных интегралов можно определить несобственный интеграл с обоими пределами, т. е. определить его равенством

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx.$$

Пример 29. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}dx,\ \alpha > 0$.

Решение. По определению имеем:

$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}dx = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-\alpha x}dx = \lim_{A\to+\infty}\left[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\right]|_0^A =$
$-\frac{1}{\alpha}\lim_{A\to+\infty}(e^{-\alpha A}-1) = \frac{1}{\alpha}$.

То есть интеграл сходится. Если учесть, что в данном случае существует конечный предел $\lim\limits_{A\to+\infty} e^{-\alpha A} = 0$, то вычисление интеграла можно произвести непосредственно

$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}dx = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}|_0^{+\infty} = -\frac{1}{\alpha}(0-1) = \frac{1}{\alpha}$.

Пример 30. Исследовать интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{xdx}{1+x^2}$.

Решение. Согласно определению, находим

$\int_1^{+\infty}\frac{xdx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty}\int_1^A\frac{xdx}{1+x^2} = \lim\limits_{A\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]|_1^A = \frac{1}{2}\lim\limits_{A\to+\infty}[\ln(1+$
$+A^2)-\ln 2] = +\infty$, следовательно, данный интеграл расходится.

Пример 31. Исследовать, при каких значениях показателя α существует несобственный интеграл: $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}, (\alpha > 0)$. (20)

Нижний предел a считается положительным, т. к. в противном случае подынтегральная функция $\frac{1}{x^\alpha}$ вблизи точки нуль будет неограниченной, т. е. при $x = 0$ она «обращается в бесконечность».

Приступим к исследованию интеграла (20).

Пусть сначала $\alpha \neq 0$. Тогда по определению несобственного интеграла имеем:

$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A\frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\lim\limits_{A\to+\infty}(x^{1-\alpha})|_a^A = \frac{1}{1-\alpha}\lim\limits_{A\to+\infty}(A^{1-\alpha}-a^{1-\alpha})$.

Если $\alpha > 0$, то $\lim\limits_{A\to+\infty}A^{1-\alpha} = 0$ и мы получаем: $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}$; интеграл сходится. Если же $\alpha < 1$, то $\lim\limits_{A\to+\infty}A^{1-\alpha} = +\infty$, и, следовательно, $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = +\infty$; интеграл расходится.

Пусть теперь $\alpha = 1$, тогда по определению находим:

$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A\frac{dx}{x} = \lim\limits_{A\to+\infty}(\ln A - \ln a) = +\infty$; интеграл расходится.

Итак, мы установили, что несобственный интеграл (20) сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Результатами этого примера мы воспользуемся при выводе признака сходимости и расходимости несобственных интегралов рассматриваемого типа.

Признак сходимости. *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна и неотрицательна, т. е.* $f(x) \geq 0$ *в промежутке* $[a, +\infty), a > 0$. *Тогда интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ — (21)

сходится*, если при* $a \leq x < +\infty$ *выполняется неравенство*

$$f(x) \leq \frac{M}{x^\alpha}, \quad (22)$$

где $\alpha > 1$ *и* M *— некоторая положительная постоянная. Если же при* $a \leq x < +\infty$ *выполняется неравенство* $f(x) \geq \frac{M}{x^\alpha}$, (23)

где $\alpha \leq 1, M > 0$, *то интеграл (21)* ***расходится****.*

Из представленного признака сходимости вытекает другой, весьма простой и практически удобный **достаточный признак**, а именно:

Пусть функция $f(x)$ *неотрицательна и непрерывна в промежутке* $[a, +\infty)$; *тогда* ***интеграл*** *(21)* ***сходится****, если при* $\alpha > 1$ *существует конечный предел* $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = I$, (24)

и тот же ***интеграл расходится****, если при* $\alpha \leq 1$ *существует конечный или бесконечный предел, отличный от нуля*

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = I \neq 0. \quad (25)$$

Пример 32. Исследовать интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x^2+2}}$.

Решение. Представим подынтегральную функцию в следующем виде: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3+x^2+2}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}$. Произведение $x^{\frac{3}{2}} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}$, как легко видеть, стремится к 1 при $x \to +\infty$. Так как показатель $\alpha = \frac{3}{2} > 1$, то данный интеграл сходится по достаточному признаку.

Несобственные интегралы второго рода

Пусть функция $f(x)$ задана в промежутке $[a, b]$, но не ограничена в нем, например, вблизи точки b (рис. 4.5). Точку b при этом будем называть *особой*. Тогда, как бы ни было мало положительное число ε, функция $f(x)$ заведомо неинтегрируемая в каждом промежутке $[b\text{-}\varepsilon, b]$ слева от точки b. Однако будем предполагать, что функция $f(x)$ интегрируема (следовательно, ограничена) в любом промежутке $[a, b\text{-}\varepsilon]$.

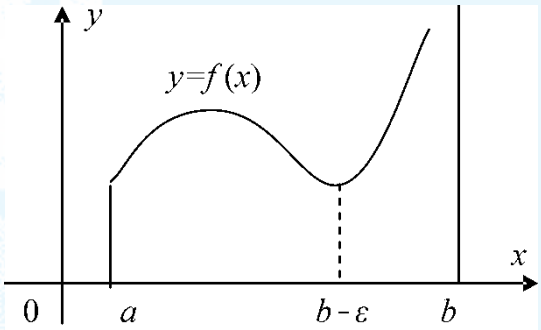


Рис. 4.5

Тогда, если существует конечный предел $\lim\limits_{E\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = I$, (26)

то его называют несобственным *интегралом второго рода* функции $f(x)$ от a до b и обозначают $I = \int_a^b f(x)dx$, (27)

а про интеграл (27) говорят, что он существует, или *сходится*. Если же предел (26) не существует или бесконечен, то говорят, что несобственный интеграл (27) не существует, или *расходится*.

Аналогично, если a — особая точка, и функция $f(x)$ интегрируема во всяком промежутке $[a+\varepsilon, b]$, как бы ни было мало положительное число ε, то несобственный интеграл в этом случае определяется как $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{E'\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$. Если функция $f(x)$ не ограничена в окрестности какой-нибудь промежуточной точки $c\in[a, b]$, то по определению полагают $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ при этом интеграл в левой части существует, если существуют интегралы в правой части. Наконец, если □(x) не ограничена вблизи точек a и b (т. е. a и b — особые точки), то в этом случае несобственный интеграл определяется как сумма $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, где c — любая точка интервала (a, b). При этом сумма не зависит от выбора точки c.

Пример 33. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Точка $x=1$ — особая, в остальных же точках промежутка интегрирования эта функция непрерывна и потому интегрируется в любом промежутке $[0,1-\varepsilon]$, где $0<\varepsilon<1$. Следовательно,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin(1-\varepsilon) = \frac{\pi}{2}.$$

Как и для несобственных интегралов первого рода, установим простой **достаточный признак** сходимости и расходимости несобственного интеграла от неограниченной функции.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна в полусегменте $[a,b)$ и в точке b функция претерпевает бесконечный разрыв $\lim_{x\to b-0} f(x) = +\infty$. Тогда:

1. Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ (28)

***сходится**, если существуют такие постоянные $M > Q$ и $p < 1$, что при $a \le x < b$ выполняется неравенство* $0 \le f(x) \le \frac{M}{(b-x)^p}$.

*2. Интеграл (28) **расходится**, если существуют такие постоянные $p \ge 1$ и $M > 0$, что при $a \le x < b$ выполняется неравенство* $f(x) \ge \frac{M}{(b-x)^p}$.

Пример 34. Исследовать интеграл $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}dx$.

Решение. Легко видеть, что точка $x = 1$ является особой для подынтегральной функции. Так как $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}\sqrt{(1-x)(1+x^2)}}$,

то $(1-x)^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}}$, откуда находим,

$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\frac{1}{2}} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}} = \frac{1}{2}$. Но $p = \frac{1}{2} < 1$, следовательно, интеграл сходится.

Типовые задачи и алгоритмы их решения

Пример 35. Вычислить $\int \frac{dx}{1-5\sin^2 x}$.

Решение. Введем замену переменной x. Пусть $tgx = t$,

$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, dx = \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$, тогда $\int \frac{dx}{1-5\sin^2 x} = \int \frac{\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}}{1-5\frac{t^2}{\left(\sqrt{1+t^2}\right)^2}} =$

$= \int \frac{dt}{1-4t^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+2t}{1-2t}\right| + C$. Перейдя от переменной t обратно к x, получим, что исходный интеграл равен $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+2tgx}{1-2tgx}\right| + C$.

Пример 36. Вычислить $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$.

Решение. Воспользуемся подстановкой $t = tg\frac{x}{2}, x = 2arctgt$. Тогда, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Значит, $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x} = 2\int \frac{dt}{\left(5-\frac{8t}{1+t^2}+\frac{3(1-t^2)}{1+t^2}\right)(1+t^2)} =$

$$= 2\int \frac{dt}{5+5t^2-8t+3-3t^2} = 2\int \frac{dt}{2(t^2-4t+4)} = \int \frac{d(t-2)}{(t-2)^2} = \frac{1}{2-t} + C = \frac{1}{2-tg\frac{x}{2}} + C.$$

Пример 37. Вычислить $\int \frac{dx}{\cos^5 x}$.

Решение. Воспользуемся заменой переменной x. Пусть $\sin x = t$. Откуда, $x = \arcsin t, dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

Тогда $\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \int \frac{dt}{(\sqrt{1-t^2})^5\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{(1-t^2)^3}(*)$. Получили интеграл от рациональной функции. Разложим его на простейшие $\frac{1}{(1-t)^3(1+t)^3} = \frac{A}{(1-t)} + \frac{B}{(1-t)^2} + \frac{C}{(1-t)^3} + \frac{D}{(1+t)} + \frac{E}{(1+t)^2} + \frac{F}{(1+t)^3}$. Найдя неизвестные коэффициенты, получаем следующее представление интеграла:

$$(*) = \frac{3}{16}\left(\int \frac{dt}{1-t} + \int \frac{dt}{1+t}\right) + \frac{3}{16}\left(\int \frac{dt}{(1-t)^2} + \int \frac{dt}{(1+t)^2}\right) + \frac{1}{8}\left(\int \frac{dt}{(1-t)^3} + \int \frac{dt}{(1+t)^3}\right).$$

Каждый из этих интегралов является табличным и находится элементарно.

Пример 38. Исследовать интеграл Пуассона $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$, имеющий важное значение в теории вероятностей и математической статистике.

Решение. Полагаем $f(x) = e^{-x^2}$. Пользуясь правилом Лопиталя, легко показать, что при любом положительном α произведение $x^\alpha f(x) = x^\alpha \cdot e - x^2$ стремится к нулю при $x \to +\infty *$. В частности, это верно и при $\alpha > 1$ (например, при $\alpha = 2$); отсюда данный интеграл сходится по достаточному признаку. Интересно заметить, что значение этого интеграла равно $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Пример 39. Исследовать интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^3}$.

Решение. Точка $x = 1$ является особой для функции $f(x) = \frac{1}{1-x^3}$. Запишем эту функцию так: $f(x) = \frac{1}{(1-x)(1+x+x^2)}$, откуда $(1-x)f(x) = = \frac{1}{1+x+x^2}$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1}{3}$. Так как найденный предел отличен от нуля и показатель $p = 1$, то данный интеграл расходится по достаточному признаку.

Резюме

Рассмотрены неопределенный интеграл и методы его вычисления, понятие определенного интеграла и его приложение, а также несобственный интеграл 1-го и 2-го рода.

Глава 5. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Алгебра есть нечто, как математический язык, приспособленный для обозначения отношений между количествами.

И. Ньютон

Цели и задачи

Сформировать представление о структуре и свойствах линейных пространств, системах линейных уравнений, их применении в различных областях и науках.

Знать основные аксиомы и теоремы линейных пространств, понятие базиса и линейной независимости в линейных пространствах. Также знать виды линейных уравнений, методы их решений, векторы и действия над ними, свойства прямой и плоскости, основные уравнения второго порядка.

Уметь определять базис в линейном пространстве, находить определитель любого порядка, обратную матрицу, решать системы линейных уравнений методом Гаусса, Крамера и обратной матрицы. Определять тип уравнения второго порядка, его каноническую форму, производить действия с векторами, прямой и плоскостью в R^2, R^3.

§ 1. Линейные пространства

Определение и примеры линейных пространств

Определение 1. Непустое множество L элементов $x, y, z, ...$ произвольной природы называется линейным, или векторным, пространством, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1. Для любых двух элементов $x, y \in L$ однозначно определен третий элемент $z \in L$, называемый их суммой и обозначаемый $x + y$, причем: $x + y = y + x$ — это свойство операции сложения называется *коммутативностью сложения*;

1) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (*ассоциативность сложения*);

2) в L существует такой элемент 0, что $x + 0 = x$ для всех $x \in L$ (*существование нуля*);

3) для каждого $x \in L$ существует такой элемент $-x$, что $x+(-x)=0$ (*существование противоположного элемента*).

2. Для любого числа α и любого элемента $x \in L$ определен элемент $\alpha x \in L$ (*произведение* элемента x на число α), причем:

1) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$;

2) $1 \cdot x = x$;

3) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$;

4) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.

Элементы произвольного линейного пространства часто называют *векторами.* В зависимости от запаса элементов существуют различные линейные пространства. Здесь мы ограничимся рассмотрением только *действительных* линейных пространств.

Приведем некоторые примеры таких пространств.

1. Прямая линия R^1, т. е. совокупность действительных чисел с обычными арифметическими операциями сложения и умножения, представляет собой линейное пространство.

2. Совокупность всевозможных систем $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ из n чисел, где сложение и умножение на число определяются формулами:

$$(x_1,x_2,...,x_n)+(y_1,y_2,...,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_n+y_n),$$

$$\alpha(x_1,x_2,...,x_n)=(\alpha x_1,\alpha x_2,...,\alpha x_n),$$

также является линейным пространством и называется *действительным n-мерным арифметическим пространством*. Его принято обозначать символом R^n.

3. Множество всех многочленов степени не превышающей n, $n \in N$ с операциями сложения многочленов и умножения их на число — также линейное пространство. Нулевым элементом в нем будет многочлен со всеми нулевыми коэффициентами, а противоположный элемент для каждого многочлена получается умножением этого многочлена на число (-1). В самом деле, многочлен степени не выше n, $n \in N$ является алгебраической суммой одночленов, каждый из которых составлен из произведения числа на некоторую степень переменной: $a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$. Таким образом, операции сложения и умножения многочленов сводятся к операциям над числами (коэффициентами) при соответствующих степенях переменной.

4. Множество всех функций $y=f(x)$, непрерывных на отрезке $[a,b]$, для которых определены обычные правила сложения функций и ум-

ножения их на числа, образуют линейное пространство. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — непрерывные на $[a,b]$ функции. Тогда и их сумма $f(x)+g(x)=k(x)$ будет непрерывной во всех точках $[a,b]$. При умножении функции, например, $f(x)$ на любое число получаем функцию также непрерывную на $[a,b]$, т. е. принадлежащую данному множеству. В качестве нулевого элемента выберем функцию $y=0$, а именно отрезок $a \le x \le b$. Противоположным элементом к $f(x)$ будет функция $-f(x)$. Остальные аксиомы будут выполняться в силу того, что все операции над функциями в каждой точке отрезка сводятся к операциям над числами, для которых эти аксиомы верны. Такая совокупность непрерывных на $[a,b]$ функций обозначается $C[a,b]$ и является одной из важнейших в анализе.

Подпространства

В любом линейном пространстве L можно выделить подмножество элементов L', которое относительно операций в L само образует линейное пространство. Иначе говоря, $L' \subset L$ есть *подпространство,* если из $x \in L', y \in L'$ следует, что $\alpha x + \beta y \in L'$ при любых α и β.

В любом линейном пространстве имеется как минимум два подпространства: само линейное пространство L и нулевое подпространство — $\{0\}$, состоящее из одного нуля. Эти подпространства принято называть несобственными, а все остальные — *собственными*.

Приведем примеры собственных подпространств.

1. В линейном пространстве $C_{[0,1]}$ — непрерывных функций на отрезке $[0,1]$ можно выделить следующие подпространства: а) множество функций, непрерывных на $[0,1]$ и непрерывно дифференцируемых на $(0,1)$ (в основе этого утверждения лежат свойства дифференцируемых функций: их сумма, а также умножение дифференцируемой функции на число есть дифференцируемая функция); б) множество всех многочленов $P_{[0,1]}$; в) множество всех многочленов степени не выше n, $n \in N$. Напротив, множество монотонных функций, непрерывных на $[0,1]$, очевидно, является подмножеством $C_{[0,1]}$, но не является его подпространством, т. к. сумма двух монотонных функций может не быть монотонной.

2. Пусть L — какое-то линейное пространство и x — некоторый его ненулевой элемент. Совокупность элементов $\{\lambda x\}$, где λ пробегает все числа, образует одномерное подпространство. Оно является собственным, если размерность L больше 1.

Линейная зависимость

Из элементов $x \in L$ и $y \in L$ с помощью чисел α и β можно составить элемент $z = \alpha x + \beta y \in L$, (1)
который называется *линейной комбинацией элементов x* и *y*. В общем случае линейная комбинация может быть составлена из произвольного числа элементов: $z = \alpha x + \beta y + \ldots + \lambda w \in L$, где $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ — произвольные числа.

Если для элементов $x, y, \ldots, w \in L$ существуют такие числа $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ не все равные 0, что $\alpha x + \beta y + \ldots + \lambda w = 0$, (2)
то такие элементы называются *линейно зависимыми.*

В противном случае эти элементы называются *линейно независимыми*. Иными словами, $x, y, \ldots, w \in L$ — линейно независимы, если из (2) вытекает, что $\alpha = \beta = \ldots = \lambda = 0$. Следующее утверждение дает критерий линейной независимости системы:

Если ни один из элементов системы не является линейной комбинацией остальных, то такая система будет линейно независимой. Действительно, предположим, что система элементов $x, y, \ldots, w \in L$ не будет линейно независимой, тогда найдется число $\gamma \neq 0$ и из равенства $\alpha x + \beta y + \gamma t + \ldots + \lambda w = 0$ получаем, что t является линейной комбинацией других элементов системы: $t = -\frac{\alpha}{\gamma} x - \frac{\beta}{\gamma} y - \ldots - \frac{\lambda}{\gamma} w$. Получили противоречие, которое возникло из предположения о линейной зависимости системы.

Сразу из аксиом линейного пространства можно получить несколько простейших свойств систем элементов произвольного линейного пространства L.

Свойство 1. Если среди элементов $x, y, z, \ldots \in L$ есть нулевой вектор, то такая система элементов линейно зависима.

В самом деле, пусть, например, $x = 0$, тогда линейная комбинация $1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z \ldots + 0 \cdot w$ содержит $\alpha = 1$ и в то же время будет равна нулевому вектору, т. к. $x = y = \ldots = w = 0$.

Свойство 2. Если система элементов содержит линейно зависимую подсистему элементов, то она также линейно зависима. И наоборот, если система элементов линейно независима, то и любая ее подсистема линейно независима. Будем говорить, что *бесконечная* система элементов *линейно независима*, если любая ее конечная подсистема линейно независима.

Свойство 3. Если элементы $x, y, z, ..., w \in L$ — линейно независимы и $k \in L$ не является их линейной комбинацией, то расширенная система элементов $x, y, z, ..., w, k \in L$ будет также линейно независимой.

Пример 1. В пространстве $C[0, 2\pi]$ рассмотрим функции $1, \sin^2 x$, $\cos 2x$. Система этих трех функций будет линейно зависимой, поскольку в силу известной формулы тригонометрии функция $\sin^2 x = 0,5(1 - \cos 2x)$.

Пример 2. Рассмотрим в R^n систему из n элементов $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, ..., 0)$, …, $e_n = (0, 0, ..., 1)$. Докажем, что она будет линейно независима.

Так как для любых коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ линейная комбинация $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, то она может быть равна $0 = (0, 0, ..., 0)$ только при $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, что и означает линейную независимость.

Пример 3. В линейном пространстве многочленов степени не выше n система функций $1, x, x^2, ..., x^n$ линейно независима. В самом деле, линейная комбинация, составленная из них, должна равняться 0 при произвольном значении x: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n = 0$. Так как нулевой вектор можно представить в виде: $0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + ... + 0 \cdot x^n = 0$, то получаем равенство многочленов степени n при любых x: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + ... + 0 \cdot x^n$. Следовательно, у этих многочленов должны совпадать коэффициенты при одинаковых степенях, а именно: $a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 0, ..., a_n = 0$. Откуда и получаем, что система $1, x, x^2, ..., x^n$ линейно независима.

Базис, размерность пространства

В линейном пространстве существуют такие системы элементов, через которые можно представить любой элемент, причем единственным образом.

Если в линейном пространстве L можно выбрать n линейно независимых элементов, а любые $n+1$ элементов этого пространства линейно зависимы, то говорят, что пространство L имеет *размерность n*, и обозначают $\dim L = n$.

Базисом в n-мерном пространстве L называется любая система из n линейно независимых элементов.

Пусть $e_1, e_2, ..., e_n$ — базис пространства L. По определению базиса получаем, что любой элемент $a \in L$ может быть однозначно представлен в виде: $a = a_1e_1 + a_2e_2 + ... + a_ne_n$. Такую запись называют *разложением элемента* $a \in L$ *по базису* $e_1, e_2, ..., e_n$. Оставим без доказательства тот факт, что разложение любого элемента пространства L по базису единственно.

Следует также отметить, что базис является упорядоченной системой. То есть, поменяв местами элементы базиса, мы получим другой базис. Задание порядка элементов базиса позволяет задать и порядок коэффициентов разложения произвольного элемента $a \in L$. Это позволяет громоздкую запись разложения элемента a заменить набором коэффициентов в разложении по базису. Так, например, приведенное выше разложение $a \in L$ по базису $e_1, e_2, ..., e_n$ можно заменить набором $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$. Такой набор также называют *координатами элемента* a *в базисе* $e_1, e_2, ..., e_n$.

Пример 4. В пространстве R^n система элементов $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, ..., 0)$, …, $e_n = (0, 0, ..., 1)$ образует базис $e = e_1, e_2, ..., e_n$, т. к. ранее мы доказали, что она линейно независима. Любой элемент $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ представим в виде: $x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$. Базис $e = e_1, e_2, ..., e_n$ еще называют *стандартным* базисом в R^n.

Существуют линейные пространства, в которых можно выбрать бесконечную систему независимых элементов. Они называются *бесконечномерными*. В частности, бесконечномерным будет пространство $C[0,1]$ функций непрерывных на отрезке $[0,1]$.

Линейные функционалы

Числовую функцию f, определенную на некотором линейном пространстве L, мы будем называть *функционалом*. Назовем функционал f *аддитивным*, если для всех $x, y \in L$ выполняется $f(x+y) =$

$= f(x) + f(y)$ и назовем *однородным*, если $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, где α — произвольное число.

Аддитивный однородный функционал называется *линейным* функционалом. Действие линейного функционала в линейном пространстве L обозначается как $f : L \to L$. Непосредственно из определения получаем, что $f(0) = 0$, т. к. $f(0) = f(0 \cdot 0) = 0 \cdot f(0) = 0$.

Укажем примеры линейных функционалов.

Пример 5. Пусть $P_n[x]$ — линейное пространство многочленов переменного x степени не превышающей $n \in N$. Для каждого многочлена $P(x)$ определим его производную $P'(x)$, являющуюся многочленом степени не выше $n-1$. Таким образом, на пространстве $P_n[x]$ мы определили правило $\frac{d}{dx}$, которое каждому многочлену ставит в соответствие его производную. В качестве пространства значений можно выбрать как $P_n[x]$, так и $P_{n-1}[x]$. Оба отображения $\frac{d}{dx} : P_n[x] \to P_n[x]$ и $\frac{d}{dx} : P_n[x] \to P_{n-1}[x]$ удовлетворяют условию линейности в силу линейности производной. Следовательно, рассмотренные правила, по которым преобразуются элементы $P_n[x]$, являются линейным функционалом пространства $P_n[x]$.

Пример 6. Для произвольного элемента x линейного пространства R^n зададим такой функционал: $f(x) = x + a$, где $a \neq 0$ — некий фиксированный элемент из R^n. Этот функционал не будет линейным, т. к. $f(0) = 0 + a = a$, что невозможно для линейного функционала.

§ 2. Матрицы и определители

Основные определения

Определение 2. *Матрицей* называется система элементов (в частном случае, чисел), расположенных в определенном порядке и образующих таблицу.

Матрица называется *прямоугольной* типа $m \times n$, если в этой таблице m строк и n столбцов. Элементы матрицы обозначаются через a_{ij}, где i — номер строки, а j — номер столбца. Так, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ — матрица типа 2×3, т. к. в ней две строки и три столбца. Таким образом, элемент $a_{13} = 7$ находится на пересечении первой строки и третьего столбца.

В общем виде матрица записывается следующим образом: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Или кратко: $A(a_{ij})_{mn}$, $i = 1,...,m$, $j = 1,...,n$.

Следует отметить, что и матрица, и ее элементы обозначаются одинаковой буквой, только матрицу обозначают большой, а элементы — малой буквой с индексами.

Матрица называется **квадратной**, если количество строк равно количеству столбцов, т. е. $m = n$. Пусть A — квадратная матрица $m \times n$, говорят, что она *порядка* n. Например, $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ является квадратной матрицей порядка 3. Элементы квадратной матрицы, имеющие одинаковые индексы ($a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}$), образуют **главную диагональ** матрицы. Напротив, элементы вида $a_{1n}, a_{2n-1}, a_{3n-2}, ..., a_{n1}$ образуют **побочную диагональ.** Так, в приведенной выше матрице A на главной диагонали лежат элементы $a_{11} = 4, a_{22} = 5, a_{33} = -2$, а на побочной — $a_{13} = -1, a_{22} = 5, a_{31} = 1$.

Квадратная матрица вида $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ называется **единичной**. У нее главная диагональ состоит из единиц, все остальные элементы являются нулевыми. В дальнейшем нам очень пригодится эта матрица. Также существует матрица, составленная из одних нулей, которую называют **нулевой** и обозначают через О.

Одной из важнейших характеристик квадратной матрицы является определитель.

Определение 3. *Определителем* квадратной матрицы A называется некое число, поставленное ей в соответствие по особому правилу и обозначаемое $|A|$ или же $\det A$. **Порядок** определителя совпадает с порядком матрицы A. Отметим, определитель в отличие от матрицы заключается не в круглые скобки, а в прямые вертикальные черточки.

Рассмотрим определители для матриц второго и третьего порядка.

Пусть дана матрица $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Поставим ей в соответствие число $|A|$, полученное из A по следующему правилу: $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Пример 7.

$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, тогда определитель $|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=2\cdot(-2)-3\cdot 1=-7$.

Теперь пусть дана матрица третьего порядка $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Для нее определитель будет таковым:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{21}a_{12}a_{33}. \qquad (3)$$

Хотя выражение определителя третьего порядка является достаточно громоздким, закон его составления из элементов матрицы A является весьма простым.

Правило нахождения определителя третьего порядка (правило треугольника). Первое слагаемое из (3) получается произведением элементов главной диагонали, второе и третье — произведением элементов, лежащих на параллели к этой диагонали с добавлением третьего множителя из противоположного угла матрицы. Члены из (3) со знаком минус строятся подобным образом, но относительно по-

бочной диагонали. На рис. 5.1 слева указана схема для вычисления положительных членов определителя, а справа — для отрицательных.

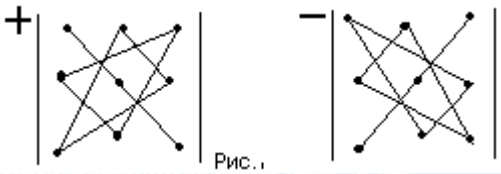


Рис. 5.1

Пример 8.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 3 + 2\cdot 4\cdot(-1) - (-1)\cdot 2\cdot 3 - 1\cdot 4\cdot 3 - 1\cdot 2\cdot 2 =$$

$$= 12 + 3 - 8 + 6 - 12 - 4 = -3.$$

Свойства определителей

Установим некоторые простейшие свойства определителей n-го порядка, но прежде нам потребуется понятие *транспонированной* матрицы.

Пусть дана матрица A порядка $m\times n$ (содержит m строк и n столбцов). Поменяем в ней местами строки со столбцами, т. е. на место 1-й строки поставим 1-й столбец, на место 2-й строки — 2-й и т. д. Полученную матрицу обозначим A^T и назовем **транспонированной** к A. Она имеет порядок $n\times m$. Итак,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если матрица A является квадратной, то транспонированная матрица будет иметь такой же порядок, что и A. Для квадратных матриц можно сказать, что транспонирование есть поворот матрицы вокруг главной диагонали.

Пример 9. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$

Свойство 1. *Определитель матрицы A не меняется при транспонировании.*

Из свойства 1 вытекает, что всякое утверждение о строках определителя справедливо и для его столбцов, т. е. в определителе (в отличие от матрицы) *строки и столбцы равноправны*. Поэтому остальные свойства сформулируем лишь для строк определителя.

Свойство 2. *Если одна из строк определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю.*

Свойство 3. *Если в определителе поменять местами любые две строки, то определитель изменит знак.*

Свойство 4. *Определитель, содержащий две одинаковые строки, равен нулю.*

В самом деле, пусть определитель равен числу d, и пусть соответственные элементы в его i-й и j-й строках равны ($i \neq j$). После перестановки этих строк определитель, ввиду свойства 3, будет равен числу $-d$. Но так как переставляются одинаковые строки, то определитель на самом деле остается неизменным, поэтому $-d = d$. Откуда следует, что $d = 0$.

Свойство 5. *Если все элементы некоторой строки определителя умножить на любое число k, то и сам определитель умножится на k.*

Свойство 6. *Если все элементы i-й строки определителя n-го порядка представлены в виде: $a_{ij} = b_j + c_j$, $j = 1,...,n$, то определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки, кроме i-й — такие же, как в заданном определителе, а i-я строка в первом слагаемом состоит из b_j, а во втором — из c_j.*

Свойство 7. *Определитель не меняется, если к элементам одной из его строк прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.*

Отметим в виде теоремы и оставим без доказательства еще одно свойство определителей.

Теорема 1 (о произведении определителей). *Определитель произведения двух квадратных матриц A и B равен произведению определителей, т. е. $|AB| = |A| \cdot |B|$.*

Указанные свойства во многих случаях значительно облегчают вычисление определителей третьего порядка. Приведем пример.

Пример 10. Вычислить определитель $|A| = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение. Замечаем, что первый столбец имеет общий множитель, равный 2, а первая строка — множитель, равный 3. Применив два раза свойство 5, мы получим:

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Далее, в первой строке один из элементов равен нулю. Чтобы получить еще один нуль, применим свойство 7. Для этого вычтем из элементов первого столбца соответственные элементы второго столбца

$$|A| = 6 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Так как в первой строке два элемента из трех равны нулю, то применив для подсчета определителя приведенное выше правило треугольника, замечаем, что только два сомножителя отличны от нуля. $|A| = 6(1 \cdot (-3) \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 2) = 6 \cdot (-8) = -48$.

Миноры и алгебраические дополнения

Пусть теперь мы хотим полученные значения определителей для порядка $n = 2,3$ перенести на случай произвольного порядка n. Для этого существует простой метод, основанный на том, что определитель порядка n может быть вычислен через определители более низких порядков. А именно, сведем вычисление определителя порядка n к вычислению нескольких определителей порядка $(n-1)$.

Выберем, например, матрицу 3-го порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Рассмотрим элементы 1-й строки a_{11}, a_{12}, a_{13} и возьмем первый из них a_{11}. Мысленно вычеркнем из матрицы A первую строку и первый столбец, на пересечении которых стоит a_{11}. Оставшаяся матрица

$A' = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ имеет определитель $|A'| = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$. Назовем его **минором** второго порядка элемента a_{11} и будем обозначать через M_{11}. Далее, через A_{11} обозначим **алгебраическое дополнение** элемента a_{11}, т. е. $A_{11} = (-1)^{i+j} M_{11}$, где $i = 1, j = 1$. Следующий элемент в первой строке a_{12}. Его индексы $i = 1, j = 2$ и алгебраическое дополнение $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$. Наконец, третье алгебраическое дополнение получим вычеркиванием первой строки и третьего столбца, на пересечении которых находится a_{13}, $A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13}$.

Итак, положим определителем матрицы A число $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$ и назовем **разложением определителя матрицы A по первой строке**.

Укажем тот факт, что подобное разложение можно проводить по любой строке и даже по любому столбцу в определителе. Обычно выбор столбца или строки для разложения совершается для облегчения вычислений.

Пример 11. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Найдем определитель этой матрицы с помощью разложения по второму столбцу и, скажем, по третьей строке. Сравним полученные результаты.

Разложение по второму столбцу, элементы которого $a_{12} = 1, a_{22} = 2, a_{23} = 4$, а алгебраические дополнения

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 9,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5.$$

Тогда $|A| = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 9 + 4 \cdot (-5) = -3$.

Разложение по третьей строке, элементы которой $a_{31}=3$, $a_{32}=4$, $a_{33}=2$, а алгебраические дополнения

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3,$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-5,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=4.$$

Тогда $|A|=3\cdot 3+4\cdot(-5)+2\cdot 4=-3$.

Полученные результаты совпали и с результатом, найденным методом треугольника.

Перенесем теперь это разложение на определитель порядка n:

Определителем матрицы $A=(a_{ij})_n$, полученным разложением по i-й строке, называется число $|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}$, где $a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in}$ — элементы i-й строки матрицы A, а $A_{i1},A_{i2},\ldots,A_{in}$ — их алгебраические дополнения.

Обобщая полученное выше разложение определителя по строке или столбцу, представим теорему, говорящую о *разложении определителя по нескольким строкам или столбцам*.

Теорема 2 (Лапласа). *Выберем в определителе d произвольные k строк (столбцов), $1\le k\le n-1$. Тогда сумма произведений всех миноров k-го порядка, содержащихся в выбранных строках, на их алгебраические дополнения равняется определителю d.*

Эффективность этой теоремы покажем на примере.

Пример 12. Вычислить определитель 5-го порядка.

$$d=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4\\ 2 & 1 & -2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 1 & 4\\ 1 & 3 & 2 & -2 & 1\end{vmatrix}.$$

Заметим, что в 1-м и 2-м столбцах очень удачно расположены нули. Разложим d по этим столбцам, применив теорему Лапласа. Так

как у нас 2 столбца, то выберем все миноры 2-го порядка, образованные этими столбцами. Их всего три: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$. Теперь умножим каждый из этих миноров на его алгебраическое дополнение:

$$d = (-1)^{1+2+1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2+1+5} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+2+3+5} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 3 \cdot (-9) + (-1) \cdot 4 \cdot (-7) + (-1) \cdot 5 \cdot 2 =$$

$$= 27 + 28 - 10 = 45.$$

Приведем еще пример на использование материала по определителям.

Пример 13. Вычислить определитель четвертого порядка.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение. В данном случае удобно из четвертой строки вычесть третью, тогда в ней получится сразу три нуля.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложим теперь определитель по его четвертой строке. Для этого умножим каждый из ее элементов на его алгебраическое дополнение, а результаты сложим. Но поскольку три из четырех элементов строки равны нулю, то из всей суммы остается лишь второе слагаемое:

$$|A| = 2 \cdot (-1)^{4+2} M_{42} = 2 \cdot (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 14 = 28.$$

Выписанный минор получается вычеркиванием из $|A|$ второго столбца и четвертой строки. Полученный определитель третьего порядка легко вычисляется, например, по правилу треугольника.

Действия над матрицами

Равенство матриц

Введем понятие равенства матриц. Назовем две матрицы одинакового порядка **равными**, если у них совпадают все элементы с одинаковыми индексами.

Если

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}=B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix},$$

значит $b_{11}=2, b_{12}=1, b_{13}=-2, b_{21}=3,\ b_{22}=1, b_{23}=4$.

Сложение матриц

Суммой двух матриц одного порядка называется матрица того же порядка, элементы которой получаются, как сумма соответствующих элементов матриц-слагаемых. Коротко это можно представить так: $A_{mn}+B_{mn}=C_{mn}$, если $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}, i=1,...,m, j=1,...,n$.

Пример 14. Пусть $A_{32}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B_{32}=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, тогда их сумма

$$C=A+B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -1 & -3 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}.$$

Ввиду того, что множество всех вещественных матриц порядка $m\times n$ является линейным пространством, операция сложения обладает следующими свойствами:

1. $A+B=B+A$ — **коммутативность** сложения.
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$ — **ассоциативность** сложения.

По аналогии со сложением можно ввести **вычитание** матриц, которое также осуществляется поэлементно. Например, если $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, то $C=A-B$, где $c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$.

Умножение матрицы на число

При умножении матрицы A на число λ мы получаем новую матрицу $B = \lambda A$, которая имеет тот же порядок, что и A, а для всех элементов выполнено $b_{ij} = \lambda a_{ij}, i = 1,...,m, j = 1,...,n$.

Пример 15. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $5 \cdot A = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & -10 \\ 15 & 5 & 20 \end{pmatrix}$.

А в матрице $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ можно вынести число 2.

Кроме того, умножение матрицы на число обладает следующими свойствами:

$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;

$(\lambda + \beta)A = \lambda A + \beta A$.

Умножение матриц

Совершенно другое правило возникает при попытке перемножить две матрицы. Оказывается, эта операция бывает не всегда осуществима, поэтому мы приведем условие, при котором можно перемножать матрицы.

Пусть дана матрица $B = \begin{pmatrix} b_{11} & ... & b_{1m} \\ ... & ... & ... \\ b_{s1} & ... & b_{sm} \end{pmatrix}$ порядка $s \times m$ (содержит s строк и m столбцов) и матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$ порядка $m \times n$. Для того, чтобы умножить матрицу B на матрицу A нужно, чтобы количество столбцов в B совпадало с количеством строк в A. Числа s и n могут быть произвольными. Матрица-произведение $C = B \cdot A$ будет иметь порядок $s \times n$ (количество строк s из B_{sm} и количество столбцов n из A_{mn}).

Таким образом, произведение матрицы определено только в том случае, когда внутренние индексы равны. Тогда порядок произведения получается вычеркиванием внутренних индексов:

$$(s \times m) \bullet (m \times n)$$

Например, матрицу $B_{23} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ порядка 2×3 можно умножить на $A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ порядка 3×2. Матрица $C_{22} = B_{23} \cdot A_{32}$ будет иметь порядок 2×2.

Теперь сформулируем само **правило умножения**. Выделим i строку в B и j столбец в A, т. е. $(b_{i1}, b_{i2}, ..., b_{im})$, $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$. Количество элементов в выделенной строке и столбце будет одинаковым. Попарно перемножим элементы, стоящие на одинаковых местах, и сложим их. Далее полученную сумму обозначим через c_{ij} и поставим в матрицу $C = B \cdot A$ на пересечение i-й строки и j-го столбца: $c_{ij} = b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + ... + b_{im}a_{mj}$.

Проделаем эту операцию с нашими матрицами B и A, при этом будем постепенно заполнять матрицу C.

Итак, 1-я строка в B и 1-й столбец в A: $(2,1,-2)$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, поэтому $c_{11} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 4 = -7$. Далее 1-я строка в B и 2-й столбец в A дадут $c_{12} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-2) = 11$.

После этого $c_{21} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 4 = 18$, $c_{22} = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot (-2) = 1$. Заполним матрицу $C_{22} = \begin{pmatrix} -7 & 11 \\ 18 & 1 \end{pmatrix}$.

Правило умножения матриц на первый взгляд может показаться довольно сложным. Однако, спустя некоторое время, к нему очень

быстро привыкаешь, и оно представляется исключительно простым: *палец левой руки должен скользить слева направо вдоль строк первой матрицы, а палец правой руки должен при этом скользить по столбцам второй матрицы сверху вниз.* Выполнив несколько упражнений, правило умножения матриц можно легко освоить.

Отметим свойства умножения матриц:

$(AB)C = A(BC)$ — **ассоциативность** умножения. Это значит, что при перемножении трех матриц можно сперва умножить A на B, а потом результат умножить на C или можно сначала перемножить B и C, а после результат на A.

$AB \neq BA$ — **некоммутативность** умножения. Это значит, что AB может быть не равно BA. В этом состоит отличие между умножением элементарных чисел и умножением матриц. Если матрицы A и B разного порядка, то AB будет иметь один порядок, а BA — совершенно другой.

Только тогда, когда A и B являются квадратными, возможно равенство $AB = BA$, но даже и в этом случае оно, вообще говоря, не верно.

Пример 16. Дано $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 2\cdot 3 & 1\cdot 2 + 2\cdot 5 \\ 1\cdot 0 + 4\cdot 3 & 1\cdot 2 + 4\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 22 \end{pmatrix}; A \cdot B = \begin{pmatrix} 0\cdot 1 + 2\cdot 1 & 0\cdot 2 + 2\cdot 4 \\ 3\cdot 1 + 5\cdot 1 & 3\cdot 2 + 5\cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$= \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 8 & 26 \end{pmatrix}$. Откуда видно, что $AB \neq BA$.

Если выполнено свойство коммутативности умножения матриц, т. е. $AB = BA$, то матрицы A и B называются **перестановочными**.

Особую роль в умножении матриц играет единичная матрица E. Она выполняет ту же роль, что и число 1 в умножении элементарных чисел. То есть, если x — какое-то число, то $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$; при умножении на единицу число не изменяется. Легко проверить, что при умножении какой-то матрицы A на единичную матрицу E, матрица A не изменится; $AE = EA = A$. Более того, только E обладает таким свойством (единица должна быть одна!).

Как известно, произведение двух чисел равняется нулю в том и только в том случае, если хотя бы один из сомножителей равен нулю.

Однако произведение матриц не наследует это свойство. Более того, возможно, что $A^2 = O$, хотя матрица A отлична от нулевой матрицы O.

Пример 17.

Пусть $A_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$, тогда $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Пример 18. Пусть $A_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$, $B_{22} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \neq O$, тогда $A \cdot B =$

$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Нахождение обратной матрицы

Познакомимся с еще одним важным понятием — понятием обратной матрицы. Пусть A — квадратная матрица порядка n, тогда матрица B является **обратной к матрице** A, если выполнено условие: $AB = BA = E$. Обратную матрицу к A принято обозначать A^{-1}(по аналогии с элементарными числами, где обратным числом к $a \neq 0$ называется число a^{-1} такое, что $a \cdot a^{-1} = 1$).

Отметим условие существования обратной матрицы: *квадратная матрица A имеет обратную матрицу A^{-1} тогда и только тогда, когда A — невырожденная.*

Матрица A называется **невырожденной**, если ее определитель отличен от нуля, $|A| \neq 0$.

В самом деле, т. к. $A \cdot A^{-1} = E$, то $|A| \cdot |A^{-1}| = |E| = 1$. И если существует матрица A^{-1}, тогда $|A| \neq 0$ и $|A^{-1}| \neq 0$. С другой стороны, пусть $|A| \neq 0$, определим правило для построения A^{-1}.

Мы покажем это правило на примере матрицы A второго порядка, хотя оно применимо для матриц любого порядка.

Пусть дана матрица $A_{22} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ и $|A| = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = -14$.

1. Вычислим для каждого элемента a_{ij} его алгебраическое дополнение A_{ij}: $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4$, $A_{12} = -2$, $A_{21} = -1$, $A_{22} = -3$.

2. Составим матрицу из полученных алгебраических дополнений: $\widetilde{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Транспонируем матрицу $\widetilde{A}$, поменяв местами ее строки и столбцы: $(\widetilde{A})^T=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

4. Разделим каждый элемент матрицы $(\widetilde{A})^T$ на определитель матрицы A, т. е. на $|A|=-14$: $\dfrac{(\widetilde{A})^T}{|A|}=\begin{pmatrix} -4/14 & 1/14 \\ 2/14 & 3/14 \end{pmatrix}$. Эта последняя матрица и есть $A^{-1}=\begin{pmatrix} -4/14 & 1/14 \\ 2/14 & 3/14 \end{pmatrix}$, которую еще можно записать так: $A^{-1}=-\dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

5. Убедимся, что построенная матрица является искомой. Для этого умножим A^{-1} на исходную матрицу A:

$$A^{-1}A=-\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}=-\frac{1}{14}\begin{pmatrix} -12-2 & 4-4 \\ 6-6 & -2-12 \end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{14}\begin{pmatrix} -14 & 0 \\ 0 & -14 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E.$$

Необходимость условия $|A|\neq 0$ видна в пункте 4, когда нам требовалось поэлементное деление на определитель.

Представленным правилом обычно пользуются для нахождения обратной матрицы 2-го и 3-го порядков, потому как в матрицах более высоких порядков возникают чересчур громоздкие вычисления, связанные с большим количеством алгебраических дополнений, а также с нахождением определителя.

Чуть позже мы представим более эффективный и универсальный метод нахождения обратной матрицы.

Элементарные преобразования матрицы

Преобразования бывают двух типов. Остановимся на них более подробно.

Пусть дана матрица A порядка $m \times n$. Определим элементарные преобразования над **строками** этой матрицы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$, где $\overline{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$, $i = 1, ..., m$. Запись $A \to B$ означает, что матрица B получена из A с помощью преобразований. Строки матрицы B обозначим $\overline{b}_1, \overline{b}_2, ..., \overline{b}_n$.

1. К одной из строк A, скажем к $\overline{a}_i$, прибавляется другая строка $\overline{a}_j$, умноженная на какое-то число α, другие строки в A не изменяются, а переписываются в B без изменений. То есть $\overline{b}_i = \overline{a}_i + \alpha \overline{a}_j$, $\overline{b}_k = \overline{a}_k$ при $k \neq i$.

Например, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Прибавим к 1-й строке $(i = 1)$ третью строку $i = 3$, умноженную на $\alpha = 2$. Результат запишется на месте первой строки, остальные строки не изменятся:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = B.$$

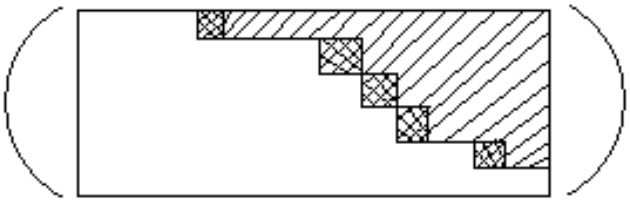
2. Две строки матрицы A можно поменять местами, остальные строки оставляем без изменения. То есть $\overline{b}_j = \overline{a}_i$, $\overline{b}_i = \overline{a}_j$, $\overline{b}_k = \overline{a}_k$, $k \neq i, j$. Например, поменяем в той же матрице A вторую и третью строки:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = B.$$

О пользе данных элементарных преобразований говорит следующая теорема.

Теорема 3. *Каждую прямоугольную матрицу с помощью элементарных преобразований над строками можно привести к ступенчатому виду.*

Доказательство этой теоремы дает практический способ приведения матрицы к ступенчатому виду. Сам ступенчатый вид схематически можно изобразить так:



Незаштрихованная часть матрицы занята нулями. Клетки с двойной штриховкой называются **угловыми элементами**. Остальные элементы могут быть произвольными. Если в ступенчатой матрице есть нулевые строки, их принято располагать внизу. Например, матрица $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 1\\ 0 & -3 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ является ступенчатой.

Рассмотрим алгоритм приведения к ступенчатому виду на примере:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 3\\ 2 & -2 & 4 & -4\\ 1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

1. Начнем с левого верхнего угла. Получим там число 1 или (-1). Для этого с помощью элементарного преобразования 2-го рода поменяем местами первую и третью строку. После этого первую строку больше не трогаем.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 4 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 3\end{pmatrix}.$$

Далее с помощью элемента $a_{11}=1$ получим нули всюду в первом столбце. Для этого умножим первую строку на $\alpha=-2$ и прибавим ко второй строке. Третью строку не меняем, потому как нуль там уже есть:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 4 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 2 & -6\\ 0 & 1 & -1 & 3\end{pmatrix}.$$

После этого первый столбец, как и вторая строка, далее меняться не будет. Их можно мысленно выключить из рассмотрения.

2. Теперь в оставшейся матрице выбираем следующий ведущий элемент. Это будет a_{22}. Его тоже сделаем равным 1 или (-1). Для этого поменяем местами вторую и третью строки. После этого во втором столбце по аналогии с первым необходимо получить нули всюду, кроме ведущего элемента. Для этого умножим вторую строку на $\alpha = -2$ и прибавим к третьей строке:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Итак, матрица приведена к ступенчатому виду. Все ненулевые угловые элементы равны единице.

Стоит отметить, что последовательность элементарных преобразований, приводящая матрицу к ступенчатому виду, определена неоднозначно. Это значит, что приводить матрицу A к виду B можно любым удобным способом, однако число ненулевых угловых элементов в B не зависит от выбора преобразований.

Понятие ранга матрицы

Пусть имеется матрица A порядка $m \times n$. Рассмотрим в этой матрице строку с номером i. Она является набором упорядоченных чисел или же вектором. Обозначим этот вектор через $\overline{a}_i \, (i = 1,...,m)$, $\overline{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$. После этого матрицу A можно переписать в виде столбца:

$$A = \begin{pmatrix} \overline{a}_1 \\ \overline{a}_2 \\ \vdots \\ \overline{a}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$ Аналогично, если обозначить вектор-столбец матрицы, стоящий на j-м месте, через $\overline{a}^j$, будем иметь

$$\overline{a}^j = \begin{pmatrix} \overline{a}_{1j} \\ \overline{a}_{2j} \\ \vdots \\ \overline{a}_{mj} \end{pmatrix},$$ а сама матрица запишется в виде строки: $A = (\overline{a}^1, \overline{a}^2, ..., \overline{a}^n)$.

В начале этой главы мы рассматривали понятие линейной независимости в линейном пространстве. Напомним, что совокупность векторов $\overline{x}, \overline{y}, ..., \overline{t}$ называется линейно независимой, если ни один из этих векторов не является линейной комбинацией других. Мы будем считать строки (столбцы) матрицы A линейно зависимыми, если хотя бы одну из них можно выразить через другие строки (столбцы). Например, в матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 5 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ третья строка получается, если первую строку умножить на 2 и прибавить к ней вторую, иначе говоря, $\overline{a}_3 = 2\overline{a}_1 + \overline{a}_2$. Векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2$ линейно независимы, если же к ним присоединить вектор $\overline{a}_3$, система $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ станет уже линейно зависимой, т. е. максимальное число линейно независимых строк в A равно 2. Это число принято называть **рангом** матрицы. Кроме ранга по строкам выделяют также ранг по столбцам и ранг по минорам.

Следующая теорема объединяет все три понятия рангов.

Теорема 4 (о ранге матрицы). *Наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы A равен рангу этой матрицы.*

Как следствие из теоремы можно получить, что ранг по строкам равен рангу по столбцам, рангу по минорам и рангу матрицы A.

Ранг по минорам приводит к следующему правилу вычисления ранга матрицы: *при вычислении ранга матрицы следует переходить от миноров меньших порядков к минорам больших. Если найден минор k-го порядка D, отличный от нуля, то требуется найти лишь миноры порядка $k+1$, окаймляющие минор D. Если все они равны нулю, то ранг матрицы равен D.*

Пример 19. Найдем по этому правилу ранг матрицы A, представленной выше.

Найдем минор первого порядка, стоящий в левом верхнем углу: $d_1 = |a_{11}| = 2$. Далее, минор второго порядка из левого верхнего угла:

$d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$. Теперь найдем минор третьего порядка, совпадающий с определителем A: $d_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 5 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0$.

Так как минор третьего порядка равен нулю, то ранг матрицы A $rang(A) = 2$, что совпадет с результатом, полученным ранее.

Предложим еще один способ нахождения ранга матрицы. Для этого воспользуемся замечанием о том, что при элементарных преобразованиях число линейно независимых строк матрицы не изменяется, то при таких преобразованиях не меняется и **ранг матрицы**. Исходя из этого, возникает следующее утверждение: *Число ненулевых элементов в ступенчатой форме матрицы A равняется рангу матрицы A.*

Пример 20. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

В результате цепочки элементарных преобразований получаем:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 3 \\ 0 & \underline{1} & 7 \\ 0 & 0 & \underline{6} \end{pmatrix} = B.$$

Прокомментируем каждое действие. На первом шаге ко второй строке прибавили первую, к третьей строке — первую, умноженную на –2. На втором шаге к третьей строке прибавили вторую. В результате получили ступенчатую матрицу B. Число угловых элементов равно 3 (отмечены), значит $rang(B) = 3$. А так как элементарные преобразования не меняют ранг, то и $rang(A) = 3$.

Связь с линейными пространствами

Множество всех вещественнозначных матриц порядка $m \times n$ является линейным пространством. В самом деле, операциям сложения и умножения элементов в линейном пространстве соответствует определенное нами выше сложение двух матриц, а также умножение матрицы на число. Нулевая матрица будет нулевым элементом линейного

пространства. Противоположным элементом мы будем считать матрицу, все элементы которой умножены на (-1).

Что касается остальных аксиом линейного пространства, то они также верны, т. к. сводятся к операциям над числами (элементам матрицы).

§ 3. Системы линейных уравнений

Основные понятия и определения

Системы линейных уравнений (или кратко — СЛУ) считаются основным разделом в алгебре. Нет такой области или приложения, где бы они не использовались. При решении экономических и управленческих задач СЛУ могут быть употребимы как в аппарате исследования, так и при рассмотрении частных задач.

Общая система из n линейных уравнений с m неизвестными (переменными) $x_1, x_2, ..., x_m$ записывается в следующем виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + ... + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (4)$$

где $a_{ij}\,(i = 1,...,m, j = 1,...,n)$ — произвольные числа, называемые **коэффициентами** при неизвестных. Отметим сразу, что число уравнений m не обязательно должно совпадать с количеством переменных n.

В качестве примера такой системы уравнений предложим следующую задачу: поставщик продавал заказчику в течение 4-х кварталов 4 вида товаров. И пусть a_{ij} — это известное количество товара j-го вида ($j = 1,2,3,4$), проданного в i-м квартале ($i = 1,2,3,4$). Цена условного вида товара x_1, x_2, x_3, x_4 не известна. Требуется найти значения этих цен по известным значениям сумм квартальных платежей b_1, b_2, b_3, b_4. Математическая модель данной задачи будет представлена в виде системы из 4-х линейных уравнений с 4 неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \end{cases}.$$

В общем случае из коэффициентов при неизвестных в СЛУ можно построить матрицу порядка $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

которая называется **матрицей системы уравнений**. Вектор, координатами которого являются переменные СЛУ, $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ называют **вектором неизвестных**, а вектор $\overline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ называют **вектором свободных членов**. Обычно эти вектора записывают в виде столбцов

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Учитывая все обозначения, систему (4) перепишем в более удобной матричной форме: $A\overline{x} = \overline{b}$.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

называется **расширенной матрицей** системы. Ее последний столбец состоит из свободных членов СЛУ, поэтому мы будем отделять его вертикальной чертой. Если хотя бы одно из чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$ не равно нулю, то такую систему называют **неоднородной**. В противном случае, если в правой части находятся одни нули, $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$ систему считают **однородной**.

Вектор-столбец $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется **решением системы линейных уравнений**, если при подстановке чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ в урав-

нения системы получаются верные равенства. Поэтому решить систему (4) — это значит найти все такие векторы-решения.

Соответствующая матричная форма для однородной системы будет таковой: $A\overline{x} = \overline{0}$, где $\overline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ — нулевой вектор.

Система уравнений (4) может совсем не иметь решений.

Пример 21. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$.

В самом деле, из первого уравнения получаем, что $x_1 = x_2$, но тогда разность $x_1 - x_2$ не может принять значение 1 ни при каких значениях $x_1 = x_2$. Система уравнений, у которой не существует решений, называется **несовместной**. Если же система **совместна**, то она может иметь одно решение или даже бесчисленное множество решений.

Пример 22. $\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 = 4 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$. Эта система будет совместной, и любой вектор $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, компонентами которого являются $x_1 = 1 + x_2$, будет решением системы.

Совместная система уравнений называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если имеет более одного решения.

Две системы называются **эквивалентными**, если каждое решение первой является решением второй и, наоборот, каждое решение второй системы есть решение первой. Если к некоторому уравнению системы прибавить другое уравнение, умноженное на число, то решения системы не меняется, т. е. новая система остается эквивалентной прежней. При перестановке двух уравнений в (4) она также заменяется на эквивалентную.

Системы линейных однородных уравнений

Рассмотрим однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Она всегда будет иметь решение. В самом деле, вектор-столбец $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, т. е. нуль-вектор является решением системы (5).

Отметим некоторые свойства, относящиеся к однородным системам:

Свойство 1. Если вектор-столбец $\overline{x}$ является решением системы (5), а α — некоторое число, то вектор-столбец $\alpha\overline{x}$ также является решением (5). Это следует из того, что числовой множитель можно выносить при умножении матриц.

Свойство 2. Если $\overline{x}$ и $\overline{y}$ — два решения однородной системы, то и их сумма — вектор $\overline{z} = \overline{x} + \overline{y}$ — тоже решение этой системы. Действительно, подставим $\overline{z}$ в уравнение (5): $A\overline{z} = A(\overline{x} + \overline{y}) = A\overline{x} + A\overline{y} = \overline{0} + \overline{0} = \overline{0}$.

Таким образом, мы можем складывать и умножать на числа решения системы (5) и снова получать решения этой системы. Исходя из этого, можно говорить о том, что однородная система имеет «линейное пространство» решений.

Общее решение системы линейных однородных уравнений

Для определения структуры общего решения системы (5) используется понятие ранга матрицы. Пусть A — матрица, составленная из коэффициентов системы (5), тогда:

1. Если $r = rang(A) = n$, где n — число переменных системы, то существует только нулевое решение $\overline{x} = (0,\ldots,0)$. Это решение также называют **тривиальным**.

2. Если $r < n$, то существует $(n-r)$ линейно независимых решений $\overline{x}^1, \overline{x}^2, ..., \overline{x}^{n-r}$, причем **общее решение** системы имеет вид: $\overline{x_{oo}} = c_1\overline{x}^1 + c_2\overline{x}^2 + ... + c_{n-r}\overline{x}^{n-r}$, где $c_1, ..., c_{n-r}$ — некоторые константы.

Набор векторов $\overline{x}^1, \overline{x}^2, ..., \overline{x}^{n-r}$ называется **фундаментальной системой решений** системы (5), причем для любого решения $\overline{x}^*$ системы (5) $\exists c_1, ..., c_{n-r} \in R: \overline{x}^* = c_1\overline{x}^1 + c_2\overline{x}^2 + ... + c_{n-r}\overline{x}^{n-r}$.

Для нахождения общего решения системы (5) будем пользоваться одним из самых универсальных методов — **методом Гаусса**.

Метод Гаусса для решения системы линейных уравнений

Этот метод может применяться для решения не только однородных, но и всех других систем линейных уравнений. Алгоритм метода Гаусса можно разбить на два этапа: на **прямой** и **обратный ход**.

Прямой ход метода Гаусса заключается в приведении системы уравнений к ступенчатому виду с помощью **элементарных преобразований**.

Мы рассмотрели приведение к ступенчатому виду на примере матриц, теперь покажем, как оно осуществляется в однородных уравнениях.

Пусть дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}. \qquad (6)$$

Очевидно, что все преобразования над системой можно свести к преобразованиям над матрицей, составленной из коэффициентов при переменных x_i.

Прямой ход

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 1 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -1 & -2 & 4\end{pmatrix}.$$

В левом углу уже есть 1, поэтому, чтобы получить в остальных строках нули, умножим первую строку на -1 и добавим к строкам 2, 3, 4: $\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3\end{pmatrix}$.

Переставим местами вторую и третью строку, умножим вторую строку на -1 и прибавим к четвертой: $\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -2 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

Наконец, третью строку прибавим к 4-й:

$$\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=B.$$

Матрица B — ступенчатая, и на этом первый шаг алгоритма закончен. Перейдем к системе уравнений, которая соответствует матрице B:

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3+x_4+x_5=0\\ x_2+2x_3-2x_4+x_5=0\\ 2x_3+x_4-2x_5=0\end{cases}.$$

В результате мы отбросили нижнюю нулевую строку, оставив 3 уравнения и 5 переменных. При этом коэффициенты при переменных x_4, x_5 не являются угловыми. Такие переменные мы будем называть **свободными**, а все переменные с угловыми коэффициентами — **базисными**. Число свободных переменных равно в точности $n-r$, где n — общее число переменных (в нашем случае $n=5$), а r — число

угловых элементов в системе (у нас $r=3$). Значит и $rang(A)=3$. Перейдем ко второму этапу метода Гаусса.

Обратный ход

Мы будем искать вектор-решение, которое соответствует приведенной матрице B, но начнем рассмотрение с последнего уравнения системы и затем станем «подниматься наверх» до первого уравнения.

Перенесем свободные переменные x_4, x_5 в правую часть системы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -x_4 - x_5 \\ x_2 + 2x_3 = 2x_4 - x_5 \\ 2x_3 = -x_4 + 2x_5 \end{cases}. \qquad (7)$$

Выразим зависимую переменную x_3 через свободные: $x_3 = \dfrac{-x_4 + 2x_5}{2}$ (это всегда можно сделать, т. к. угловые коэффициенты отличны от нуля). Полученное уравнение поставим в предпоследнее уравнение системы (7) и выразим из него зависимую переменную x_2:

$$x_2 + 2\left(\frac{-x_4 + 2x_5}{2}\right) = 2x_4 - x_5;\ x_2 - x_4 + 2x_5 = 2x_4 - x_5;\ x_2 = 3x_4 - 3x_5.$$

Теперь подставляем полученные выражения для x_2 и x_3 в первое уравнение системы (7). Откуда и получаем $x_1 = -\dfrac{9}{2}x_4 + 3x_5$.

Окончательно формулы, выражающие зависимые переменные через свободные, будут таковыми:

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{9}{2}x_4 + 3x_5 \\ x_2 = 3x_4 - 3x_5 \\ x_3 = \dfrac{-x_4 + 2x_5}{2} \end{cases}. \qquad (8)$$

Выберем определитель D порядка $n - r = 2$, у которого на главной диагонали находятся единицы, а все остальные — нули. Придадим свободным переменным x_4, x_5 поочередно значения, равные элементам первой и второй строк определителя D. При этом находим и соответ-

ствующие значения базисных переменных:

$$\begin{array}{cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \overline{x}^1 & -4,5 & 3 & -0,5 & 1 & 0 \\ \overline{x}^2 & 3 & -3 & 1 & 0 & 1 \end{array}.$$

Тогда *общее решение* системы (6) можно записать в виде: $\overline{x_{oo}} = c_1(-4,5;3;-0,5;1;0)^T + c_2(3;-3;1;0;1)^T$. Подставляя вместо c_1, c_2 произвольные значения, мы получим бесконечное множество решений. Векторы $\overline{x}^1 = (-4,5;3;-0,5;1;0)$, $\overline{x}^2 = (3;-3;1;0;1)$ представляют собой *фундаментальную систему* решений системы (6).

Особую роль играют системы уравнений, имеющие единственное решение. В таких системах нет свободных переменных, а ступенчатая матрица приобретает треугольный вид. Покажем это на примере.

Пример 23. Пусть дана система $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$. Решим ее методом Гаусса.

Прямой ход. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$.

Преобразованная система имеет вид: $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$.

Обратный ход. Из последнего уравнения $x_3 = 0$. Подставив его во второе, получим $x_2 = 0$. Подставив оба в первое уравнение, получим $x_1 = 0$. Единственным решением исходной системы будет вектор $\overline{x}(0,0,0) = \overline{0}$ или же нуль-вектор.

Таким образом, если в однородной системе число угловых элементов $r = 3$ равно числу всех переменных ($n = 3$), то система имеет только нулевое решение. Такое решение еще называют **тривиальным**.

Неоднородные системы уравнений

Напомним общий вид системы линейных неоднородных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (9)$$

или же матричная запись: $A\overline{x} = \overline{b}$, (10)

где $\overline{b}$ — столбец из свободных членов.

В отличие от систем однородных совокупность решений системы (9) не является линейным пространством, однако справедливы следующие утверждения.

1. Пусть $\overline{x}$ и $\overline{y}$ — два вектора, являющиеся решением неоднородной системы, тогда вектор $\overline{z} = \overline{x} - \overline{y}$ является решением соответствующей однородной системы. Проверим это, подставив $\overline{z}$ в (10):

$A\overline{z} = A(\overline{x} - \overline{y}) = A\overline{x} - A\overline{y} = \overline{b} - \overline{b} = 0$.

2. Пусть теперь $\overline{x}$ — некоторое частное решение системы (10), а $\overline{y}$ — решение соответствующей однородной системы $A\overline{y} = \overline{0}$, тогда вектор $\overline{z} = \overline{x} + \overline{y}$ будет решением неоднородной системы. Подставим $\overline{z}$ в (10): $A\overline{z} = A(\overline{x} + \overline{y}) = A\overline{x} + A\overline{y} = \overline{b} + \overline{0} = \overline{b}$. То есть если к решениям неоднородной системы прибавлять решения однородной, то мы снова будем получать решения неоднородной системы.

Исходя и этих утверждений, получаем следующее: *Чтобы получить общее решение неоднородной системы (10), нужно к* ***общему решению*** *соответствующей* ***однородной*** *системы прибавить* ***частное решение неоднородной***. Более того, в этой сумме будут содержаться все решения системы (10).

Критерий совместности неоднородных систем уравнений

Неоднородная система (10), опять же в отличие от однородной, не всегда бывает совместной, т. е. не всегда имеет решения. Поэтому,

прежде чем находить решения системы (10), нужно определить, имеет ли она хотя бы одно решение.

Чтобы прояснить этот вопрос, рассмотрим пример:

Пример 24. Пусть дана система неоднородных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - 11x_4 = 0 \end{cases}.$$

Перепишем ее в матричной форме:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 0 & -11 \end{pmatrix}, \ \overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \ \overline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь расширенную матрицу $\overline{A}$ приведем методом Гаусса к ступенчатому виду:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & -11 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -16 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -16 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -16 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) = B.$$

Матрица B приведена к ступенчатому виду и имеет три угловых элемента, значит $rang(B) = 3$. Заметим, что и нерасширенная матрица (до вертикальной черты) также приведена к ступенчатому виду, но имеет только 2 угловых элемента, и ее ранг равен 2, $rang(A) = 2$.

Перейдем обратно к системе уравнений: $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ 5x_2 - x_3 - 16x_4 = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -1. \end{cases}$

Мы видим, что не существует таких чисел x_1, x_2, x_3, x_4, чтобы выполнялось последнее уравнение, а значит, исходная система является несовместной. Несовместность системы появилась из-за различия в рангах матриц A и $\overline{A}$. У нас получилось, что ранг основной матрицы

$rang(A)=2$, а ранг расширенной больше на единицу, $rang(\overline{A})=3$. Если бы $rang(\overline{A})=rang(A)$, то последняя строка состояла бы полностью из нулей.

Следующая теорема является критерием совместности неоднородной системы:

Теорема 5 (Кронекера-Капелли). *Система (10) совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы равен рангу расширенной, т. е.* $rang(\overline{A})=rang(A)$.

Метод Крамера для решения неоднородных систем уравнений

Предложим способ решения линейных неоднородных уравнений. Он может быть использован только в том случае, если количество уравнений n в системе совпадает с количеством переменных n, т. е. матрица A, составленная из коэффициентов системы, является квадратной.

Итак, пусть дана система (9). $\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$ — расширенная матрица системы и пусть $|A|$ — определитель матрицы. Положим Δ_i — определитель матрицы, получаемой из матрицы A заменой i-го столбца столбцом из свободных членов. Тогда если $|A|\neq 0$, то система (9) имеет единственное решение, определяемое по формулам: $x_1=\frac{\Delta_1}{|A|}, x_2=\frac{\Delta_2}{|A|}, \dots, x_n=\frac{\Delta_n}{|A|}$.

Пример 25. Решить систему методом Крамера $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=3 \\ 2x_1+x_2+x_3=11 \\ x_1+x_2+2x_3=8 \end{cases}$.

Составим расширенную матрицу системы: $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right)$.

Найдем определитель матрицы A, например, по правилу треугольника: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. Исходная система имеет единственное решение.

Подсчитаем $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$. Чтобы получить Δ_1, заменим первый столбец в определителе A на столбец $\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20$.

Аналогично, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 10$ и $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 5$.

Тогда $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{|A|} = \dfrac{20}{5} = 4$, $x_2 = \dfrac{10}{5} = 2$, $x_3 = \dfrac{5}{5} = 1$ и вектор $\overline{a}(4,2,1)$ — единственное решение системы.

Метод Крамера весьма прост и эффективен, но из-за требований на вид матрицы A позволяет решать только очень узкий класс линейных уравнений. Мы предложим алгоритм для решения произвольной СЛУ.

Алгоритм решения неоднородной системы уравнений

Пусть дана система $\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$. (*)

1. Выпишем основную матрицу A и расширенную матрицу $\overline{A}$, составленные из коэффициентов системы (*).

Найдем $rang(A)$ и $rang(\overline{A})$ приведением с помощью элементарных преобразований матрицы $\overline{A}$ к матрице B, имеющей ступенчатый вид. Сделаем вывод о совместности системы (*). Напомним, что СЛУ совместна тогда и только тогда, когда $rang(A) = rang(\overline{A}) = r$.

2. Если $r = n$, где n — число переменных системы, то система (*) имеет единственное решение. Это решение можно найти, применив обратный ход метода Гаусса к преобразованной матрице B.

Если $r < n$, то система (*) имеет бесконечное множество решений. Отбросим в матрице B строки из нулей и перепишем укороченную систему. В оставшихся r строках назовем переменные $x_1,...,x_r$ при угловых элементах B **базисными**, а оставшиеся $n-r$ переменных $x_{r+1},...,x_n$ — **свободными**. Перенесем свободные переменные с соответствующими коэффициентами в правую часть и получим систему относительно базисных переменных. Положим для простоты

$$x_{r+1} = c_1,...,x_n = c_{n-r}: \begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}c_1 - ... - a_{1n}c_{n-r} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + ... + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}c_1 - ... - a_{rn}c_{n-r}. \end{cases} \qquad (**)$$

3. Решим систему (**) методом Крамера. Она для каждого набора $c_1,...,c_{n-r}$ будет иметь единственное решение:

$$\bar{x}(c_1,...,c_{n-r}) = \begin{pmatrix} x_1(c_1,...,c_{n-r}) \\ \dots \\ x_r(c_1,...,c_{n-r}) \\ c_1 \\ \dots \\ c_{n-r} \end{pmatrix}. \qquad (***)$$

Формула (***) представляет собой **общее решение** системы (*).

4. Придавая неизвестным $c_1,...,c_{n-r}$ любые числовые значения, из общего решения находим значения базисных переменных и тем самым получаем решение исходной системы (*). Такое решение называют **частным решением** неоднородной системы (*).

Пример 26. Рассмотрим систему $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 11x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_4 = 3 \end{cases}$. (11)

1. Выпишем расширенную матрицу коэффициентов и приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований.

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 1 & 1 & 1\\ 2 & -3 & -1 & 1 & 2\\ 3 & -1 & -11 & -1 & 0\\ 3 & -5 & 0 & 2 & 3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0\\ 0 & 5 & -14 & -4 & -3\\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)=B.$$

Так как $rang(\overline{A})=3$ (3 угловых элемента) и $rang(A)=3$, то система совместна.

2. Так как $r=3<n=4$, то система имеет бесконечное множество решений. Отбросим в B строку из нулей. Эквивалентная исходной ступенчатая система имеет вид: $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3+x_4=1\\ x_2-3x_3-x_4=0\\ x_3+x_4=-3\end{cases}$.

Объявим x_1,x_2,x_3 — базисными, а x_4 — свободной. Перенесем x_4 в правую часть системы и обозначим ее через c_1.

$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=1-c_1\\ x_2-3x_3=c_1\\ x_3=-3-c_1\end{cases}. \qquad (12)$$

3. Решив систему (12) методом Крамера, получим общее решение исходной системы $\overline{x}(c_1)=\begin{pmatrix}-4c_1-14\\ -2c_1-9\\ -c_1-3\\ c_1\end{pmatrix}$. (13)

4. Придавая переменной c_1 различные числовые значения, мы можем получить все решения системы. Например, если $c_1=0$, то вектор $\overline{x}(0)=(-14,-9,-3,0)$ будет частным решением нашей неоднородной системы.

Отметим один важный факт. Общее решение соответствующей однородной системы для системы (11) будет иметь вид: $\overline{x}_{oo}(c_1)=\begin{pmatrix}-4c_1\\-2c_1\\-c_1\\c_1\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-4\\-2\\-1\\1\end{pmatrix}$. Из формулы (13) видно, что общее решение неоднородной системы является суммой **общего решения однородной** системы и **частного решения** $\overline{x}_{чн}=(-14,-9,-3,0)$ **неоднородной** системы. Частное решение неоднородной системы может быть выбрано совершенно произвольно.

Метод обратной матрицы для решения неоднородных систем

Кроме метода Крамера для неоднородных систем вида (9), у которых количество строк n совпадает с количеством переменных n, существует метод решения, связанный с нахождением обратной матрицы.

Перепишем систему (9) в матричной форме: $A\overline{x}=\overline{b}$, где A— матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных $x_1,x_2,...,x_n$. Пусть $|A|\neq 0$, т. е. квадратная матрица A — невырожденная. В этом случае существует обратная матрица A^{-1}.

Умножим обе части уравнения $A\overline{x}=\overline{b}$ слева на A^{-1}: $A^{-1}(A\overline{x})=A^{-1}\overline{b}$. Так как по свойствам произведения матриц $(A\overline{x})=(A^{-1}A)\overline{x}=E\overline{x}=\overline{x}$, то $\overline{x}=A^{-1}\overline{b}$.

То есть, чтобы получить столбец из неизвестных $\overline{x}=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$, нужно обратную матрицу A^{-1} умножить на столбец из свободных членов $\overline{b}=\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$. Если бы матрица A не была квадратной, такое произведение было бы невозможным, потому как обратная матрица сохраняет порядок.

Решение систем уравнений методом Крамера и методом обратной матрицы представляет скорее теоретический интерес. С увеличением

количества переменных и уравнений в системе вычисление определителей, а тем более — обратной матрицы, становится весьма затруднительным. Поэтому в экономике, как правило, эти методы не применяют.

Нахождение обратной матрицы методом Гаусса

Дадим еще один метод вычисления обратной матрицы, позволяющий находить вручную обратные матрицы высоких порядков. Для этого применим метод Гаусса приведения матрицы к ступенчатому виду.

Расширим набор элементарных преобразований, добавив еще одну операцию — возможность умножать (делить) строку на любое действительное число. Напомним, что к элементарным преобразованиям относились два: прибавление к одной строке матрицы другой строки, умноженной на любое число, а также перестановка двух любых строк.

Напишем исходную невырожденную матрицу A. Припишем к ней справа за вертикальной чертой единичную матрицу того же порядка $(A|E)$.

Теперь будем приводить матрицу A к ступенчатому виду. Причем, совершая преобразования со строкой матрицы A, будем совершать их и с соответствующей строкой матрицы E. После конечного числа шагов матрица A перейдет к ступенчатому виду P. Матрица P будет треугольной с угловыми коэффициентами, отличными от нуля, т. к. исходная матрица A является невырожденной.

В результате тех же преобразований матрица E перейдет в некоторую матрицу F. Получим промежуточную расширенную матрицу $(P|F)$. Будем продолжать преобразования над матрицей P до тех пор, пока она не превратится в единичную матрицу E. Тогда присоединенная матрица F станет обратной к A, т. е. A^{-1}. Весь процесс представим следующей цепочкой: $(A|E) \to \ldots \to (P|F) \to \ldots \to (E|A^{-1})$.

Пример 27.

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-1&1&0&0\\0&-2&3&-2&1&0\\0&0&7&-3&2&1\end{array}\right)\to(P\,|\,F)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-1&1&0&0\\0&1&-3/2&1&-1/2&0\\0&0&1&-3/7&2/7&1/7\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&4/7&2/7&1/7\\0&1&0&5/14&-1/14&3/14\\0&0&1&-3/7&2/7&1/7\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3/14&5/14&-1/14\\0&1&0&5/14&-1/14&3/14\\0&0&1&-3/7&2/7&1/7\end{array}\right)$$

$\to(E\,|\,A^{-1})$. Итак, $A^{-1}=\begin{pmatrix}3/14&5/14&-1/14\\5/14&-1/14&3/14\\-3/7&2/7&1/7\end{pmatrix}=\dfrac{1}{14}\begin{pmatrix}3&5&-1\\5&-1&3\\-6&4&2\end{pmatrix}$.

Удостоверимся в полученном результате с помощью проверки: $A^{-1}A=E$.

§ 4. Собственные значения и собственные векторы

Основные определения

При рассмотрении линейных пространств мы говорили о линейных функционалах. *Линейное преобразование* — это линейный функционал, отображающий линейное пространство в то же самое пространство, т. е. каждый вектор меняет свое положение и переходит в свой образ. Можно сказать, что преобразование пространства — это изменение окружающего пространства, а преобразование координат — это изменение положения наблюдателя. Эта физическая аналогия показывает, в чем различие между двумя понятиями.

Определение 4. *Матрицей линейного преобразования* $A:L\to L$ в базисе $\overline{e}=(e_1,...,e_n)$ называется матрица, столбцами которой являются координатные столбцы векторов $A(e_1),...,A(e_n)$ в базисе $\overline{e}$.

Определение 5. Ненулевой вектор x называется *собственным вектором* линейного преобразования A, если $A(x)=\lambda x$, где λ — не-

кое число, соответствующее каждому собственному вектору. Будем называть λ — *собственным значением* преобразования A.

Совокупность всех собственных значений преобразования A конечномерного линейного пространства называется *спектром*.

Например, если L является двумерным или трехмерным линейным пространством, то собственный вектор линейного преобразования A — это такой вектор, что его образ коллинеарен исходному вектору. Другими словами, после применения преобразования (в вещественном случае) может измениться длина вектора, а направление или сохранится, или изменится на противоположное. Также вектор может стать равным нулевому, если $\lambda = 0$.

Особое значение уделяют собственным значениям и собственным векторам квадратных матриц. При этом имеют в виду следующее. Каждая матрица A порядка n является матрицей некоторого линейного преобразования $A: L \to L$, действующего в линейном пространстве. Поэтому естественно отождествить линейный оператор A с его матрицей A.

Характеристический многочлен и его корни

Для произвольной квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n рассмотрим следующий определитель:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix},$$ где E — единичная матрица, а λ — действительная переменная. Относительно переменной λ этот определитель можно записать в виде многочлена n-й степени от λ. Обозначим его через $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ и назовем **характеристическим многочленом матрицы** A, а $P_A(\lambda) = 0$ — **характеристическим уравнением матрицы** A.

Множество значений λ, для которых выполняется $P_A(\lambda) = 0$, называется **корнями характеристического уравнения матрицы** A.

Пример 28. Найдем характеристическое уравнение матрицы

$$A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 0\\ 0 & 5 & 2\\ 0 & 3 & 6\end{pmatrix}.$$

Теперь раскроем определитель

$$P_A(\lambda)=\begin{vmatrix}4-\lambda & 2 & 0\\ 0 & 5-\lambda & 2\\ 0 & 3 & 6-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(4-\lambda)((5-\lambda)(6-\lambda)-6)=(4-\lambda)(24-11\lambda+\lambda^2)=-\lambda^3+15\lambda^2-68\lambda+96.$$

Итак, характеристическое уравнение матрицы A имеет вид:

$-\lambda^3+15\lambda^2-68\lambda+96=0$.

Понятие характеристического многочлена матрицы и характеристического многочлена оператора мы также будем отождествлять. При этом характеристический многочлен не зависит от выбора базиса. Также не зависят от базиса и его коэффициенты.

Представим без доказательства следующую теорему.

Теорема 6. Для того, чтобы λ являлось собственным значением линейного оператора A, необходимо и достаточно, чтобы оно было корнем характеристического уравнения $P_\lambda(A)$ этого оператора.

Другими словами, корни характеристического многочлена (множество значений λ, для которых $P_\lambda(A)=0$) являются собственными значениями оператора A. Каждому собственному значению λ матрицы сопоставляют его кратность, полагая ее равной кратности корня λ характеристического уравнения этой матрицы.

Множество всех собственных векторов, отвечающих данному собственному значению, не является линейным подпространством, т. к. оно не содержит нулевого вектора, который по определению не может быть собственным. Однако если мы добавим к этому множеству нулевой вектор, то множество собственных векторов, которое принято обозначать $S(A,\lambda)$, будет являться линейным подпространством.

Отметим теорему про диагональную матрицу.

Теорема 7. Матрица линейного преобразования A, действующего в линейном пространстве, в данном базисе является диагональной тогда и только тогда, когда все векторы базиса являются собственными для оператора A.

Следствие. Если характеристическое уравнение линейного оператора, действующего в n-мерном пространстве, имеет n попарно различных корней, то существует базис, в котором матрица этого преобразования является диагональной.

Для того, чтобы линейный оператор в некотором базисе имел диагональную матрицу, оператор должен иметь базис из собственных векторов. Необходимо произвести замену матрицы A матрицей A', т. е. подобрать для матрицы A такую невырожденную матрицу P, что матрица $A' = P^{-1}AP$ является диагональной. Такую замену называют приведением матрицы к диагональному виду.

Алгоритм вычисления собственных векторов линейного оператора

1. Выбрать в линейном пространстве базис и сопоставить линейному оператору A матрицу A в выбранном базисе.

2. Составить характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$, найти все его корни λ_i, которые и будут собственными значениями оператора A.

3. Для каждого из собственных значений λ_i найти фундаментальную систему решений для однородной системы линейных уравнений $(A - \lambda_i E)x = 0$. Столбцы фундаментальной системы решений есть координаты векторов некоторого базиса в подпространстве $S(A, \lambda_i)$ линейного оператора A.

Пример 29. Пусть дана матрица линейного оператора $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Найти его собственные значения и собственные векторы.

Нахождение будем производить по представленному выше алгоритму. Первое действие можно опустить, т. к. оператор A уже представлен своей матрицей в некотором базисе.

Второе действие: найдем собственные значения, составив и решив характеристическое уравнение.

$$(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 0 \text{ или } \lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0.$$

Собственными числами будут корни этого уравнения, т. е. числа $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 7$.

Третье действие: составим и решим для каждого из этих корней систему линейных уравнений $\begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

При $\lambda_1 = 1$. $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ или же $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$, т. е. $4x_1 + 2x_2 = 0$. Если положить $x_1 = 1$, то $x_2 = -2$ и собственным вектором будет вектор $\overline{a} = \overline{i} - 2\overline{j}$.

Пусть теперь $\lambda_2 = 7$. $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ или же $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$, т. е. $x_1 - x_2 = 0$. Откуда $x_1 = x_2 = 1$, и собственным вектором для $\lambda_2 = 7$ будет вектор $\overline{a} = \overline{i} + \overline{j}$.

Пример 30. Выяснить, можно ли привести матрицу к диагональному виду $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$.

Решение. Найдем собственные значения данной матрицы. Ее характеристическое уравнение имеет вид:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель и решая уравнение, получаем: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Получились два собственных значения, причем у одного из них кратность равна двум. Матрицу можно привести к диагональному виду, если сумма размерностей всех собственных подпространств равна размерности линейного пространства. В нашем случае размерность равна 3. Найдем ранг матрицы $A - \lambda_i E$ каждого из собственных значений. Для $\lambda_1 = -1$ получаем:

$$rang(A - \lambda_1 E) = rang \begin{vmatrix} 8 & -12 & 6 \\ 10 & -18 & 10 \\ 12 & -24 & 14 \end{vmatrix} = 2.$$

Напомним, что ранг матрицы можно найти, например, приведением к ступенчатому виду. Значит, размерность собственного пространства равна $3 - 2 = 1$.

Аналогично находим ранг $rang(A-\lambda_2 E)=rang\begin{vmatrix}6 & -12 & 6\\ 10 & -20 & 10\\ 12 & -24 & 12\end{vmatrix}=1$.

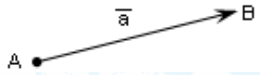
Откуда размерность равна $3-1=2$. Сумма размерностей обоих пространств равна трем, значит, базис из собственных векторов существует. Следовательно, существует и диагональная матрица.

Отметим, что ранг собственного пространства не превышает кратности соответствующего собственного значения. В чем мы и убедились выше.

§ 5. Векторы

Основные определения

Определение 6. *Вектором* называется направленный отрезок, имеющий начальную и конечную точки. Вектор с началом в точке A и концом в точке B принято обозначать через $\overline{AB}$ или же строчной буквой $\overline{a}$:



Если точка A совпадает с точкой B, т. е. $A=B$, то $\overline{AB}=\overline{0}$ (нуль-вектор). Направление нулевого вектора не определено.

Определение 7. *Длиной или модулем* вектора называется расстояние между точками A, B и обозначается $|\overline{AB}|$ или же $|\overline{a}|$.

Единичный вектор (орт) — это вектор, длина которого равна единице. Он обозначается символом $\overline{e}$.

Если два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ лежат на одной прямой или же на параллельных прямых, то они называются *коллинеарными* (параллельными). Их обозначение: $\overline{a}\parallel\overline{b}$. Коллинеарные векторы могут быть одинаково направленными ($\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}$) и противоположно направленными ($\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{b}$).

Два вектора называются *равными*, если они одинаково направленные и модули их равны.

Следующие условия выполняются для всех равных векторов:

1. Всякий вектор равен себе (рефлексивность) $\overline{AB}=\overline{AB}$.
2. Если $\overline{AB}=\overline{CD}$, то $\overline{CD}=\overline{AB}$ (симметричность).
3. Если $\overline{AB}=\overline{CD}$ и $\overline{CD}=\overline{EF}$, то $\overline{AB}=\overline{EF}$ (транзитивность).

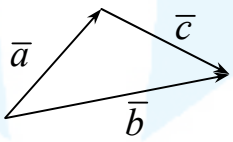
Множество векторов, равных одному и тому же вектору, назовем *свободным вектором.*

Определение 8. Три или более вектора называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Любые два вектора всегда компланарны, т. к. с помощью параллельного переноса их можно приложить к одной точке, а затем провести через них плоскость.

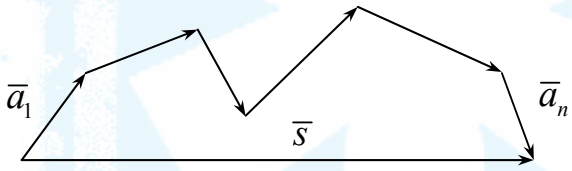
Линейные операции над векторами

Рассмотрим операции, которые можно совершать с векторами.

1. *Суммой* векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$, соединяющий начало вектора $\overline{a}$ и конец вектора $\overline{b}$, если вектор $\overline{b}$ отложен от конца вектора $\overline{a}$. Это правило принято называть *правилом треугольника*.



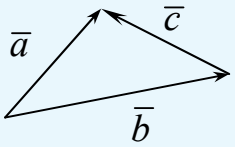
По аналогии, суммой из n векторов $\overline{a}_i, i = 1,...,n$ называется вектор $s = \sum_{i=1}^{n} \overline{a}_i$, начало которого совпадает с началом первого вектора $\overline{a}_1$, а конец — с концом последнего $\overline{a}_n$.



Такое правило называется *правилом многоугольника*.

Сложение векторов удовлетворяет условиям коммутативности и ассоциативности, т. е. для любых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ имеем: (а) $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$; б) $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$.

2. Под *разностью* двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ понимаем, что $\overline{a} - \overline{b} = \overline{c}$, т. е. это такой вектор $\overline{a}$, что $\overline{a} = \overline{b} + \overline{c}$.



3. Под *умножением* вектора $\overline{a}$ *на скаляр* $\lambda \neq 0$ будем понимать вектор $\overline{b} = \lambda \overline{a}$, который удовлетворяет следующим условиям:

а) $|\overline{b}| = |\lambda||\overline{a}|$, где $|\overline{b}|$ — длина вектора $\overline{b}$;

б) если $\lambda > 0$, то $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$, если же $\lambda < 0$, то $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$ (противоположно направлены).

Таким образом, два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда один из них является произведением другого на скаляр, т. е. $\overline{a} \parallel \overline{b} \Leftrightarrow \overline{b} = \lambda \overline{a}$.

Умножение вектора на скаляр обладает следующими свойствами:

а) $(\lambda_1 + \lambda_2)\overline{a} = \lambda_1\overline{a} + \lambda_2\overline{a}$;

б) $(\overline{a} + \overline{b})\lambda = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b}$;

в) $(\lambda_1\lambda_2)\overline{a} = \lambda_1(\lambda_2\overline{a})$.

Связь векторов с линейным пространством

Множество V_3 свободных векторов в трехмерном пространстве является типичным примером линейного пространства.

Действительно, операцией сложения в линейном пространстве служит операция сложения двух векторов. В результате сложения снова получается вектор из V_3. Операцией умножения на число служит операция умножения вектора на число λ, в результате которой получается вектор, коллинеарный исходному и увеличенный в λ раз. Операции над векторами сводятся к операциям над координатами векторов. В качестве нулевого элемента линейного пространства возьмем нулевой вектор, а в качестве противоположного — вектор, имеющий с исходным равную длину и противоположный ему по направлению. Итак, все аксиомы линейного пространства выполнены.

Линейная зависимость векторов

Раз множество векторов V_3 является линейным пространством, то все понятия из линейного пространства переходят без изменений. Дадим, например, определение линейной комбинации векторов.

Определение 9. Пусть дана система векторов $\overline{u}_1, \overline{u}_2, ...\overline{u}_n$ и система скаляров $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$. Будем говорить, что вектор $\overline{u}$ *разложен* по векторам данной системы, если он представим в виде:

$$\overline{u} = \overline{u}_1\lambda_1 + \overline{u}_2\lambda_2 + ... + \overline{u}_n\lambda_n,$$

т. е. вектор $\overline{u}$ является линейной комбинацией векторов $\overline{u}_1, \overline{u}_2, ...\overline{u}_n$.

Понятия линейной зависимости, а также линейной независимости в векторном пространстве нет нужды приводить, потому что они также абсолютно идентичны этим понятиям в линейном пространстве. Отметим лишь без доказательства некоторые теоремы:

Теорема 8 (необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов). *Два ненулевых вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.*

Теорема 9 (необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов). *Три ненулевых вектора* $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ *линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.*

Теорема 10. *Система, состоящая из 4-х и более векторов всегда линейно зависима.*

Базис. Разложение вектора по базису

Определение 10. Любая пара неколлинеарных векторов $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ и любая тройка некомпланарных векторов $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ называется *векторным базисом* пространства V_3. Это определение полностью согласуется с определением базиса в произвольном линейном пространстве, где для образования базиса требуется линейная независимость элементов пространства.

Базис называется *ортонормированным*, если $|\overline{e}_1| = |\overline{e}_2| = |\overline{e}_3| = 1$, т. е. модуль каждого вектора базиса равен 1. Векторы базиса называются *базисными, или единичными*.

Любой вектор $\overline{a}$ на плоскости можно единственным образом представить в виде линейной комбинации базисных векторов $\overline{e}_1, \overline{e}_2$, $\overline{a} = \overline{e}_1\lambda_1 + \overline{e}_2\lambda_2$. Эта запись означает, что вектор $\overline{a}$ разложен по базису $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$. Соответственно, в трехмерном пространстве любой вектор $\overline{a}$ единственным образом представляется в виде: $\overline{a} = \overline{e}_1\lambda_1 + \overline{e}_2\lambda_2 + \overline{e}_3\lambda_3$, где $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ — базис трехмерного пространства.

Определение 11. Под *координатами вектора* $\overline{a}$ в заданном базисе будем понимать коэффициенты разложения этого вектора по базисным векторам. Для плоскости это будут коэффициенты λ_1, λ_2, и вектор запишется так: $\overline{a}(\lambda_1; \lambda_2)$, а для трехмерного пространства — $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, и запись будет таковой: $\overline{a}(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3)$.

Выведем несколько следствий, связанных с координатами векторов.

1. Если векторы $\overline{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\overline{b}(x_2; y_2; z_2)$ — равны, то равны и их соответствующие координаты, т. е. $x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$.

2. При сложении векторов $\overline{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\overline{b}(x_2; y_2; z_2)$ их координаты складываются, т. е. если $\overline{u} = \overline{b} + \overline{a}$, то $\overline{u}(x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$.

3. Если вектор $\overline{a}(x_1;y_1;z_1)$ умножается на скаляр λ, то его координаты умножаются на скаляр: $\overline{u}=\lambda\overline{a}$, $\overline{u}(\lambda x_1;\lambda y_1;\lambda z_1)$.

4. Если векторы коллинеарны, то их координаты пропорциональны. Верно и обратное.

5. Три вектора $\overline{a}(x_1;y_1;z_1)$, $\overline{b}(x_2;y_2;z_2)$, $\overline{c}(x_3;y_3;z_3)$ компланарны тогда и только тогда, когда определитель третьего порядка, составленный из их координат, равен нулю: $|A|=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0$.

Рассмотрим несколько типовых примеров.

Пример 31. В базисе $\{\overline{e}_1;\ \overline{e}_2;\ \overline{e}_3\}$ даны векторы $\overline{a}_1$=(0; 1; –2); $\overline{a}_2$= =(2; 1; 1); $\overline{a}_3$=(1; 0; 1). Доказать, что векторы $\{\overline{a}_1;\ \overline{a}_2;\ \overline{a}_3\}$ тоже образуют базис.

Решение. Если векторы $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$ образуют базис, то равенство нулю их линейной комбинации $\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\overline{a}_i=0$ возможно лишь тогда, когда $\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=0$. Найдем все значения λ_i. Подставим в данную линейную комбинацию вместо векторов $\overline{a}_i\,(i=\overline{1,3})$ их разложение по базису $\{\overline{e}_1;\ \overline{e}_2;\ \overline{e}_3\}$. Получим $\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\overline{a}_i=\lambda_1\overline{a}_1+\lambda_2\overline{a}_2+\lambda_3\overline{a}_3=\lambda_1(\overline{e}_2-2\overline{e}_3)+\lambda_2(2\overline{e}_1+\overline{e}_2+$ $+\overline{e}_3)+\lambda_3(\overline{e}_1+\overline{e}_3)=\overline{e}_1(2\lambda_2+\lambda_3)+\overline{e}_2(\lambda_1+\lambda_2)+\overline{e}_3(-2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)=0.$

Так как векторы $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ образуют базис, то они линейно независимы. Следовательно, последнее равенство выполняется только тогда, когда равны нулю **все** коэффициенты при векторах $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$. Выписав все коэффициенты и приравняв их нулю, получили систему однородных уравнений: $\begin{Bmatrix} 0\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3=0 \\ \lambda_1+\lambda_2+0\lambda_3=0 \\ -2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0 \end{Bmatrix}$. Из высшей алгебры мы знаем, что однородная система имеет только тривиальное решение $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$, если ее ранг совпадает с количеством неизвестных $n=3$.

Составим матрицу из коэффициентов системы: $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Найдем ранг этой матрицы, используя понятие минорного ранга.

$M_1 \neq 0$, $M_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \neq 0$, $M_3 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 - 2 = 1 \neq 0$. Ранг по минорам равен 3, а значит и $rang(A) = 3 = n$.

Исходная система имеет единственное решение при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Итак, $\{\overline{a}_1;\ \overline{a}_2;\ \overline{a}_3\}$ — базис.

Пример 32. Даны три вектора $\overline{a}(1;2;3), \overline{b}(0;2;4), \overline{c}(-1;2;5)$. Нужно проверить, будут ли эти векторы компланарны.

Решение. Воспользуемся следствием 5. Составим определитель третьего порядка из координат данных векторов: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$. Найдем его, например, по правилу треугольника: $|A| = 1 \cdot 2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 \cdot 4 - 0 \cdot 2 \cdot 5 = 10 - 8 + 6 - 8 = 0$. Так как $|A| = 0$, то векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ — компланарны.

Проекция вектора на ось

Осью называется прямая с заданным на ней направлением. Положительное направление оси L задается ее ортом $\overline{e}$.

Определение 12. Назовем *углом между двумя векторами* такой угол φ, на который нужно повернуть один из векторов, чтобы он совпал с другим по направлению. *Положительным* мы будем считать поворот против часовой стрелки, а отрицательным — по часовой стрелке. На рис. 5.2 показан угол φ между двумя ортами $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$. Обозначать этот угол будем через $(\overline{e}_1 \wedge \overline{e}_2)$.

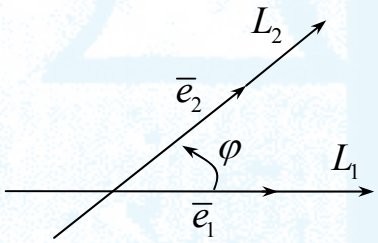
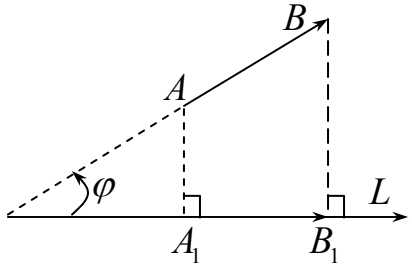


Рис. 5.2

Из определения угла между векторами вполне естественно получается определение проекции вектора на ось.

Пусть дана ось L и произвольный вектор $\overline{AB}$.



Определение 13. *Проекцией* вектора $\overline{AB}$ на ось L называется число, равное длине вектора $\overline{A_1B_1}$, начало и конец которого получаются как основания перпендикуляров, опущенных соответственно из начала и конца вектора $\overline{AB}$ на ось L. Обозначают проекцию символом $a_L = np_L\overline{AB}$, где индекс L указывает название оси, на которую находится проекция вектора. Проекция берется со знаком «+», если направление $\overline{A_1B_1}$ совпадает с направлением оси L, т. е. $a_L = |\overline{A_1B_1}|$, если $\overline{A_1B_1} \uparrow\uparrow L$, и со знаком «–» в противном случае, $a_L = -|\overline{A_1B_1}|$, если $\overline{A_1B_1} \uparrow\downarrow L$.

Следовательно, через угол φ проекция выразится следующим образом:

Проекция вектора $\overline{AB}$ на ось L равна произведению модуля вектора $\overline{AB}$ на косинус угла $\varphi = (\overline{AB} \wedge L)$ между этим вектором и осью: $a_L = np_L\overline{AB} = |\overline{AB}|\cos\varphi$.

Выделим основные свойства проекций:

- Проекция вектора на ось положительна (отрицательна), если вектор образует с осью острый (тупой) угол, и равна нулю, если этот угол прямой.
- Проекции равных векторов равны.
- Проекция вектора на параллельную ему ось равна модулю этого вектора.
- Проекция суммы векторов на ось равна сумме проекций этих векторов: $np_L(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}) = np_L\overline{a} + np_L\overline{b} + np_L\overline{c}$.

Если вектор умножить на какое-то число λ, то и его проекция на ось также умножится на это число: $np_L(\lambda\overline{a}) = \lambda np_L\overline{a}$.

Общая или аффинная система координат на плоскости и в пространстве

Определение 14. *Общая или аффинная система координат* задается векторным базисом, приложенным к некоторой фиксированной начальной точке.

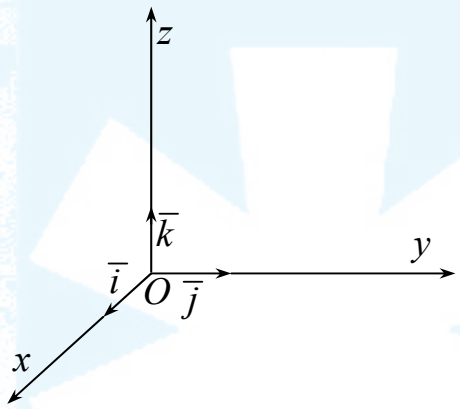
Например, на плоскости две взаимно перпендикулярные оси Оx и Оy, имеющие общее начало в точке О, образуют *декартову систему координат на плоскости*. Соответственно, в пространстве такую систему образуют три перпендикулярные оси Оx, Оy, Оz.

Ось Оx называют осью *абсцисс*, Оy — это ось *ординат*, Оz — ось *аппликат*.

Орты $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ сонаправлены осям Оx, Оy, Оz.

И ввиду того, что орты являются единичными векторами, то тройка $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ образует ортонормированный базис.

Далее мы будем пользоваться только этим базисом, который обозначается $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$.



Радиус-вектор точки

Выберем произвольную точку пространства — M.

Определение 15. *Радиус-вектор* точки M — это вектор $\overline{r} = \overline{OM}$ с началом в точке О (начало системы координат), и концом — в точке M.

Опустим из точки M перпендикуляры на плоскости Оxy, Оxz, Оyz, как показано на рис. 5.3.

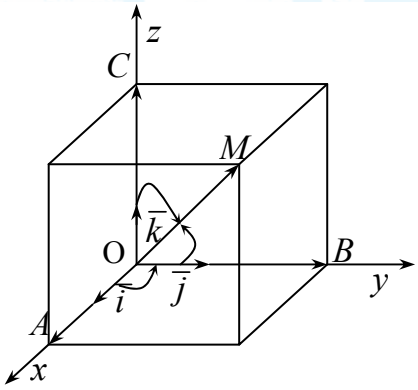


Рис. 5.3

Мы видим, что $\overline{OA} = x \cdot \overline{i}$, $\overline{OB} = y \cdot \overline{i}$, $\overline{OC} = z \cdot \overline{i}$, где x, y, z — соответствующие расстояния от точки M до плоскостей Оxy, Оxz, Оyz. Те же расстояния получаются, если взять проекции точки M на оси Оx, Оy и Оz. Из всего этого получаем:

Определение 16. Декартовыми координатами радиус-вектора $\overline{r} = \overline{OM}$ называются проекции этого вектора на координатные оси: $x = np_x\overline{r}$, $y = np_y\overline{r}$, $z = np_z\overline{r}$.

Таким образом, числа x, y, z есть декартовы координаты радиус-вектора $\overline{r}$. Записываются они так: $\overline{r} = (x; y; z)$, и эта запись читается «радиус-вектор $\overline{r}$ имеет координаты $(x; y; z)$».

Длина радиус-вектора $\overline{r}$ выражается через его координаты по теореме Пифагора: $|\overline{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Радиус-вектор $\overline{r}$ с каждой из осей образует угол. Так, для оси Оx, это будет угол α, для Оy — угол β, для Оz — γ. Поэтому мы можем определить направление $\overline{r}$ с помощью так называемых направляющих косинусов $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, которые легко находятся из следующего соотношения:

$$\overline{r} = x \cdot \overline{i} + y \cdot \overline{j} + z \cdot \overline{k} = |\overline{r}|\cos\alpha + |\overline{r}|\cos\beta + |\overline{r}|\cos\gamma \Rightarrow \begin{cases} x = |\overline{r}|\cos\alpha \\ y = |\overline{r}|\cos\beta \\ z = |\overline{r}|\cos\gamma \end{cases}.$$

После нескольких преобразований последних равенств можно получить следующую формулу: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Рассмотрим пример:

Пример 33. Радиус-вектор $\overline{r}$ составляет с осями координат углы α, β, γ, причем $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$. Найти координаты радиус-вектора $\overline{r}$, если $|\overline{r}| = 3$.

Решение.

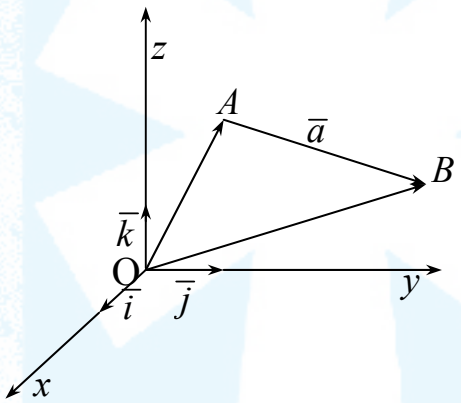
Найдем угол γ. Выразим из соотношения для направляющих косинусов

$$\cos\gamma = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta} = \pm\sqrt{1 - \cos^2\frac{\pi}{4} - \cos^2\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \pm\sqrt{1 - 0{,}5 - 0{,}25} = \pm 0{,}5.$$

Откуда получаем, что $\gamma_1 = \frac{\pi}{3}, \gamma_2 = \frac{2\pi}{3}$. Далее координаты радиус-вектора $\overline{r}$ найдем по формулам: $x = |\overline{r}|\cos\frac{\pi}{4} = \frac{3}{\sqrt{2}}$, $y = |\overline{r}|\cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$, и т. к. получилось два угла γ_1, γ_2, то $z_1 = |\overline{r}|\cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}, z_2 = |\overline{r}|\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{3}{2}$. Окончательно получаем: $r_1 = (\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2})$, $r_2 = (\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{3}{2}; -\frac{3}{2})$.

Декартовы координаты произвольного вектора в пространстве



Пусть у нас есть произвольный вектор в пространстве $\overline{a} = \overline{AB}$ и пусть известны координаты точек $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, найдем координаты этого вектора. Вектор $\overline{AB}$ представляет собой разность радиус-векторов $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} =$
$= x_2 \cdot \overline{i} + y_2 \cdot \overline{j} + z_2 \cdot \overline{k} - x_1 \cdot \overline{i} + y_1 \cdot \overline{j} + z_1 \cdot \overline{k} =$
$= (x_2 - x_1) \cdot \overline{i} + (y_2 - y_1) \cdot \overline{j} + (z_2 - z_1) \cdot \overline{k}$.

Значит проекции вектора $\overline{AB}$ на соответствующие координатные оси равны: $пр_x\overline{a} = x_a = x_2 - x_1$, $пр_y\overline{a} = y_a = y_2 - y_1$, $пр_z\overline{a} = z_a = z_2 - z_1$. Числа x_a, y_a, z_a и будем называть *координатами произвольного вектора* $\overline{a} = \overline{AB}$ *в пространстве*.

Длина вектора $\overline{a}$ по теореме Пифагора представляется в виде: $|\overline{a}| =$
$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Пример 34. Найти координаты вектора $\overline{a} = \overline{AB}$, его длину и направляющие косинусы, если $A(1;3;2)$, $B(5;8;-1)$.

Решение. Найдем координаты вектора $\overline{a}$: $x_a = x_2 - x_1 = 5 - 1 = 4$, $y_a = y_2 - y_1 = 8 - 3 = 5$, $z_a = z_2 - z_1 = -1 - 2 = -3 \Rightarrow \overline{a}(4;5;-3)$. Модуль

$|\overline{a}|=\sqrt{(5-1)^2+(8-3)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$. Наконец, $\cos\alpha=\dfrac{a_x}{|\overline{a}|}=\dfrac{4}{5\sqrt{2}}$,

$\cos\beta=\dfrac{a_y}{|\overline{a}|}=\dfrac{5}{5\sqrt{2}}$, $\cos\gamma=\dfrac{a_z}{|\overline{a}|}=\dfrac{-3}{5\sqrt{2}}$.

Свойства векторов, заданных в декартовой системе координат

Очень кратко отметим основные свойства, поскольку декартова система координат является частным случаем общей аффинной системы и свойства переходят без изменений. Пусть в пространстве заданы два произвольных вектора $\overline{a}(x_1;y_1;z_1)$, $\overline{b}(x_2;y_2;z_2)$.

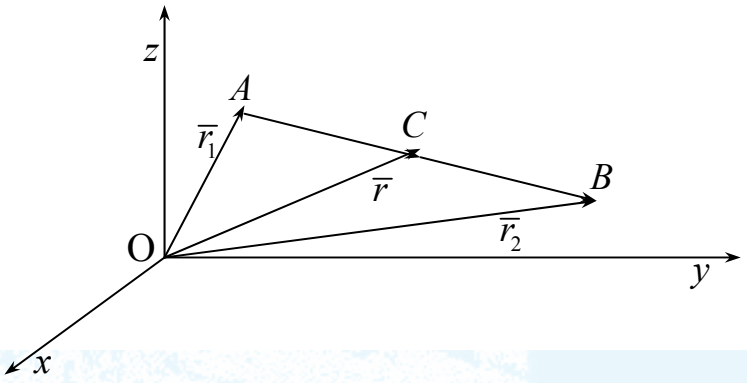
1. $\overline{a}\pm\overline{b}=(x_2\pm x_1;y_2\pm y_1;z_2\pm z_1)$.
2. $\lambda\overline{a}=(\lambda x_1;\lambda y_1;\lambda z_1)$.
3. Два вектора равны $\overline{a}=\overline{b}$, если равны их соответствующие координаты, т. е. $x_2=x_1, y_2=y_1, z_2=z_1$.
4. Два вектора коллинеарны $\overline{a}\parallel\overline{b}$, если их координаты пропорциональны: $\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{y_2}{y_1}=\dfrac{z_2}{z_1}=\lambda$.

Пример 35. При каких значениях α,β будут коллинеарны векторы $\overline{a}=(\alpha;3;-1)$, $\overline{b}=(2;6;\beta)$.

Решение. Воспользуемся условием пропорциональности векторов. Должны выполняться соотношения: $\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{-1}{\beta}$. Выразим из первых двух равенств α: $\alpha=1$. Из второго и третьего получим $\beta=-2$.

Деление отрезка в заданном отношении

Пусть в пространстве дан отрезок AB и две различные точки $A(x_1;y_1;z_1), B(x_2;y_2;z_2)$, являющиеся его началом и концом. Найдем координаты точки $C(x;y;z)$, которая делит AB в указанном соотношении $\lambda=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$. Но так как операция деления векторов не определена, воспользуемся эквивалентным равенством: $\lambda\cdot\overline{CB}=\overline{AC}$.



В зависимости от расположения точки C получается несколько соотношений на λ:

1. Если C принадлежит отрезку AB, то говорят, что точка C делит отрезок *внутренним образом*. В этом случае, $\overline{CB} \uparrow\uparrow \overline{AC}$ и $\lambda > 0$.

2. Если C не принадлежит AB, то точка делит отрезок *внешним образом*. Тогда $\overline{CB} \uparrow\downarrow \overline{AC}$ и $\lambda < 0$.

3. $\lambda \neq -1$. В самом деле, если $\lambda = -1$, то $-\overline{CB} = \overline{AC} \Rightarrow \overline{CB} + \overline{AC} = 0$. Равенство нулю возможно только, если точка $A = B$, а это противоречит тому, что точки различны.

4. Если $\lambda = 0$, то точка $C = A$.

5. Если $\lambda = \infty$, то $C = B$.

Запишем равенство $\lambda \cdot \overline{CB} = \overline{AC}$ в виде координат: $\begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x) \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y) \\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z) \end{cases}$.

После раскрытия скобок и приведения подобных получим выражения для координат точки $C(x;y;z)$: $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$, $z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$.

Также можно пользоваться более компактной записью через радиус-векторы: $\overline{r} = \dfrac{\overline{r_1} + \lambda \overline{r_2}}{1+\lambda}$.

Пример 36. $A(-3;2;4), B(6;0;4)$. Определить координаты точки $C(x;y;z)$, делящей отрезок AB в отношении $\lambda = 2$.

Решение. Воспользуемся формулами для координат точки $C(x;y;z)$.

$x = \dfrac{-3 + 2 \cdot 6}{1+2} = 3$, $y = \dfrac{2 + 2 \cdot 0}{1+2} = \dfrac{2}{3}$, $z = \dfrac{4 + 2 \cdot 4}{1+2} = 4$. Откуда $C(3;\dfrac{2}{3};4)$.

Пример 37. Найти координаты точки $C(x;y;z)$, которая делит вектор $\overline{AB}$ пополам, если $A(2;8;6), B(4;-6;0)$.

Решение. Так как точка C делит $\overline{AB}$ пополам, то $\overline{CB}=\overline{AC}$ и значит, $\lambda=1$. Подставим λ в формулы для координат C: $x=\dfrac{2+1\cdot 4}{1+1}=3$, $y=\dfrac{8+1\cdot(-6)}{1+1}=1$, $z=\dfrac{6+1\cdot 0}{1+1}=3$. Итак, $C(3;1;3)$.

Скалярное произведение векторов

Определение 17. *Скалярным произведением* двух векторов $\overline{a},\overline{b}$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла $\varphi=(\overline{a}\wedge\overline{b})$ между ними: $(\overline{a},\overline{b})=\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cos\varphi$.

Основные свойства скалярного произведения.

Скалярное произведение очевидно коммутативно: $(\overline{a},\overline{b})=(\overline{b},\overline{a})$.

Подчиняется распределительному закону: $(\overline{a}+\overline{b},\overline{c})=(\overline{a},\overline{c})+(\overline{b},\overline{c})$.

$(\lambda\overline{a},\overline{c})=(\overline{a},\lambda\overline{c})=\lambda(\overline{a},\overline{c})$, где λ — какой-то множитель.

Скалярный квадрат равен квадрату модуля вектора: $\overline{a}^2=\overline{a}\cdot\overline{a}=|\overline{a}||\overline{a}|\cos 0=|\overline{a}|^2$. Откуда получается, что модуль вектора равен корню из скалярного квадрата этого вектора: $|\overline{a}|=\sqrt{\overline{a}^2}$.

Два ненулевых взаимно перпендикулярных вектора $\overline{a},\overline{b}$ перпендикулярны, если их скалярное произведение равно нулю: $\overline{a}\perp\overline{b}\Rightarrow(\overline{a},\overline{b})=0$. На основании этого свойства вводится понятие ортогональности векторов.

Определение 18. Два вектора *ортогональны*, если их скалярное произведение равно нулю.

Кроме основной формулы скалярного произведения очень часто пользуются формулой выражения скалярного произведения через координаты векторов. Изложим ее в виде теоремы.

Теорема 11. Пусть даны два вектора $\overline{a}(x_1;y_1;z_1),\overline{b}(x_2;y_2;z_2)$, тогда скалярное произведение этих векторов равно сумме произведений их соответствующих одноименных координат: $(\overline{a},\overline{b})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

Из этой теоремы можно выделить несколько полезных следствий:

1. Если $\overline{a}\perp\overline{b}$ и $\overline{a}\neq\overline{0},\overline{b}\neq\overline{0}$, то $(\overline{a},\overline{b})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$.

2. Модуль вектора $\overline{a}(x_1;y_1;z_1)$ равен квадратному корню из суммы квадратов его координат: $|\overline{a}|=\sqrt{\overline{a}^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$.

3. Из основной формулы скалярного произведения получаем, что $\cos\alpha=\dfrac{(\overline{a},\overline{b})}{|\overline{a}||\overline{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$.

Пример 38. Дано $\overline{a}(2;-2;1),\overline{b}(4;-1;-1)$. Найти $(\overline{a},\overline{b})$, $|\overline{a}|,|\overline{b}|$, $\alpha=(\overline{a}\wedge\overline{b})$.

Решение. Применим следствия из предыдущей теоремы.

$(\overline{a},\overline{b})=2\cdot4+(-2)\cdot(-1)+1\cdot(-1)=9$,

$|\overline{a}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=3$,

$|\overline{b}|=\sqrt{4^2+(-1)^2+(-1)^2}=3\sqrt{2}$,

$\cos\alpha=\dfrac{(\overline{a},\overline{b})}{|\overline{a}||\overline{b}|}=\dfrac{9}{3\sqrt{2}\cdot3}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\alpha=\dfrac{\pi}{4}$.

Пример 39. Даны следующие векторы: $\overline{a}(3;-2;4),\overline{b}(5;1;6),\overline{c}(-3;0;2)$. Найти координаты вектора $\overline{d}$, если выполнены условия: $(\overline{a},\overline{d})=4$, $(\overline{b},\overline{d})=35$, $(\overline{c},\overline{d})=0$.

Решение. Пусть вектор $\overline{d}$ имеет координаты $\overline{d}(x;y;z)$. Распишем каждое из условий по теореме о скалярном произведении.

$$\begin{cases}(\overline{a},\overline{d})=3x-2y+4z=4\\(\overline{b},\overline{d})=5x+y+6z=35\\(\overline{c},\overline{d})=-3x+2z=0\end{cases}.$$

Получили систему из трех уравнений с тремя неизвестными. Решим ее, например, методом Гаусса. Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

Прямой ход. $\left(\begin{array}{ccc|c}3&-2&4&4\\5&1&6&35\\-3&0&2&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}0&-2&6&4\\-1&1&10&35\\-3&0&2&0\end{array}\right)\to$

$\left(\begin{array}{ccc|c}0&-1&3&2\\-1&1&10&35\\0&-3&-28&-105\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&10&35\\0&-1&3&2\\0&0&37&111\end{array}\right)$.

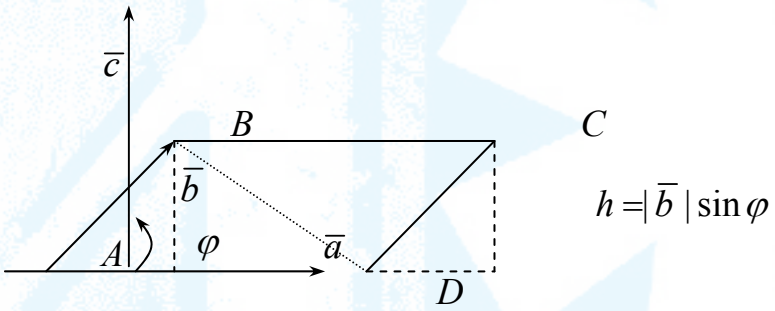
Обратный ход. $\begin{cases} -x+y+10z=35 \\ -y+3z=2 \\ 37z=111 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=3 \\ y=3z-2=7 \\ x=y+10z-35=2 \end{cases}$.

Откуда получаем, что $\overline{d}(2;7;3)$.

Векторное произведение двух векторов

Рассмотрим еще одну операцию между двумя векторами, которая принципиально отличается от скалярного произведения.

Определение 19. *Векторное произведение* двух векторов $\overline{a},\overline{b}$ есть вектор $\overline{c}$, модуль которого численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, т. е. $|\overline{c}|=|\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi$, где $\varphi=(\overline{a}\wedge\overline{b})$. Обозначать векторное произведение мы будем так: $[\overline{a},\overline{b}]$.



Важным отличием является то, что в результате произведения векторов получается вектор. При этом $\overline{c}$ перпендикулярен обоим перемножаемым векторам ($\overline{a}\perp\overline{c}$, $\overline{b}\perp\overline{c}$).

По рисунку видно, что площадь параллелограмма, построенного на $\overline{a}$ и $\overline{b}$, вычисляется по формуле:

$S_{парал.}=S_{прямоуг.}=|\overline{a}|h=|\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi=[\overline{a},\overline{b}]=\overline{c}$.

Также можно заметить, что площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, равна половине площади параллелограмма: $S_{\Delta}=\frac{1}{2}|\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi$.

Основные свойства векторного произведения.

1. Антикоммутативность. При перестановке множителей меняется знак. $[\overline{a},\overline{b}]=-[\overline{b},\overline{a}]$.

2. Ассоциативность относительно скалярного множителя. $\lambda[\overline{a},\overline{b}]=$ $=[\lambda\overline{a},\overline{b}]=[\overline{a},\lambda\overline{b}]$.

3. Дистрибутивность относительно сложения или вычитания. $[\overline{a},\overline{b}\pm\overline{c}]=[\overline{a},\overline{b}]\pm[\overline{a},\overline{c}]$.

4. Если $\overline{a}=\overline{0}$ или $\overline{b}=\overline{0}$ или же $\overline{a}\parallel\overline{b}$, то $[\overline{a},\overline{b}]=\overline{0}$. В частности, для любого $\overline{a}$ получаем $[\overline{a},\overline{a}]=\overline{0}$. На основании этого свойства можно ввести критерий коллинеарности.

Определение 20. Два ненулевых вектора *коллинеарны* тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору.

По аналогии со скалярным произведением выразим векторное произведение через координаты векторов.

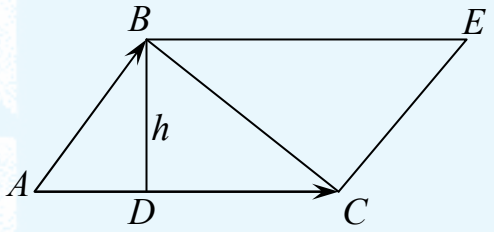
Теорема 12. *Векторное произведение двух векторов* $\overline{a}(x_1;y_1;z_1)$, $\overline{b}(x_2;y_2;z_2)$, *заданных своими координатами, вычисляется по формуле:*

$$[\overline{a},\overline{b}]=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{j}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

Разложив этот определитель по первой строке, получим более удобную запись: $[\overline{a},\overline{b}]=\overline{i}\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}+\overline{j}\begin{vmatrix}z_1 & x_1\\ z_2 & x_2\end{vmatrix}+\overline{k}\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}=\overline{c}$. То есть координатами вектора $\overline{c}$ являются определители второго порядка: $\overline{c}(\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix})$.

Следствие. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a},\overline{b}$, представляется в виде: $S_{парал.}=\sqrt{\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}^2}$.

Пример 40. Даны три точки $A(1;1;1), B(2;2;2), C(4;3;5)$. Найти площадь треугольника S_{ABC} и длину его высоты $h=|\overline{BD}|$.



Решение.

Площадь треугольника ABC равняется половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$: $S_{ABC}=\frac{1}{2}S_{ABCE}$. Тогда

$$[\overline{AB},\overline{AC}]=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 4\end{vmatrix}=\overline{i}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}-\overline{j}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix}+\overline{k}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=2\overline{i}-\overline{j}-\overline{k}=(2;-1;-1).$$

Найдем длину полученного вектора:

$$S_{ABC}=|[\overline{AB},\overline{AC}]|=\frac{1}{2}\sqrt{4+1+1}=\frac{\sqrt{6}}{2}(ед.^2).$$

С другой стороны, $S_{ABC}=\frac{1}{2}|\overline{AC}|\cdot h$. Откуда можно выразить $h=\frac{2\cdot S_{ABC}}{|\overline{AC}|}==\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9+4+16}}=\sqrt{\frac{6}{29}}$, где $\overline{AC}=(4-1;3-1;5-1)$.

Итак, $h=\sqrt{\frac{6}{29}}$.

Пример 41. Дано $\overline{a}\perp\overline{c}$, $\overline{b}\perp\overline{c}$, где $\overline{a}(4;-2;-3),\overline{b}(0;1;3)$ и $|\overline{c}|=26$. Найти координаты вектора $\overline{c}$.

Решение. Так как $\overline{a}\perp\overline{c}$ и $\overline{b}\perp\overline{c}$, то по свойствам векторного произведения вектор $\overline{c}$ коллинеарен некому вектору $\overline{d}$, который получается при векторном произведении $[\overline{a},\overline{b}]=\overline{d}$. Значит, $\overline{c}=\lambda\overline{d}=\lambda[\overline{a},\overline{b}]=$ $=\lambda\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 4 & -2 & -3\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=\lambda(-3\overline{i}-12\overline{j}+4\overline{k})=(-3\lambda;-12\lambda;4\lambda)$. То есть, $\overline{c}=$ $=(-3\lambda;-12\lambda;4\lambda)$ и $|\overline{c}|=\sqrt{\lambda^2(9+144+16)}=\pm\lambda\sqrt{169}=\pm13\lambda$. По условию $|\overline{c}|=26=\pm13\lambda$, поэтому $\lambda=\pm2$. Поставив λ, получаем $\overline{c}_1=(-6;-24;8)$, $\overline{c}_2=(6;24;-8)$.

Смешанное произведение трех векторов

Определение 21. *Смешанное* произведение трех векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ есть число, равное скалярному произведению вектора $[\overline{a},\overline{b}]=\overline{d}$ на вектор $\overline{c}$. Мы будем обозначать его через $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=([\overline{a},\overline{b}],c)$. Иногда это произведение называют векторно-скалярным.

Рассмотрим геометрический смысл смешанного произведения.

Смешанное произведение $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$ трех некомпланарных векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$, приведенных к общему началу, численно равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Следствие. Ненулевые векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

Отметим также полезное свойство смешанного произведения. Смешанное произведение остается неизменным при перестановке знаков векторного и скалярного произведения, а также при циклической перестановке перемножаемых векторов, т. е.

$(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = (\overline{c},\overline{a},\overline{b}) = (\overline{b},\overline{c},\overline{a})$.

Наконец, выражение смешанного произведения через координаты будет таковым:

Теорема 13. Смешанное произведение трех векторов, заданных своими координатами, равно определителю третьего порядка, составленному из координат перемножаемых векторов: $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

Следствие 1. Три вектора компланарны, если определитель третьего порядка, составленный из их координат, равен нулю:

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Следствие 2. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$, равен модулю их смешанного произведения:

$$V_{параллеп.} = \mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Следствие 3. Объем треугольной пирамиды, построенной на $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$, равен $\frac{1}{6}$ модуля их смешанного произведения:

$$V_{пирамиды} = \frac{1}{6}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Решим несколько типовых задач.

Пример 42. Найти объем треугольной пирамиды, если известны координаты ее вершин $A(1;1;1)$, $B(4;4;4)$, $C(3;5;5)$, $D(2;4;7)$.

Решение. Найдем координаты трех векторов, образующих ребра пирамиды $ABCD$ и приведенных к общему началу. В качестве общего начала можно выбрать любую из вершин пирамиды (мы возьмем точку A: $\overline{a} = \overline{AB}(3;3;3)$, $\overline{b} = \overline{AC}(2;4;4)$, $\overline{c} = \overline{AD}(1;3;6)$).

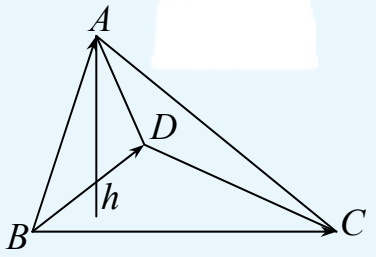
Тогда $V_{пирамиды} = \frac{1}{6}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$.

Воспользуемся свойствами определителя. Сначала вычтем из третьего столбца второй, а потом разложим определитель по третьему столбцу:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3(12-6) = 18.$$

Поэтому $V_{пирамиды} = \frac{1}{6} \cdot 18 = 3(ед^3)$.

Пример 43. Даны координаты вершин треугольной пирамиды $A(2;-4;5)$, $B(-1;-3;4)$, $C(5;5;-1)$, $D(1;-2;2)$. Найти длину высоты h, проведенной из вершины A к основанию.



Решение. Прежде всего, найдем $V_{пирамиды}$. Составим тройку образующих векторов $\overline{a} = \overline{BA}(3;-1;1)$, $\overline{b} = \overline{BC}(6;8;-5)$, $\overline{c} = \overline{DB}(2;1;-2)$.

По следствию из теоремы о смешанном произведении получаем:

$$V_{пирамиды} = \frac{1}{6}\mathrm{mod}(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}).$$

С другой стороны, $V_{пирамиды} = \frac{1}{3} S_{BCD} \cdot h$. Приравняв обе формулы и выразив h, имеем: $h = \frac{3V_{пирамиды}}{S_{BCD}} = \frac{\mathrm{mod}(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})}{2S_{BCD}}$, где, как мы знаем, $S_{BCD} = \frac{1}{2}|[\overline{BD}, \overline{BC}]|$.

Окончательно получаем $h = \dfrac{\mathrm{mod}(\overline{a},\overline{b},\overline{c})}{|[\overline{b},\overline{c}]|}$. $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 6 & 8 & -5 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -45$;

$$[\overline{b},\overline{c}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 6 & 8 & -5 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \overline{i}\begin{vmatrix} 8 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - \overline{j}\begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + \overline{k}\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -11\overline{i} + 2\overline{j} - 10\overline{k};$$

$|[\overline{b},\overline{c}]| = \sqrt{121+4+100} = \sqrt{225} = 15$. Итак, $h = \dfrac{\mathrm{mod}(-45)}{15} = 3$.

§ 6. Прямая линия на плоскости

Различные способы записи уравнения прямой на плоскости

Определение 22. *Линией*, заданной уравнением $F(x,y)=0$, называется множество точек плоскости, обладающее следующими свойствами:

- Если какая-то точка принадлежит множеству, то ее координаты удовлетворяют этому уравнению.
- Если координаты точки удовлетворяют этому уравнению, то точка принадлежит множеству.

Определение 23. Линия называется *алгебраической,* если $F(x,y)$ — многочлен, т. е. сумма конечного числа одночленов вида $ax^s y^t$, где s, t — целые неотрицательные числа. При этом $s+t$ называется степенью одночлена.

Порядком же линии $F(x,y)=0$ мы будем называть наивысшую степень ее одночлена. В геометрии рассматриваются только линии 1-го и 2-го порядка. Линию первого порядка также называют *прямой.*

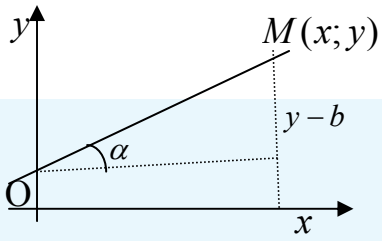
Существует несколько способов задания прямой. Подробно опишем каждый из них.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть задана декартова система координат на плоскости и некоторая прямая (непараллельная оси ординат), образующая с осью абсцисс О*x* некоторый угол α.

Определение 24. *Угловым коэффициентом* прямой называется тангенс угла наклона прямой $k = tg\alpha$ к оси Оx.

Выведем уравнение этой прямой, если известны коэффициент k и величина отрезка b, который отсекает прямая на оси Оy.



Выберем на прямой произвольную точку M с координатами x, y. Точка $M(x;y)$ будет принадлежать прямой только тогда, когда $k = \dfrac{y-b}{x}$.

Выразив отсюда y, получим: $y = kx + b.$ (14)

Уравнение (14) называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*. Если же выбрать прямую, параллельную Оy, то уравнение примет вид $x = a$, где a — отрезок, который отсекает прямая при пересечении с Оx.

Общее уравнение прямой

Общее уравнение 1-го порядка относительно переменных x и y имеет вид: $Ax + By + C = 0.$ (15)

Здесь A, B, C — произвольные числа и A, B одновременно не могут быть равны нулю, иначе уравнение не содержало бы переменных x, y.

Пусть $B \neq 0$. Тогда разделив общее уравнение и выразив из него y, получим: $y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B} = kx + b$, где $k = -\dfrac{A}{B}$, а $b = -\dfrac{C}{B}$, т. е. получили уравнение (14).

Рассмотрим частные случаи.

Если $C = 0$, то уравнение (15) имеет вид $Ax + By = 0$ и определяют прямую, проходящую через начало координат.

1. Если $B = 0$, то $Ax + C = 0$ и прямая параллельна оси Оy.
2. При $A = 0$ $By + C = 0$ и прямая параллельна оси Оx.

Уравнение прямой в отрезках

Допустим, в уравнении (15) все коэффициенты отличны от нуля $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, тогда его можно привести к виду $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1,$ (16)

где $a=-\frac{C}{A}$, $b=-\frac{C}{B}$. Уравнение (16) называется *уравнением прямой в отрезках*. Такая форма записи весьма удобна для построения прямой. Достаточно отметить две ее точки: при $x=0$ получаем, $y=b=-\frac{C}{B}$. При $y=0 \Rightarrow x=a=-\frac{C}{A}$.

Пример 44. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $C(1;1)$ и отсекает от координатного угла треугольник с площадью $S_{\Delta}=2(ед.^2)$.

Решение. Запишем уравнение искомой прямой в отрезках $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. Так как прямая проходит через $C(1;1)$, то координаты этой точки удовлетворяют прямой, т. е. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$. Или после приведения к общему знаменателю: $a+b=ab$. Теперь площадь треугольника равна $S=\pm\frac{1}{2}ab$. Подставив значение площади из условия, получим: $ab=\pm 4$. Таким образом, нужно решить две системы уравнений: $\begin{cases} ab=4 \\ a+b=4 \end{cases}$ и $\begin{cases} ab=-4 \\ a+b=-4 \end{cases}$. После подстановки и решения квадратных уравнений имеем одну пару корней для первой системы $a_1=2, b_1=2$ и две — для второй: $a_{2,3}=-2\pm 2\sqrt{2}$, $b_{2,3}=-2\mp 2\sqrt{2}$.

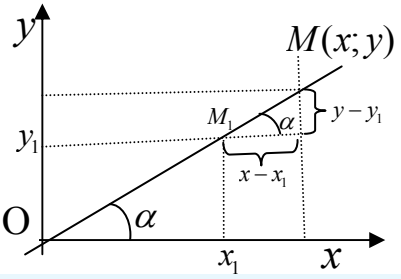
Условию задачи удовлетворяют три прямые: $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$,

$$\frac{x}{2\sqrt{2}-2}+\frac{y}{-2-2\sqrt{2}}=1,\ \frac{x}{-2\sqrt{2}-2}+\frac{y}{2\sqrt{2}-2}=1.$$

Уравнение прямой с заданным направлением, проходящей через заданную точку

Пусть на прямой задана какая-то точка $M_1(x_1;y_1)$ и угловой коэффициент k, определяющий направление этой прямой.

Из рисунка видно, что точка $M_1(x_1;y_1)$ будет лежать на прямой в том и только в том случае, если $\frac{y-y_1}{x-x_1}=tg\alpha=k$. Откуда получаем $y-y_1=k(x-x_1)$. (17)



Это и будет уравнение прямой с заданным направлением, проходящей через заданную точку.

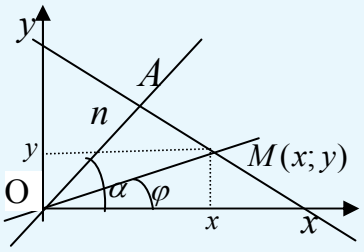
Уравнение прямой, проходящей через две точки

Даны две точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$, находящиеся на прямой. Тогда угловой коэффициент k находится по формуле: $tg\alpha=k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. Подставив этот коэффициент в уравнение (17), получим $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ или $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$. (18)

Следует отметить, что когда один из знаменателей уравнения равен нулю ($x_2=x_1$ либо $y_2=y_1$), то и соответствующий числитель также равен нулю. Например, нужно провести прямую через точки $M_1(4;8)$ и $M_2(4;-2)$. Подставим эти точки в (18): $\frac{y-8}{-2-8}=\frac{x-4}{4-4}$. Здесь знаменатель равен нулю. Полагая и числитель равным нулю, получим уравнение искомой прямой $x-4=0$ или $x=4$.

Нормальное уравнение прямой

Пусть задана какая-нибудь прямая l. Проведем через начало координат прямую, перпендикулярную к этой прямой. Ее мы будем также называть нормалью. Точка A — точка пересечения нормали с исходной прямой. Обозначим через $\rho=|OA|$ и через α — угол, образованный нормалью с осью Оx. Выберем на l какую-нибудь точку $M(x,y)$.



Получаем, $x=|OM|\cos\alpha$, $y=|OM|\sin\alpha$, $\rho=|OA|=|OM|\cos(\alpha-\varphi)=\cos\alpha\cos\varphi+\sin\alpha\sin\varphi=$ $=x\cos\alpha+y\sin\alpha$. Окончательно получаем уравнение $x\cos\alpha+y\sin\alpha-\rho=0$, которое и называется *нормальным уравнением прямой.*

Предположим, что у нас задана прямая в виде общего уравнения $Ax+By+C=0$ и в виде нормального уравнения $x\cos\alpha+y\sin\alpha-\rho=0$. Так как оба уравнения определяют одну прямую, то их коэффициенты должны быть пропорциональны: $\frac{\cos\alpha}{A}=\frac{\sin\alpha}{B}=-\frac{\rho}{C}=\mu$ или $\cos\alpha=\mu A$, $\sin\alpha=\mu B$ и $\rho=-\mu C$. Для того чтобы найти μ, возведем два первых равенства в квадрат и сложим. После этого выразим $\mu=\pm\sqrt{A^2+B^2}$ и назовем его *нормирующим множителем*. Его знак определяется третьим равенством $\rho=-\mu C$ и следовательно, знак нормирующего множителя противоположен знаку свободного члена нормируемого уравнения, а если $C=0$, то знак множителя выбирают произвольным.

Нормирующий множитель помогает находить расстояние от точки до прямой.

Пример 45. Пусть дана прямая $l:3x+4y-1=0$ и точка $M(5;5)$. Необходимо найти расстояние от этой прямой до точки *M*.

Решение. Найдем нормирующий множитель исходной прямой: $\mu=\sqrt{3^2+4^2}=5$. Теперь подставим в левую часть прямой l вместо текущих координат координаты точки M: $5\cdot3+4\cdot5-1=34$. Поделив полученное на нормирующий множитель и взяв его по модулю, получим расстояние от точки M до прямой l: $d=\left|\frac{34}{5}\right|=\frac{34}{5}$.

Пример 46. Вычислить расстояние между параллельными прямыми $l_1:24x-10y+39=0$ и $l_2:12x-5y-26=0$.

Решение. Чтобы определить искомое расстояние, выберем произвольную точку на одной прямой и найдем расстояние от этой точки до другой прямой. На l_1 выберем, например, $x=0$, тогда $0\cdot x-10y+39=0\Rightarrow y=3{,}9$. По аналогии с предыдущим примером получаем расстояние от $M(0;3{,}9)$ до прямой $12x-5y-26=0$: $d=\left|\frac{12\cdot0-5\cdot3{,}9-26}{\sqrt{12^2+5^2}}\right|=\left|-\frac{45{,}5}{13}\right|=3{,}5$.

Взаимное расположение двух прямых на плоскости

Пусть даны две прямые $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$ и $l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$, лежащие на плоскости. Рассмотрим вопрос о взаимном расположении

этих прямых. Для его выяснения нужно решить систему двух уравнений: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$. Использовав для решения формулы Крамера, получим три различных случая.

1. $\Delta = A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, т. е. определитель отличен от нуля и коэффициенты при текущих переменных не пропорциональны. Значит, прямые пересекаются и система имеет единственное решение: $x_1 = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}$, $y_1 = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{C_1A_2 - C_2A_1}{A_1B_2 - A_2B_1}$.

2. $\Delta = 0$ и хотя бы один из определителей Δ_x или Δ_y не равен нулю. Коэффициенты при неизвестных пропорциональны $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ или $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$ (откуда $k_1 = k_2$). Система несовместна, и прямые параллельны.

3. $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$. То есть все коэффициенты пропорциональны и одно уравнение является следствием другого. Прямые совпадают.

Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

Пусть заданы две прямые l_1, l_2. *Углом между двумя прямыми* будем называть угол, на который нужно повернуть против хода часовой стрелки прямую l_1, чтобы она совпала с прямой l_2. Обозначим его за φ.

Также обозначим через φ_1 и φ_2 соответственно углы между осью Оx и прямыми l_1, l_2. Тогда $tg\varphi = tg(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_2 tg\varphi_1}$. Так как $tg\varphi_1 = k_1$, $tg\varphi_2 = k_2$, формула представляется в виде: $tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1}$. Если же прямые заданы уравнениями $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то $k_1 = -\frac{A_1}{B_1}$, $k_2 = -\frac{A_2}{B_2}$ и $tg\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}$.

Рассмотрим частные случаи

1. Если хотя бы одна из прямых параллельна оси Оx, то данная формула теряет смысл, и угол между прямыми вычисляется непосредственно $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 (\varphi = \frac{\pi}{2} - \varphi_1)$.

2. В случае, когда прямые параллельны, то угол между ними равен нулю. Тогда $tg\varphi = 0$ и числитель $k_2 - k_1$ обращается в нуль, т. е. $k_2 = k_1$. Получили, что признаком **параллельности** прямых является равенство угловых коэффициентов.

3. Когда прямые перпендикулярны ($\varphi = \frac{\pi}{2}$), а $tg\varphi = \infty$, то знаменатель $1 + k_2 k_1$ обращается в нуль. Следовательно условием **перпендикулярности** двух прямых является соотношение $k_2 k_1 = -1$.

Пример 47. Дана прямая $2x + 3y + 4 = 0$. Необходимо составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;1)$ под углом 45° к этой прямой.

Решение. Ввиду того, что в условии задачи не сказано, от какой из прямых следует вести отсчет угла, то задача имеет два решения.

1. $k_1 = -\frac{2}{3}$, $tg\varphi = tg45^\circ = 1$, k_2 — искомый угловой коэффициент. Тогда $1 = \frac{k_2 + (2/3)}{1 - (2/3)k_2}$. Умножив на знаменатель и приведя подобные, получим $k_2 = \frac{1}{5}$ и прямая имеет вид $y - 1 = \frac{(x-2)}{5}$ или $x - 5y + 3 = 0$.

2. $k_2 = -\frac{2}{3}$, $tg\varphi = tg45^\circ = 1$, k_1 — искомый коэффициент. Тогда $1 = \frac{-(2/3) - k_1}{1 - (2/3)k_1}$. Отсюда $k_1 = -5$ и прямая имеет вид $y - 1 = -5(x - 2)$ или $5x + y - 11 = 0$.

Пример 48. Найти проекцию точки $M(-6;4)$ на прямую $l: 4x - 5y + 3 = 0$.

Решение. Искомой будет являться точка пересечения прямой и перпендикуляра, проведенного к этой прямой из точки M. Угловой коэффициент перпендикуляра из условия перпендикулярности равен $k_1 = -\frac{1}{k_2}$, где $k_2 = -\frac{A}{B} = \frac{4}{5}$ — угловой коэффициент исходной прямой.

Запишем уравнение перпендикуляра $y - y_1 = k_1(x - x_1)$ или после подстановки: $y - 4 = -\frac{5}{4}(x + 6)$. Откуда $5x + 4y + 14 = 0$. Решив по формулам Крамера систему двух уравнений $\begin{cases} 5x + 4y + 14 = 0 \\ 4x - 5y + 3 = 0 \end{cases}$, получим $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -\frac{82}{41} = -2$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -\frac{41}{41} = -1$. Точка $M_1(-2;1)$ и будет проекцией точки M на прямую l.

Пример 49. Дан треугольник с вершинами $M_1(2;1)$, $M_2(-1;-1)$, $M_3(3;2)$. Найти уравнение и длину высоты, опущенной из вершины M_2.

Решение. Составим уравнение прямой, на которой лежит сторона M_1M_3. Для этого воспользуемся уравнением прямой по двум точкам $\frac{x - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_3 - y_1}$. После подстановки получаем: $\frac{x - 2}{3 - 2} = \frac{y - 1}{2 - 1}$ или $x - y - 1 = 0$. Из условия перпендикулярности найдем коэффициент высоты. Он равен $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -1$, т. к. угловой коэффициент M_1M_3 равен $k_1 = 1$. А само уравнение высоты $y - y_2 = k_2(x - x_2)$ или после подстановки точки M_2 $x + y + 2 = 0$.

Чтобы найти длину высоты, нужно найти расстояние от точки $M_2(-1;-1)$ до прямой M_1M_3.

Нормирующий множитель $\mu = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, а расстояние $\rho(M_1M_3, M_2) = \frac{|x - y - 1|}{\mu} = \frac{|1 - 1 - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

§ 7. Различные виды уравнений плоскости

Общее уравнение плоскости

Пусть задана плоскость в некоторой декартовой прямоугольной системе координат. Выберем на этой плоскости какую-нибудь точку

$M_0(x_0;y_0;z_0)$ и какой угодно отличный от нуля вектор, перпендикулярный этой плоскости. Пусть координаты этого вектора будут A,B,C.

Точка $M(x;y;z)$ лежит на плоскости в том и только в том случае, если векторы $\overline{n}=(A;B;C)$ и $\overline{M_0M}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$ будут перпендикулярны. Это значит, что их скалярное произведение $(\overline{n},\overline{M_0M})=0$ или

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (19)$$

Это и будет уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 и имеющей нормальный вектор $\overline{n}$. Раскрыв скобки в (19) и обозначив $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$, получим *общее уравнение* плоскости:

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (20)$$

Рассмотрим неполные уравнения плоскости.

$D=0 \Rightarrow Ax+By+Cz=0$ — плоскость проходит через начало координат.

1. Если $A=0$, то $By+Cz+D=0$ и плоскость параллельна оси О*x*. Также, если $B=0$, $Ax+Cz+D=0$ и плоскость параллельна оси О*y* и, наконец, при $C=0$ плоскость параллельна оси О*z*.

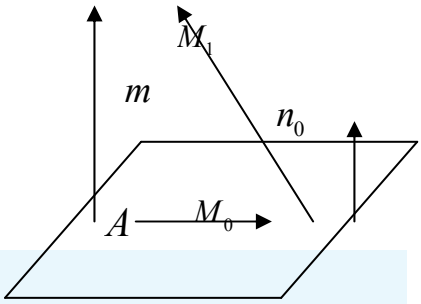
2. $A=D=0 \Rightarrow By+Cz=0$ — плоскость проходит через ось О*x*. Если $B=D=0$, проходит через О*y* и при $C=D=0$ плоскость проходит через ось О*z*.

3. $A=B=0 \Rightarrow Cz+D=0$ — плоскость перпендикулярна оси О*z*. Если $A=C=0$, то плоскость перпендикулярна О*y* и если $C=D=0$, плоскость перпендикулярна О*x*.

Нормированное уравнение плоскости

Поскольку в качестве нормального вектора $\overline{n}=(A;B;C)$ можно брать любой отличный от нулевого перпендикулярный плоскости вектор, то, взяв единичный (нормированный) вектор $\overline{n}_0=\dfrac{\overline{n}}{|\overline{n}|}=\dfrac{A\overline{i}+B\overline{j}+C\overline{k}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, получим так называемое *нормированное уравнение* плоскости: $\dfrac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0$, $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$. Это уравнение весьма удобно при нахождении расстояния от точки до плоскости.

Действительно, пусть дана точка $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и какая-то плоскость. Нужно найти расстояние от этой точки до плоскости.



$$m=\overline{M_0M_1}=(x_1-x_0;y_1-y_0;z_1-z_0),$$

$$\overline{n}_0=\frac{A\overline{i}+B\overline{j}+C\overline{k}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$(\overline{m},\overline{n}_0)=|\overline{n}_0|\,\overline{AM}_1.$$

Отсюда: $|\overline{AM}_1|=\dfrac{|(\overline{m},\overline{n}_0)|}{|n_0|}=\dfrac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Таким образом, чтобы найти расстояние от точки до плоскости, нужно в левую часть нормированного уравнения плоскости подставить координаты данной точки и взять абсолютную величину полученного результата. Рассмотрим пример.

Пример 50. Найти уравнения плоскостей, параллельных плоскости $x+2y+2z+6=0$ и отстоящих от нее на расстоянии 5 единиц длины.

Решение. Искомые уравнения плоскостей определяются из выражения: $5=\dfrac{|x+2y+2z+6|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}$ или после приведения подобных $x+2y+2z+6=\pm15$. Получили два уравнения плоскостей $x+2y+2z+21=0$ и $x+2y+2z-9=0$.

Уравнение плоскости в отрезках

При условии, что $A\neq0,B\neq0,C\neq0,D\neq0$, перепишем уравнение (21) в виде $-\dfrac{A}{D}x-\dfrac{B}{D}y-\dfrac{C}{D}z=1$ и обозначим $a=-\dfrac{D}{A}$, $b=-\dfrac{D}{B}$, $c=-\dfrac{D}{C}$. Получим уравнение $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$, которое назовем *уравнением плоскости в отрезках*. a,b,c — это величины отрезков, которые плоскость отсекает от координатных осей.

Взаимное расположение двух плоскостей

Пусть даны две плоскости $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+$ $+D_2=0$, тогда:

1. Если эти плоскости параллельны, то нормальные векторы $\overline{n}_1(A_1;B_1;C_1)$ и $\overline{n}_2(A_2;B_2;C_2)$ коллинеарны. То есть выполняется условие $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$.

2. Если же две плоскости перпендикулярны, то перпендикулярны и нормальные векторы $\overline{n}_1$, $\overline{n}_2$, и выполняется условие перпендикулярности $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ (равенство нулю скалярного произведения).

3. Также из определения скалярного произведения находим угол между плоскостями $\cos\varphi=\frac{|(\overline{n}_1,\overline{n}_2)|}{|n_1||n_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$.

Пример 51. Составить уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$.

Решение. Выберем на искомой плоскости точку $M(x;y;z)$ и найдем координаты векторов $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$: $\overline{M_1M}=(x-x_1;y-y_1;z-z_1)$, $\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$, $\overline{M_1M_3}=(x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1)$.

Точка M будет лежать на плоскости с точками M_1,M_2,M_3, если векторы $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$ будут компланарны. Следовательно, их смешанное произведение будет равно нулю. Опираясь на запись смешанного произведения в координатной форме, получим: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$. Раскрыв этот определитель, например, по правилу треугольника, найдем искомое уравнение плоскости.

Решим этот пример другим способом. Запишем уравнение плоскости в виде: $\alpha x+\beta y+\gamma z+1=0$, где $\alpha=\frac{A}{D}$, $\beta=\frac{B}{D}$, $\gamma=\frac{C}{D}$ $(D\neq 0)$. Так как плоскость проходит через три точки, имеем систему из трех уравнений с тремя неизвестными α,β,γ: $\begin{cases} \alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1=-1 \\ \alpha x_2+\beta y_2+\gamma z_2=-1 \\ \alpha x_3+\beta y_3+\gamma z_3=-1 \end{cases}$. Решив эту систему неоднородных уравнений методом Крамера, найдем α,β,γ.

Пример 52. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$ перпендикулярно непараллельным плоскостям $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

Решение. Так как являющийся векторным произведением вектор $\overline{n}=[\overline{n}_1,\overline{n}_2]$ перпендикулярен к $\overline{n}_1(A_1;B_1;C_1)$ и $\overline{n}_2(A_2;B_2;C_2)$, то он перпендикулярен и искомой плоскости. Значит, его можно взять за нормальный вектор этой плоскости. Произвольная точка $M(x;y;z)$ будет лежать в плоскости, если смешанное произведение равно нулю $(\overline{M_1M},[\overline{n}_1,\overline{n}_2])=\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}=0$. Раскрыв определитель, получим уравнение нужной нам плоскости.

Пример 53. Найти расстояние между параллельными плоскостями $x-2y-2z-12=0$, $x-2y-2z-6=0$.

Решение. Для определения искомого расстояния выберем фиксированную точку на одной из плоскостей. Например, пусть $x_1=y_1=0$, тогда после подстановки этих значений в первую плоскость получим $z_1=-6$. Уравнение второй плоскости запишем в нормированном виде и найдем расстояние от точки $M(0;0;-6)$ до этой плоскости: $\rho=\left|\dfrac{x_1-2y_1-2z_1-6}{\sqrt{1+4+4}}\right|=\left|\dfrac{0-2\cdot 0-2\cdot 0-6}{\sqrt{1+4+4}}\right|=2$.

§ 8. Прямая линия в пространстве

Каноническое уравнение прямой

Пусть дана какая-нибудь прямая l_1. Каждый отличный от нулевого вектор, лежащий на прямой или параллельный ей, есть направляющий вектор этой прямой. Обозначим его за $\overline{a}(l;m;n)$. Далее, пусть данная прямая проходит через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$. Произвольная точка $M(x;y;z)$ будет лежать на l_1, если вектор $\overline{M_0M}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$ будет коллинеарен вектору $\overline{a}(l;m;n)$. А это значит, что соответствующие координаты будут пропорциональны: $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$. (22)

Уравнения (22) есть искомые уравнения прямой, проходящей через $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и имеющей направляющий вектор $\overline{a}(l;m;n)$. Эти уравнения принято называть *каноническими*.

Параметрические уравнения прямой

Пусть даны канонические уравнения прямой. Обозначим буквой t каждое из равных отношений: $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t$. Откуда имеем: $x=x_0+lt$, $y=y_0+mt$, $z=z_0+nt$. Эти уравнения назовем *параметрическими уравнениями* прямой, проходящей через $M_0(x_0;y_0;z_0)$ в направлении вектора $\overline{a}(l;m;n)$. t — это некий параметр, областью определения которого является вся вещественная ось.

Уравнения прямой, проходящей через две точки

Пусть даны две точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$. Примем за направляющий вектор прямой $\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$. Тогда уравнение (22) перепишется в виде: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$. (23)

Запись (23) весьма удобна для решения задач.

Прямая линия как пересечение двух плоскостей

Две любые непараллельные между собой плоскости, заданные общими уравнениями $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ (24)

определяют прямую в пространстве. Она будет получаться при пересечении этих плоскостей. От уравнений (24) можно перейти к уравнениям (22). Для этого нужно знать какую-нибудь точку прямой и направляющий вектор. Координаты точки можно найти из (24), выбрав одну из координат произвольно и решив после этого систему из двух уравнений с двумя неизвестными. Так, направляющий вектор прямой должен быть перпендикулярен обоим нормальным векторам $\overline{n}_1(A_1;B_1;C_1)$, $\overline{n}_2(A_2;B_2;C_2)$ исходных плоскостей, то можно положить $\overline{n}=[\overline{n}_1,\overline{n}_2]$. Покажем это на примере.

Пример 54. Составить канонические уравнения прямой $\begin{cases} x-2y+3z-4=0 \\ 3x+2y-5z-4=0 \end{cases}$.

Решение. Положим $z_1=0$, получим $\begin{cases} x-2y-4=0 \\ 3x+2y-4=0 \end{cases}$. Решив систему, находим $x_1=2$, $y_1=-1$. Таким образом, найдены координаты точки $M_1(2;-1;0)$. Теперь найдем координаты направляющего вектора $\overline{n}$: $\overline{n}=[\overline{n}_1,\overline{n}_2]=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}=4\overline{i}+14\overline{j}+8\overline{k}$. Канонические уравнения прямой имеют вид: $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+1}{14}=\dfrac{z}{8}$ или после сокращения $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{7}=\dfrac{z}{4}$.

Замечание. Можно было и не находить направляющий вектор прямой, а выбрать две произвольные точки. Например, пусть первая точка будет $M_1(2;-1;0)$, а для нахождения второй положим $x_2=0$. Тогда $\begin{cases} -2y+3z-4=0 \\ 2y-5z-4=0 \end{cases}$ и $y_2=-8$, $z_2=-4$. Подставив $M_1(2;-1;0)$ и $M_2(0;-8;-4)$ в уравнения (23), получим уравнение нужной прямой $\dfrac{x-2}{0-2}=\dfrac{y+1}{-8+1}=\dfrac{z}{-4-0}$.

Угол между прямыми в пространстве. Условие параллельности и перпендикулярности прямых

Пусть две прямые в пространстве заданы своими каноническими уравнениями $\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$ и $\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$.

Поставим задачу определения угла между этими прямыми. Она сводится к определению угла между направляющими векторами $\overline{a}_1(l_1;m_1;n_1)$, $\overline{a}_2(l_2;m_2;n_2)$. Пользуясь определением скалярного произведения $(\overline{a}_1,\overline{a}_2)=|\overline{a}_1||\overline{a}_2|\cos\varphi$, где $\varphi=(\overline{a}_1\wedge\overline{a}_2)$. Откуда получим: $\cos\varphi=\dfrac{(\overline{a}_1,\overline{a}_2)}{|\overline{a}_1||\overline{a}_2|}=\dfrac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$.

Условия параллельности и перпендикулярности аналогичны прямой на плоскости.

Две прямые параллельны, если $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$, и перпендикулярны $\overline{a}_1 \perp \overline{a}_2$, если $(\overline{a}_1,\overline{a}_2)=l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$.

Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

Пусть плоскость задана общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, а прямая каноническими уравнениями $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$.

Прямая будет параллельна плоскости в том и только в том случае, если направляющий вектор прямой $\overline{a}(l;m;n)$ перпендикулярен нормальному вектору плоскости $\overline{n}(A;B;C)$, т. е. $\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$.

Условием параллельности прямой и плоскости будет $Al+Bm+Cn=0$.

Угол между прямой и плоскостью определяется по формуле: $\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)=\sin\varphi=\frac{|lA+mB+nC|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Необходимость модуля в числителе возникает из того, что $\sin\varphi \geq 0$.

Пример 55. Найти точку пересечения прямой $L:\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$ и плоскости $P:2x+3y+z-1=0$.

Решение. Для определения координат точки пересечения запишем уравнения прямой L в параметрическом виде: $x-1=t, y+1=-2t, z=6t$. Подставляя эти выражения в уравнение плоскости P, получим уравнение для определения значения параметра t, соответствующего точке их пересечения: $2(t+1)+3(-2t-1)+6t-1=0 \Rightarrow t=1$, следовательно, координаты искомой точки $x=2, y=-3, z=6$.

§ 9. Пучок плоскостей

Пусть прямая задана линией пересечения двух плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_1z + D_2 = 0 \end{cases}. \qquad (25)$$

Возьмем любые отличные от нуля числа α и β и составим равенство

$$a(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta\left(A_2x + B_2y + C_1z + D_2\right) = 0. \qquad (26)$$

Это равенство определяет плоскость, которая проходит через ту же прямую, т. к. каждая тройка чисел (x, y, z), удовлетворяющая (25), удовлетворяет и (26). Совокупность всех плоскостей, проходящих через одну и ту же прямую, называется *пучком плоскостей*. Если положить $\lambda = \beta/\alpha$, то уравнение $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_1z + D_2) = 0$ определяет все *плоскости пучка,* кроме второй из задающих прямую.

Пример 56. Составить уравнение плоскости P, проходящей через данную прямую L и точку $M_0(2,-1,2)$, если прямая $L:\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -3t+2 \\ z = 2t-3, \end{cases}$ задана параметрическими уравнениями.

Решение. Перейдем к каноническим уравнениям прямой $L:\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z+3}{2}$. Чтобы записать уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую L, и выбрать из него искомую плоскость, проходящую через точку M_0, составим уравнение прямой L в виде ее проекций на XOY и XOZ. Из канонических уравнений получим

$$L:\begin{cases} -3(x-1) = 2(y-2) \\ 2(x-1) = 2(z+3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - 7 = 0 \\ x - z - 4 = 0. \end{cases}$$

Уравнение пучка плоскостей через прямую L имеет вид:

$$(x - z - 4) + \lambda(3x + 2y - 7) = 0 \Leftrightarrow (1 + 3\lambda)x + 2\lambda y - z - (4 + 7\lambda) = 0.$$

Так как плоскость проходит через точку M_0, подставим ее координаты в уравнение пучка плоскостей и найдем значение λ, опреде-

ляющее искомую плоскость $2+6\lambda-4\lambda-1-4-7\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{3}{5}$ и уравнение плоскости P будет иметь вид: $4x+6y+5z-1=0$.

Пример 57. Составить уравнение плоскости P, проходящей через прямую $L_1:\begin{cases}3x+2y+5z+6=0\\ x+4y+3z+4=0\end{cases}$ параллельно прямой $L_2:\frac{x-1}{3}=\frac{y-5}{2}=\frac{z+1}{-3}$.

Решение. Запишем уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую L_1:

$$3x+2y+5z+6+\lambda\left(x+4y+3z+4\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(3+\lambda\right)x+\left(2+4\lambda\right)y+\left(5+3\lambda\right)z+\left(6+4\lambda\right)=0.$$

Выберем из всех плоскостей с нормальными векторами $\vec{n}=\{3+\lambda,2+4\lambda,5+3\lambda\}$ ту, которая параллельна направляющему вектору прямой L_2, равному $\overline{a}_2(3;2;-3)$, т. е. с нормальным вектором $\vec{n}$, перпендикулярным $\overrightarrow{a_2}$ и удовлетворяющим условию $\left(\overline{n},\overline{a}_2\right)=0:3\left(3+\lambda\right)+2\left(2+4\lambda\right)-3\left(5+3\lambda\right)=0$, из которого находим значение $\lambda=1$, при котором уравнение искомой плоскости принимает вид: $2x+3y+4z+5=0$.

Пример 58. Составить уравнение плоскости P, проходящей через прямую L: $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$ перпендикулярно к плоскости $P_1: x+y-z+1=0, L\notin P$.

Решение. Уравнение прямой L в проекциях: $\begin{cases}2x-2=0\\ y-2z-2=0\end{cases}$, уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую L, имеет вид: $\left(2x-2\right)+\lambda\left(y-2z-2\right)=0 \Leftrightarrow 2x+\lambda y-2\lambda z-2\left(\lambda+1\right)=0$ с общим нормальным вектором $\overline{n}=\{2,\lambda,-2\lambda\}$, зависящим от параметра λ.

Условие перпендикулярности искомой плоскости и плоскости P_1 с вектором $\overline{n}_1=(1;1;-1)$ имеет вид: $(\overline{n},\overline{n}_1)=2+\lambda+2\lambda=0$ и дает значение $\lambda=-\frac{2}{3}$, при котором получается уравнение плоскости P в виде $3x-y+2z-1=0$.

§ 10. Линии второго порядка

Общее уравнение второго порядка относительно переменных x, y будем записывать в следующем виде:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + + P = 0, \qquad (27)$$

где, по крайней мере, один из коэффициентов A, B, C не равен нулю.

Рассмотрим некоторые кривые второго порядка, которые можно описать при различных значениях коэффициентов A, B, C, D, E, P. Далее получим уравнения линий второго порядка — окружности, эллипса, гиперболы, параболы, причем будем подразумевать, что на плоскости задана декартова система координат.

Окружность

В аналитической геометрии всякая линия рассматривается как геометрическое место точек, при этом в определении линии содержится свойство, общее для всех ее точек.

Определение 25. *Окружностью* с центром в $M_0(x_0; y_0)$ и радиусом R называется геометрическое место точек плоскости, отстоящих от $M_0(x_0; y_0)$ на расстояние R.

Из определения имеем, что $|M_0M| = R$, где $M(x; y)$ — произвольная точка окружности. Расписывая $|M_0M|$ как расстояние в декартовой системе координат, получаем: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$. (28)

Если же за центр окружности выбрать начало координат, то (28) примет более простой вид: $x^2 + y^2 = R^2$.

Раскрывая скобки в (28), перепишем его в виде: $x^2 + y^2 - 2x_0x - 2x_0y + (x_0{}^2 + y_0{}^2 - R^2) = 0$. Это уравнение второй степени. Следовательно, окружность — это линия второго порядка. Однако уравнение второй степени далеко не всегда представляет окружность. Для этого необходимо, чтобы в (27) не было члена с произведением xy $(B = 0)$, а также коэффициенты при x^2, y^2 были равны $(A = C)$.

Приведенные условия являются необходимыми, но недостаточными. Например, какое из двух уравнений $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 1 = 0$ и $x^2 + y^2 - 2x + 2 = 0$ представляет окружность?

Приведем эти уравнения к виду (28), дополнив их до полных квадратов. Итак, в первом уравнении

$$x^2-3x=x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2=(x-\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4},$$

$$y^2+2y=y^2+2y+1-1=(y+1)^2-1.$$

Собирая обе части, имеем $x^2+y^2-3x+2y-1=(x-\frac{3}{2})^2+(y+1)^2-\frac{17}{4}=0$ или $(x-\frac{3}{2})^2+(y+1)^2=\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2$, что представляет собой окружность с центром в точке $M_0(1,5;-1)$ и радиусом $R=\sqrt{17}/2$.

Аналогичные действия проведем со вторым уравнением: $x^2-2x=x^2-2x+1-1=(x-1)^2-1$.

Значит, $x^2+y^2-2x+2=(x-1)^2+y^2+1=0$ или $(x-1)^2+y^2=-1$. Но сумма квадратов действительных чисел не может равняться отрицательному числу, поэтому ни одна точка плоскости не удовлетворяет данному уравнению. Получается, что это уравнение не представляет никакой линии, ни даже точки.

Из (28) легко получить $y_{1,2}=y_0\pm\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}$ и $x_{1,2}=x_0\pm\sqrt{R^2-(y-y_0)^2}$.

Пример 59. Найти уравнение окружности, центр которой лежит в точке $A(4;7)$ и которая касается прямой $l:3x-4y+1=0$.

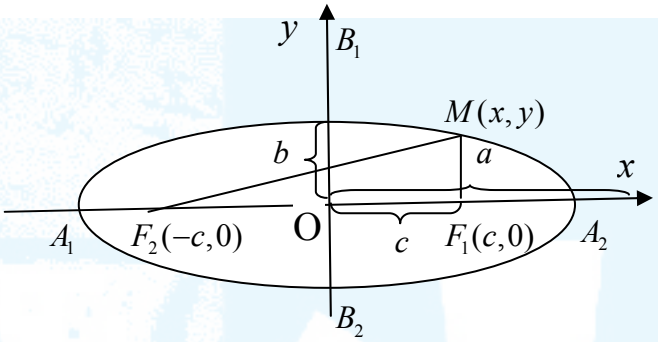
Решение. Длина радиуса окружности равна расстоянию от точки A до прямой l. По формуле расстояния от точки до прямой получаем $d=|(-3/5)\cdot 4+(4/5)\cdot 7-(1/5)|=3=R$. Тогда искомое уравнение окружности будет $(x-4)^2+(y-7)^2=9$.

Пример 60. Найти расстояние от точки до кривой, расстояние от каждой точки которой до точки $M_1(-1;1)$ вдвое меньше расстояния до точки $M_2(-4;4)$.

Решение. Точка $M(x;y)$ будет принадлежать искомой кривой в том и только в том случае, если $|M_2M|=2|M_1M|$ или $\sqrt{(x+4)^2+(y-4)^2}=2\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}$. После возведения в квадрат обеих частей и приведения подобных получаем уравнение $x^2+y^2=8$, которое является окружностью.

Эллипс

Определение 26. *Эллипсом* называется геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний от двух фиксированных точек F_1, F_2, называемых фокусами, есть постоянная величина. Обозначим расстояние между фокусами через $2c$, т. е. $|F_1F_2| = 2c$.



Для вывода канонического уравнения эллипса поместим начало координат в середину отрезка F_1F_2, а ось Ox направим по прямой F_1F_2. Тогда F_1 и F_2 имеют соответственно координаты $(c;0)$ и $(-c;0)$.

Пусть $M(x;y)$ — произвольная точка эллипса. Из определения следует, что $|MF_1| + |MF_2| = 2a$, где за $2a$ обозначим некоторую постоянную. Таким образом, произвольная точка $M(x;y)$ будет находиться на эллипсе в том случае, когда ее координаты будут удовлетворять уравнению: $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$ (29)

Это и есть уравнение эллипса в декартовой системе координат.

Теперь получим каноническое уравнение эллипса. Для этого избавимся от радикалов. Перенесем в (29) один из радикалов в правую часть и возведем обе части в квадрат:

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2xc + c^2 + y^2.$$

Или после приведения подобных: $xc + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$.

Отсюда $r_2 = |MF_2| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \frac{c}{a}x$ и $r_1 = |MF_1| = 2a - r_2 = a - \frac{c}{a}x$. Снова возведя обе части в квадрат, получаем: $c^2x^2 + 2cxa^2 + a^4 = a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2)$.

Так как $c < a$, то величина $a^2 - c^2$ положительная. Обозначим ее за b^2. Тогда $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ и окончательно получаем уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (30)$$

Уравнение (30) называется каноническим уравнением эллипса.

Точки A_1, B_1, A_2, B_2 называются вершинами эллипса, а оси симметрии Оx, Оy — главными осями ($|A_1A_2| = 2a$ — большая ось, $|B_1B_2| = 2b$ — малая ось), центр симметрии О называется центром эллипса. Длины a и b — соответственно большая и малая полуоси. Расстояния произвольной точки эллипса $M(x, y)$ до фокусов r_1, r_2 называются фокальными радиусами точки M. Число $\frac{c}{a} = \varepsilon$ ($\varepsilon < 1, c = \sqrt{a^2 - b^2}$) — эксцентриситет эллипса. В частности, если $a = b$, фокусы F_1, F_2 совпадают с центром, а каноническое уравнение эллипса переходит в уравнение $x^2 + y^2 = a^2$, т. е. в окружность радиуса a с центром в начале координат.

Из уравнения (30) имеем $y_{1,2} = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $x_{1,2} = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$.

Пример 61. Найти длину осей, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса $x^2 + 4y^2 = 16$.

Решение. Запишем каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$. Отсюда $2a = 2 \cdot 4 = 8$, $2b = 2 \cdot 2 = 4$, тогда $c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 4 = 12$. Координаты фокусов: $F_1(2\sqrt{3}; 0)$, $F_2(-2\sqrt{3}; 0)$. Эксцентриситет $\varepsilon = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 62. Известно, что прямая касается эллипса $\frac{x^2}{75} + \frac{y^2}{24} = 1$. Найти координаты точки касания.

Решение. Выразим из уравнения прямой $y = \frac{2}{5}x - 6$ и подставим в уравнение эллипса. После решения квадратного уравнения получаем $x_1 = 5, y_1 = -4$. Значит точка касания $M(5; -4)$.

Пример 63. Определить траекторию точки $M(x; y)$, которая при своем движении остается втрое ближе к точке $A(1; 0)$, чем к прямой $x = 9$.

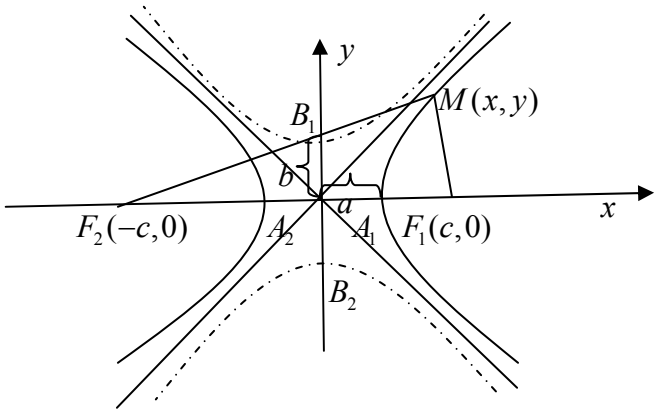
Решение. Согласно условию задачи получаем равенство $3|AM| = |MM_1|$, где $|AM| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$, а $|MM_1| = \sqrt{(9-x)^2}$. Точка же M_1 — точка пересечения перпендикуляра, опущенного из M на прямую $x = 9$. Тогда $3\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(9-x)^2}$. После возведения обеих

частей уравнения в квадрат и простых преобразований получаем уравнение $8x^2+9y^2=72$ или $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$. Это будет эллипс с $a=3, b=2\sqrt{2}$.

Гипербола

Определение 27. *Гиперболой* называется геометрическое место точек плоскости, для которых абсолютная величина разности расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная. Будем обозначать ее через $2a$.

Необходимо, чтобы эта величина была меньше расстояния между фокусами. Пусть расстояние между фокусами равно $2c$, т. е. $|F_1F_2|=2c$ $(2c>2a, c>a)$ и введем систему координат так, чтобы начало координат находилось в середине отрезка F_1F_2 и ось Оx была направлена по прямой F_1F_2. Тогда точки F_1 и F_2 в выбранной системе координат имеют соответственно координаты $(c;0)$ и $(-c;0)$. Итак, выберем произвольную точку гиперболы $M(x;y)$.



Из определения гиперболы следует, что $|MF_2|-|MF_1|=\pm 2a$ или

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a. \qquad (31)$$

Уравнение (31) и будет уравнением гиперболы в выбранной системе координат. Для получения канонического уравнения произведем с (31) действия, аналогичные действиям с эллипсом, а именно: перенесем один из радикалов в правую сторону и возведем обе части в квад-

рат. После приведения подобных получим: $xc - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, $r_1 = |MF_1| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm\left(\frac{cx}{a} - a\right)$, $r_2 = |MF_2| = \pm\left(\frac{cx}{a} + a\right)$.

Так как $c > a$, то $(c^2 - a^2)$ — величина положительная, которую принято обозначать b^2. Тогда $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ и окончательно получим уравнение: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$ (32)

которое называется *каноническим уравнением гиперболы*. Гипербола (32) симметрична относительно осей координат. Она пересекает ось О*x* в точках $A_1(a;0)$ и $A_2(-a;0)$ и не пересекает ось О*y*. A_1, A_2 называются вершинами гиперболы. Отрезок A_1A_2 называется *действительной осью*, а B_1B_2 — *мнимой*. Длины a и b называются соответственно действительной и мнимой полуосями. Расстояние произвольной точки гиперболы до фокусов $r_1 = |MF_1|$ и $r_2 = |MF_2|$ называются *фокальными радиусами* точки M. Число $\frac{c}{a} = \varepsilon$, $\varepsilon > 1 (c = \sqrt{a^2 + b^2})$ называется *эксцентриситетом* гиперболы. Числа $y = \pm\frac{b}{a}x$ являются асимптотами. Гипербола, у которой $a = b$, называется равносторонней с уравнением $x^2 - y^2 = a^2$. Уравнения $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ определяют две гиперболы, которые называются *сопряженными*. Гипербола $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ на рисунке изображена пунктиром.

Пример 64. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат. Кроме того, заданы уравнения асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$ и расстояние между фокусами $2c = 20$.

Решение. Так как уравнения асимптот имеют вид: $y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{4}{3}x$, то $b = 4k$, $a = 3k$, где k — коэффициент пропорциональности. Под-

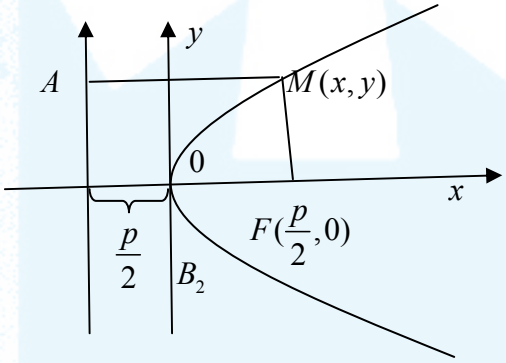
ставляем a,b в формулу $c=\sqrt{a^2+b^2}=10=\sqrt{(4k)^2+(3k)^2}=5k \Rightarrow k=2$, $b=8$, $a=6$. Значит, уравнение гиперболы имеет вид: $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$.

Пример 65. Дан эллипс $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$. Найти уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы — в вершинах данного эллипса.

Решение. Из условия задачи имеем $a_г=c_э$, $c_г=a_э$, $a_э=\sqrt{8}$, $b_э=\sqrt{5}$, поэтому $a_г=c_э=\sqrt{8-5}=\sqrt{3}$, $b_г=\sqrt{c_г^{\,2}-a_г^{\,2}}=\sqrt{5}$. Уравнение искомой гиперболы имеет вид: $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$.

Парабола

Определение 28. *Параболой* называется геометрическое место точек плоскости, для которых расстояние до некоторой фиксированной точки плоскости, называемой фокусом, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой.



Фокус параболы обозначается буквой F, расстояние от фокуса до фиксированной прямой — буквой p, которое называется параметром параболы. Для вывода канонического уравнения параболы выберем начало координат в середине отрезка, представляющего собой перпендикуляр, опущенный из фокуса F на фиксированную прямую, а оси Оx, Оy направим, как показано на рисунке. Для произвольной точки $M(x;y)$, лежащей на параболе, из определения получаем: $|FM|=|MA|$ или $\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}$. Это и есть уравнение параболы. Возведя обе части уравнения в квадрат и приведя подобные, получим уравнение: $y^2=2px$.

Пример 66. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от точки $F(2;0)$ и от прямой $y=2$.

Решение. Пусть $M(x;y)$ — произвольная точка искомой линии, тогда $|FM|=|MA|$ или $\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{(y-2)^2}$, где $A(x;2)$ — точка пересечения перпендикуляра, проведенного из M к $y=2$. Возведя обе части в квадрат, получим: $x^2-4x+4+y^2=y^2-4y+4$ или после приведения подобных: $y=-\frac{1}{4}x^2+x$. Это есть уравнение параболы.

Типовые задачи и алгоритмы их решения

Пример 67.

а) Найти уравнения проекций прямой $L:\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{3}$ на плоскость $P: x+y+2z-5$.

б) Найти проекцию точки $M(5,2,-1)$ на плоскость $P: 2x-y+3z+23=0$.

в) Найти проекцию точки $M(0,1,2)$ на прямую $L:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{0}, M\notin L$.

г) Найти расстояние от точки $M(0,1,2)$ до прямой $L:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{0}, M\notin L$.

д) Записать уравнение перпендикуляра L_1 из точки $M(0,1,2)$ относительно прямой $L:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{0}$.

е) Найти точку N, симметричную точке $M(0,1,2)$ относительно прямой $L:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{0}$.

Решение.

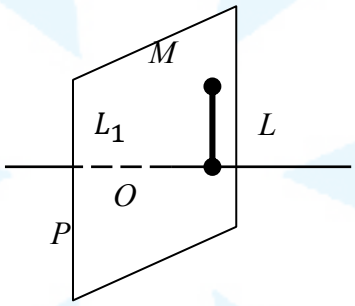
а) Запишем уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую L, уравнение которой в проекциях имеет вид:

$$\begin{cases}2x-y-3=0\\3x-z-3=0\end{cases},$$

$$(2x-y-3)+\lambda(3x-z-3)=0\Rightarrow(2+3\lambda)x-y-\lambda z-3(1+\lambda)=0.$$

Плоскость P_1 из этого пучка, проектирующая прямую L на плоскость P, определим из условия перпендикулярности этих плоскостей с нормальными векторами $\overline{n}_1 = ((2+3\lambda);-1;-\lambda)$ и $\overline{n} = (1;1;2)$. Тогда скалярное произведение: $(\overline{n}_1, \overline{n}) = 1(2+3\lambda) + 1(-1) + 2(-\lambda) = 0$. Откуда $\lambda = -1$.

При этом значении λ получаем уравнение проектирующей плоскости $P_1 : x + y - z = 0$, а проекцией прямой L на плоскость P будет линия пересечения двух плоскостей $L_{\text{пр}} = \begin{cases} x + y + 2z - 5 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$, или в каноническом виде: $L_{пр} : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y - \frac{5}{3}}{-1} = \dfrac{z - \frac{5}{3}}{0}$.



б) Проекцией точки M на P будет точка пересечения прямой L, проходящей через точку M перпендикулярно к плоскости P. Уравнение перпендикуляра через точку M будет иметь вид: $L : \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+1}{3} = t$, и координаты проекции $M_{пр}$ найдем, подставив $x = 2t+5, y = -t+2, z+3t-1$ в уравнение плоскости P:

$2(2t+5) + t - 2 + 3(3t-1) + 23 = 0$, откуда $t = -2$ и $x_{пр} = 1, y_{пр} = 4, z_{пр} = 7$.

в) Уравнение плоскости P, перпендикулярной к прямой L и проходящей через точку M, имеет вид: $2x + 1(y-1) + 0(z-2) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 1 = 0$, координаты точки пересечения этой плоскости с прямой $L : x - 1 = 2t, y = t, z = -1$ находим из уравнения $2(2t+1) + t - 1 = 0 \Rightarrow t = -\dfrac{1}{5}$ и координаты точки пересечения прямой и плоскости дадут координаты проекции точки M на плоскость $O(\frac{3}{5}; -\frac{1}{5}; -1)$.

г) Искомое расстояние может быть найдено как расстояние между точкой $M(0,1,2)$ и проекцией этой точки на прямую L. В пункте (в) обозначено, что проекцией является точка $O(\frac{3}{5}; -\frac{1}{5}; -1)$. Получаем, что

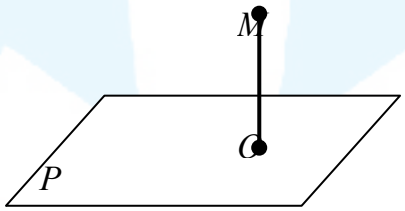
$$d = \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{5}\right)^2 + (2+1)^2} = \frac{\sqrt{270}}{5}.$$

д) Из пункта (в) мы знаем, что прямая L_1 проходит через точку M и точку $O(\frac{3}{5};-\frac{1}{5};-1)$. Для того чтобы найти координаты точки N, заметим, что точка O делит отрезок MN пополам и $x_0=\frac{x_M+x_N}{2}$, $y_0=\frac{y_M+y_N}{2}$, $z_0=\frac{z_M+z_N}{2}$, откуда $x_N=\frac{6}{5}$, $y_N=-\frac{7}{5}$, $z_N=-4$ и $N\left(\frac{6}{5},-\frac{7}{5},-4\right)$.

Пример 68.

а) Найти расстояние от точки $M(1;1;1)$ до плоскости $P: x+y-2z-6=0$.

б) Найти координаты точки N, симметричной точке $M(1;1;1)$ относительно плоскости $P: x+y-2z-6=0$.



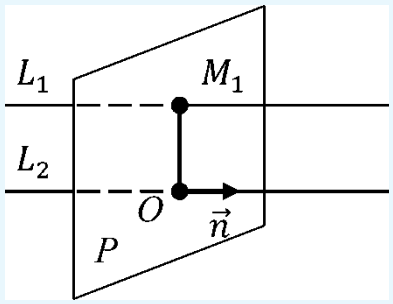
Решение.

а) Уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;1;1)$, перпендикулярно к плоскости P, можно записать в виде $L:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-2}$.

Проекцию точки M на плоскость P находим как точку пересечения прямой $L: x=t+1, y=t+1, z=-2t+1$ и плоскости $P: t+1+t+1-$ $-2(-2t+1)-6=0$ откуда $t=1$ и $O(2;2;-1)$. Искомое расстояние: $d=\sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{6}$.

б) $x_0=\frac{x_M+x_N}{2}\Rightarrow x_N=3$, аналогично $y_0=\frac{y_M+y_N}{2}\Rightarrow y_N=-3$ и $N(3,3,-3)$.

Пример 69. Определить расстояние между параллельными прямыми $L_1:\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2}$ и $L_2:\frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2}$.



Решение. Проекцию точки $M_1(2;-1;0)\in L_1$ на прямую L_2 найдем как точку пересечения прямой $L_2: x=2t+7, y=4t+1, z=2t$ и плоскости P, перпендикулярной этим прямым и проходящей через точку M_1:

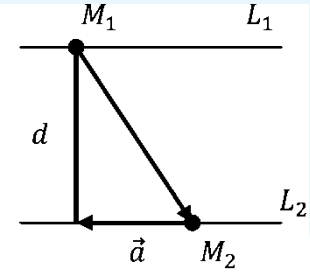
$3(x-2)+4(y+1)+2z=0 \Rightarrow 3x+4y+2z-2=0.$

Из подстановки $3(3t+7)+4(4t+1)+2(2t+3)-2=0 \Rightarrow 29t+29=0$, откуда $t=-1$ и проекция $O=(4;-3;1)$.

Расстояние между точкой M_1 и O равно $d=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$.

Можно поступить иначе.

Точки $M_1(2;-1;0)\in L_1$, $M_2(7;1;3)\in L_2$, $\overline{a}=(3;4;2)$ — направляющий вектор обеих прямых.



$$d^2+\left|\overline{a}^2\right|=\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|^2;\ d^2=\sqrt{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|^2-\left|np_{\vec{a}}\overrightarrow{M_1M_2}\right|^2};$$

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(5;2;3);$$

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|^2=25+4+9=38.$$

$$np_{\overline{a}}\overrightarrow{M_1M_2}=\frac{(\overline{a},\overline{M_1M_2})}{|\overline{a}|}=\frac{15+8+6}{\sqrt{9+16+4}}=\frac{29}{\sqrt{29}}=\sqrt{29},$$

$$(np_{\overline{a}}\overrightarrow{M_1M_2})^2=29,\ \ d=\sqrt{38-29}=3.$$

Пример 70.

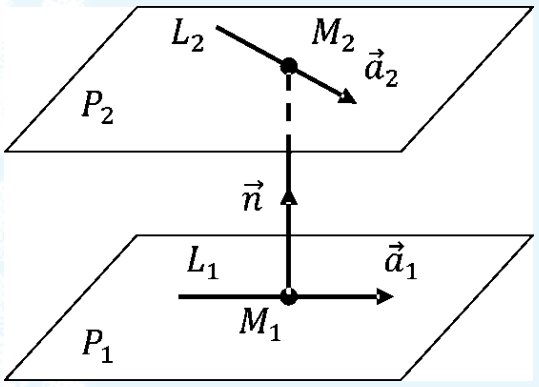
а) Найти расстояние между скрещивающимися прямыми

$L_1:\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z+2}{1}$ и $L_2:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$.

б) Написать уравнение общего перпендикуляра L к прямым L_1 и L_2.

Решение.

а) Уравнение плоскости P_1, проходящей через прямую L_1 параллельно прямой L_2, запишем как уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(0;1;-2)$ с нормальными вектором



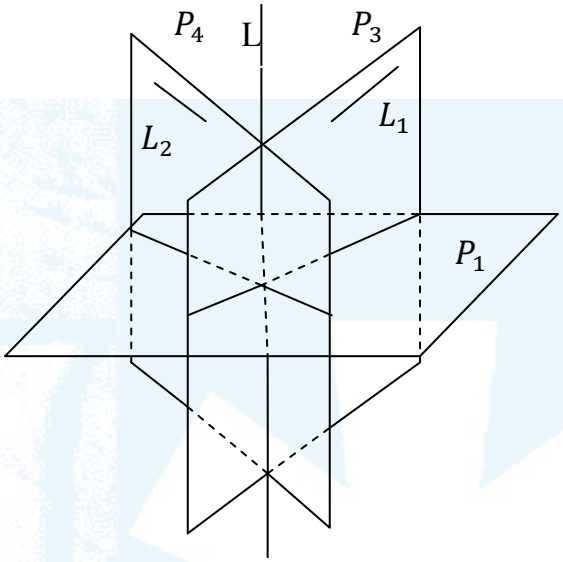
$$\overline{n}=\left[\overline{a}_1,\overline{a}_2\right]=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ -2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=(-2;-1;-4),$$

$-2x-(y-1)-4(z+2)=0 \Leftrightarrow 2x+y+$
$+4z+7=0.$

Расстояние от точки $M_2(-1;-1;2)$, принадлежащей прямой L_2, до плоскости P_1 найдем, приведя уравнение P_1 к нормальному виду:

$$-\frac{2}{\sqrt{21}}x-\frac{1}{\sqrt{21}}y-\frac{4}{\sqrt{21}}z-\frac{7}{\sqrt{21}}=0,$$

$$d=\left|\frac{2}{\sqrt{21}}+\frac{1}{\sqrt{21}}-\frac{8}{\sqrt{21}}-\frac{7}{\sqrt{21}}\right|=\frac{12}{\sqrt{21}}.$$



Также эта задача может быть сформулирована как задача о нахождении расстояния между двумя параллельными плоскостями P_1 и P_2, содержащими две прямые L_1 и L_2 соответственно. Тогда расстояние между P_1 и P_2 равно абсолютной величине проекции вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ на направление вектора $[\overline{a}_1,\overline{a}_2]$ $d=\left|np_{[\overline{a}_1,\overline{a}_2]}\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\dfrac{\left(\overline{n},\overrightarrow{M_1M_2}\right)}{|\overline{n}|}$.

Здесь $\overrightarrow{M_1M_2}=(-1;-2;4);|\overline{n}|=\sqrt{21}$, $\left(\overline{n},\overrightarrow{M_1M_2}\right)=2+2-16=-12$ и $d=\dfrac{12}{\sqrt{21}}$.

б) Рассмотрим плоскости P_3 и P_4, проходящие через прямые L_1, L_2 и перпендикулярные плоскости P_1, из пункта (а).

Имеем: $M_1(0,1,-2)\in P_3$, $\overline{n}_3=[\overline{a}_1,\overline{n}]=(1;-10;2)\parallel P_3$,

откуда $P_3: x-10y+2z+14=0$.

Аналогично $M_2(-1;-1;2)\in P_4, \overline{n}_4=[\overline{a}_2,\overline{n}]=(-9;6;3)\parallel P_4$

и $P_4: 3x-2y-z+3=0$.

Общим перпендикуляром к прямым L_1 и L_2 будет прямая L, являющаяся линией пересечения плоскостей P_3 и P_4, которую можно записать общими уравнениями $L:\begin{cases}x-10y+2z+14=0\\3x-2y-z+3=0\end{cases}$.

Пример 71. Пусть задана кривая второго порядка $L: 9x^2 + 18x - 4y^2 + 16y - 43 = 0$. Установить вид кривой и привести ее к каноническому виду.

Решение.

Уравнение кривой не содержит слагаемых вида xy, значит ее можно привести к каноническому виду параллельным переносом. Для этого сгруппируем члены с x и с y, выделим в них полные квадраты.

$$9(x^2 + 2x) - 4(y^2 - 4y) - 43 = 9(x^2 + 2x + 1) - 9 - 4(y^2 - 4y + 4) - 43 = 0.$$

Далее свернем квадраты и приведем подобные: $9(x+1)^2 - 4(y-2)^2 = 36$. Наконец, разделим обе части равенства на правую часть. $\frac{(x+1)^2}{2^2} - \frac{(y-2)^2}{3^2} = 1$. Следовательно, вид кривой — гипербола.

Пример 72. Решить матричное уравнение $A \cdot X = B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$.

Решение.

1. Вычислим $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$ т. е. матрица невырожденная.

2. Построим матрицу A^{-1}, обратную матрице A:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(A^{v}\right)^{T} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{T} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Записываем решение матричного уравнения:

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4\cdot 3 + (-2)\cdot 5 & 4\cdot 5 + (-2)\cdot 9 \\ (-3)\cdot 3 + 1\cdot 5 & (-3)\cdot 5 + 1\cdot 9 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Пример 73. Вычислить определитель $|A|$ n-го порядка:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\ldots & n \\ -1 & 0 & 3\ldots & n \\ -1 & -2 & 0\ldots & n \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ -1 & -2 & -3\ldots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\ldots & n \\ -1 & 0 & 3\ldots & n \\ -1 & -2 & 0\ldots & n \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ -1 & -2 & -3\ldots & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} (\alpha_1) \\ (\alpha_2) \\ (\alpha_3) \\ (\ldots) \\ (\alpha_n) \end{matrix} = \begin{Vmatrix} \\ \alpha_2 + \alpha_1 \\ \alpha_3 + \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_n + \alpha_1 \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\ldots & n \\ 0 & 2 & 6\ldots & 2n \\ 0 & 0 & 3\ldots & 2n \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0\ldots & n \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

Пример 74. Вычислите ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 6 & -6 & 9 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 8 & -8 & 27 \end{pmatrix}$

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 6 & -6 & 9 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 8 & -8 & 27 \end{pmatrix} \to \{a_2 - 3a_1 \to a_2\} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & -9 & 6 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 8 & -8 & 27 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \left\{ \frac{a_2}{3} \to a_2 \right\} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 8 & -8 & 27 \end{pmatrix} \to \{a_3 - a_1 \to a_3\} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 8 \\ 1 & -1 & 8 & -8 & 27 \end{pmatrix} \to \{a_4 - a_1 \to a_4\} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & -2 & 7 & -9 & 26 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \{a_4 - a_2 \to a_4\} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & 24 \end{pmatrix} \to \{a_4 - 2a_3 \to a_4\} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 8 \end{pmatrix}.$$

Получили треугольную матрицу, в которой 4 угловых элемента, значит ранг матрицы равен 4.

Пример 75. Решите систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}.$$

Решение.

Запишем матрицу, составленную из коэффициентов системы уравнений.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{lll} a_3 - & a_1 - a_2 \to & a_3 \\ a_4 + & a_1 \to & a_4 \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 3 \end{array}\right)$$

$$\to \{a_4 + a_3 \to a_4\} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Чтобы убедиться в совместности системы, найдем ранги основной и расширенной матрицы. Итак, ранг основной матрицы равен 3, т. к. она содержит минор $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$. Ранг же расширенной равен

4, т. к. она содержит минор 4-го порядка, отличный от нуля: $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$. Так как ранг основной матрицы системы не равен рангу расширенной матрицы, то система уравнений несовместна и не имеет решений.

Резюме

Рассмотрены матрицы и действия над ними, системы линейных уравнений и методы их решения, векторы и операции с векторами, прямая на плоскости, прямая и плоскость в пространстве, основные кривые второго порядка и их свойства.

Глава 6. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Господь Бог — искусный математик и физик. Задача науки состоит в том, чтобы раскрыть блистательный замысел творца.

М. Клайн.
«Математика — утрата определенности»

§ 1. Различные типы множеств в N-мерном пространстве

Пространства R^n

Множество, элементами которого являются всевозможные упорядоченные наборы n действительных чисел, обозначают R^n. В множестве R^n можно ввести понятие расстояния между любыми двумя его элементами $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $x_i, y_i \epsilon R, i = 1, 2, \dots, n$, обозначим $\rho(x; y)$ и определим формулой

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}. \quad (1)$$

Множество R^n с введенным в нем расстоянием называют *пространством* R^n, число n — *размерностью* пространства R^n, элемент $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ множества R^n — *точкой* пространства R^n, число $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, — i-й *координатой* этой точки. Точки $x = (0, 0, \dots, x_i, \dots, 0)$ n-мерного пространства R^n образуют *координатную ось* пространства. Точку $O = (0, 0, \dots, 0)$ называют *началом координат.*

Для точек $x = (x_1)$ и $y = (y_1)$ одномерного пространства R^1 формула (1) имеет вид $\rho(x, y) = |x_1 - y_1|$, поэтому пространство R^1 представляет собой множество действительных чисел, расстояние между которыми измеряется обычным образом, т. е. R^1 — *числовая прямая*. Пространства R^2 и R^3 — это, соответственно, *плоскость* и обычное *трехмерное пространство*, которые изучаются в элементарной и в аналитической геометрии.

Для элементов множества R^n можно ввести понятия суммы элементов и произведения элемента на действительное число: если

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $\lambda \epsilon R$, то $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$, $x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$. (2)

Как известно из линейной алгебры, множество R^n, в котором формулами (2) определены сумма и произведение на действительное число, является *линейным векторным пространством*. Точку $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ пространства R^n в этом случае называют *вектором* и обозначают $\bar{x}$, числа $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ — его *координатами в базисе* $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$. Вектор $(0, 0, \dots, 0)$ называют *нулевым*.

В линейном векторном пространстве R^n можно ввести скалярное произведение $(\bar{x}, \bar{y})$, поставив в соответствие каждым двум векторам $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и $\bar{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ число $(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$. (3)

Линейное векторное пространство R^n, для векторов которого формулой (3) определено скалярное произведение, называют *n-мерным евклидовым пространством*. Число $\sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}$ называют *длиной вектора* $\bar{x}$ и обозначают $|\bar{x}|$. Векторы x и y называют *ортогональными*, если $(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. Если $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — ненулевые векторы, то *углом* между ними называют угол $\varphi \epsilon [0; \pi]$ такой, что $\cos\varphi = \frac{(\bar{x}, \bar{y})}{|\bar{x}||\bar{y}|}$. (4)

Определение 1. Рассмотрим точку $a = (a_1, \dots, a_n) \epsilon R^n$ и число $\varepsilon > 0$. *ε-окрестностью точки a* называется множество $O_\varepsilon(a) = \{x \epsilon R^n\ (x, a) < \varepsilon\}$. *Проколотой окрестностью* точки a называется множество $\dot{O}_\varepsilon(a) = \{\, x \epsilon R^n\ (x, a) < \varepsilon, x \neq a\}$.

Множество $O(a)$ $(\dot{O}(a))$ называется окрестностью (проколотой окрестностью) точки a, если оно совпадает с некоторой окрестностью (проколотой окрестностью) точки.

Таким образом, в $\dot{O}_\varepsilon(a)$ — проколотую ε-окрестность точки a входят все точки ε — окрестности $O_\varepsilon(a)$ за исключением точки a.

В случае $n = 1$ понятие ε-окрестности и проколотой ε-окрестности, совпадают с приведенными в главе 1.

В случае $n = 2$ ε-окрестность точки a представляет собой круг радиуса ε с центром в точке a, не содержащий ограничивающей его окружности.

В случае $n = 3$ ε-окрестность точки a представляет собой шар радиуса ε с центром в точке a, не содержащий ограничивающей сферы.

Определение 2. Пусть даны точка $a = (a_1, \dots, a_n) \epsilon R^n$ и $\delta_1, \dots, \delta_n$ — n положительных чисел. Множество $P(a, \delta_1, \dots, \delta_n) = \{\, x \epsilon R^n | a_i -$

$-\delta_i < x_i < a_i + \delta_i, 1 \le i \le n\}$ называется n-мерным параллелепипедом с центром в точке a. Двумерный параллелепипед называется прямоугольником. На рис. 6.1 заштрихован двумерный параллелепипед $P(a, \delta_1, \delta_2)$.

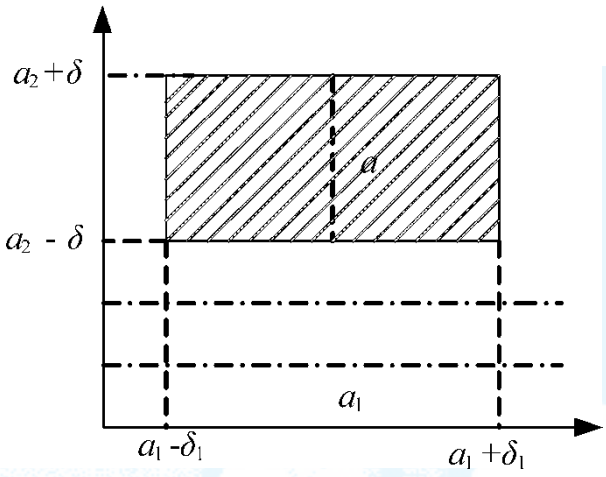


Рис. 6.1

Рассмотрим непустое множество $D \subset R^n$.

Определение 3. Точка $x \in D$ называется внутренней точкой множества D, если некоторая ее ε-окрестность содержится в D: $O_\varepsilon(a) \subset D$.

Определение 4. Множество всех внутренних точек множества D называется его внутренностью и обозначается $int\ D$.

Определение 5. Точка $x \in R^n$ называется граничной точкой множества D, если любая ее ε-окрестность содержит как точки, принадлежащие, так и не принадлежащие D. Множество всех граничных точек множества D называют его границей и обозначают $F_r D$.

Определение 6. Если все точки множества D внутренние, то множество D называется открытым.

Определение 7. Если множество D содержит все свои граничные точки, то множество D называется замкнутым.

Определение 8. Если любая проколотая ε-окрестность $\dot{O}_\varepsilon(a)$ точки x содержит по крайней мере одну точку множества D, то точка x называется предельной точкой множества D.

Множество, каждая точка которого является его внутренней точкой в R^n, называют *открытым в R^n множеством*.

Пространство R^n и пустое множество $\varnothing$ являются открытыми множествами.

Любое открытое в R^n множество, содержащее некоторую точку, называют *окрестностью* этой точки в пространстве R^n. В частности, всякая ε-окрестность точки является окрестностью этой точки.

Точку $x \in R^n$ называют *точкой прикосновения* множества $D \subset R^n$, если любая окрестность этой точки содержит хотя бы одну точку множества D.

Точку $x \in D \subset R^n$ называют *изолированной точкой* множества D, если существует окрестность точки x, не содержащая никаких других точек множества E, кроме самой x.

Точку $x \in R^n$ называют *предельной точкой* множества D, если любая окрестность точки x содержит хотя бы одну точку множества D, отличную от x.

Следующие примеры иллюстрируют введенные понятия.

Множество называют *замкнутым*, если оно содержит все свои точки прикосновения.

Множество всех точек прикосновения множества D называют *замыканием множества D* и обозначают $\overline{D}$.

Множество всех предельных точек множества D называют его *производным множеством* и обозначают $D^{(1)}$. Множество D называют *совершенным*, если $D^{(1)} = D$. Множество всех предельных точек множества $D^{(1)}$ называют *вторым производным множеством* множества D и обозначают $D^{(2)}$. По индукции определяют *производное множество порядка n* и обозначают $D^{(n)}$.

Пример 1. Пусть $D = \{(x, y) \in R^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ — круг, содержащий ограничивающую его окружность. Тогда все точки $(x, y) \in R^2$ такие, что $x^2 + y^2 < 1$, являются внутренними точками множества D, а все точки $(x, y) \in R^2$, лежащие на окружности, являются граничными точками множества D. На рис. 6.2 точка А — внутренняя, а В — граничная. Множество D является замкнутым, т. к. содержит все свои граничные точки.

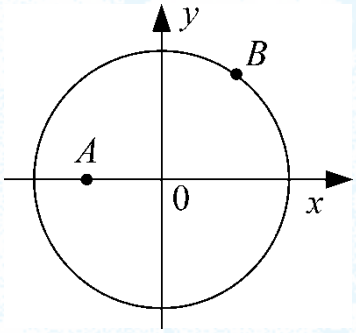


Рис. 6.2

Пример 2. Интервал $(a, b) \subset R^1$ является открытым множеством. Действительно, пусть $x \in (a, b)$, тогда взяв $\varepsilon < \min\{|x - a|, |x - b|\}$, получим, что $O_\varepsilon(a) \subset (a, b)$. На рис. 6.3 $O_\varepsilon(a)$ — ε-окрестность точки x заштрихована.

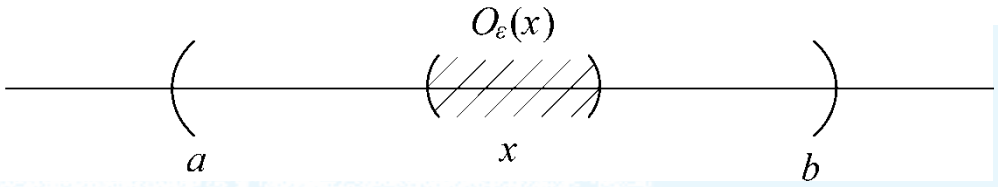


Рис. 6.3

Если мы присоединим к интервалу (a, b) точку a, то получим множество $D = [a, b)$, которое не является ни открытым, ни замкнутым. Действительно, точка $a \in D$, но, очевидно, не является внутренней точкой D, следовательно, D — не открытое множество. Точка b является граничной точкой D, но $b \notin D$, значит, множество D не замкнуто.

Пример 3. Любая ε-окрестность точки $x \in R^n$ является, очевидно, открытым множеством. Любая проколотая окрестность точки $x \in R^n$ также является открытым множеством.

Пример 4. Рассмотрим множество $D = \{(x, y) \in R^2 | x^2 + y^2 < 1; (x, y) \neq (0, 0)\}$ — круг, не содержащий ограничивающей его окружности и центра. Все точки множества D являются его предельными точками, к ним относятся точки окружности и центр круга. Это показано на рисунке 6.4.

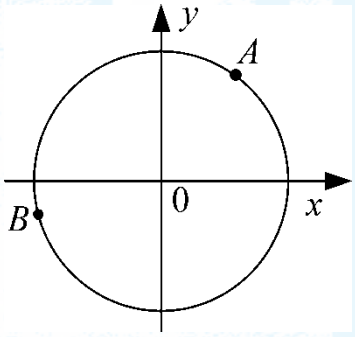


Рис. 6.4

Пусть каждому натуральному числу m поставлена в соответствие точка $x^{(m)}$ пространства R^n. Упорядоченное множество точек $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}, \dots$ называют *последовательностью точек* простран-

ства R^n и обозначают $x^{(m)}, m \in N$ или $\{x^{(m)}\}$. Последовательность $\{y^{(k)}\}$ называют *подпоследовательностью* $\{x^{(m)}\}$, если существует такая строго возрастающая последовательность $m_k \in N$, что $x^{(m_k)} = y^{(k)}$, $k \in N$. Последовательность $\{x^{(m)}\}$ называют *ограниченной*, если множество точек $x^{(m)}, m \in N$, ограничено.

Точку $a \in R^n$ называют *пределом последовательности* $\{x^{(m)}\}$, если $\rho(x^{(m)}, a) \to 0$ при $m \to \infty$. В этом случае пишут $\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = a$ и говорят, что последовательность $x^{(m)}$ *сходится* к точке a. Последовательность, которая сходится к некоторой точке, называют *сходящейся*. Если последовательность не является сходящейся, ее называют *расходящейся*.

Последовательность $x^{(m)} \in R^n$ сходится к точке a тогда и только тогда, когда для любого $\delta > 0$ существует такое число m_δ, что для всех $m > m_\delta$ верно включение $x^{(m)} \in O_\delta(a)$.

Пример 5. В пространстве R дано множество $E = (0; 1] \cup \{2\}$. Указать внутренние точки множества E в пространстве R, а также точки прикосновения, изолированные, предельные и граничные точки множества E.

Внутренними точками являются все точки интервала $(0; 1)$, точками прикосновения — все точки отрезка $[0; 1]$ и точка $x = 2$. Множество E имеет одну изолированную точку $x = 2$. Предельными точками являются все точки отрезка $[0; 1]$, граничными — $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

Теорема Больцано–Вейерштрасса

Из любой ограниченной последовательности точек пространства R^n можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Последовательность $\{x^{(m)}\}$ точек пространства R^n называют *стремящейся к бесконечности* и пишут $\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = \infty$, если $\rho\left(x^{(m)}, O\right) \to +\infty$ при $m \to \infty$, где O — начало координат.

Расстояние d между непустыми множествами E_1 и E_2 в пространстве R^n определяется формулой $d = d(E_1, E_2) = \inf_{\substack{x\in E_1 \\ y\in E_2}} \rho(x, y)$. (5)

В частности, для расстояния d между точкой $x \in R^n$ и непустым множеством $E \subset R^n$ получаем $d = d(x, E) = \inf_{y\in E} \rho(x, y)$. (6)

Диаметром $D(E)$ множества $E \subset R^n$ называют $sup_{x,x' \in E}\, \rho(x; x')$. (7)

Множество Γ точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ пространства R^n таких, что

$$x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t), t \in [\alpha;\ \beta], \qquad (8)$$

где функции $x_i(t),\ i = 1, 2, \dots, n$ непрерывны на отрезке $[\alpha;\ \beta]$, называют *непрерывной кривой* в пространстве R^n. Уравнения (8) называют *параметрическими уравнениями* кривой Γ, аргумент t называют *параметром*.

Если уравнения (8) линейны, т. е. $x_1 = a_1 + b_1 t, x_2 = a_2 + b_2 t,$

$$\dots,\ x_n = a_n + b_n t, \qquad (9)$$

причем $\sum_{i=1}^{n} b_i^2 > 0$, то Γ называют *прямой в пространстве* R^n при $t \in R$, и *отрезком в пространстве* R^n при $t \in [\alpha;\ \beta]$.

Множество $E \subset R^n$, любые две точки которого можно соединить непрерывной кривой, принадлежащей этому множеству, называют *линейно связными*. Множество, состоящее из одной точки, также считают линейно связным.

Множество $E \subset R^n$ называют *областью* в пространстве R^n, если E — открытое в R^n линейно связное множество, если E — область, то ее замыкание $\bar{E}$ называют *замкнутой областью*.

Множества $E_1 \subset R^n$ и $E_2 \subset R^n$ называют *отделимыми*, если ни одно из них не содержит точек прикосновения другого.

Множество $E \subset R^n$ называют *связным*, если оно не может быть представлено в виде объединения двух отделимых множеств. Множество $E \subset R^n$, любые две точки которого можно соединить отрезком, принадлежащим этому множеству, называют *выпуклым*. Множество, содержащее только одну точку, также считают выпуклым. Пересечение всех выпуклых множеств, содержащих множество $E \subset R^n$, называют *выпуклой оболочкой* множества E.

Точка $A \notin D$, при этом A является предельной точкой множества D, т. к. любая ее окрестность содержит точки из D.

Точки O и B также являются предельными точками множества D.

Пример 6. Рассмотрим множество $D \subset R^1$, состоящее из двух элементов (см. рис. 6.5): $D = \{0; 1\}$.

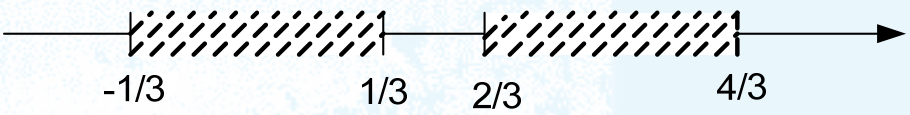


Рис. 6.5

Множество D не имеет предельных точек, т. к. существуют проколотые окрестности $\dot{O}_\varepsilon(0)$ и $\dot{O}_\varepsilon(1)$, не содержащие точек из D, например при $\varepsilon = \frac{1}{3}$.

Определение 9. Множество $D \subset R^n$ называется ограниченным, если существует n-мерный параллелепипед $p(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$, содержащий D.

Пример 7. На рис. 6.6 заштриховано ограниченное множество D. Множество $C = \{(x, y) \in R^2 | x^2 + y^2 > 1\}$, очевидно, не ограничено (рис. 6.7).

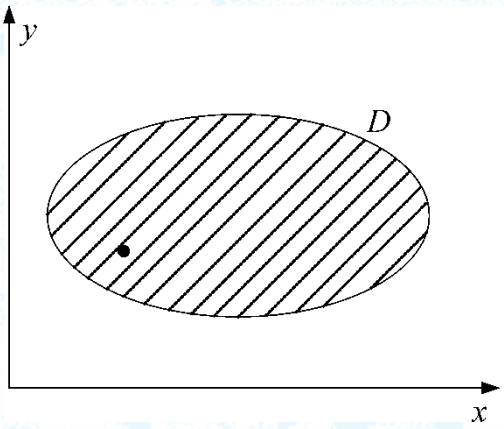


Рис. 6.6

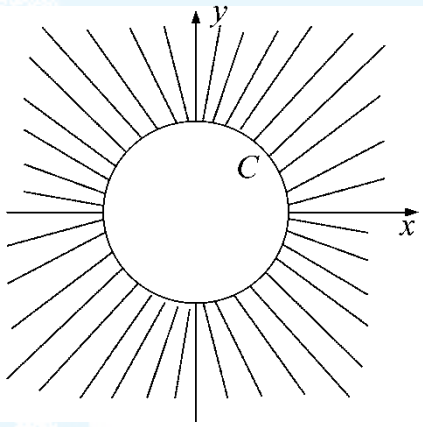


Рис. 6.7

Определение 10. Пусть множество $D \subset R^n$, а множество $C \subset R^m$. Декартовым произведением множеств D и C называется множество $B \subset R^{n+m}$ $B = \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \in R^{n+m} | (x_1, \dots, x_n) \in D, (y_1, \dots, y_m) \in C\}$ и обозначается $B = D \times C$.

Пример 8. Пусть $D = [a, b] \subset R^1$; $C = [p, q] \subset R^1$. Тогда $B = D \times C = [a, b] \times [p, q] = \{(x, y) \in [a, b], y \in [p, q]\}$.

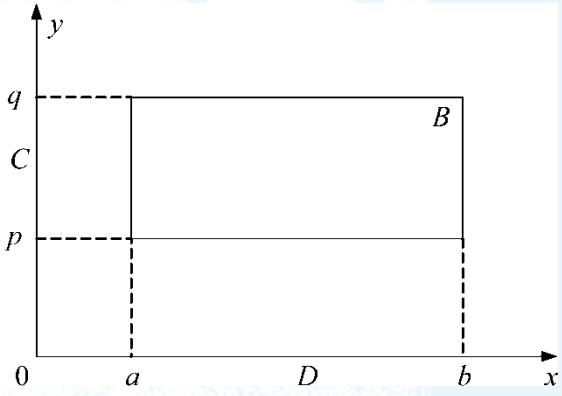


Рис. 6.8

Заметим, что множество B в этом примере является прямоугольником.

§ 2. Функции нескольких переменных

Определение 11. Рассмотрим множество $D \subset R^n$. Говорят, что на множестве D задана функция n переменных f, если задано правило, сопоставляющее каждому вектору $\bar{x} = \{x_1, \dots, x_n\} \in D$ одно определенное число y, обозначаемое $f(\bar{x})$ и называемое значением функции в точке x. Множество D называется областью определения функции. Поскольку в качестве $\bar{x}$ можно взять любой вектор из множества D, компоненты $\bar{x}$, а также значений функции $y = f(\bar{x})$ можно рассматривать как переменные величины. Компоненты вектора $\bar{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ называются независимыми переменными, а $y = f(\bar{x})$ — зависимой переменной. Говорят также, что переменная y является функцией от переменной $\bar{x}$.

Замечание 1. Как и в случае функции одной переменной, для обозначения функции f также будем использовать запись вида $f = (x_1, \dots, x_n)$, если хотим уточнить, как обозначены независимые переменные, а также запись вида $y = f(x_1, \dots, x_n)$, указывающую на обозначение как независимых, так и зависимой переменных. Для функции двух переменных часто обозначают независимые переменные буквами x и y: $f(x, y)$.

Пример 9. Рассмотрим функцию двух переменных $f(x, y) = \sqrt{x + y + 1}$. Областью определения f является множество $D = \{(x, y) \in R^2 | x + y + 1 \geq 0\}$, очевидно, замкнутое и неограниченное (рис. 6.9).

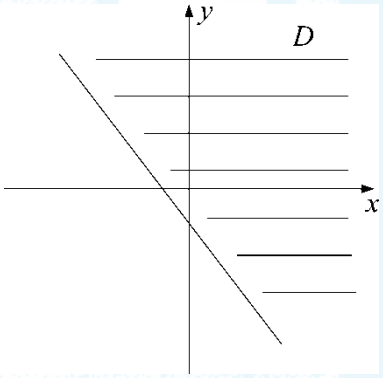


Рис. 6.9

Пример 10. Рассмотрим функцию вида $f(x_1, \dots, x_n) = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n$, где $a_0, a_1, \dots, a_n$ — постоянные величины. Эта функция называется линейной функцией n переменных. Ее областью определения

является пространство R^n. Функция вида $f(x_1, \dots, x_n) = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_{11}x_1^2 + \dots + a_{1n}x_1x_n + \dots + a_{n1}x_nx_1 + \dots + a_{nn}x_n^2$, где $a_0, a_1, \dots, a_n, a_{11}, \dots, a_{nn}$ — постоянные величины, называется квадратичной. Ее областью определения также является пространство R^n. Если $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$, то квадратичная функция называется квадратичной формой.

Введем ряд определений, связанных с понятием функции нескольких переменных.

Определение 12. Пусть функция f определена на множестве $D \subset R^n$. Графиком функции f называется множество точек пространства R^{n+1} вида $(x_1, \dots, x_n, f(x))$, где $\bar{x} = \{x_1, \dots, x_n\} \in D$.

Пример 11. Рассмотрим линейную функцию двух переменных $z = 6 - 3x - 2y$. Графиком этой функции является плоскость в пространстве R^3, ее часть, соответствующая значениям переменных $x \geq 0, y \geq 0$, изображена на рис. 6.10.

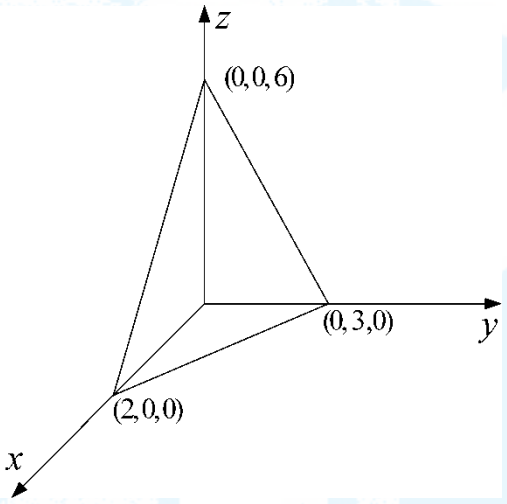


Рис. 6.10

Определение 13. Множеством уровня функции n переменных f, соответствующим числу C, называется множество точек $(x_1, \dots, x_n)$ из области определения f, удовлетворяющих уравнению

$$f(x_1, \dots, x_n) = C. \qquad (10)$$

Если $n = 2$, уравнение (10) можно записать $f(x, y) = C$. (11)

Если (11) является уравнением линии, множество уровня называют также линией уровня. Заметим, что множество уровня может быть также пустым для некоторых C.

Замечание 2. Ниже будут рассмотрены условия, при которых множество точек, удовлетворяющих условию (11), является графиком

некоторой функции одной переменной и представляет собой уравнение линии.

Пример 12. Для функции $f(x, y) = x^2 + y^2$ линиями уровня, соответствующими $C > 0$, являются окружности с центром в точке $(0, 0)$ радиуса $\sqrt{C}$: $x^2 + y^2 = C$ (рис. 6.11). При $C = 0$ множеством уровня функции f является, очевидно, точка $(0, 0)$. При $C < 0$ соответствующие множества уровня пусты.

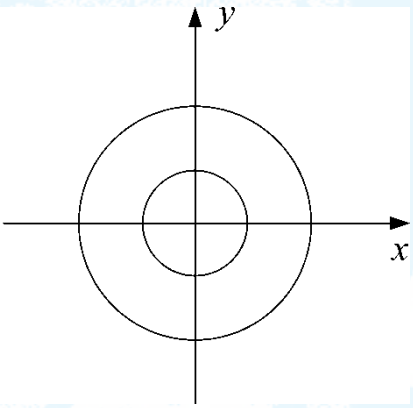


Рис. 6.11

Пример 13. Рассмотрим функцию двух переменных, сопоставляющую координатам точки земной поверхности высоту этой точки над уровнем моря. Линии уровня этой функции изображаются на географических картах. Точки этих линий находятся на одной высоте над уровнем моря.

Определение 14. Функция f, определенная на множестве $D \subset R^n$, называется ограниченной на D, если существует такое число K, что $|f(x)| < K$ для всех $x \in D$.

Аналогично можно сформулировать определение предела на языке последовательностей для функции нескольких переменных. Для этого введем понятие последовательности векторов и предела последовательности векторов.

Определение 15. Последовательностью векторов называется бесконечное множество векторов $\{\bar{x}^k\}$, занумерованных натуральными числами.

Определение 16. Вектор $\bar{x}^0$ называется пределом последовательности векторов $\{\bar{x}^k\}$: $\bar{x}^0 = \lim_{x\to\infty} \bar{x}^k$, если для любого положительного числа ε найдется такой номер N, что для всех $n > N$ справедливо $\rho(\bar{x}^n, \bar{x}^0) < \varepsilon$ или, что то же самое, $\bar{x}^n \in O_\varepsilon(\bar{x}^0)$.

Понятия последовательности векторов и ее предела обобщают введенные ранее аналогичные понятия для чисел.

Пример 14. Рассмотрим последовательность двумерных векторов $\{\bar{x}^k\}$, где $\bar{x}^k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$ для $k = 1, 2, \ldots$. Докажем, что $\lim_{x\to\infty} \bar{x}^k = (0, 0)$.

Действительно, для произвольного $\varepsilon > 0$ возьмем натуральное число N, удовлетворяющее $N > \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$. Если $n > N$, то расстояние между точками x^n и $(0, 0)$ удовлетворяет условию $\rho\big(x^n, (0, 0)\big) =$
$= \sqrt{\left(\frac{1}{n} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{n} - 0\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{n} < \frac{\sqrt{2}}{N} < \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}} = \varepsilon.$

Значит, $x^n \in O_\varepsilon\big((0, 0)\big)$. Таким образом, по определению 16 $\lim_{x\to\infty} \bar{x}^k = (0, 0)$.

Определение 17. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $D \subset R^n$, x^0 — предельная точка множества D. Говорят, что число A является пределом функции $f(x)$ при стремлении x к x^0, если для любой последовательности точек $\{x^k\}$ множества D, отличных от x^0, такой, что $\lim_{k\to\infty} x^k = x^0$ последовательность чисел $\{f(x^k)\}$ сходится к A $\lim_{k\to\infty} f(x^k) = A$.

Аналогично случаю функции одной переменной для пределов функций нескольких переменных справедливы соответствующие теоремы о пределах суммы, разности, произведения и частного.

Следующие примеры иллюстрируют понятие передела функции нескольких переменных.

Пример 15. Рассмотрим функцию двух переменных $f(x, y) = x^2 + y^2$ и точку $(0, 0)$. Докажем, что $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.

Для этого возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и найдем такое число $\delta > 0$, что из того, что $(x, y) \in U_\varepsilon(0, 0)$ (12)
следует $|f(x, y)| = x^2 + y^2 < \varepsilon$. (13)

Условие (12) можно записать в виде $\rho\big((x, y), (0, 0)\big) = \sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon$.

Взяв $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, получим, что (13) выполняется, т. е. доказываемое утверждение верно.

Пример 16. Рассмотрим функцию двух переменных

$f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

Функция $f(x,y)$ определена на множестве $D = R^2\{(0,0)\}$. Точка $(0,0)$ является, очевидно, предельной точкой множества D. Докажем, что не существует $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Для этого рассмотрим последовательность точек $\left\{\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)\right\}$, $k = 1, 2, \ldots$ Тогда (см. пример 14) $\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right) = (0,0)$. Точки $\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)$, при $k = 1, 2, \ldots$ лежат на прямой $y = x$.

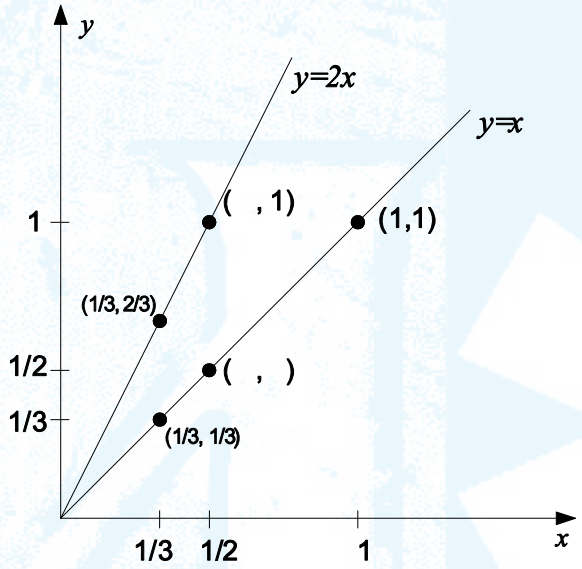


Рис. 6.12

Вычислим $f\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right) = \frac{\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k}}{\left(\frac{1}{k}\right)^2+\left(\frac{1}{k}\right)^2} = \frac{1}{2}$, значит, $\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2}$.

Рассмотрим другую последовательность точек $\left\{\left(\frac{1}{m},\frac{2}{m}\right)\right\}$, при $m = 1, 2, \ldots$, лежат на прямой $y = 2x$. Так же, как в примере 14, можно доказать, что $\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{m},\frac{2}{m}\right) = (0,0)$. Вычислим $f\left(\frac{1}{m},\frac{2}{m}\right) =$ $= \frac{\frac{1}{m}\cdot\frac{2}{m}}{\left(\frac{1}{m}\right)^2+\left(\frac{2}{m}\right)^2} = \frac{2}{5}$, значит $\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{m},\frac{2}{m}\right) = \frac{2}{5}$.

Из определения 17 следует, что $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ не существует, т. к. для различных последовательностей точек из D, сходящихся к $(0,0)$, соответствующие последовательности значений функции имеют разные пределы.

Определение 18. Пусть функция f определена на множестве $D \subset R^n$, x^0 — предельная точка множества D. Если $\lim_{x\to x^0} f(x) = 0$, то функция f называется бесконечно малой в точке x^0.

Следующая теорема устанавливает свойства бесконечно малых функций. Приведем ее без доказательства.

Теорема 1. *Сумма и произведение конечного числа функций бесконечно малых в точке x^0, а также произведение бесконечно малой в x^0 на ограниченную в окрестности x^0 функцию являются функциями бесконечно малыми в x^0.*

С понятием предела тесно связано понятие непрерывности функции.

Определение 19. Пусть функция f определена на множестве $D \subset R^n$, x^0 — предельная точка множества $D, x^0 \in D$. Функция f называется непрерывной в точке x^0, если существует предел функции в x^0, равный значению функции в x^0: $\lim_{x \to x^0} f(x) = f(x^0)$. (14)

Равенство (14) означает, что взяв точку $x \in D$ достаточно близкую к x^0, можно получить значение функции $f(x)$, сколь угодно близкое к значению $f(x^0)$, т. е. сделать разность $f(x) - f(x^0)$ сколь угодно малой.

Совершенно аналогично случаю функции одной переменной можно доказать, что если функции нескольких переменных f и g непрерывны в точке x^0, то функции $f + g, c \cdot f$ (где c — число), $f \cdot g$, а если $g(x^0) \neq 0$, то и $\frac{f}{g}$, также непрерывны в точке x^0.

В главе 1 были перечислены элементарные функции одной переменной. С помощью этих функций, а также конечного числа операций сложения, умножения, деления и суперпозиции из переменных $x_1, \dots, x_n$ можно составить функцию n переменных. Образованные так функции n переменных также будем называть элементарными.

Пример 17. Рассмотрим функцию двух переменных $f(x, y) = xy$ и функцию одной переменной $g(t) = \sin t$. Функция двух переменных F, являющаяся суперпозицией $g \circ f$, имеет вид $F(x, y) = \sin(xy)$.

Следующую теорему, обобщающую теорему на случай функции нескольких переменных, приведем без доказательства.

Теорема 2. *Всякая элементарная функция нескольких переменных непрерывна в каждой точке своей области определения.*

Определение 20. Функция нескольких переменных называется непрерывной на множестве $C \subset R^n$, если она непрерывна в каждой точке множества C.

Следующая теорема является обобщением теоремы Вейерштрасса на случай функции нескольких переменных. Приведем эту теорему без доказательства.

Теорема 3. *Всякая функция, непрерывная на замкнутом ограниченном множестве, принимает на нем наибольшее и наименьшее значения.*

Теорема 4 (без доказательства). *Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки $x^0 \in R^n$ и непрерывна в точке x^0. Если $f(x^0) > 0[f(x^0) < 0]$, то существует такая $O_\varepsilon(x^0)$— ε-окрестность точки x^0, что $f(x) > 0(f(x) < 0)$ для всех $x \in O_\varepsilon(x^0)$.*

Иными словами, если непрерывная в точке функция принимает в этой точке положительное или отрицательное значение, то она принимает значения того же знака во всех точках, достаточно близких к данной.

§ 3. Частные производные функции нескольких переменных

Определение 21. Пусть функция f задана в некоторой окрестности точки $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ из пространства R^n. Зафиксируем значения переменных $x_2, \dots, x_n$: $x_2 = x_2^0, \dots, x_n = x_n^0$.

Получим функцию одной переменной $g(x_1) = f(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0)$.

Если существует производная $g(x_1)$ в точке x_1^0, то она называется частной производной функции f в точке $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ по переменной x_1 и обозначается $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, \dots, x_n^0)$ или $f'_{x_1}(x_1^0, \dots, x_n^0)$.

Таким образом, вспомнив определение производной функции одной переменной, можно написать:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, \dots, x_n^0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)}{\Delta x_1}. \quad (15)$$

Аналогично можно определить частные производные функции в точке по переменным $x_2, \dots, x_n$.

Из определения частной производной как обычной производной, при условии, что переменные, кроме одной (по которой берется производная), фиксированы, следует, что при вычислении частных про-

изводных можно пользоваться правилами вычисления производных функций одной переменной.

Пример 18. Вычислим частные производные линейной функции. $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$, где $a_1, a_2, \dots, a_n$ — постоянные. $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n)'_{x_1} = (a_1x_1)'_{x_1} + (a_2x_2)'_{x_1} + \dots + (a_nx_n)'_{x_1}$.

При вычислении $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ мы считаем переменные $(x_2, \dots, x_n)$ постоянными, поэтому $(a_2x_2)'_{x_1} = \dots = (a_nx_n)'_{x_1} = 0$. Тогда $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (a_1x_1)'_{x_1} = a_1$. Аналогично можно получить, что $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_i$ при $i = 2, \dots, n$.

Пример 19. Вычислим частные производные функции двух переменных $f(x, y) = \frac{xy}{x+y}$. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{(xy)'_x \cdot (x+y) - xy \cdot (x+y)'_x}{(x+y)^2} = \frac{y(x+y) - xy}{(x+y)^2} = \frac{y^2}{(x+y)^2}$.

При вычислении частной производной $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ мы считаем переменную y постоянной.

Аналогично можно вычислить частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$: $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{(xy)'_y \cdot (x+y) - xy \cdot (x+y)'_y}{(x+y)^2} = \frac{x(x+y) - xy}{(x+y)^2} = \frac{x^2}{(x+y)^2}$ (ввиду симметрии достаточно поменять местами x и y в ответе для $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$).

Рассмотрим функцию n переменных $f(x_1, \dots, x_n)$. Предположим, что для любой точки $x = (x_1, \dots, x_n)$ из некоторого множества C, входящего в область определения функции f, существует частная производная $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$, тогда можно говорить о $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ как о функции n переменных, определенной на C, и исследовать ее свойства. В частности, можно говорить о частных производных функции $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$.

Определение 22. Пусть частная производная $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ определена в некоторой окрестности точки $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$. Если существует $\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ — частная производная функции $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ по переменной x_j в точке x^0, то она называется *частной производной второго порядка*

функции f в этой точке и обозначается $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_1^0, \dots, x_n^0)$, или $f''_{x_i x_j}(x_1^0, \dots, x_n^0)$.

Если $i = j$, то частная производная второго порядка обозначается $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_1^0, \dots, x_n^0)$, или $f''_{x^2{}_i}(x_1^0, \dots, x_n^0)$.

Если $i \neq j$, то частные производные второго порядка называются смешанными.

Пример 20. Вычислим частные производные второго порядка функции $f(x, y) = \frac{xy}{x+y}$.

Используя результаты предыдущего примера, получим $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2}{(x+y)^2}\right) = y^2 \frac{\partial}{\partial x}((x+y)^{-2}) = y^2(-2)(x+y)^{-3} = -\frac{2y^2}{(x+y)^3}$;

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{(x+y)^2}\right) = \frac{(y^2)'_y (x+y)^2 - y^2((x+y)^2)'_y}{(x+y)^4} = \frac{2y(x+y)^2 - y^2(x+y)}{(x+y)^4} = = \frac{2xy}{(x+y)^3}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{(x+y)^2}\right)$.

Вычисляя, как выше, получим, что $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{2xy}{(x+y)^3}$.

В нашем примере смешанные производные оказались равными, однако это не всегда верно. В следующей теореме сформулировано достаточное условие равенства смешанных производных. Приведем ее без доказательства.

Теорема 5. *Пусть функция двух переменных $f(x, y)$ определена вместе со своими частными производными $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ в некоторой окрестности точки (x^0, y^0), причем частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ непрерывны в (x^0, y^0), тогда $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^0, y^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x^0, y^0)$.*

Аналогичным образом можно ввести понятие частных производных более высоких порядков, например, частная производная третьего порядка функции n переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$: $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}\right) = = \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$.

Если хотя бы две переменные из числа тех, по которым берется частная производная, различны, то частная производная называется смешанной.

Пример 21. Рассмотрим функцию трех переменных $f(x,y,z) = 2xy + x^2 - 3xyz^2 + y^3z$. Вычислим смешанные частные производные третьего порядка

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial z}(x,y,z)\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}(-6xyz + y^3)\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(-6xz + 3y^2) = -6z;$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial z}(x,y,z)\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}(-6xyz + y^3)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(-6yz) = 0.$$

Опираясь на теорему 5, можно сказать, что если y функции n переменных смешанные частные производные n-го порядка непрерывны в некоторой точке, то они не зависят от порядка их вычисления. Покажем это на примере функции трех переменных $f(x,y,z)$. Докажем, что $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial y}$.

Действительно, по определению производной третьего порядка и теореме 5, имеем:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial y}.$$

Условие непрерывности смешанных производных в сформулированной теореме нельзя опустить: при нарушении этого условия смешанные частные производные могут отличаться.

Пример 22. Покажем, что частные производные второго порядка функции двух переменных $f(x,y) = \begin{cases} xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, x^2+y^2 \neq 0; \\ 0, x = y = 0, \end{cases}$ различны в точке (0, 0).

Найдем частные производные первого порядка:

$$f'_x(x,y) = \begin{cases} y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right), x^2+y^2 \neq 0; \\ 0, x = y = 0, \end{cases}$$

$$f'_y(x,y)=\begin{cases} x\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right), x^2+y^2\neq 0; \\ 0, x=y=0. \end{cases}$$

При $y\neq 0$ имеем $f'_x(0,y)=-y$, откуда

$$f''_{xy}(0{,}0)=\lim_{y\to 0}\frac{f'_x(0,y)-f'_x(0{,}0)}{y}=-1.$$

Аналогично $f'_y(x,0)=x$, при $x\neq 0$, и поэтому $f''_{yx}(0{,}0)=$ $=\lim_{x\to 0}\frac{f'_y(x,0)-f'_y(0{,}0)}{x}=1.$

Следовательно, $f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$, что связано с нарушением условия непрерывности смешанных производных в точке (0, 0). Разрыв смешанных производных вытекает из теоремы 5, согласно которой в случае непрерывности смешанных производных в точке (0, 0) они в данной точке совпадали бы. Но в этом можно убедиться и непосредственно. Действительно, в области $x^2+y^2\neq 0$ функции f'_x и f'_y имеют непрерывные частные производные первого порядка по переменным y и x, которые равны между собой:

$$f''_{xy}(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\left(1+\frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)=f''_{yx}.$$

Однако, например, при $y=kx, x\neq 0$, имеем $f''_{xy}(x,kx)=$ $=\frac{1-k^2}{1+k^2}\left(1+\frac{8k^2}{(1+k^2)^2}\right)$, и предел этой производной при $x\to 0$ зависит от k, т. е. f''_{xy} является функцией, разрывной в точке (0, 0).

§ 4. Дифференцируемость функций нескольких переменных. Полный дифференциал

В главе 3 было введено понятие дифференциала функции одной переменной и свойство дифференцируемости функции. Введем аналогичные понятия для функции нескольких переменных.

Рассмотрим сначала случай функции двух переменных. Пусть функция $f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки $M^0=$ $=(x^0,y^0)$. Рассмотрим точку $M=(x,y)$ из этой окрестности. Обозначим $\Delta x=x-x^0, \Delta y=y-y^0$.Тогда расстояние от точки M до M^0 (рис. 6.13) равно $\rho(M,M^0)=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$.

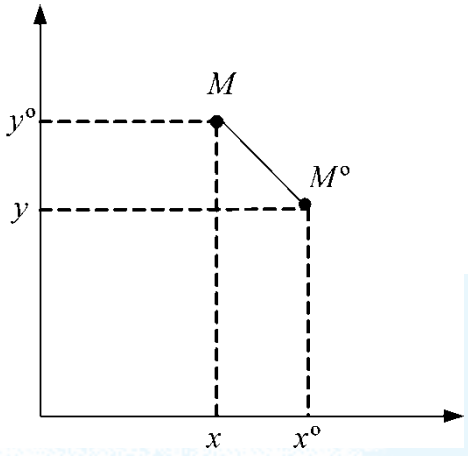


Рис. 6.13

Обозначим $\Delta f(x^0, y^0) = f(x^0 + \Delta x, y^0 + \Delta y) - f(x^0, y^0)$.

Определение 23. Величину $\Delta f(x^0, y^0)$ называют полным приращением функции в точке (x^0, y^0).

Определение 24. Функция $f(x, y)$ называется дифференцируемой в точке (x^0, y^0), если существуют два числа A и B такие, что

$$\Delta f(x^0, y^0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \qquad (16)$$

где функция $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ — бесконечно малая в точке $(0, 0)$, т. е.

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \alpha(\Delta x, \Delta y) = 0. \qquad (17)$$

Заметим, что поскольку $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 0$, то и предел произведения также равен нулю $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \alpha(\Delta x, \Delta y) \cdot \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 0$.

Теорема 6. *Если функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x^0, y^0), то она непрерывна в точке (x^0, y^0).*

Доказательство. Поскольку функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x^0, y^0), то

$$\Delta f(x^0, y^0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Тогда предел $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \Delta f(x^0, y^0) = \lim\limits_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Из свойств пределов следует, что $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} f(x^0 + \Delta x, y^0 + \Delta y) = f(x^0, y^0)$. Это и означает по определению, что функция f непрерывна в точке (x^0, y^0).

Определение 25. Пусть функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x^0, y^0), тогда $A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$ — линейная функция переменных Δx и

Δy называется полным дифференциалом функции f в точке (x^0, y^0) и обозначается $df(x^0, y^0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$. (18)

Вместо приращений Δx и Δy, как и в случае функции одной переменной, употребляют обозначения dx и dy. (18) записывают в виде $df(x^0, y^0) = A \cdot dx + B \cdot dy$.

Для случая функции одной переменной было установлено, что дифференцируемость функции в точке равносильна существованию конечной производной функции в этой точке. Следующие две теоремы устанавливают соотношение между дифференцируемостью и существованием частных производных для функций двух переменных.

Теорема 7 (необходимое условие дифференцируемости). *Если функция $f(x^0, y^0)$ дифференцируема в точке (x^0, y^0) и $df(x^0, y^0) = A \cdot dx + B \cdot dy$ — ее полный дифференциал в этой точке, то в точке (x^0, y^0) существуют частные производные функции $f(x^0, y^0)$, при этом $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x^0, y^0), B = \frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0)$.*

Доказательство. Возьмем точку (x, y) из области определения функции f, отличную от (x^0, y^0). Полное приращение функции f можно представить в виде:

$\Delta f(x^0, y^0) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Пусть $\Delta y = 0$. В этом случае $\Delta x \neq 0$, поскольку точка (x, y) отлична от (x^0, y^0).

Тогда $\Delta f(x^0, y^0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x, 0)|\Delta x|$.

Отсюда следует, что $\frac{\Delta f(x^0, y^0)}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x, 0)\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$. (19)

Переходя в (19) к пределу при $\Delta x \to 0$, получим $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x^0, y^0)}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x, 0)\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$. (20)

Докажем, что предел в правой части (20) равен нулю. Действительно, функция $\beta(\Delta x) = \alpha(\Delta x, 0)$ — бесконечно малая в точке $\Delta x = 0$, функция $g(\Delta x) = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ ограничена в любой проколотой окрестности $\Delta x = 0$ (т. к. $|g(\Delta x)| = 1$ для всех $\Delta x \neq 0$).

Из свойств бесконечно малых функций следует, что $\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x, 0)\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 0$.

Следовательно, существует конечный предел в левой части (24), тем самым мы доказали, что существует частная производная функ-

ции $f(x,y)$ по переменной x в точке (x^0,y^0), причем $\frac{\partial f}{\partial x}(x^0,y^0) = = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x^0,y^0)}{\Delta x} = A$.

Аналогичным образом, полагая $\Delta x = 0$, получим, что существует производная $\frac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0) = B$.

Таким образом, теорема 7 устанавливает формулу $\partial f(x^0,y^0) = = \frac{\partial f}{\partial x}(x^0,y^0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0)dy$. (21)

Замечание 3. В отличие от случая функции одной переменной, существования частных производных, вообще говоря, не достаточно для дифференцируемости функции нескольких переменных. Этот факт доказывает следующий пример.

Пример 23. Рассмотрим функцию $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, \text{при } (x,y) \neq 0; \\ 0, \text{при } (x,y) = 0. \end{cases}$

Как было установлено (см. пример 16), не существует $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$.

Следовательно, функция $f(x,y)$ не является непрерывной в точке (0; 0). Тогда по теореме 6 функция $f(x,y)$ не дифференцируема в точке $(0,0)$.

Однако частные производные этой функции существуют в любой точке $(x,y) \in R$. Действительно, для $(x,y) \neq (0,0)$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = = \frac{y^3-yx^2}{(x^2+y^2)^2}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}$.

Вычислим $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$. Для этого положим $y = 0$ и рассмотрим функцию одной переменной $g(x) = f(x,0)$. Ясно, что $g(x) = 0$ для всех $x \in R^2$. Значит существует производная $g'(x)$, причем $g'(x) = = \frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0$ для всех $x \in R^2$. В частности, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

Совершенно аналогично устанавливаем, что существует частная производная функции $f(x,y)$ по переменной y в точке $(0,0)$: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

Таким образом, мы установили, что для функции нескольких переменных из существования частных производных в точке не следует дифференцируемость функции в этой точке.

Следующая теорема устанавливает достаточное условие для дифференцируемости функции двух переменных.

Теорема 8 (достаточное условие дифференцируемости). *Пусть функция $f(x,y)$ в некоторой окрестности точки (x^0,y^0) имеет частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, непрерывные в точке (x^0,y^0). Тогда функция f дифференцируема в точке (x^0,y^0).*

Доказательство. Пусть $O_\varepsilon(x^0,y^0)$ — окрестность точки (x^0,y^0), в которой функция $f(x,y)$ имеет частные производные. Выберем Δx и Δy так, чтобы $(x^0+\Delta x, y^0+\Delta y)$ принадлежало $O_\varepsilon(x^0,y^0)$. Представим полное приращение функции $f(x,y)$ в точке (x^0,y^0) в виде:

$$\Delta f(x^0,y^0) = f(x^0+\Delta x, y^0+\Delta y) - f(x^0,y^0) = [f(x^0+\Delta x, y^0+ + \Delta y) - f(x^0,y^0+\Delta y)] + [f(x^0,y^0+\Delta y) - f(x^0,y^0)]). \quad (22)$$

Выражения в квадратных скобках являются приращениями функции f только по одной переменной, при этом другая переменная фиксирована. Так, $[f(x^0+\Delta x, y^0+\Delta y) - f(x^0,y^0+\Delta y)]$ — приращение функции $f(x^0,y^0+\Delta x)$ одной переменной x в точке x^0. Не трудно проверить, что для этой функции выполняются условия теоремы Лагранжа на отрезке $[x^0, x^0+\Delta x]$. Тогда существует точка $c \in (x^0, x^0+\Delta x)$ такая, что

$$f(x^0+\Delta x, y^0+\Delta y) - f(x^0,y^0+\Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(c, y^0+\Delta y)\,\Delta x.$$

Точку C можно представить в виде $c = x^0\theta_1\,\Delta x$, где $\theta_1 \in (0,1)$, Таким образом, имеем $f(x^0+\Delta x, y^0+\Delta y) - f(x^0,y^0+\Delta y) =$

$= \frac{\partial f}{\partial x}(x^0+\theta_1\,\Delta x, y^0+\Delta y)\,\Delta x$, где $\theta_1 \in (0,1)$.

Аналогично получим: $f(x^0,y^0+\Delta y) - f(x^0,y^0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0 + +\theta_2, \Delta y)\,\Delta y$, где $\theta_2 \in (0,1)$. Тогда 22 можно записать в виде:

$$\Delta f(x^0,y^0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^0+\theta_1\,\Delta x, y^0+\Delta y)\,\Delta x + + \frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0+\theta_2, \Delta y)\,\Delta y, \quad (23)$$

где $\theta_1 \in (0,1)$, $\theta_2 \in (0,1)$.

Поскольку функции $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$и $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ непрерывны в точке (x^0,y^0)

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x^0+\theta_1\,\Delta x, y^0+\Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^0,y^0). \quad (24)$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0+\theta_2\,\Delta y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0). \quad (25)$$

Равенства (24) и (25) можно записать в виде (26) и (27) соответственно:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^0+\theta_1\,\Delta\,x, y^0+\Delta\,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x^0,y^0)+\varepsilon_1(\Delta\,x,\Delta\,y). \qquad (26)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0+\theta_2,\Delta\,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0)+\varepsilon_2(\Delta\,x,\Delta\,y), \qquad (27)$$

где функции $\varepsilon_1(\Delta\,x,\Delta\,y)$ и $\varepsilon_2(\Delta\,x,\Delta\,y)$ — бесконечно малые в точке $(0,0)$, причем $\varepsilon_1(0,0)=\varepsilon_2(0,0)=0$. Тогда (23) можно записать в виде

$$\Delta\,f(x^0,y^0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x^0,y^0)\,\Delta\,x+\varepsilon_1(\Delta\,x,\Delta\,y)\,\Delta\,x+\frac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0)\,\Delta\,y+$$
$$+\varepsilon_2(\Delta\,x,\Delta\,y\,)\,\Delta\,y=\frac{\partial f}{\partial x}(x^0,y^0)\,\Delta\,x+\frac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0)\,\Delta\,y+ \qquad (28)$$
$$+(\varepsilon_1(\Delta\,x,\Delta\,y)\,\Delta\,x+\varepsilon_2(\Delta\,x,\Delta\,y)\,\Delta\,y).$$

Если хотя бы одна из величин $\Delta\,x$ или $\Delta\,y$ отлична от нуля, то выражение

$\varepsilon_1(\Delta\,x,\Delta\,y)\,\Delta\,x+\varepsilon_2(\Delta\,x,\Delta\,y)\,\Delta\,y$ можно представить в виде:

$$\sqrt{\Delta\,x^2+\Delta\,y^2}\left(\varepsilon_1(\Delta\,x,\Delta\,y)\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}+\varepsilon_2(\Delta\,x,\Delta\,y)\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right). \qquad (29)$$

Обозначим функцию, стоящую в скобках, через $a(\Delta\,x,\Delta\,y)$. Заметим, что

$$\left|\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right|\le 1, \left|\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right|\le 1.$$

Тогда функция $a(\Delta\,x,\Delta\,y)$ является бесконечно малой в точке (0, 0), т. к. представляет собой сумму произведений бесконечно малых функций на ограниченные. Таким образом, приращение функции $\Delta\,f(x^0,y^0)$ можно записать в виде: $\Delta\,f(x^0,y^0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x^0,y^0)\,\Delta\,x+$ $+\frac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0)\,\Delta\,y+a(\Delta\,x,\Delta\,y)\sqrt{\Delta\,x^2+\Delta\,y^2}$.

А это означает дифференцируемость функции f в точке (x^0,y^0).

Понятие дифференцируемости играет важную роль в исследовании функций нескольких переменных. В ряде теорем, устанавливающих те или иные свойства функций, условие дифференцируемости функции является необходимым. Однако проверка дифференцируемости функции, основанная на определении дифференцируемости, часто бывает затруднительна.

Теорема 8 дает возможность свести проверку дифференцируемости функции в точке к установлению непрерывности частных производных в точке, что, как правило, проще. Так, например, если частные

производные функции являются элементарными функциями, то по теореме 1 они непрерывны и, следовательно, функция дифференцируема.

Все определения и утверждения этого параграфа переносятся на случай функции $f(x_1, \dots, x_n)$ любого числа n переменных.

Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ определена в некоторой окрестности точки $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in R^n$. Тогда условие дифференцируемости функции в точке x^0 выглядит так:

$$\Delta f(x^0) = f(x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, \dots, x_n^0) = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n x_n + \alpha(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)\sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^0}, \quad (30)$$

где $\Delta x_i (1 \le i \le n)$ таковы, что точка $(x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_n^0 \Delta x_n)$ принадлежит области определения функции; числа $A_i = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, \dots, x_n^0)$ для $1 \le i \le n$; функция $\alpha(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ — бесконечно малая в точке $(0, \dots, 0) \in R^n$.

Линейная функция от n переменных $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, \dots, x_n^0) \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1^0, \dots, x_n^0) \Delta x_n$$

называется полным дифференциалом функции f в точке x^0 и обозначается $df(x_1^0, \dots, x_n^0)$.

Используя обозначение $df_i = \Delta x_i$ при $1 \le i \le n$, можно записать

$$df(x_1^0, \dots, x_n^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, \dots, x_n^0)dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1^0, \dots, x_n^0)dx_n.$$

Обозначим $x = (x_1, \dots, x_n) = (x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_n^0 + \Delta x_n)$ и запишем (30) в виде:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1^0, \dots, x^n) + A(x_1 - x_0^0) + \dots + A_n(x_n - x_n^0) + \\ + \alpha(x_1 - x_1^0, \dots, x_n - x_n^0)\sqrt{(x - x_1^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2}. \quad (31)$$

Таким образом, дифференцируемость функции $f(x_1, \dots, x_n)$ в точке x^0 означает, что в достаточно малой окрестности этой точки функция $f(x_1, \dots, x_n)$ «близка» к линейной функции

$$f(x_1, \dots, x_n) \approx f(x_1^0, \dots, x_n^0) + A(x_1 - x^0) + \dots + A_n(x_1 - x_n^0).$$

Пример 24. Вычислим приближенно величину $1,03^{1,98}$.

Рассмотрим для этого функцию двух переменных $f(x, y) = x^y$ и точку $(x^0, y^0) = (1; 2)$. Нам требуется вычислить $f(1{,}03; 1{,}98)$.

Положим $\Delta x = 1{,}03 - 1 = 0{,}03$; $\Delta y = 1{,}98 - 2 = -0{,}02$.

Вычислим $f(x^0, y^0) = f(1, 2) = 1^2 = 1$. Частные производные функции f равны $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yx^{y-1}, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y \ln x$.

Частные производные непрерывны в точке (x^0, y^0), следовательно, функция f дифференцируема в (x^0, y^0). Это значит, что $f(1{,}03; 1{,}98) - f(1; 2) = \frac{\partial f}{\partial x}(1; 2) \cdot 0{,}03 + \frac{\partial f}{\partial y}(1; 2) \cdot (-0{,}02) +$
$+\alpha(0{,}03; -0{,}02)\sqrt{0{,}03^2 + (-0{,}02)^2}$.

Пренебрегая последним слагаемым, получим приближенное равенство $f(1{,}03; 1{,}98) \approx f(1; 2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1; 2) \cdot 0{,}03 + \frac{\partial f}{\partial y}(1; 2) \cdot (-0{,}02) =$
$= 1 + 2 \cdot 0{,}03 + 0 \cdot (-0{,}02) = 1{,}06$.

§ 5. Дифференцирование сложной функции

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$. Предположим, что переменные x и y сами являются функциями переменной t: $x = g(t), y = h(t)$.

Тогда z зависит от t следующим образом: $z = f\big(g(t), h(t)\big)$.

Теорему 9 приведем без доказательства.

Теорема 9. *Пусть функции* $g(t)$ и $h(t)$ *дифференцируемы в точке* t^0. *Обозначим* $x^0 = g(t^0)$. *Если функция двух переменных* $z = f(x, y)$ *дифференцируема в точке* (x^0, y^0), *то сложная функция* $z = f(g(t), h(t))$ *имеет в точке* t^0 *производную, которая вычисляется по формуле* $\frac{dz}{dt}(t^0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^0, y^0)\frac{dg}{dt}(t^0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0)\frac{dh}{dt}(t^0)$, (32)

или в более короткой форме:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dg}{dt} + \frac{df}{dy}\frac{dh}{dt}. \qquad (33)$$

Пример 25. Рассмотрим функцию $z = x^2y + 3xy^4$, где $x = e'$, $y = \sin t$. Тогда по формуле (33) $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dh}{dt} = (2xy + 3y^4)e' +$
$+(x^2 + 12xy^3)\cos t = (2e' \sin t + 3sin^4 t)e' + \left(e^{2t} + 12e'^{sin^3} y\right)\cos t$.

Предположим теперь, что переменные x и y функции $f(x,y)$ сами являются функциями двух переменных: $x = g(u,v), y = h(u,v)$.

Следующая теорема дает правило вычисления частных производных функции $f(g(u,v),h(u,v))$ по переменным u и v. Приведем ее без доказательства.

Теорема 10. *Пусть функции* $x = g(u,v)$ и $y = h(u,v)$ *определены в некоторой окрестности точки* (u^0,v^0), *а функция* $z = f(x,y)$ — *в некоторой окрестности точки* (x^0,y^0), *где* $x^0 = g(u^0,v^0)$, $y^0 = h(u^0,v^0)$. *Предположим, что функция* $f(x,y)$ *дифференцируема в точке* (x^0,y^0), *а в точке* (u^0,v^0) *существуют частные производные* $\frac{\partial g}{\partial u}$ и $\frac{\partial h}{\partial u}$. *Тогда в точке* (u^0,v^0) *существует частная производная* $\frac{\partial z}{\partial u}$ *сложной функции* $z = f\big(g(u,v),h(u,v)\big)$, *причем* $\frac{\partial z}{\partial u}\left(u^0,v^0\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(x^0,y^0\right)\frac{\partial g}{\partial u}\left(u^0,v^0\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(x^0,y^0\right)\frac{\partial h}{\partial u}\left(u^0,v^0\right)$. *Или в более короткой форме записи:* $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dh}{dt}$. (34)

Очевидно, что справедлива аналогичная формула для вычисления частной производной функции $z = f(g(u,v),h(u,v))$ по переменной v: $\frac{dz}{dv} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dg}{dv} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dh}{dv}$.

Пример 26. Пусть $z = f(x,y) = e^x \sin y$, причем $x = g(u,v) = uv^2, y = h(u,v) = u^2 v$.

Вычислим по формуле (34)

$$\frac{dz}{dv} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dg}{dv} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dh}{dv} = e^x \sin y \cdot v^2 + e^x \cos y \cdot 2uv =$$

$$= e^{uv^2} \sin\left(u^2 v\right) v^2 + e^{uv^2} \cos\left(u^2 v\right) 2uv.$$

Теорема 11. *Пусть функция* $f(x_1,\dots,x_n)$ *определена в некоторой окрестности точки* $x^0 = (x_1^0,\dots,x_n^0) \in R^n$, *а переменные* x_i *являются функциями* m *переменных* $x_i = g_i(t_1,\dots,t_m), 1 \le i \le n$, *определенными в окрестности точки* $t^0 = (t_1^0,\dots,t_n^0) \in R^m$. *Если функция* $f(x_1,\dots,x_n)$ *дифференцируема в точке* x^0, *и в точке* t^0 *существуют частные производные* $\frac{\partial g_i}{\partial t_j}$ *при* $1 \le i \le n$,

$$y = f\left(g_1\left(t_1,\ldots,t_n\right),\ldots,g_n\left(t_1,\ldots,t_n\right)\right).$$

Имеем в точке t^0 частные производные $\frac{\partial f}{\partial t_j}, 1 \le j \le m,$ причем

$$\frac{\partial f}{\partial t_j}\left(t^0\right) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial g_1}{\partial t_j}\left(t^0\right) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial g_1}{\partial x_n}\left(t^0\right), \text{при } 1 \le j \le m.$$

§ 6. Дифференциалы высших порядков

Пусть скалярная функция $f: R^n \to R$ дифференцируема в окрестности точки $\bar{x}$. Тогда ее дифференциал $df(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i}$ (35)

как функция от $\bar{x}$ может оказаться дифференцируемой в точке $\bar{x}$. В этом случае выражение

$$d\big(df(\bar{x})\big) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j, \qquad (36)$$

представляющее собой дифференциал от дифференциала функции $f(\bar{x})$, называют дифференциалом второго порядка функции $f(\bar{x})$ в точке $\bar{x}$ и обозначают $d^2 f(\bar{x})$. В этой связи $df(\bar{x})$ называют дифференциалом первого порядка функции f.

Для существования в точке дифференциала второго порядка функции f необходимо существование всех частных производных второго порядка этой функции в точке $\bar{x}$.

Достаточным же условием существования дифференциала является условие, что указанные производные являются непрерывными функциями в точке $\bar{x}$.

Если дифференциал первого порядка является линейной функцией переменных $d\bar{x} = (dx_1, \ldots, dx_n)$, то дифференциал второго порядка является квадратичной формой относительно этих переменных. В матричной записи дифференциал второго порядка имеет вид: $d^2 f(\bar{x}) = f''(\bar{x})$, где $f''(\bar{x})$ — матрица Гессе функции f.

Повторяя последовательно процесс вычисления дифференциалов, приходим к дифференциалу функции i-го порядка, который является дифференциалом первого порядка от дифференциала $(k-1)$ порядка функции f: $d^k f(\bar{x}) = d(d^{(k-1)} f(\bar{x}))$.

С помощью оператора $\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n$ дифференциал n-го порядка функции f удобно записывать в виде:

$$d^k f(\bar{x}) = (\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n)^k f(\bar{x}). \quad (37)$$

Здесь выражение в скобках возводится в степень k по обычным алгебраическим формулам, причем полагают, что: $(\frac{\partial}{\partial x_i}dx_i)^m = \frac{\partial^m}{\partial x_i^m}dx_i^m$, где использовано обозначение $dx_i^m = (dx_i)^m$.

Пример 27. В случае двух независимых переменных $z = f(x, y)$, имеем: $dz = f'_x dx + f'_y dy$, поэтому $d^2 z = d\left(f'_x dx + f'_y dy\right) = \left(f'_x dx + f'_y dy\right)' x dx + \left(f'_x dx + f'_y dy\right)' y dy = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2$.

Это же выражение для дифференциала второго порядка двух переменных получается и по формуле (37): $d^2 f(x, y) = (\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy)^2 f(x, y) = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2$. Так как для функции $z = x^2y^3$ ее второй дифференциал имеет вид: $d^2 z = 2y^3dx^2 + 12xy^2dxdy + 6x^2ydy^2$. (Убедитесь в этом!)

Мы здесь рассматривали функции независимых переменных. Для случая, когда аргументы сами являются функциями, например $x = g(s, t), y = h(s, t)$, можно показать (подобно тому, как это делалось для функции одного аргумента), что форма дифференциала первого порядка инвариантна, а для дифференциалов второго и высших порядков — не инвариантна.

Замечание 4. Хотя для дифференциалов второго и более порядков инвариантность формы вообще не имеет места, тем не менее в некоторых простых частных случаях форма дифференциала любого порядка может оставаться неизменной.

В частности, в случае, когда аргументы x и y функции $z = f(x, y)$ линейно зависят от независимого аргумента t: $x = at + b, y = ct + d$, форма дифференциала любого порядка $d^k z$ остается неизменной. (Убедитесь в этом!)

§ 7. Выпуклость функций нескольких переменных

В этом параграфе мы распространим эти понятия на функции n переменных, исследуем свойства выпуклых функций и дадим экономическую интерпретацию выпуклости.

Определение 26. Пусть $x, y \in R^n$. Множество точек $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ при $\lambda \in [0,1]$ называется отрезком прямой с концами x и y в пространстве R^n и обозначается $[x, y]$.

Естественной геометрической интерпретацией введенного понятия в случае

$n = 1$ $(n = 2, n = 3)$ является известное из геометрии понятие отрезка на прямой (на плоскости, в трехмерном пространстве) (рис. 6.14).

Определение 27. Множество $B \subset R^n$ называется выпуклым, если для всех точек $x, y \in B$ выполняется $\lambda x + (1-\lambda)y \in B$ для всех $\lambda \in [0,1]$.

Можно дать определение выпуклого множества в эквивалентной форме.

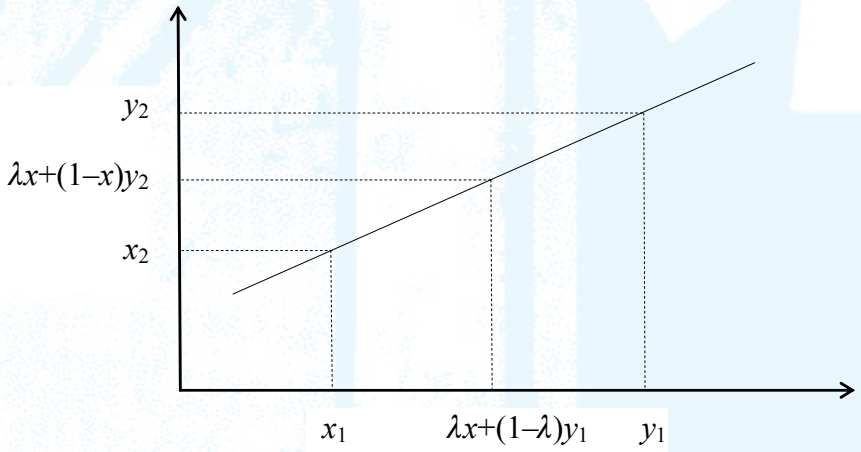


Рис. 6.14

Определение 28. Множество $D \subset R^n$ называется выпуклым, если вместе с любыми двумя своими точками x и y содержит отрезок $[x, y]$.

На рис. 6.15 (а) изображены выпуклые множества, а на рис. 6.15 (б) — множества, не обладающие свойством выпуклости.

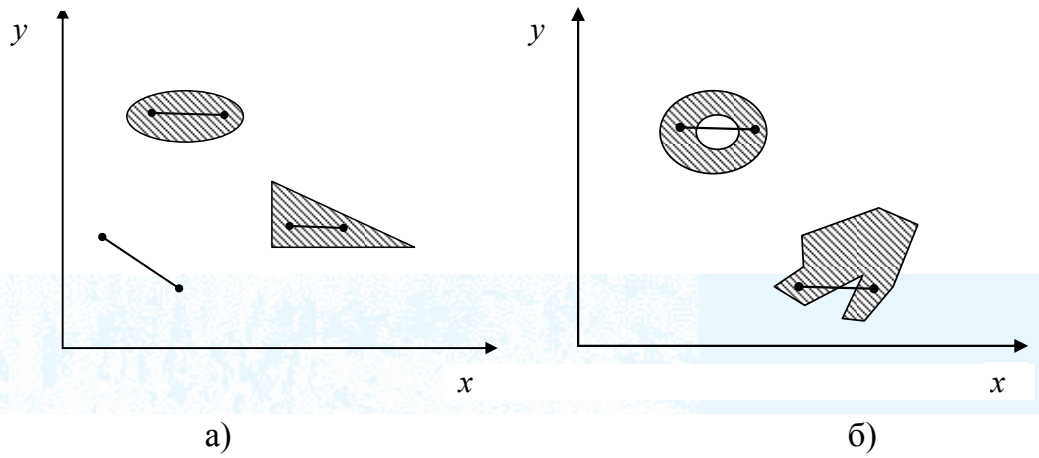


Рис. 6.15

Теорема 12. *Пересечение двух выпуклых множеств выпукло.*

Доказательство. Рассмотрим выпуклые множества $A, B \subset R^n$. Обозначим $C = A \cap B$. Пусть x, y — произвольные точки из множества C. Тогда $x \in A$ и $x \in B, y \in A$ и $y \in B$. Из выпуклости множеств A и B следует, что отрезок $[x, y] \subset A$ и $[x, y] \subset B$, тогда $[x, y] \subset C$, и, значит, C — выпукло.

Пример 28. Отрезок прямой $[x, y]$ в пространстве R^n является, очевидно, выпуклым множеством.

Определение 29. Функция f, определенная на выпуклом множестве $D \subset R^n$, называется выпуклой вверх на D, если для всех точек $x, y \in D$ и для любого $\lambda \in [x, y]$ выполняется:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y). \quad (38)$$

Функция f называется строго выпуклой вверх, если для всех $x, y \in D$, таких, что $x \neq y$, и для любого $\lambda \in (0,1)$ выполняется:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y). \quad (39)$$

Аналогично вводятся понятия выпуклости вниз и строгой выпуклости вниз функции f на выпуклом множестве D: если для всех $x, y \in D$ и для любого $\lambda \in [0, 1]$ выполняется:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \quad (40)$$

то функция f называется выпуклой вниз на D;

если для всех $x, y \in D$, таких, что $x \neq y$, и для любого $\lambda \in (0,1)$ выполняется: $f(\lambda x + (1-\lambda)y \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$, (41)

то функция f называется строго выпуклой вниз на D.

Замечание 5. В определении 29 выпуклость множества D существенна. Она обеспечивает принадлежность точки $\lambda x + (1-\lambda)y$ множеству D.

Непосредственно из определения 29 вытекает следующее свойство выпуклых вверх и вниз функций.

Теорема 13. *Если функция f выпукла вверх на множестве D, то функция $g = -f$ выпукла вниз на D, и наоборот: если функция f выпукла вниз на D, то функция $g = -f$ выпукла вверх на D.*

§ 8. Свойства выпуклых функций

Теорема 14.

1. *Если функция f выпукла вверх (вниз) на выпуклом множестве $D \subset R^n$, то функция $c * f$, где $c > 0$, выпукла вверх (вниз) на D.*

2. *Если функции f и g выпуклы вверх (вниз) на выпуклом множестве $D \subset R^n$, то их сумма $g + f$ выпукла вверх (вниз) на D.*

Доказательство следует из определения 29.

Определение 30. Рассмотрим k функций $f_1, \dots, f_k$ и k неотрицательных чисел $c_1 \geq 0, \dots, c_k \geq 0$. Функция $c_1 f_1 + \dots + c_k f_k$ называется неотрицательной линейной комбинацией функций $f_1, \dots, f_k$.

Если при этом $c_1 + \dots + c_k = 1$, то функция $c_1 f_1 + \dots + c_k f_k$ называется выпуклой комбинацией функций $f_1, \dots, f_k$.

Следствие 1 (теоремы 14). Неотрицательная линейная комбинация выпуклых вверх (вниз) функций является выпуклой вверх (вниз) функцией.

Доказательство оставим читателю.

Определение 31. Рассмотрим k функций $f_1, \dots, f_k$, заданных на множестве $D \subset R^n$. Нижней огибающей семейства функций $f_1, \dots, f_k$ называется функция f, принимающая в каждой точке $x \in D$ значение, равное наименьшему из значений в этой точке функций $f_1, \dots, f_k$: $f(x_1, \dots, x_n) = \min\{f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_k(x_1, \dots, x_n)\}$ для всех $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$. Нижнюю огибающую семейства функций $f_1, \dots, f_k$ обозначают $\min\{f_1, \dots, f_k\}$.

Пример 29. Рассмотрим три функции одной переменной:

$f_1(x) = x - 1, f_2(x) = \sqrt{x}, f_3(x) = 10 - x$. На рис. 6.16 жирной линией изображен график функции $f = \{f_1, f_2, f_3\}$.

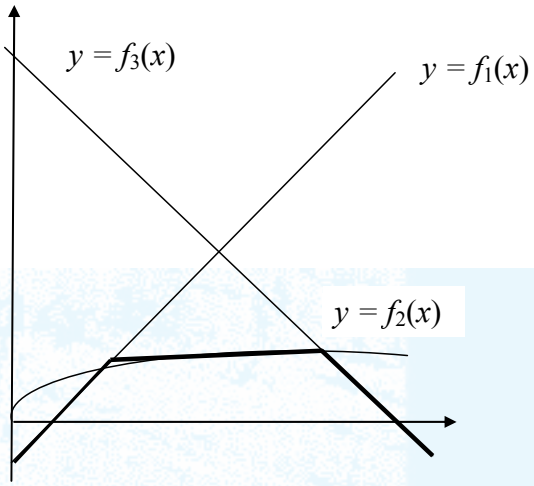


Рис. 6.16

Определение 32. Рассмотрим k функций $f_1, \dots, f_k$, заданных на множестве $D \subset R^n$. Верхней огибающей семейства функций $f_1, \dots, f_k$ называется функция f, принимающая в каждой точке $x \in D$ значение, равное наибольшему из значений в этой точке функций $f_1, \dots, f_k$: $f(x_1, \dots, x_n) = \max\{f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_k(x_1, \dots, x_n)\}$ для всех $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$.

Верхнюю огибающую семейства функций $f_1, \dots, f_k$ обозначают $\max\{f_1, \dots, f_k\}$.

Теорема 15. *Нижняя огибающая семейства выпуклых вверх функций $f_1, \dots, f_k$, определенных на выпуклом множестве $D \subset R^n$, является выпуклой вверх функцией.*

Справедливо аналогичное утверждение для функций, выпуклых вниз.

Теорема 16. *Если функции $f_1, \dots, f_k$ выпуклы вниз на выпуклом множестве $D \subset R^n$, то верхняя огибающая семейства $f_1, \dots, f_k$ выпукла вниз на D.*

Теоремы 15 и 16 играют большую роль в экономических приложениях, т. к. нижние и верхние огибающие семейств функций часто возникают в экономических задачах.

Установим еще одно важное свойство выпуклых вверх и вниз функций.

Теорема 17. *Если функция $f(x_1, \dots, x_n)$ выпукла вверх (вниз) на выпуклом множестве $D \subset R^n$, а c — произвольная точка из множества значений f, то множество $D_c^+ = \{x \in D | f(x) \geq c\}$, $D_c^- = \{x \in D | f(x) \leq c\}$] выпукло.*

Доказательство. Докажем теорему для случая выпуклой вверх функции. Пусть $x, y \in D_c^+$, тогда $f(x) \geq c, f(y) \geq c$.

Тогда $\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \geq \lambda c + (1-\lambda) c = c$ (42)

для любых $\lambda \in [0,1]$. Выпуклость вверх функции f означает, что $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ для любого $\lambda \in [0,1]$. Тогда с учетом (41) получим $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq c$. Это значит, что точка $\lambda x + (1-\lambda) y \in D_c^+$ для любого $\lambda \in [0,1]$, следовательно, D_c выпукло.

Заметим, что выпуклость множества D_c^+ $[D_c^-]$ является необходимым, но не достаточным условием выпуклости вверх (вниз) функции f. Это иллюстрирует следующий пример.

Пример 30. Рассмотрим функцию одной переменной $y = f(x)$, график которой изображен на рис 6.17.

Очевидно, что множество $D_c^+ = \{x \in D | f(x) \geq c\}$ выпукло при любом значении c, однако функция f выпуклой вверх не является.

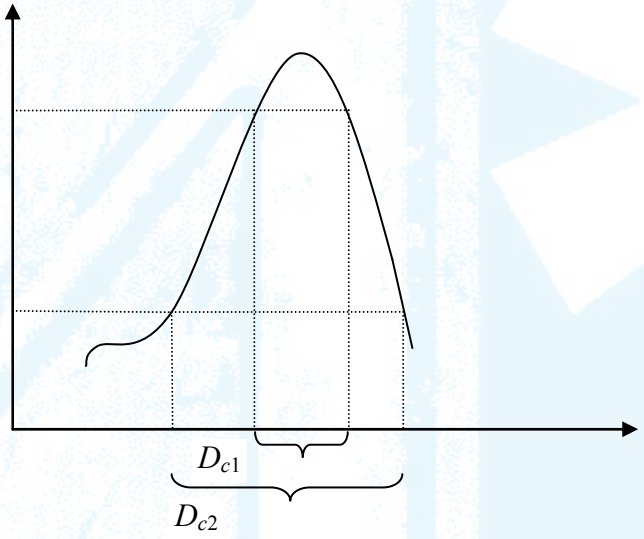


Рис. 6.17

Непрерывность выпуклых функций

Выпуклые вверх и выпуклые вниз функции, очевидно, не всегда являются непрерывными. Например, функция $y = f(x) = \begin{cases} 1, \text{ при } x \in (1,2) \\ 2, \text{ при } x = 1, x = 2 \end{cases}$ выпукла вниз на $[1,2]$, но не является непрерывной на $[1,2]$ (рис. 6.18).

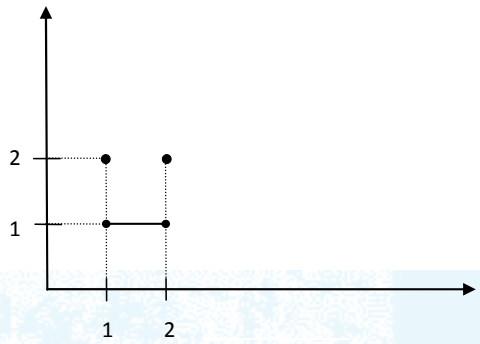


Рис. 6.18

В следующей теореме установлено условие, при котором выпуклая функция непрерывна. Приведем эту теорему без доказательств.

Теорема 18. *Функция f выпукла вверх (вниз) на открытом множестве $D \in R^n$, непрерывна на D.*

Критерий выпуклости функций

Выяснить, обладает ли функция свойством выпуклости, вообще говоря, непросто. Иногда удается установить это свойство по определению выпуклости. Для довольно широкого класса функций, имеющих частные производные второго порядка, существует критерий выпуклости. Для того чтобы его сформулировать, введем следующие определения.

Функция вида $f(x_1, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + \dots + a_{1n}x_1x_n + \dots + a_{n1}x_nx_1 + \dots + a_{nn}x_n^2$, где a_{ij} — числа $(1 \le i \le n, 1 \le j \le n)$ называется *квадратичной формой.*

Каждой квадратичной форме можно поставить в соответствие матрицу, состоящую из ее коэффициентов $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Рассмотрим вектор $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$.

По определению произведения матрицы на вектор имеем:

$$A\bar{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + & \cdots & +a_{1n}x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + & \cdots & +a_{nn}x_n \end{pmatrix}.$$

Найдем скалярное произведение:

$$(A\bar{x}, \bar{x}) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + & \cdots & +a_{1n}x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + & \cdots & +a_{nn}x_n \end{pmatrix} (x_1, \dots, x_n) =$$

$= (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)x_1 + \cdots (a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n)x_n$

$= a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n + \cdots + a_{n1}x_nx_1 + \cdots + a_{nn}x_n^2 =$

$= f(x_1, \dots, x_n).$

Таким образом, квадратичную форму $f(x_1, \dots, x_n)$ можно представить в виде $f(x_1, \dots, x_n) = (A\bar{x}, \bar{x})$, (43)

и, очевидно, каждой матрице A при помощи соотношения (43) можно поставить в соответствие квадратичную форму.

Определение 33. Матрица A называется положительно (отрицательно) определенной, если квадратичная форма $f(x) = (A\bar{x}, \bar{x})$ принимает положительное (отрицательное) значение: $(A\bar{x}, \bar{x}) > 0$, $((A\bar{x}, \bar{x}) < 0)$, для всех $\bar{x} \in R^n$, $\overline{x} \neq 0$.

Матрица A называется положительно (отрицательно) полуопределенной, если квадратичная форма $f(\bar{x}) = (A\bar{x}, \bar{x})$, принимает неотрицательные (неположительные) значения: $(A\bar{x}, \bar{x}) \geq 0, \big((A\bar{x}, \bar{x}) \leq 0\big)$, для всех $\bar{x} \in R^n$.

Матрица A называется неопределенной (знакопеременной), если квадратичная форма $f(\bar{x}) = (A\bar{x}, \overline{x})$ принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Пример 31. Рассмотрим матрицы $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Соответствующие им квадратичные формы имеют вид:

$(P\bar{x}, \bar{x}) = x_1^2 + x_2^2, (Q, \bar{x}, \bar{x}) = 0x_1^2 - x_2^2, (T\bar{x}, \bar{x}) = -x_1^2 + x_2^2, \bar{x} = (x_1, x_2) \in$
$\in R^2, \overline{x} \neq (0, 0).$

Тогда нетрудно увидеть (убедитесь в этом!), что матрица P является положительно определенной; матрица Q — отрицательно полуопределенной (не является при этом отрицательно определенной!); матрица T является неопределенной.

Определение 34. Рассмотрим функцию f, определенную на множестве $D \subset R^n$. Пусть в точке $\bar{x} \in D$ существуют частные производные второго порядка функции f. Тогда матрица

$$G(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\bar{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

называется матрицей Гессе функции f в точке $\bar{x}$.

(По имени немецкого математика Л. О. Гессе (1811-1874). Он ввел это понятие в 1848 г.)

Замечание 6. Если частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ непрерывны в точке $\bar{x}$, то матрица $G(x)$ обладает свойством: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x})$ (см. теорему о равенстве смешанных производных). В этом случае говорят, что матрица $G(x)$ симметрична.

Замечание 7. В случае, когда f является функцией одной переменной ($n = 1$), матрица Гессе состоит из одного элемента $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

Следующая теорема дает необходимое и достаточное условие выпуклости вверх (вниз) функции на множестве. Приведем ее без доказательства.

Теорема 19. *Пусть функция f имеет непрерывные частные производные второго порядка на выпуклом открытом множестве $D \subset R^n$. Для того, чтобы функция f была выпукла вниз (вверх) на D, необходимо и достаточно, чтобы матрица Гессе $G(\bar{x})$ функции f в точке $\bar{x}$ была положительно (отрицательно) полуопределена для любой точки $\bar{x} \in D$.*

Сформулируем достаточное условие строгой выпуклости вниз (вверх) функции на множестве.

Теорема 20. *Пусть функция f имеет непрерывные частные производные второго порядка на выпуклом открытом множестве $D \subset R^n$. Для того, чтобы функция f была строго выпукла вниз (вверх) на D, достаточно, чтобы матрица Гессе $G(x)$ была положительно (отрицательно) определена для любой точки $x \in D$.*

При практическом применении этих теорем возникает вопрос: как установить, является ли матрица положительно или отрицательно (полуопределенной) или же не обладает этими свойствами?

Положительную и отрицательную определенность матрицы можно установить при помощи критерия Сильвестра. (Д. Д. Сильвестр (1814-1897) был не только английским математиком, но и поэтом, остряком и, наряду с Лейбницем, наиболее выдающимся создателем новых терминов за всю историю математики).

Прежде чем сформулировать, сделаем ряд замечаний. Как следует из определения 33, тип квадратичной формы не зависит от переменных, в которых она записана. Поэтому, представив квадратичную форму в каноническом виде, сразу получаем следующие критерии для типа квадратичной формы в зависимости от множества собственных значений ее матрицы.

Тип квадратичной формы	Множество собственных значений
1. Положительно определенная $(\forall x \neq 0; f(x) > 0)$	Все собственные значения положительны $(\lambda_i > 0, i = \overline{1,n})$
2. Отрицательно определенная $(\forall \bar{x} \neq 0, f(\bar{x}) < 0)$	Все собственные значения отрицательны $\lambda_i < 0, i = \overline{1,n}$
3. Неопределенная (знакопеременная) $(\exists \bar{x}, f(\bar{x}) > 0, \exists(\bar{y}): f(\bar{y}) < 0)$	Есть собственные значения разных знаков $(\exists \lambda_i > 0, \exists \lambda_j < 0)$
4. Вырожденная $(\exists \bar{x}, f(\bar{x}) = 0)$	Есть нулевое собственное значение $(\exists \lambda_i = 0)$

Хотя эта таблица дает удобную характеристику типам квадратичных форм, ее использование для определения типа конкретной квадратичной формы связано с вычислением собственных значений матрицы A. Это достаточно трудоемкая операция. На самом деле во многих случаях тип квадратичной формы можно определить, не вычисляя собственных значений ее матрицы. Метод состоит в вычислении и проверке знаков некоторых миноров матрицы квадратичной формы. Пусть матрица квадратичной формы $f(\bar{x}) = (A\bar{x}, \bar{x})$ имеет вид: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$, где $a_{ij} = a_{ji},\ i,\ j = \overline{1,n}$.

Рассмотрим угловые миноры этой матрицы (будем также их называть главными): $\Delta_1 = a_{11}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

Как видим, угловой минор порядка k расположен на пересечении первых k строк и первых k столбцов матрицы. Угловой минор максимального n-го порядка представляет собой определитель матрицы.

Теорема (Критерий Сильвестра). *Для того, чтобы квадратичная форма от n переменных была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства:*

$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \dots, \Delta_n > 0.$

(Для того, чтобы квадратичная форма от n переменных была отрицательно определена, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства: $-\Delta_1 > 0, -\Delta_2 > 0, -\Delta_3 > 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0$; *(знаки угловых миноров чередуются, начиная с минуса).*

Невырожденная квадратичная форма может быть либо положительно определенной, либо отрицательно определенной, либо знакопеременной (неопределенной) — в зависимости от знаков коэффициентов в ее каноническом виде. Если нулевой угловой минор или один из угловых миноров четного порядка отрицателен, то эта квадратичная форма не является ни положительно, ни отрицательно определенной. То же можно утверждать и в случае, когда есть два угловых минора нечетного порядка с разными знаками. Значит, в этих случаях квадратичная форма знакопеременная.

Критерий Сильвестра и его следствия показывают, что тип квадратичной формы полностью определяется свойствами ее матрицы. Поэтому термины, введенные определением 33, можно перенести на симметричные матрицы. В частности, симметрическую матрицу A называют положительно (отрицательно) определенной и пишут $A > 0$ ($A < 0$), если положительно (отрицательно) определена соответствующая квадратичная форма.

Сформулируем критерий выпуклости и строгой выпуклости функции двух переменных на множестве.

Пусть функция $z = f(x_1, x_2)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка на открытом выпуклом множестве $D \subset R^n$. Рассмотрим точку $\bar{x} \in D$. Обозначим элементы матрицы Гессе $G(x)$ следующим образом:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x^0, y^0) = A, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x^0, y^0) = C, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = B.$$

1. Для того, чтобы функция $z = f(x_1, x_2)$ была выпукла вниз на множестве D, необходимо и достаточно, чтобы

$$A \geq 0, C \geq 0, A \cdot C - B^2 \geq 0 \tag{44}$$

для всех точек $(x^0, y^0) \in D$.

2. Для того, чтобы функция $z = f(x_1, x_2)$ была выпукла вверх на множестве D, необходимо и достаточно, чтобы

$$A \leq 0, C \leq 0, A \cdot C - B^2 \geq 0 \tag{45}$$

для всех точек, принадлежащих множеству D.

3. Для того, чтобы функция $z = f(x_1, x_2)$ была строго выпукла вниз на множестве D, достаточно чтобы

$$A > 0, A \cdot C - B^2 > 0 \tag{46}$$

для всех точек, принадлежащих множеству D.

4. Для того, чтобы функция $z = f(x_1, x_2)$ была строго выпукла вверх на множестве D, достаточно чтобы

$$A < 0, A \cdot C - B^2 > 0 \tag{47}$$

для всех точек, принадлежащих множеству D.

Если ни одно из четырех условий (44–47) не выполняется для всех точек, принадлежащих множеству D, то функция $z = f(x_1, x_2)$ не обладает свойством выпуклости и строгой выпуклости на D.

Пример 32. Рассмотрим функцию двух переменных $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Проверим, что f строго выпукла вниз на R^2.

Для этого найдем:

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 2x_2$, $\frac{\partial f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = 0$.

$A(x_1, x_2) = 2 > 0, A(x_1, x_2) \cdot C(x_1, x_2) - B(x_1, x_2) = 2 \cdot 2 - 0 = 4 > 0$ для всех точек $\bar{x} = (x_1, x_2) \in R^2$. Значит, функция $f(x_1, x_2)$ строго выпукла вниз на R^2.

§ 9. Производная функции по направлению. Градиент

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$. По определению частной производной функции f в точке (x_0, y_0) по переменной x мы фиксировали величину y_0 и придавали приращение переменной x. Можно сказать, что мы вычисляли производную функцию f «в направлении» оси Ox, и частная производная $\frac{\partial f}{\partial x}$ характеризует изменение функции f в направлении оси Ox.

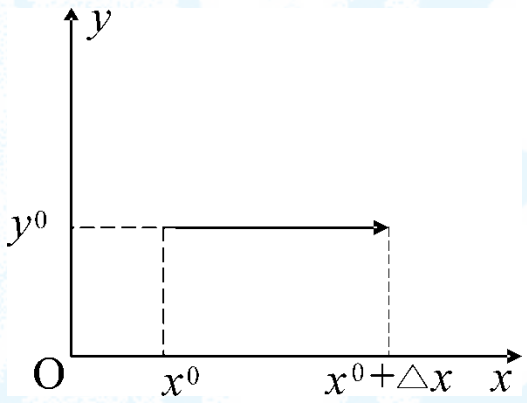


Рис. 6.19

В том же смысле можно сказать, что частная производная $\frac{\partial f}{\partial x}(x^0, y^0)$ — производная в направлении оси Oy. В практических задачах возникает вопрос: как меняется функция при изменении переменных в произвольном направлении? Пусть функция $f(x, y)$ определена в некоторой окрестности $O_\delta(M^0)$ точки $M^0 = (x^0, y^0) \in R^2$. Возьмем произвольный единичный вектор $l = (a, b), (|l| = 1)$ и число $h \neq 0$. Рассмотрим точку $M^1 = (x^1, y^1) = (x^0 + ah, y^0 + bh)$ (рис. 6.20). Пусть число h таково, что точка $M^1 \in O_\delta(M^0)$. Рассмотрим приращение функции f в точке M^0: $\Delta f(x^0, y^0) = f(x^1, y^1) - -f(x^0, y^0) = f(x^0 + ah, y^0 + bh) - f(x^0, y^0)$ вызванное приращением переменных $\Delta x = ah, \Delta y = bh$.

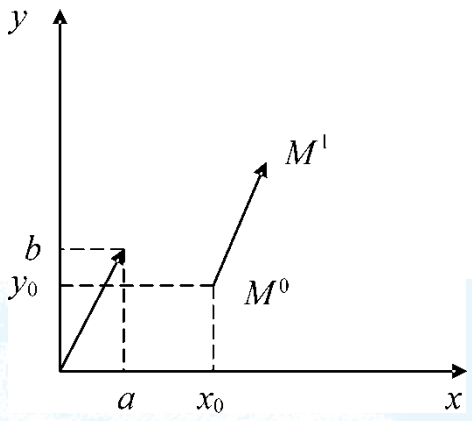


Рис. 6.20

Определение 35. Если существует предел

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x^0+ah,y^0+bh)-f(x^0,y^0)}{h},$$

то он называется производной функции f в точке $M^0=(x^0,y^0)$ по направлению вектора $\bar{l}=\{a,b\}$ и обозначается $\frac{\partial f}{\partial \bar{l}}(x^0,y^0)$: $\frac{\partial f}{\partial \bar{l}}(x^0,y^0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x^0+ah,y^0+bh)-f(x^0,y^0)}{h}$.

В случаях, когда $b=0$ или $a=0$, производная по направлению $\{a,b\}$ является производной по переменной x или по переменной y соответственно. Для вычисления производной по направлению используется следующая теорема. Обозначим α и β углы, которые образует вектор $\{a,b\}$ с положительными направлениями координатных осей. Тогда, поскольку $|\bar{l}|=1$, $\cos\alpha=a, \cos\beta=b$.

Теорема 21. *Если функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке (x^0,y^0), то в этой точке f имеет производную по любому направлению $\bar{l}=\{a,b\}$, при этом*

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x^0,y^0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x^0,y^0)\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0)\cos\beta.$$

Доказательство. Функция $f(x^0+ah,y^0+bh)$ — функция двух переменных x и y, каждая из которых является в свою очередь функцией одной переменной h: $x(h)=x^0+ah, y(h)=y^0+bh$, если $h=0, x(0)=x^0$, $y(0)=y^0$. По правилу вычисления производной сложной функции имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial h}(0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x^0,y^0)\cdot(x^0+ah)'_h+\frac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0)\cdot(y^0+bh)'_h=$$
$$=\frac{\partial f}{\partial x}(x^0,y^0)\cdot a+\frac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0)\cdot b=\frac{\partial f}{\partial x}(x^0,y^0)\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0)\cos\beta.$$

С другой стороны:

$$\frac{\partial f}{\partial h}(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x^0+ah,y^0+bh)-f(x^0,y^0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial \bar{l}}(x^0,y^0).$$

Отсюда и следует утверждение теоремы.

Следствие 2. Если функция $f(x,y)$ имеет в окрестности точки $M^0 = (x^0,y^0)$ частные производные, непрерывные в этой точке, то она имеет в M^0 производную по любому направлению. Доказательство следствия вытекает непосредственно из теорем 8 и 21.

Пример 33. Вычислим производную функции Кобба–Дугласа $Y = F(K,L) = AK^aL^{1-a}$, где, как обычно, $A > 0, a \in (0,1)$, по направлению $\bar{l} = (a,b)$ в произвольной точке (K^0,L^0), лежащей на луче, исходящем из начала координат и проходящем через точку (a,b).

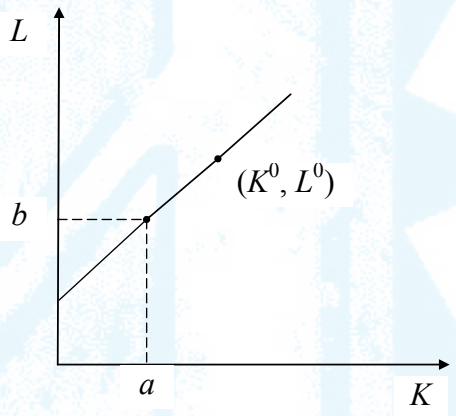


Рис. 6.21

$$\frac{\partial F}{\partial l}(K^0,L^0) = \frac{\partial F}{\partial K}(K^0,L^0)\cdot a + \frac{\partial F}{\partial L}(K^0,L^0)\cdot b = A\alpha\cdot\left(\frac{L^0}{K^0}\right)^{1-a} a +$$
$$+A(1-\alpha)(\frac{L^0}{K^0})^a b.$$

Заметим, что $\frac{K^0}{L^0} = \frac{a}{b}$, тогда $\frac{\partial F}{\partial l}(K^0,L^0) = A\alpha\left(\frac{b}{a}\right)^{1-\alpha}\cdot a +$
$$+A(1-\alpha)\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha}\cdot b = A\alpha b^{1-\alpha}a^{\alpha} + A(1-\alpha)a^{\alpha}b^{1-\alpha} = Aa^{a}b^{1-a}.$$

Таким образом, в данном случае $\frac{\partial F}{\partial l}$ не зависит от выбора точки (K^0,L^0) на указанном луче.

Определение 36. Вектор $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(M^0),\frac{\partial f}{\partial y}(M^0)\right)$ называется градиентом функции f в точке M^0 и обозначается $grad\, f(M^0)$ или $\nabla f(M^0)$.

Используя понятие скалярного произведения векторов, можно записать частную производную $\frac{df}{d\bar{l}}$ в виде: $\frac{\partial f}{\partial \bar{l}}(x^0, y^0) =$ $= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x^0, y^0), \frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0)\right)(a, b)$ или $\frac{\partial f}{\partial \bar{l}}(x^0, y^0) = grad\, f(x^0, y^0) \cdot \bar{l}$.

Таким образом, производная функции f в точке M^0 по направлению $\bar{l}$ равна скалярному произведению градиента f в точке M^0 на вектор $\bar{l}$.

Пусть φ — величина угла между векторами l и $grad\, f(M^0)$. Тогда, используя формулу скалярного произведения векторов, можно записать:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{l}}(M^0) = |grad\, f(M^0)| \cdot |\bar{l}| \cos\varphi = |grad\, f(M^0)| \cos\varphi, \qquad (48)$$

т. к. $|\bar{l}| = 1$.

Предположим, что $grad\, f(M^0) \neq 0$. Вычислим производную функции f в точке M^0 в направлении $\bar{l} = grad\, f(M^0)$. В этом случае $\varphi = 0$, значит, $\cos\varphi = 1$. Тогда $\frac{\partial f}{\partial l}(M^0) = |grad\, f(M^0)|$. (49)

Поскольку $cos\varphi \leq 1$, из (48) и (49) следует, что производная функция f по направлению $\bar{l}$ в точке M^0 достигает своего максимального значения, когда $\bar{l} = grad\, f(M^0)$. Заметим, что направление градиента — это единственное направление, по которому производная принимает максимальное значение, т. к. $\cos\varphi = 1$ только в случае, когда $\varphi = 0$.

Пример 34. Вычислим градиент линейной функции двух переменных $f(x, y) = ax + by$ в точке $M^0 = (x^0, y^0)$.

Для этого найдем частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = b$. Значит, $grad\, f(M^0) = (a, b)$. Таким образом, градиент функции $f(x, y)$ во всех точках области определения один и тот же. Заметим, что линия уровня функции f, соответствующей значению c, прямая, задаваемая уравнением $ax + by = c$. Из главы 5 известно, что вектор $\{a, b\}$ перпендикулярен этой прямой. Таким образом, градиент функции $f(x, y) = ax + by$ перпендикулярен линии уровня в любой ее точке. (Запомните этот вывод!)

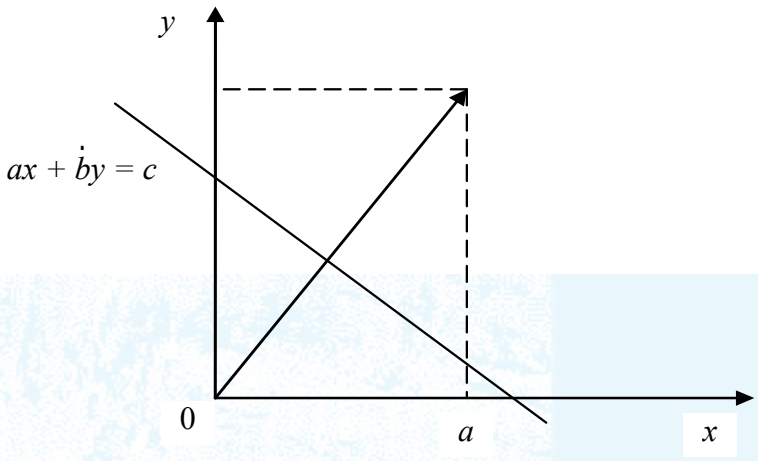


Рис. 6.22

Определения производной по направлению и градиента можно ввести аналогичным образом для функции любого числа переменных.

§ 10. Экстремумы функции нескольких переменных

Определение 37. Пусть функция f определена на множестве $D \in R^n$, точка x^0 — внутренняя точка множества D.

1. Точка x^0 называется точкой максимума (минимума) функции f, если существует такая окрестность $O_\varepsilon(x^0) \subset D$, что для всех $x \in O_\varepsilon(x^0)$ выполняется неравенство $f(\bar{x}) \leq f(x^0), [f(x) \geq f(x^0)]$, т. е. в точке максимума (минимума) x^0 функция принимает значение не меньше (не больше), чем во всех точках x из D, достаточно близких к x^0.

2. Точка x^0 называется точкой строгого максимума (строгого минимума) функции f, если существует такая проколотая ε-окрестность $\dot{O}_\varepsilon(x^0) \in D$, что для всех $x \in \dot{O}_\varepsilon(x^0)$ выполняется неравенство $f(x) < f(x^0), f(x) > f(x^0)$, т. е. в точке строгого максимума (минимума) x^0 функция принимает значение большее (меньшее), чем во всех точках x из D, отличных от x^0, достаточно близких к x^0.

Точки строгого максимума и строгого минимума функции называются точками строгого экстремума.

Теорема 22 (необходимое условие экстремума). *Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ определена в некоторой окрестности точки*

$x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in R^n$. *Предположим, что* x^0 *— точка экстремума функции* f. *Пусть в точке* x^0 *существует частная производная функция* f *по переменной* x_j. *Тогда:* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = 0$.

Доказательство. Пусть для определенности $i = 1$. Рассмотрим функцию одной переменной $g(x_1) = f(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Тогда по определению частной производной: $g'(x_1) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Точка $\dot{x}_1$ является, очевидно, точкой экстремума функции $g(x_1)$, следовательно, по теореме Ферма главы 3: $g'(x_1^0) = 0$, значит, $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0) = 0$.

Следствие 3. Если функция $f(x_1, \dots, x_n)$ имеет в точке экстремума частные производные по всем переменным, то градиент в этой точке равен нулю.

$$grad\, f(x^0) = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)(x^0), \dots, \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)(x^0)\right) = (0,0). \qquad (50)$$

Доказательство следствия вытекает непосредственно из теоремы 22.

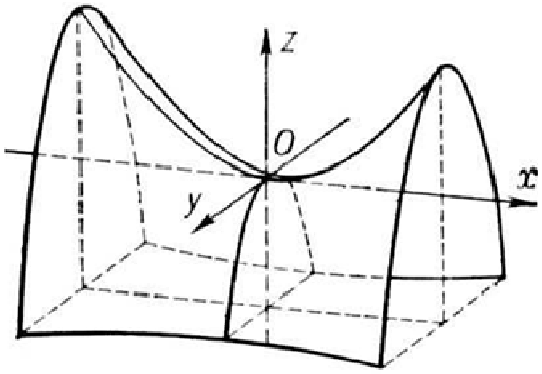
Определение 38. Точка x^0 называется стационарной точкой функции f.

Теорему 22 можно использовать при исследовании функции на экстремумы.

Следующий пример показывает, что условия (50) недостаточно для существования экстремума.

Пример 35. Рассмотрим функцию $f(x, y) = x^2 - y^2$. Частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y$ существуют во всей области определения f. Единственная точка, в которой они обращаются в нуль, это точка $O(0, 0)$. Значение функции в этой точке равно нулю: $f(0, 0) = 0$, то в любой окрестности точки $(0, 0)$ существуют точки, в которых функция f принимает положительные значения, и точки, в которых функция f принимает отрицательные значения. Действительно, возьмем $O_\varepsilon(0)$ — произвольную ε-окрестность точки O. Рассмотрим точки $(0, \frac{\varepsilon}{2})$ и $(\frac{\varepsilon}{2}, 0)$. Очевидно, что $(0, \frac{\varepsilon}{2}) \in O_\varepsilon(0)$ и $\left(\frac{\varepsilon}{2}, 0\right) \in O_\varepsilon(0), f\left(0, \frac{\varepsilon}{2}\right) = -\frac{\varepsilon^2}{4} < 0, f\left(\frac{\varepsilon}{2}, 0\right) = \frac{\varepsilon^2}{4} > 0$, значит, $O = (0,0)$ не является точкой экстремума функции f. Поскольку других стацио-

нарных точек функция f не имеет, то она вообще не имеет экстремумов. График этой функции:

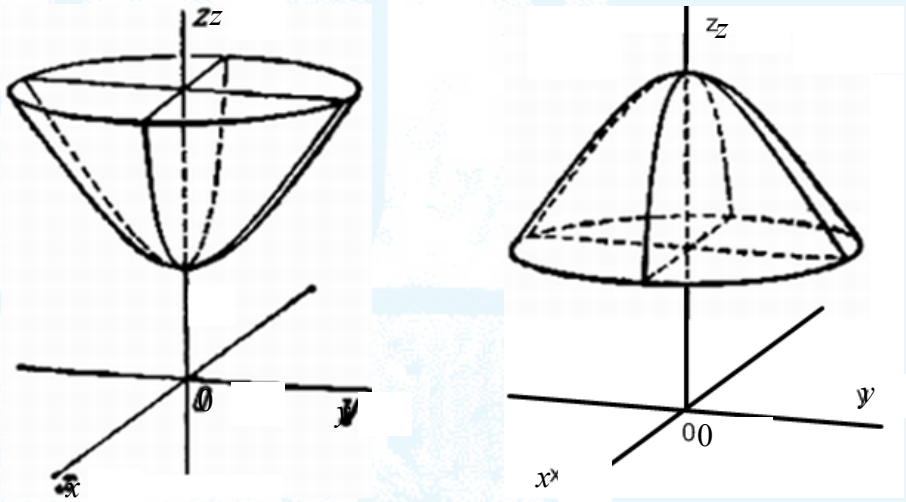


Гиперболический параболоид («Седло»)

Как следует непосредственно из определения, точка строгого экстремума является также точкой экстремума. Следовательно, если в некоторой точке не выполняются необходимые условия экстремума, то эта точка тем более не является точкой строгого экстремума.

Сформулируем достаточные условия строгого экстремума. Достаточные условия того, что в стационарной точке функция нескольких переменных имеет строгий экстремум, связаны со строгой выпуклостью функции в этой точке.

На рис. 6.23 (а, б) изображены графики функций двух переменных строго выпуклых вверх и вниз соответственно в окрестностях их стационарных точек. Эти функции имеют в своих стационарных точках экстремумы.



а) б)

Рис. 6.23

Приведем без доказательств следующие теоремы.

Теорема 23 (достаточное условие строгого экстремума).

Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ определена и имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой окрестности стационарной точки $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, т. е. точки, в которой $grad\, f(x^0) = 0$. Тогда для того, чтобы точка x^0 была точкой строгого максимума (строгого минимума) функции f, достаточно, чтобы функция f была строго выпукла вверх (вниз) в окрестности точки x^0.

Теорема 24 (достаточное условие строгого экстремума).

В условиях теоремы 23 для того, чтобы x^0 была точкой строгого максимума (строгого минимума) функции f, достаточно, чтобы $G(x^0)$ — матрица Гессе этой функции в точках x^0 была отрицательно (положительно) определена. Если матрица Гессе $G(x^0)$ неопределена, то в точке x^0 функция f экстремума не имеет.

Таким образом, учитывая критерий Сильвестра, имеем следующий алгоритм исследования стационарной точки на экстремум.

В случае функции двух переменных достаточное условие экстремума функции в сочетании с критерием Сильвестра приводит к очень простым правилам проверки.

Предположим, что функция $f(x, y)$ дважды дифференцируема в окрестности точки (x^0, y^0) и в этой точке выполнено необходимое условие экстремума функции, т. е. $f'_x(x^0, y^0) = f'_y(x^0, y^0) = 0$.

В точке (x^0, y^0) матрица Гессе $f''(x^0, y^0)$ функции $f(x, y)$, представляющая собой матрицу квадратичной формы $d^2 f(x^0, y^0)$, имеет вид: $f''(x^0, y^0) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x^0, y^0) & f''_{xy}(x^0, y^0) \\ f''_{yx}(x^0, y^0) & f''_{yy}(x^0, y^0) \end{pmatrix}$.

Для частных производных в фиксированной точке часто используют обозначения: $A = f''_{xx}(x^0, y^0)$, $B = f''_{xy}(x^0, y^0)$, $C = f''_{yy}(x^0, y^0)$. С помощью этих обозначений дифференциал второго порядка функции $f(x, y)$ в точке (x^0, y^0) и матрицу Гессе можно записать следующим образом: $d^2 f(x^0, y^0) = Adx^2 + 2Bdxdy + Cdy^2, f''(x^0, y^0) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$.

Применим к исследованию матрицы Гессе критерий Сильвестра. Согласно этому критерию, второй дифференциал $d^2 f(x^0, y^0)$ является

положительно определенной квадратичной формой, если $\Delta_1 = A > 0$ и $\Delta_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0$ второй дифференциал является отрицательно определенной, если $\Delta_1 = A < 0$ и $\Delta_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} < 0$. Он является знакопеременной формой, если $\Delta_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0$.

Используя полученные факты, можно сформулировать следующее правило:

1. Если $\Delta_1 = A > 0$ и $\Delta_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0$, то в точке (x^0, y^0) функция $f(x, y)$ имеет строгий локальный минимум.

2. Если $\Delta_1 = A < 0$ и $\Delta_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} < 0$, то в точке (x^0, y^0) функция $f(x, y)$ имеет строгий локальный максимум.

3. Если $\Delta_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} < 0$, то функция $f(x, y)$ не имеет в точке (x^0, y^0) экстремума.

Приведенные утверждения не охватывают случай $\Delta_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = 0$. В этом случае квадратичная форма $d^2 f(x^0, y^0)$ вырождена, но сохраняет знак, т. к. квадратичный трехчлен $d^2 f(x^0, y^0) = Adx^2 + 2Bdxdy + Cdy^2$ по переменному dx $(A \neq 0)$ или по переменному dy $(C \neq 0)$ имеет нулевой дискриминант и поэтому представляет собой полный квадрат.

Например, при $A \neq 0$ имеем: $Adx^2 + 2Bdxdy + Cdy^2 = A(dx + \frac{B}{A}dy)^2$ при $\Delta_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = 0$ функция может иметь в точке (x^0, y^0) локальный экстремум, а может не иметь его.

Следующий алгоритм несколько проясняет (уточняет) последнюю ситуацию.

Алгоритм исследования функции на экстремум в стационарной точке.

1. Проверить выполнения критерия Сильвестра. При выполнении критерия Сильвестра задача решена: если форма положительно определена, то в стационарной точке — строгий локальный минимум; если форма отрицательно определена, то — строгий локальный максимум. В противном случае смотрим, равен ли нулю определитель матрицы квадратичной формы Δ_n и переходим к шагу 2 или 3.

2. $\Delta_n = 0$.

Проверяем, выполнен ли «нестрогий критерий Сильвестра», т. е. критерий Сильвестра, в котором строгие неравенства заменены на нестрогие.

а) Если «нестрогий критерий Силвестра» выполнен, то вопрос об экстремуме в стационарной точке остается открытым. В этом случае следует найти собственные значения матрицы квадратичной формы и проанализировать их знаки в соответствии с таблицей.

б) Если «нестрогий критерий Сильвестра» не выполнен, то квадратичная форма неопределена и экстремума в стационарной точке нет.

3. $\Delta_n \neq 0$ (и критерий Сильвестра не выполнен). В этом случае квадратичная форма неопределена (знакопеременна) и экстремума нет.

Пример 36. Исследовать на экстремум функцию трех переменных $u = 3x^3 + y^2 + z^2 + 6xy - 2z + 1$.

Найдем частные производные 1^{-10} порядка: $\frac{\partial u}{\partial x} = 9x^2 + 6y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 6x, \frac{\partial u}{\partial z} = 2z - 2$. Решив систему $\begin{cases} 3x^2 + 2y = 0, \\ y + 3x = 0, \\ z - 1 = 0; \end{cases}$ найдем стационарные точки $(2; -6; 1)$ и $(0; 0; 1)$. Найдем частные производные 2-го порядка $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 18x, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 6, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0$. Матрица Гессе в данном случае имеет вид: $\begin{pmatrix} 18x & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. В точке $(2; -6; 1)$ ее угловые (главные) миноры $\Delta_1 = 18x, \Delta_2 = 36(x-1), \Delta_3 = 72(x-1)$ положительны, следовательно, в этой точке функция имеет минимум $u(2; -6; 1) = 12$.

Для исследования в точке $(0; 0; 1)$ нельзя использовать критерий Сильвестра, т. к. $\Delta_1 = 0$.

Это можно установить несколько иначе.

Воспользуемся предложенным алгоритмом: $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -72$, $\Delta_1 = 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -36 < 0$, т. е. критерий Сильвестра не выполнен, следовательно квадратичная форма неопределена и экстремума в стационарной точке нет. (Согласно предложенному алгоритму).

В самом деле, $u(0;0;1)=0$, а в сколь угодно малой окрестности точки $(0;0;1)$ функция принимает как положительные, так и отрицательные значения. Например, $u(\varepsilon;0;1)>0$, если $\varepsilon>0$, и $u(\varepsilon;0;1)<0$, если $\varepsilon<0$. (Такие точки являются трехмерными аналогами точек перегиба функций одной переменной).

Точку x^0 будем называть точкой строгого максимума (строгого минимума) функции f относительно множества E, если существует такая проколотая окрестность $\dot{O}_\varepsilon(x^0)$, что $f(x)<f(x^0), [f(x)>f(x^0)]$, для всех $x\in\dot{O}_\varepsilon(x^0)\cap E$, т. е. в x^0 — точке строго максимума (строгого минимума) относительно множества E функция принимает значение большее (меньшее), чем во всех точках x из E, отличных от x^0, достаточно близких к x^0.

Точки (строгого) максимума и точки (строгого) минимума функции f относительно множества E называют точками (строгого) экстремума относительно множества E.

Замечание 8. Если точка экстремума функции f относительно множества E является внутренней точкой множества E то, очевидно, это — точка обычного экстремума функции.

Замечание 9.

а) В случае когда $AC-B^2>0$, вид экстремума определяется по знаку A. Очевидно, что в данном случае знаки A и C совпадают, при этом ни A, ни C не могут быть равны нулю.

б) Из теоремы 19 следует, что достаточным условием строгой выпуклости вверх (вниз) функции f в некоторой окрестности точки x^0 является отрицательная (положительная) определенность матрицы Гессе $G(x)$ в любой точке этой окрестности. Однако в теореме 24 предполагается более слабое условие: отрицательная (положительная) определенность матрицы Гессе только в самой точке x^0. Оказывается отрицательной (положительной) определенности матрицы $G(x^0)$ достаточно для строгой выпуклости функции f в некоторой окрестности точки x^0, при условии непрерывности частных производных второго порядка функции f в окрестностях точки x^0. Поясним это для случая функции двух переменных. Пусть, например,

$$A=\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}^2}(x^0,y^0)>0, AC-B^2=\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}^2}(x^0,y^0)\cdot\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}^2}(x^0,y^0)-$$
$$-(\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}}(x^0,y^0))^2>0.$$

Тогда по теореме:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)>0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\right)^2>0 \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

для всех точек (x,y) из некоторой окрестности точки (x^0,y^0), значит, функция f строго выпукла вниз в данной окрестности точки (x^0,y^0).

§ 11. Формула Тейлора для функции двух переменных

Пусть функция $z=f(x,y)$ в окрестности некоторой точки $M^0(x^0,y^0)$ имеет непрерывные производные всех порядков до $(n+1)$-го включительно. Придадим x^0 и y^0 некоторые приращения Δx и Δy соответственно, причем так, чтобы прямолинейный отрезок, соединяющий точки (x^0,y^0) и $(x^0+\Delta x, y^0+\Delta y)$, целиком принадлежал рассматриваемой окрестности точки (x^0,y^0).

Покажем, что в этом случае имеет место следующее равенство:

$$\Delta f(x^0,y^0)=f(x^0+\Delta x,y^0+\Delta y)-f(x^0,y^0) = df(x^0,y^0)+ +\frac{1}{2!}d^2f(x^0,y^0) +\cdots+\frac{1}{n!}d^nf(x^0,y^0)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(\xi,\eta), \quad (51)$$

где ξ — точка, расположенная между x^0 и $x^0+\Delta x$, а η — между y^0 и $y^0+\Delta y$ ($\xi=x^0+\theta\Delta x, \eta=y^0-\theta\Delta y, 0<\theta<1$).

Для доказательства сделаем замену:

$$x=x^0+t\Delta x, y=y^0+t\Delta y, t\in[0,1] \quad (52)$$

Подставив эти значения x и y в функцию $f(x,y)$, получим сложную функцию от одного аргумента t: $F(t)=f(x^0+t\Delta x, y^0+t\Delta y)$.

Формулы (52) геометрически выражают прямолинейный отрезок, соединяющий точки $M^0(x^0,y^0)$ и $M^1(x^1,y^1)$, при этом точка $M^0(x^0,y^0)$ соответствует значению $t=0$, а точка $M^1(x^1,y^1)$ — значению $t=1$.

Теперь приращение $\Delta f(x^0,y^0)=f(x^0+\Delta x,y^0+\Delta y)-f(x^0,y^0)$ можно заменить равным ему приращением $\Delta F(0)=F(1)-F(0)$.

Но функция $F(t)$ является функцией от одной переменной и имеет производные до $(n+1)$-го порядка включительно. Следовательно, она может быть разложена по формуле Тейлора. Запишем это разложение в форме:

$$\Delta F(t^0) = d\,F(t^0) + \frac{1}{2!}d^2F(t^0) + \cdots + \frac{1}{n!}d^nF(t^0) +$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F(t^0 + \theta\Delta t), 0 < \theta < 1.$$

Отсюда получаем $F(0) = F(1) - F(0) = d\,F(0) + \frac{1}{2!}d^2F(0) + \cdots +$
$$+\frac{1}{n!}d^nF(0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F(\theta), 0 < \theta < 1. \qquad (53)$$

Заметим при этом, что дифференциал dt, входящий в различных степенях в правую часть (53) (т. е. содержащийся в выражениях $dF(0) = F'(0)dt, d^2F(0) = F''(0)dt^2, \ldots$), равен приращению $\Delta t = 1 - 0 = 1$.

Теперь с учетом проведенной (линейной) замены (52), а также принимая во внимание сделанное ранее замечание об инвариантности дифференциала любого порядка по отношению к линейной замене переменных, получаем:

$$dF(0) = f'_x(x^0, y^0)dx + f'_y(x^0, y^0)dy = df(x^0, y^0),$$
$$d^2F(0) = f''_{xx}(x^0, y^0)dx^2 + 2f''_{xy}(x^0, y^0)dxdy + f''_{yy}(x^0, y^0)dy^2 =$$
$$= d^2f(x^0, y^0),$$
$$\ldots$$
$$d^nF(0) = d^nf(x^0, y^0).$$

Наконец, для дифференциала $(n+1)$-го порядка $d^{n+1}F(\theta) = d^{n+1}f(x^0 + \theta\Delta x, y^0 + \theta\Delta y)$.

Отметим, что дифференциалы dx и dy (как и для независимых аргументов) равны приращениям Δx и Δy соответственно.

Действительно, учитывая (52) и то, что $dt = 1$, имеем

$$dx = x'_t dt = (x^0 + t\Delta x)'_t dt = \Delta x dt = \Delta x,$$
$$dy = y'_t dt = (y^0 + t\Delta y)'_t dt = \Delta y dt = \Delta y.$$

Теперь подставим выражения для $dF(0), d^2F(0), \ldots$ в (53):

$$\Delta f(x^0, y^0) = f(x^0 + \Delta x, y^0 + \Delta y) - f(x^0, y^0) = df(x^0, y^0) +$$
$$+\frac{1}{2!}d^2f(x^0 + \theta\Delta x, y^0 + \theta\Delta y), 0 < \theta < 1. \qquad (54)$$

Мы получили для функции $z = f(x, y)$ формулу Тейлора в дифференциальной форме. В развернутом виде она (даже для рассматриваемого случая функции двух аргументов) выглядит значительно сложнее.

Напишем формулу (54) с учетом того, что $dx = \Delta x, dy = \Delta y$, в развернутом виде, ограничившись только двумя членами разложения (т. е. при $n = 2$):

$$f(x,y) = f(x^0,y^0) + f'_x f(x^0,y^0)(x-x^0) + f'_y(x^0,y^0)(y-y^0) +$$
$$+\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(x^0,y^0)(x-x^0)^2 + 2f''_{xy}(x^0,y^0)(x-x^0)(y-y^0) +\right.$$
$$\left.+f''_{yy}(x^0,y^0)(y-y^0)^2\right] + \frac{1}{3!}\left[f'''_{xxx}(x^0+\theta\Delta x, y^0+\theta\Delta y)(x-x^0)^3 +\right.$$
$$+3\, f'''_{xxy}(x^0+\theta\Delta x, y^0+\theta\Delta y)(x-x^0)^2(y-y^0) + 3f'''_{xyy}(x^0 +$$
$$+\theta\Delta x, y^0+\theta\Delta y)(x-x^0)(y-y^0)^2 + f'''_{yyy}(x^0+\theta\Delta x, y^0 +$$
$$\left.+\theta\Delta y)\,(y-y^0)^3\right].$$

Это формула Тейлора для $z = f(x,y)$ при $n = 2$. Как видим, выглядит она в развернутом виде громоздко, хотя функция зависит только от двух переменных, и мы взяли всего два члена разложения.

Если в эту формулу положить $x^0 = y^0 = 0$, получим формулу Маклорена для функции двух переменных. Можно показать, что остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа для функции $z = f(x,y)$: $R(x,y) = \frac{1}{(n+1)!} d^{(n+1)} f(\xi,\eta)$ является при $(x,y) \to (x^0,y^0)$ бесконечно малой величиной более высокого порядка малости по сравнению с $\rho^n((x,y),(x^0y^0))$, где $\rho = \sqrt{(x-x^0)^2 + (y-y^0)^2}$, т. е. можно представить остаточный член $R(x,y) = O(\rho_n)$.

Пример 37. Функцию $f(x,y) = x^3 - 5x^2 - xy + y^2 + 10x + 5y - 4$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $(2,-1)$.

Найдем $f(2,-1) = 2^3 - 5\cdot 2^2 - 2\cdot(-1) + (-1)^2 + 10\cdot 2 + 5\cdot$ $\cdot(-1) - 4 = 2$. Вычислим последовательно частные производные данной функции и их значения в точке $(2,-1)$:

$f'_x(x,y) = 3x^2 - 10x - y + 10, f'_x(2,-1) = 3;$

$f'_y(x,y) = -x + 2y + 5, f'_y(2,-1) = 1;$

$f''_{xx}(x,y) = 6x - 10, f''_{xx}(2,-1) = 2;$

$f''_{yy}(x,y) = 2, f''_{yy}(2,-1) = 2;$

$f'''_{xxx}(x,y) = 6, f'''_{xxx}(2,-1) = 6.$

Все последующие производные тождественно равны нулю. По формуле Тейлора получаем искомое разложение: $f(x,y) = 2 + +3(x-2) + (y+1) - (x-2)^2 - (x-2)(y+1) + (y+1)^2 + (x-2)^3$.

С помощью формулы Тейлора для функции двух независимых переменных находят приближенные значения функции в точке, а также исследуют функции двух переменных на экстремум.

§ 12. Условный экстремум функции нескольких переменных

При отыскании экстремумов функции $z = f(x,y)$ часто необходимо найти их точки не на всей области определения $D(f)$, а только на некотором ее подмножестве, например на линии $\Gamma \subset D(f)$. Таким образом, ставится задача отыскания на линии Γ точки (x^0, y^0), в которой значение функции является наибольшим или наименьшим по сравнению с ее значениями в точках линии Γ, находящихся вблизи точки (x^0, y^0). Такие точки называются точками условного экстремума функции $f(x,y)$ на линии Γ.

В отличие от обычной (безусловной) точки экстремума, значения функции в точке условного экстремума сравниваются с ее значениями не во всех точках некоторой окрестности точки (x^0, y^0), а только в тех ее точках, которые лежат на линии Γ.

Следующий пример иллюстрирует понятие условного экстремума функции и отличие этого понятия от локального экстремума.

Пример 38. Пусть требуется найти экстремум функции $z = x^2 + y^2$ при условии, что переменные x и y удовлетворяют уравнению $x + y - 1 = 0$, которое называют уравнением (условием) связи. Уравнение $x + y - 1 = 0$ в R^3 определяет плоскость, параллельную оси Oz и пересекающую плоскость Oxy по прямой Γ.

Функция $z = x^2 + y^2$ определена на всей числовой плоскости R^2, а ее экстремумы требуется найти только среди тех точек плоскости, которые лежат на прямой Γ: $x + y - 1 = 0$.

Из уравнения связи находим $y = 1 - x$. Подставляя это выражение в уравнение $z = x^2 + y^2$, получаем функцию $z = 2x^2 - 2x - 1$ одной переменной x.

Таким образом, задача свелась к задаче отыскания безусловных локальных экстремумов функции одной переменной. Найдем точки локальных экстремумов, лежащих на линии *Г*. Так как $z'_x = 4x - 2$, то $x_0^0 = \frac{1}{2}$ — критическая точка $\left(4x - 2 = 0 \text{ при } x = \frac{1}{2}\right)$.

Она является точкой локального минимума, поскольку $z''\left(\frac{1}{2}\right) = 4 > 0$ (см. второе достаточное условие экстремума для функции одной переменной), т. е. $z_{min}|_{x^0=1/2} = \frac{1}{2}$. Следовательно, функция $z = x^2 + y^2$ при условии $x + y - 1 = 0$ имеет условный локальный минимум $z = \frac{1}{2}$ в точке $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Из рис. 6.24 непосредственно видно, что на поверхности параболоида вращения $z = x^2 + y^2$ безусловный минимум равен 0 и достигается в точке $O(0, 0)$, т. е. он не совпадает с точкой $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ условного минимума, лежащей на прямой $x + y - 1 = 0$.

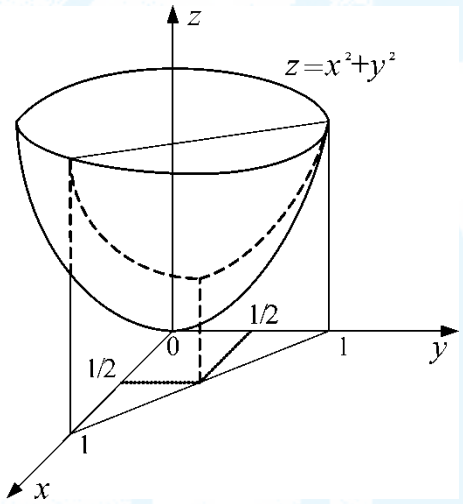


Рис. 6.24

В этом примере мы рассмотрели один из способов решения задачи нахождения условного экстремума. Этот способ состоит в решении уравнения связи относительно одной из переменных и в последующей подстановке этой переменной в функцию f.

Таким образом, мы сводим задачу к нахождению обычного локального экстремума функции одной переменной. Однако этот метод не всегда применим, т. к. уравнение связи не всегда удается решить относительно одной из переменных. Следующий метод позволяет найти условный экстремум, не решая уравнение связи.

§ 13. Метод множителей Лагранжа

Рассмотрим задачу нахождения условного экстремума функции $f(x, y)$ при уравнении связи $\varphi(x, y) = 0$ (55)
на следующем примере. Предположим, что линия уровня функции $f(x, y)$, соответствующая значениям $c_1, c_2, \dots, c_k$, имеет такой вид, как на рис. 6.25.

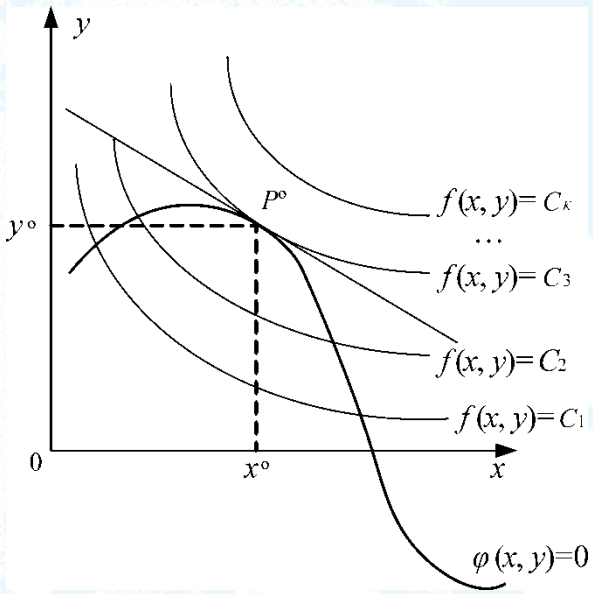


Рис. 6.25

Пусть $c_1 < c_2 < \dots < c_k$, причем, если линия уровня $f(x, y) = c$ лежит между линиями уровня $f(x, y) = c_i$ и $f(x, y) = c_{i+1}$, то $c_i < c < c_{i+1}$ $(1 \le i \le k - 1)$.

Найдем самое большое число c такое, что линия уровня $f(x, y) = c$ имеет общие точки с линией уровня $\varphi(x, y) = 0$, т. е. с множеством $E = \{(x, y) | \varphi(x, y) = 0\}$.

Рис. 6.25 показывает, что такое c соответствует линии уровня функции $f(x, y)$, касающейся множества E в точке $P^0(x^0, y^0)$.

Следовательно, в точке P^0 функция f достигает большего значения, чем во всех остальных точках множества E, достаточно близких к P^0. Иными словами, функция f имеет в точке P^0 строгий условный экстремум (строгий условный максимум).

Предположим, что функции f и φ имеют непрерывные частные производные в окрестности точки $P^0(x^0, y^0)$, при этом $grad\ \varphi(x^0, y^0) = \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x^0, y^0), \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x^0, y^0)\right\} \neq (0, 0)$.

Точка касания $P^0(x^0, y^0)$ двух кривых — это точка, в которой кривые имеют общую касательную l.

Выше (см. пример 34) было отмечено, что градиент функции в точке перпендикулярен касательной к линии уровня, проходящей через эту точку. Значит, градиенты функций f и φ в точке P^0 перпендикулярны общей касательной l. Следовательно, вектор $grad\, f(x^0, y^0)$ коллинеарен вектору $grad\, \varphi(x^0, y^0)$. Это условие можно записать следующим образом $grad\, f(x^0, y^0) = \lambda^0\, grad\, \varphi(x^0, y^0)$, (56)
где λ^0 — некоторое число.

Значит, для отыскания точки (x^0, y^0) относительного экстремума нужно найти точки, удовлетворяющие (55), в которых выполняется (56).

Запишем (56) в виде:

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(x^0, y^0), \frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0)\right\} = \lambda^0 \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x^0, y^0), \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x^0, y^0)\right\}$$

или

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x^0, y^0) - \lambda^0 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x^0, y^0) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0) - \lambda^0 \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x^0, y^0) = 0. \end{cases} \tag{57}$$

Таким образом, (57) — необходимое условие того, что точка (x^0, y^0) является точкой относительного экстремума функции $f(x, y)$ при уравнении связи $\varphi(x, y) = 0$.

Сформулированное необходимое условие можно записать при помощи функции $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda\, \varphi(x, y)$, называемой *функцией Лагранжа*. Функция $L(x, y, \lambda)$ определена на множестве $D \subset R^1$. Переменная λ называется *множителем Лагранжа*.

Используя функцию Лагранжа, можно записать условия (55) и (57) следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x^0, y^0, \lambda^0) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x^0, y^0, \lambda^0) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x^0, y^0, \lambda^0) = 0. \end{cases} \tag{58}$$

Иными словами, если (x^0, y^0) — точка условного экстремума функции $f(x, y)$ при условии (55), то (x^0, y^0, λ^0) — стационарная точка функции $L(x, y, \lambda)$.

Соотношения (58) дают необходимые, но не достаточные условия того, что в точке x^0 функция f имеет условный экстремум при уравнении связи (55).

Достаточные условия сформулированы в следующей теореме. Приведем ее без доказательства.

Теорема 25. *Пусть точка $P^0(x^0, y^0, \lambda^0)$ является стационарной точкой функции Лагранжа $L(x, y, \lambda)$. Предположим, что в окрестности точки (x^0, y^0) существуют непрерывные частные производные второго порядка функций f и φ. Обозначим $A = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x^0, y^0, \lambda^0)$, $C = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x^0, y^0, \lambda^0)$, $B = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x^0, y^0, \lambda^0)$. Тогда если $AC - B^2 > 0$, то точка (x^0, y^0) — точка строгого условного экстремума функции $f(x, y)$ при уравнении связи $\varphi(x, y) = 0$, при этом если $A > 0$, то (x^0, y^0) — точка строгого условного минимума, если $A < 0$, то точка строгого условного максимума.*

Замечание 10. В последней теореме по сути идет речь (изучается) знак дифференциала второго порядка функции Лагранжа для стационарной точки (точек, если их несколько). Пусть $P^0(x^0, y^0), \lambda^0$ — любое из решений системы (58), тогда условия теоремы можно записать в виде определителя:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(P^0) & \varphi'_y(P^0) \\ \varphi'_x(P^0) & L''_{xx}(P^0,\ \lambda^0) & L''_{xy}(P^0,\ \lambda^0) \\ \varphi'_y(P^0) & L''_{xy}(P^0,\ \lambda^0) & L''_{yy}(P^0,\ \lambda^0) \end{vmatrix}.$$

Если $\Delta < 0$, то функция $f(x, y)$ имеет в точке $P^0(x^0, y^0)$ условный максимум, если $\Delta > 0$, то функция $f(x, y)$ имеет в точке $P^0(x^0, y^0)$ условный минимум.

Пример 39. Найти условный экстремум функции $z = x + 2y$ при $x^2 + y^2 = 5$.

Решение. Составим функцию Лагранжа: $L(x, y, \lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$. Имеем $\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\,\lambda x, \frac{\partial L}{\partial y} = 2 + 2\lambda y$. Система (58) принимает вид:

$$\begin{cases} 1 + 2\,\lambda x = 0, \\ 2 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

Она имеет два решения: $x_1 = -1,\ y_1 = -2,\ \lambda_1 = \frac{1}{2};\ x_2 = 1,$ $y_2 = 2, \lambda_2 = -\frac{1}{2}$ (Убедитесь в этом!). Так как $A = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda;$ $B = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0; C = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda$, то $d^2L = 2\lambda(dx^2 + dy^2)$.

При $\lambda = \frac{1}{2}$ $d^2L > 0$, поэтому функция имеет условный минимум в точке $P^1(-1,-2)$ и $z_{min}|_{\substack{x=-1\\y=-1}} = -5$.

При $\lambda = -\frac{1}{2}$ $d^2L < 0$, поэтому функция имеет условный максимум в точке $P^2(1,2)$ и $z_{max}|_{\substack{x=1\\y=2}} = 5$.

Или иначе:

$\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 5, \varphi'_x = 2x, \varphi'_y = 2y, \varphi'_x(-1,-2) = -2,$

$\varphi'_y(-1,-2) = -4,\ L''_{xx} = 1,\ L''_{xy} = 0,\ L''_{yy} = 1$ при $\lambda = \frac{1}{2}$.

Следовательно,

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -16 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(1)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -16 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 16 - (-4) = 20 > 0,$$

т. е. функция имеет условный минимум в точке $P^1(-1,-2)$.

Совершенно аналогично для точки $P^2(1,2)$

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -20 < 0 \text{ (Проверьте!)},$$

т. е. точка $P^2(1,2)$ — точка условного максимума.

§ 14. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции, имеющей частные производные во внутренних точках ограниченного замкнутого множества

Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ определена и непрерывна на замкнутом ограниченном на множестве D. Существуют точки $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ и $x' = (x'_1, \dots, x'_n)$ из множества D, в которых f принимает наибольшее и наименьшее значения соответственно. Рассмотрим, например, точку

x^0. Эта точка может быть либо внутренней, либо граничной точкой множества D. Если x^0 — внутренняя точка, то по определению это означает, что у точки x^0 существует ε-окрестность $O_\varepsilon(x^0) \subset D$. При этом $f(x^0) \geq f(x)$ для всех $x \in O_\varepsilon(x^0)$. Следовательно, в точке x^0 функция имеет максимум.

Если x^0 — граничная точка множества D, то, очевидно, она является точкой максимума функции f относительно границы множества D. Таким образом, чтобы найти наибольшее значение f на множестве D, нужно найти все внутренние точки D, в которых фунция f имеет максимум, а также все точки на границе D, в которых функция f имеет относительный максимум, вычислить значения функции в найденных точках и выбрать среди них наибольшее. Аналогичные рассуждения можно провести относительно точки x'.

Приведем примеры задачи, которую можно решить этим способом.

Пример 40. Определим наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ на множестве $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Множество D является кругом с центром в точке $O = (0,0)$ радиуса, равного 1 (рис. 6.26).

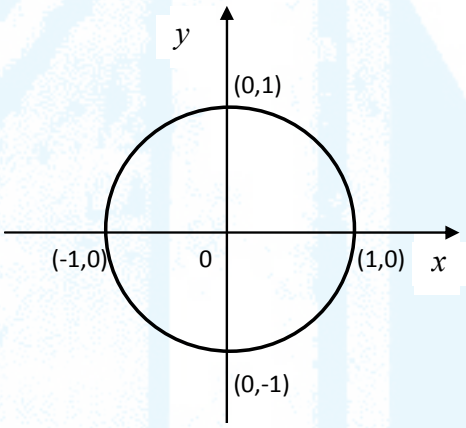


Рис. 6.26

1. Найдем стационарные точки функции f. Для этого решим системы уравнений: $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}, \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}.$

Система имеет единственное решение $(x^0, y^0) = (0, 0)$, оно, очевидно, содержится в множестве D. Вычислим значения функции f в полученной точке:

$z^0 = f(x^0, y^0) = 0.$

2. Исследуем функцию на границе области — на окружности. Для этого решим задачу нахождения относительно экстремума функции f при уравнении связи $x^2+y^2=1$. Составим функцию Лагранжа: $\Phi(x,y,\lambda)=x^2-y^2-\lambda(x^2+y^2-1)$ и найдем ее стационарные точки — решение системы уравнений:

$$\begin{cases}\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y,\lambda)=0\\ \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y,\lambda)=0,\\ \frac{\partial\Phi}{\partial \lambda}(x,y,\lambda)=0\end{cases} \text{или} \begin{cases}2x-2\lambda x=0\\ -2y-2\lambda y=0\\ -(x^2+y^2-1)=0\end{cases}.$$

Эта система имеет четыре решения: $M^1=(0,1,-1)$, $M^2=$ $=(0,-1,-1)$, $M^3=(1,0,1)$, $M^4=(-1,0,1)$.

Вычислим значения функции f в соответствующих решениям точках $f(0,1)=f(0,-1)=-1$, $f(1,0)=f(-1,0)=1$.

Таким образом, мы получили пять точек из множества D. Наибольшего значения, равного 1, функция f достигает в точках $(1,0)$ и $(-1,0)$, наименьшего значения, равного –1, функция f достигает в точках $(0,1)$ и $(0,-1)$.

Пример 41. Найти локальные экстремумы функции $z=xy+\frac{50}{x}+$ $+\frac{20}{y}$, $x\neq 0$, $y\neq 0$.

Алгоритм (схема) решения.

1. Находим первые частные производные и приравниваем их к нулю (проверяем необходимое условие).

2. Решаем полученные уравнения и находим точки, подозреваемые на экстремум (стационарные точки).

3. Вычисляем вторые частные производные в точках, подозреваемых на экстремум.

4. Проверяем выполнение достаточных условий.

Решение.

1. Находим первые частные производные и приравниваем их к нулю: $\frac{\partial z}{\partial x}=y-\frac{50}{x^2}=0, \frac{\partial z}{\partial y}=x-\frac{20}{y^2}=0.$

2. Решаем эту систему $\begin{cases}y-\frac{50}{x^2}=0,\\ x-\frac{20}{y^2}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2y=50,\\ xy^2=20.\end{cases}$

После почленного деления первого уравнения на второе (обоснуйте законность этой операции!) имеем $\frac{x}{y} = \frac{5}{2}$. Отсюда $y = 0{,}4x$. Подставляем $y = 0{,}4x$ в уравнение $x^2y = 50$ и решаем его: $0{,}4x^3 = 50$, $x^3 = 125$, $x = 5$, $y = 0{,}4 \cdot 5 = 2$. Таким образом, точка $(x^0, y^0) = (5, 2)$ — точка, подозреваемая на экстремум.

3. Находим вторые производные и вычисляем значения их в критической точке $(5, 2)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x} = \frac{100}{x^3};\ \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x}\right|_{(5,2)} = \frac{100}{125} = \frac{4}{5};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial y} = \frac{40}{y^3};\ \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial y}\right|_{(5,2)} = \frac{40}{8} = 5$$

4. Находим $AC - B^2 = \frac{4}{5} \cdot 5 - 1^2 = 3 > 0, A = \frac{4}{5} > 0$ функция имеет в точке $(5, 2)$ минимум, равный $z_{min} = z(5, 2) = 5 \cdot 2 + \frac{50}{5} + \frac{20}{2} =$
$= 10 + 10 + 10 = 30.$

§ 15. Наибольшее и наименьшее значения функции (глобальный экстремум)

Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ определена на множестве $D \in R^n$, точка $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in D$. Говорят, что функция f принимает в точке x^0 наибольшее (наименьшее) на множестве D значение, если: $f(x_1, \dots, x_n) \le f(x_1^0, \dots, x_n^0)$ $[f(x_1, \dots, x_n) \ge f(x_1^0, \dots, x_n^0)]$ для всех $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$.

Задачи нахождения наибольших и наименьших значений функции f на множестве D весьма разнообразны. Существуют различные способы их классификации и методы их решения. Здесь мы ограничимся рассмотрением лишь некоторых задач, относящихся к двум типам.

Типовые задачи и алгоритмы их решения

1. Постановка задачи. *Найти частные производные до второго порядка включительно функции* $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Алгоритм решения.

1. При нахождении частных производных функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по переменной x_k фиксируем остальные переменные и дифференцируем f как функцию одной переменной x_k.

2. Частные производные высших порядков вычисляются аналогично последовательным дифференцированием.

Пример 42.

Найти частные производные до второго порядка включительно функции $z = x^y$ $(x > 0)$.

Решение.

1. Для того, чтобы найти частную производную по x, фиксируем y и дифференцируем функцию $z = x^y$ как функцию одной переменной x (считаем y каким-либо числом!).

Используя формулу для производной степенной функции, получим $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$.

Аналогично, при нахождении производной по y, фиксируем x и дифференцируем функцию $z = x^y$ как функцию одной переменной y (используя формулу показательной функции) $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$.

2. Частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial y}$ вычисляем, дифференцируя $\frac{\partial z}{\partial x}$ (по x при фиксированном y) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (yx^{y-1})'_x = y(y-1)x^{y-2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial y} = (x^y \ln x)'_y = x^y ln^2 x$; частную производную $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ или $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, дифференцируя $\frac{\partial z}{\partial x}$ по y (при фиксированном x) или $\frac{\partial z}{\partial y}$ по x (при фиксированном y) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (yx^{y-1})'_y = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x$.

2. Постановка задачи. *Найти градиент функции $u = f(x, y, z)$ в точке $M^0(x^0, y^0, z^0)$.*

Алгоритм решения.

Напомним, градиент функции $f(x, y, z)$ — это вектор, координаты которого в базисе $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$ являются частными производными функции $f(x, y, z)$, т. е. $grad\ f = \frac{\partial f}{\partial x}\bar{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\bar{k} = \left\{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right\}$.

1. Находим частные производные функции $f(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$.

2. Вычисляем частные производные функции $f(x,y,z)$ в точке $M^0(x^0,y^0,z^0)$.

3. Вычисляем градиент $u=f(x,y,z)$ в точке (x^0,y^0,z^0): $grad\ f|_{M^0}=\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(x^0,y^0,z^0),\frac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0,z^0),\frac{\partial f}{\partial z}(x^0,y^0,z^0)\right\}$.

Пример 43.

Найти градиент функции $u=x^2-arctg(y+z)$ в точке $M^0(2,1,1)$.

Решение.

1. Находим частные производные функции $u=x^2-arctg(y+z)$: $\frac{\partial f}{\partial x}=2x$; $\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{1}{1+(y+z)^2}$; $\frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{1}{1+(y+z)^2}$.

2. Вычисляем частные производные функции $u=x^2-arctg(y+z)$ в точке $M^0(2,1,1)$: $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1,1)=4,\frac{\partial f}{\partial y}(2,1,1)=-\frac{1}{5},\frac{\partial f}{\partial z}(2,1,1)=-\frac{1}{5}$.

3. Вычисляем градиент функции $u=x^2-arctg(y+z)$ в точке $M^0(2,1,1)$:

$$grad\ f|_{(2,1,1)}=4\bar{\imath}-\frac{1}{5}\bar{\jmath}-\frac{1}{5}\bar{k}=\left\{4;\ -\frac{1}{5};\ -\frac{1}{5}\right\}.$$

3. Постановка задачи. *Найти производную функции $u(x,y,z)$ в точке $A(x_1,y_1,z_1)$ по направлению к точке $B(x_2,y_2,z_2)$.*

Алгоритм решения.

1. Если функция $u(x,y,z)$ дифференцируема в точке $A(x_1,y_1,z_1)$, то в этой точке существует ее производная по любому направлению $\vec{l}$, определяемая формулой $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_A=\left(grad\ u|_A,\overrightarrow{l_0}\right)$, (59)

где $grad\ u=\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right\},\overrightarrow{l_0}=\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}$.

2. Находим координаты вектора $\vec{l}$. В данном случае $\vec{l}=\overrightarrow{AB}=$ $=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-,z_1\}$.

3. Находим единичный вектор (орт) $\overrightarrow{l_0}$:

$$\overrightarrow{l_0}=\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}=\frac{\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-,z_1\}}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-,z_1)^2}}.$$

4. Вычисляем частные производные и градиент функции $u(x, y, z)$ в точке $A(x_1, y_1, z_1)$:

$grad\ u|_A = \{u'_x(x_1, y_1, z_1), u'_y(x_1, y_1, z_1), u'_z(x_1, y_1, z_1)\}$.

5. Вычисляем скалярное произведение в формуле (57), получаем ответ.

Пример 44. Найти производную функции $u = x^2 - arctg(y + z)$ в точке $A(2, 1, 1)$ по направлению к точке $B(2, 4, -3)$.

Решение.

1. Так как функция $u = x^2 - arctg(y + z)$ дифференцируема в точке $A(2, 1, 1)$, то в этой точке существует ее производная по любому направлению $\vec{l}$, которая определяется формулой (57).

2. Находим координаты вектора $\vec{l}$. В данном случае $\vec{l} = \overrightarrow{AB} = \{0, 3, -4\}$.

3. Находим единичный вектор (орт) $\overrightarrow{l_0}$: $\overrightarrow{l_0} = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = \frac{\{0,3,-4\}}{\sqrt{0^2+3^2+(-4)^2}} = \left\{0, \frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right\}$.

4. Вычисляем частные производные функции $u = x^2 - arctg(y + z)$ в точке $A(2, 1, 1)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(2,1,1)} = 2x|_{(2,1,1)} = 4,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(2,1,1)} = -\left.\frac{1}{1+(y+z)^2}\right|_{(2,1,1)} = -\frac{1}{5},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(2,1,1)} = -\left.\frac{1}{1+(y+z)^2}\right|_{(2,1,1)} = -\frac{1}{5}.$$

Тогда $grad\ u|_{(2,1,1)} = \left\{-4, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right\}$.

5. Подставляя полученные значения в формулу (1) и вычисляя скалярное произведение, получим $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(2,1,1)} = \left(grad\ u|_{(2,1,1)}, \overrightarrow{l_0}\right) = 4 \cdot 0 + \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \frac{3}{5} + \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{25}$.

Ответ: $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(2,1,1)} = \frac{1}{25}$.

4. Постановка задачи. *Найти производные* z'_x *и* z'_y *функции* $z = z(u, v)$, *где* $u = u(x, y)$ *и* $v = v(x, y)$.

Алгоритм решения.

Поскольку z является сложной функцией двух переменных x и y, то ее производные z'_x и z'_y вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \tag{60}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}. \tag{61}$$

1. Вычисляем частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

2. Подставляем полученные результаты в формула (60) и (61) и записываем ответ.

Замечание 11. Формулы (60) и (61) можно обобщить на функции любого числа переменных. Например, если дана функция $f(u, v, w)$, где $u = u(x, y, t), v = v(x, y, t)$ и $w = w(x, y, t)$, то ее частные производные f'_x, f'_y, f'_t вычисляются по формулам $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial t}$.

Пример 45. Найти производные z'_x и z'_y функции $z = \frac{u}{v}$, где $u = x^y$ и $v = \sqrt{xy}$.

Решение.

1. Вычисляем частные производные $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{v}$, $\frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}$.

2. Подставляя полученные результаты в формулы (59) и (60), получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{v} \cdot yx^{y-1} - \frac{u}{v^2} \cdot \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{v} \cdot x^y \ln x - \frac{u}{v^2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}.$$

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{v} \cdot yx^{y-1} - \frac{u}{v^2} \cdot \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{v} \cdot x^y \ln x - \frac{u}{v^2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}$, где $u = x^y, v = \sqrt{xy}$.

5. Постановка задачи. *Найти производную функции* $y = y(x)$, *заданной неявно уравнением* $F(x, y) = 0$. (62)

Алгоритм решения.

Если при каждом фиксированном x, принадлежащем некоторой области D, уравнение (62) имеет *единственное* решение y, принадле-

жащее некоторой области E, то уравнение (62) задает функцию $y = y(x)$ с областью определения D и областью значений E.

Если в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0 = y(x_0))$ функция $F(x, y)$ дифференцируема и $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, то уравнение (62) определяет функцию $y = y(x)$, дифференцируемую в точке x_0, причем ее производная определяется формулой $y'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}$. (63)

1. Вычисляем частные производные $F'_x(x, y)$ и $F'_y(x, y)$ в точке (x_0, y_0), где y_0 есть корень уравнения $F(x_0, y) = 0$.

2. Находим $y'(x_0)$ по формуле (63) и записываем ответ.

Замечание 12. Аналогично вычисляются частные производные функций нескольких переменных, заданных неявно. Например, если уравнение $F(x, y, z) = 0$ задает функцию $z = z(x, y)$, то при известных условиях функция $z = z(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) и ее частные производные определяются формулами:

$$z'_x(x_0, y_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}, z'_y(x_0, y_0) = -\frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)},$$

где z_0 есть корень уравнения $F(x_0, y_0, z_0) = 0$.

Пример 46. Найти производную функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = arctg\frac{y}{x}$. (64)

Решение.

1. В данном случае $F(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2} = arctg\frac{y}{x}$. Вычисляем ее частные производные:

$$F'_x = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{x+y}{x^2+y^2}, F'_y = \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{y-x}{x^2+y^2}.$$

Очевидно, что $F(x, y), F'_x, F'_y$ непрерывны при всех $x \neq 0$ и $F'_y \neq 0$ при всех $x \neq y$. Следовательно, уравнение (64) определяет функцию $y(x)$, дифференцируемую во всех точках (x_0, y_0) области, где $x \neq 0$ и $x \neq y$.

2. Находим y' по формуле (63)

$$y' = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)} = -\frac{(x_0 + y_0)/(x_0^2 + y_0^2)}{(y_0 - x_0)/(x_0^2 + y_0^2)} = \frac{x_0 + y_0}{(x_0 - y_0)}.$$

Ответ: $y' = \frac{x_0+y_0}{(x_0-y_0)}$ при всех x_0, y_0, удовлетворяющих уравнению (64), в области, где $x \neq 0$ и $x \neq y$.

6. Постановка задачи. *Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением* $F(x, y, z) = 0$, *в точке* $M(x_0, y_0, z_0)$.

Алгоритм решения.

Нормальный вектор к поверхности, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$, в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ определяется формулой $\vec{n} = grad\ F|_M = \left\{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_M, \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_M, \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_M\right\}$.

Следовательно, уравнение касательной плоскости к данной поверхности в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ есть

$$F'_x|_M(x - x_0) + F'_y|_M(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z|_M(z - z_0) = 0 \qquad (65)$$

и уравнения нормали — $\frac{x-x_0}{F'_x|_M} = \frac{y-y_0}{F'_y|_M} = \frac{z-z_0}{F'_z|_M}$. (66)

1. Находим частные производные F'_x, F'_y и F'_z в точке $M(x_0, y_0, z_0)$.

2. Подставляем найденные значения в уравнения (65) и (66) и записываем ответ.

Замечание 13. Если заданы только значения x_0 и y_0, то координата z_0 точки M принадлежит данной поверхности, т. е. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$.

Пример 47. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением $z = xy$, в точке $M(1, 1)$.

Решение.

Запишем уравнение поверхности в виде $xy - z = 0$, т. е. $F = xy - z$.

Координаты точки M: $x_0 = 1, y_0 = 1$. Координату z_0 определяем из условия, что точка M принадлежит данной поверхности, т. е. $F(1, 1, z_0) = 0$. Получаем $z_0 = 1$.

1. Находим частные производные F'_x, F'_y и F'_z в точке $M(1, 1, 1)$:

$F'_x|_{(1,1,1)} = y|_{(1,1,1)} = 1, F'_y|_{(1,1,1)} = x|_{(1,1,1)} = 1, F'_z|_{(1,1,1)} = -1.$

2. Подставляя найденные значения в уравнения (65) и (66), получаем уравнение касательной плоскости $1(x - 1) + 1(y - 1) - 1(z - 1) = 0$ и уравнение нормали $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

Ответ: уравнение касательной плоскости: $x + y - z - 1 = 0$, уравнения нормали: $x - 1 = y - 1 = 1 - z$.

Пример 48. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + 6y(y - x)$ в замкнутой области, заданной неравенствами $0 \le y \le x \le 2$.

Для того, чтобы начертить эту область, расчленим неравенство на отдельные части; точки плоскости, ординаты которых удовлетворяют неравенству $0 \le y \le x$, расположены выше оси Ox и под биссектрисой $y = x$; точки плоскости, абсциссы которых удовлетворяют неравенству $x \le 2$, расположены левее вертикальной прямой $x = 2$. Точки плоскости, абсциссы и ординаты которых одновременно удовлетворяют указанным выше неравенствам, заполняют прямоугольный треугольник (рис. 6.27) вместе с его границей. Будем искать стационарные точки данной функции внутри треугольника: $z'_x = 3x^2 - 6y$, $3x^2 - 6y = 0$; $z'_y = 12y - 6x$, $12y - 6x = 0$; $y = \frac{x^2}{2}$; $6x^2 - 6x = 0$, $x_1 = 0, x_0 = 1$; $y_1 = 0, y_0 = \frac{1}{2}$. Итак, найдена одна стационарная точка $M_0\left(1, \frac{1}{2}\right)$ внутри области. Посчитаем значение функции в этой точке: $z_0 = -\frac{1}{2}$.

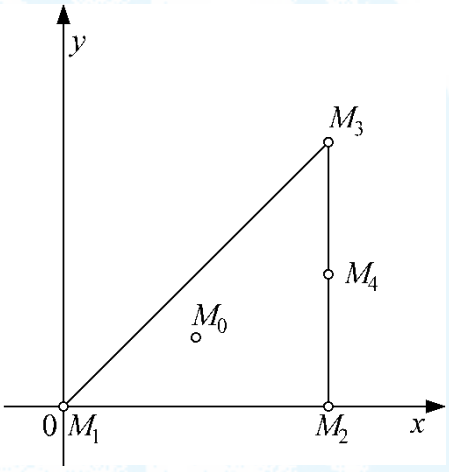


Рис. 6.27

Для исследования изменения функции на границе данной области рассмотрим отдельно каждую из трех линий, образующих границу.

Исследование на линии M_1M_2. Уравнение этой линии: $y = 0$. Так как сейчас нас интересует изменение заданной функции только на линии M_1M_2, то в выражении для функции z можно положить $y = 0$, тогда получим: $z = x^3$. Так как x растет от 0 (точка M_1) до 2 (точка M_2) и x^3 при этом тоже растет, то достаточно сосчитать самое маленькое

значение функции на линии M_1M_2, т. е. значение в точке $M_1(z_1 = 0)$ и самое большое на линии M_1M_2 значение функции в точке $M_2(z_2 = 8)$.

Исследование на линии M_2M_3. Уравнение этой линии: $x = 2$. В выражении для функции z полагаем $x = 2$; тогда получим: $z = 8 + +6y^2 - 12y$, т. е. на линии M_2M_3 функция z обратилась в квадратичную функцию. Находим для этой функции стационарные точки: $z' = 12y - 12, z' = 0$ при $y = 1$. Таким образом, найдена еще точка $M_4(2, 1)$. Вычисляем значение функции в $M_4(z_4 = 2)$. Находим значение функции в точке M_3 (конец промежутка изменения y), т. к. функция одной переменной может достигать наибольшего или наименьшего значения на концах того промежутка, в котором она изменяется. Получаем: $z_3 = 8$; значение на другом конце промежутка изменения y, т. е. в точке M_2, уже было вычислено раньше.

Исследование на линии M_1M_3. Уравнение этой линии: $y = x$. В выражении для функции z полагаем $y = x$; тогда получаем: $z = x^3$. Так как это возрастающая функция, то нужно сосчитать ее значения только в начале и в конце промежутка изменения x, т. е. в точках M_1 и M_3. Эти значения функции уже были вычислены.

Сравнивая теперь между собой все пять вычисленных значений функции, видим, что самое большое из них 8 и самое маленькое $-\frac{1}{2}$. Итак, наибольшее значение функции $z = 8$ в заданной области достигается в точках M_2 и M_3; наименьшее значение функции $z = -\frac{1}{2}$ достигается в точке M_0.

Резюме

Рассмотрены функции многих переменных, приведены основные теоретические положения, которые иллюстрируются большим количеством решенных примеров и упражнений.

Глава 7. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (ОДУ)

Открытие исчисления бесконечно малых дало математикам возможность свести законы движения тел к аналитическим уравнениям.

Ж. Л. Лагранж

При изучении теории дифференциальных уравнений вы познакомитесь с различными типами уравнений первого и второго порядков и освоите методы их решения, а также линейные уравнения с постоянными коэффициентами, структуру их общего решения и методы нахождения (метод Эйлера, метод подбора частных решений, метод Лагранжа).

Дифференциальные уравнения занимают особое место в математике и имеют многочисленные приложения в широком спектре наук. Исследования природных процессов и изучение закономерностей общественных процессов приводят к построению математических моделей, основой которых являются дифференциальные уравнения.

В дифференциальных уравнениях неизвестная функция содержится вместе со своими производными. Основной задачей теории дифференциальных уравнений является изучение функций, представляющих собой решение этих уравнений. В данной главе излагаются элементы теории обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), когда неизвестные функции зависят от одной переменной. Теория дифференциальных уравнений, когда известные функции зависят от нескольких переменных — уравнения в частных производных, является более сложной и представляет специальный раздел математики.

Простейшие обыкновенные дифференциальные уравнения рассматривали в своих работах еще И. Ньютон и Г. Лейбниц. Именно Г. Лейбниц ввел в 1676 г. термин «дифференциальное уравнение». Задачу решения ОДУ И. Ньютон трактовал как обратную по отношению к нахождению производной для заданной функции, а вычисление неопределенного интеграла считал частным случаем этой задачи.

Для Ньютона как создателя основ математического естествознания такой подход к восстановлению функции по зависимости между функцией и ее производными был вполне логичным, поскольку

большинство известных в науке закономерностей может быть выражено в форме дифференциальных уравнений.

Цели и задачи

Сформировать представление об основных видах дифференциальных уравнений, правилах нахождения их общего и частного решения.

Знать теоремы существования и единственности дифференциальных уравнений, методы Лагранжа, Бернулли, а также методы решения систем ОДУ и методы понижения порядка.

Уметь определять вид ОДУ, находить его общий интеграл, решать задачу Коши для дифференциального уравнения.

§ 1. Основные понятия и определения

Определение 1. *Дифференциальным уравнением* называется соотношение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию или ее производную (или ее дифференциал).

В случае, когда неизвестная функция, входящая в дифференциальное уравнение, зависит только от одной независимой переменной, дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*.

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид $F(x, y, y') = 0$ (*), а если его удается решить относительно производной, то оно запишется так: $y' = f'(x, y)$ ($y' = \frac{dy}{dx}$). (1)

Решением или интегралом уравнения (1) называется всякая дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, удовлетворяющая этому уравнению, т. е. такая, после подстановки которой в уравнение (1) оно обращается в тождество, т. е. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ является тождеством относительно x.

Кривая $y = \varphi(x)$, определяемая решением уравнения (*) или (1) называется *интегральной кривой дифференциального уравнения*.

Общим решением дифференциального уравнения (*) или (1) называется соотношение вида $\Phi(x, y, C) = 0$ или $\Phi(x, y) = C$, (2) включающее одну произвольную постоянную величину и обладающее тем свойством, что решая их относительно y при любых частных значениях произвольной постоянной, получаем функции вида $y = \varphi(x)$, являющиеся решениями уравнений (*) или (1). Уравнение (2) определяет свойства интегральных кривых (*).

Частным решением дифференциального уравнения (*) называется такое, которое получается из общего решения (2) при некотором частном значении произвольной постоянной. Произвольная постоянная C, входящая в (2), определяется из так называемых начальных условий.

Задача с начальными условиями ставится так:

Найти решение $y = \varphi(x)$ уравнения (*) такое, чтобы оно принимало заданное значение y_0 при заданном значении независимой переменной $x = x_0$, т. е. выполнялось тождество $y_0 = \varphi(x_0)$.

С точки зрения геометрии задача с начальными условиями сводится к тому, чтобы из семейства интегральных кривых (2) выделить ту, которая проходит через точку (x_0, y_0) плоскости.

§ 2. Задача Коши

Задача отыскания решения уравнения (*), удовлетворяющего начальным условиям $y = y_0$ при $x = x_0$ называется *задачей Коши*.

Возникает естественный вопрос о существовании решения задачи Коши и ее единственности. Ответ на поставленные вопросы дает одна из центральных теорем в теории ОДУ — теорема Коши, которую мы чуть позже сформулируем (без доказательства).

Определение 2. Функция $f(x, y)$, определенная в области G, удовлетворяет условию Липшица в G относительно y, если существует такое число $L>0$, называемое *постоянной Липшица*, что для любых двух точек (x, y) и (x, t) из G выполнены неравенства

$|f(x, y) - f(x, t)| \leq L|y - t|$.

Замечание 1. Функция $f(x, y)$, имеющая в замкнутой ограниченной области G непрерывную частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$, удовлетворяет условию Липшица.

Теорема (Коши). *Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в прямоугольной замкнутой области $D = \{(x, y): |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ удовлетворяет в этой области условию Липшица относительно y. Тогда существует единственное решение $y(x)$ задачи Коши, т. е. решение обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) первого порядка $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = x_0$.*

Это решение определено при $|x - x_0| \le h$, где $h = \min\left\{a; \frac{b}{M}\right\}$, $M = \max\{f(x, y)\}$, $(x, y) \epsilon D$.

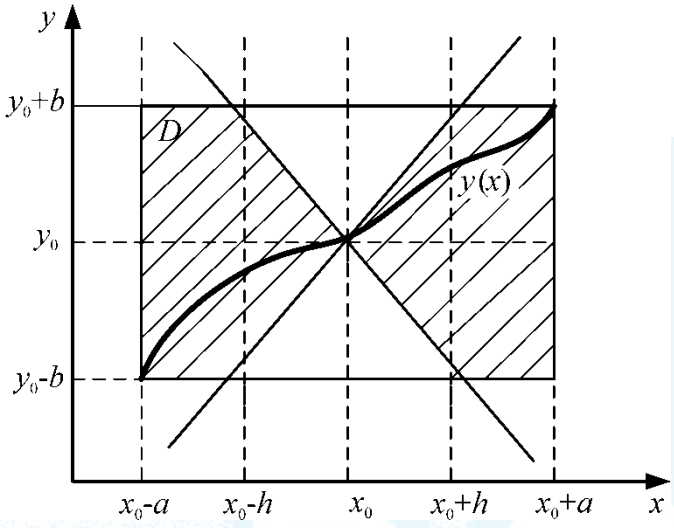


Рис. 7.1

Дадим геометрическую интерпретацию ограничения $|x - x_0| \le h$ на область определения функции $y(x)$. Так как $|f(x, y)| \le M$, то интегральная кривая $y = y(x)$, проходящая через точку (x_0, y_0), должна лежать внутри заштрихованного на рис. 7.1 участка области D и не может пересекать прямые, описываемые уравнениями $y = y_0 \pm$ $\pm M\,(x - x_0)$ (иначе в окрестностях точки пересечения было бы $\left|\frac{dy}{dx}\right| > M$), что противоречит ОДУ (1). Если $Ma \le b$, то указанные прямые пересекают границу области D в угле прямоугольника или по его вертикальным сторонам, а интегральная кривая гарантированно определена при $|x - x_0| \le a$, т. е. $h = a$. Если же $Ma > b$ (как изображено на рис. 7.1), то точки пересечения прямых с границей области D лежат на горизонтальных сторонах прямоугольника и имеют абсциссы $x_0 \pm \frac{b}{M}$. В этом случае интегральная кривая гарантированно определена лишь при $|x - x_0| \le \frac{b}{M}$.

Если в обыкновенном дифференциальном уравнении (ОДУ) первого порядка $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ правая часть $f(x, y)$ непрерывна в некоторой области D и удовлетворяет условию Липшица по y, то через каждую точку $(x_0, y_0) \epsilon D$ этой области проходит, согласно теореме Коши, единственная интегральная кривая. Такую точку интегральной кривой называют *обыкновенной*. Точку (x_0, y_0), не являющуюся обыкновен-

ной, называют *особой точкой* ОДУ $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Через особую точку, вообще говоря, не проходит ни одна интегральная кривая или же проходят, по крайней мере, две интегральные кривые.

Нарушение условий теоремы Коши в точке (x_0, y_0) является лишь необходимым условием того, что эта точка считается особой. Например, для ОДУ $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ точка $(x_0, y_0) = (0, 0)$ будет особой, поскольку через нее проходят бесконечное множество интегральных кривых $y(x) = Cx$, где C — произвольная постоянная. Напротив, через особую точку $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ОДУ $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ не проходит ни одной интегральной кривой $y^2 + x^2 = C$ $(c > 0)$.

Особым решением ОДУ называется такое решение ОДУ (1), которое во всех своих точках не удовлетворяет свойству единственности, т. е. в окрестности каждой точки (x, y) особого решения существуют, по крайней мере, две интегральные кривые, проходящие через эту точку.

Теорема Коши дает достаточные условия для того, чтобы в некоторой области не существовали особые решения. Таким образом, для существования последних необходимо, чтобы условия этой теоремы были нарушены. Если, например, $f(x, y)$ непрерывна в некоторой области, то особые решения могут проходить только через те точки, в которых не выполнено условие Липшица.

Пусть задано уравнение $\Phi(x, y, c) = 0$, определяющее на плоскости некоторое семейство кривых, зависящих от параметра C. Если составить систему двух уравнений $\Phi(x, y, c) = 0$ и $\Phi'_x(x, y, c) = 0$, то, исключая из этой системы параметр C, получим, вообще говоря, дифференциальное уравнение заданного семейства кривых.

Пример 1. Рассмотрим ОДУ $\frac{dy}{dx} = y^{2/3}$. Проинтегрируем его, найдя общее решение $y(x) = \frac{(x+C)^3}{27}$ (рис. 7.2). Кроме того, это ОДУ имеет особое решение $y(x) = 0$, проходящее через точки, где не выполнено условие Липшица (рис. 7.2). Действительно, если бы условие Липшица было выполнено для кривой $f(x, y) = y^{2/3}$ этого ОДУ, то при $y \neq t$ было бы справедливо неравенство $\frac{|y^{\frac{2}{3}} - t^{2/3|}}{|y - t|} \leq L$, где L — посто-

янная Липшица, но при $t = C$ и $y \to 0$ левая часть этого неравенства стремится к бесконечности.

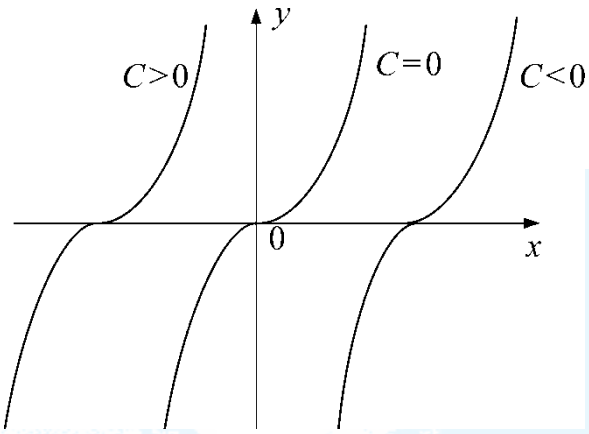


Рис. 7.2

Пример 2. Найти дифференциальное уравнение семейства окружностей $x^2 + y^2 = 2ax$.

Имеем систему уравнений: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2ax, \\ 2x + 2yy' = 2a. \end{cases}$

Исключаем параметр *a*. Из второго уравнения находим $a = x + yy'$ и, подставляя это выражение в первое уравнение, получаем $x^2 + y^2 = 2x(x + yy')$, т. е. $y^2 - x^2 = 2xyy'$. Это и есть искомое дифференциальное уравнение.

Далее рассмотрим специальные виды ОДУ первого порядка, решения которых удается найти в квадратурах. Предполагается, что обсуждаемые ОДУ удовлетворяют условиям теоремы Коши.

Если общее решение (общий интеграл) представлено в виде квадратур от элементарных функций, входящих в состав дифференциального уравнения, то говорят, что уравнение проинтегрировано в квадратурах.

Выясняя вопрос об интегрируемости данного дифференциального уравнения в квадратурах, нужно рассмотреть все формы записи этого уравнения, принимая за искомую функцию как *y*, так и *x*.

В случае, когда в точке (x_0, y_0) правая часть уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ обращается в бесконечность, рассматривают перевернутое уравнение $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)}$ и ищут интегральную кривую, проходящую через эту точку, в виде $x = x(y)$.

Вообще говоря, решение задачи Коши для уравнения в любой из форм его записи ищут в том виде, в каком это оказывается наиболее удобно, т. е. в виде $y = y(x)$, $x = x(y)$, $\varphi(x, y) = 0$ или в параметрической форме $x = x(t), y = y(t)$.

В следующих параграфах рассматриваются уравнения, интегрируемые в элементарных функциях или квадратурах. При этом мы ограничиваемся в большинстве случаев формальным интегрированием, в частности, не всегда указываем область задания общего решения.

Если данное уравнение не интегрируется в квадратурах или выполнение квадратур затруднительно, решение задачи Коши обычно находят методом последовательных приближений или при помощи степенных рядов.

§ 3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Если в дифференциальное уравнение первого порядка $F(x, y, y') = 0$ производная y' входит в первой степени, то после решения его относительно y' получаем уравнение вида $f(x, y) + \varphi(x, y)y' = 0$.

Так как $y' = \frac{dy}{dx}$, то уравнение может быть переписано так: $f(x, y)dx + \varphi(x, y)dy = 0$. В частном случае, когда каждая из функций $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ является произведением двух функций, одна из которых — функция только от x, а вторая только от y, т. е.

$$f_1(x)f_2(y)dx + \varphi_1(x)\varphi_2(y)dy = 0. \qquad (3)$$

Уравнение (3) *называют уравнением с разделяющими переменными*. Разделение переменных производится делением обеих частей (3) на произведение $\varphi_1(x)f_2(y)$, в котором $f_2(y)$ — функция только от y, являющаяся множителем при dx, а $\varphi_1(x)$ — функция только от x, являющаяся множителем при dy.

После деления на это произведение уравнение (3) примет вид:

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = 0, \qquad (4)$$

а его общий интеграл запишется так: $\int \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = C.$ (5)

Особые решения уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение (5) может быть переписано так: $\varphi_1(x)f_2(y)\left[\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \right.$ $\left. + \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy\right] = 0$, поэтому, кроме найденного ранее общего интеграла (5) уравнения (3), ему могут также удовлетворять решения, получаемые из уравнения $\varphi_1(x)f_2(y) = 0$.

Если эти решения не входят в общий интеграл, то они и будут особыми решениями уравнения (3).

Решение дифференциального уравнения, которое не может быть получено из общего решения ни при одном частном значении произвольной постоянной, включая $\pm\infty$, называется его *особым решением*.

При решении дифференциального уравнения надо стремиться к тому, чтобы наряду с определением общего решения были найдены также и особые.

Замечание 2. С помощью подстановки $z(x) = ax + by(x) + d$ к уравнениям с разделяющимися переменными приводятся и дифференциальные уравнения вида $y' = f(ax + by + d)$ (*), $b \neq 0$. Если $a + by' = z'$, то $y' = \frac{z'-a}{b}$ и уравнение (*) примет вид: $\frac{z'-a}{b} = f(z)$, $z' = bf(z) + a$, $\frac{dz}{dx} = bf(z) + a$ или $\frac{dz}{bf(z)+a} = dx$.

Пример 3. Решить дифференциальное уравнение

$y'\sqrt{1-x^2} = 1 + y^2$, $y' = \frac{dy}{dx}$.

Разделим обе части на $\left(\sqrt{1-x^2}\right)(1+y^2)$.

$\sqrt{1-x^2}dy = (1+y^2)dx \Rightarrow \frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Берем интегралы обеих частей: $arctg\, y = arcsin\, x + C$. Откуда $arctg\, y - arcsin\, x = C$, $x = \pm 1$. В нашей задаче $x = \pm 1$ является особым решением (оно не может быть получено из общего интеграла ни при одном частном значении произвольной постоянной C).

§ 4. Однородные и квазиоднородные уравнения

Уравнение вида $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ называется *однородным*, если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ — однородные функции одного измерения (порядка).

Определение 3. Функция $P(x,y)$ называется *однородной измерения (порядка) m*, если $P(\lambda x,\lambda y)=\lambda^m P(x,y)$ для всех $\lambda>0$.

Решение такого уравнения проводится путем введения новой переменной $t=\frac{y}{x}$ => $y=tx$, $y'=t'x+t$, с помощью которой уравнение превращается в уравнение с разделяющимися переменными.

Замечание 3. Дифференциальные уравнения вида

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \tag{6}$$

в случае $\frac{a_2}{a_1}\neq\frac{b_2}{b_1}$ приводятся к однородному с помощью замены переменных $x=u+m, y=v+n$, где *m, n* находятся из системы $\begin{cases}a_1m+b_1n+c_1=0\\a_2m+b_2n+c_2=0\end{cases}$, где *(m,n)* — точка пересечения прямых a_1x+ $+b_1y+c_1=0$ и $a_2x+b_2y+c_2=0$. Поскольку здесь $dx=du$, $dy=dv$, то уравнение (6) преобразуется к виду $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$ относительно функции $v(u)$.

$$\frac{dv}{du}=f\left(\frac{a_1u+b_1v+a_1m+b_1n+c_1}{a_2u+b_2v+a_2m+b_2n+c_2}\right)=f\left(\frac{a_1u+b_1v}{a_2u+b_2v}\right)=f\left(\frac{a_1+b_1\left(\frac{v}{u}\right)}{a_2+b_2\left(\frac{v}{u}\right)}\right)=\varphi\left(\frac{v}{u}\right).$$

Смысл этих замен состоит в избавлении от постоянных слагаемых в числителе и знаменателе аргумента функции f.

Если в уравнении (6) $\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=\lambda$, и следовательно $a_2x+b_2y=$ $=\lambda(a_1x+b_1y)$, то оно примет вид $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\lambda(a_1x+b_1y)+c_2}\right)=\varphi(a_1x+$ $+b_1y)$. Подстановкой $u(x)=a_1x+b_1y(x)$ это уравнение преобразуется к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример 4. Найти общее решение уравнения $y'=\frac{y}{x}+\sin\frac{y}{x}$.

Убеждаемся, что это уравнение однородное, производя подстановку $\frac{y}{x}=t, y=tx\ \Rightarrow y'=t'x+t.(t'x+t)=t\sin t\,,\ x\,dt=\sin t\,dx$, разделяем переменные: $\frac{dt}{\sin t}=\frac{dx}{x}$. Интегрируем $\ln\left|tg\ \frac{t}{2}\right|=\ln|x|+$

$+\ln|C| \Rightarrow \frac{t}{2} = arctg\, Cx$, производим обратную замену $t = \frac{y}{x} \Rightarrow$ $y = 2x\, arctg\, Cx$ — общее решение (интеграл) данного ОДУ, особых решений нет.

Определение 4. Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка называют *квазиоднородным*, если для всех $\lambda > 0$ справедливо равенство $f(\lambda^{\alpha}x, \lambda^{\beta}y) = \lambda^{\beta-\alpha}f(x,y)$, (7)
где $\alpha, \beta \in R$.

Заменой $y = t\, x^{\beta/\alpha}$ квазиоднородное ОДУ можно преобразовать к ОДУ с разделяющимися переменными. Докажем справедливость этого утверждения. Полагая в (7) $\lambda = x^{-1/\alpha}$, имеем $f\left(1, \frac{y}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right) =$ $= x^{1-\frac{\beta}{\alpha}}f(x,y)$, или $f(x,y) = x^{\frac{\beta}{\alpha}-1}\, f\left(1, \frac{y}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)$. Учитывая это представление и проводя замену $y = t\, x^{\beta/\alpha}$, запишем $x^{\beta/\alpha}\frac{dt}{dx} + \frac{\beta}{\alpha}t\, x^{\frac{\beta}{\alpha}-1} =$ $= x^{\frac{\beta}{\alpha}-1}f(1,t)$. Отсюда и следует ОДУ с разделяющимися переменными $x\frac{dt}{dx} = f(1,t) - \frac{\beta}{\alpha}\, t$.

Некоторые ОДУ первого порядка можно привести к однородным заменой $y = t^m$, где m — число, подлежащее определению.

Например, ОДУ $2x^4y\frac{dy}{dx} + y^4 = 4x^6$ после замены $y = t^m$ принимает следующий вид: $2mx^4t^{2m-1}\frac{dt}{dx} + t^{4m} = 4x^6$. Оно будет однородным в случае равенства степеней всех его членов: $4 + 2m - 1 =$ $= 4m = 6$ при $m = \frac{3}{2}$. Эти равенства справедливы, поэтому замена $y = x^{3/2}$ приводит к однородному ОДУ вида $3x^4t^2\frac{dt}{dx} + t^6 = 4x^6$.

Решая конкретные уравнения при помощи замен вида $y = t\, x^{\beta/\alpha}$, $y = t^m$, следует обращать внимание на знаки переменных. Так, выражение t^m при $t < 0$ и иррациональном m не определено.

§ 5. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнение вида $y' + P(x)y = Q(x)$ (8)
называется *линейным* (т. е. y и y' входят в первых степенях, не перемножаясь между собой).

Если $Q(x) \neq 0$, то это уравнение называется линейным неоднородным, а если $Q(x) = 0$ — линейным однородным.

Общее решение однородного уравнения легко получается разделением переменных; разделяя переменные в уравнении $y' + P(x)y = 0$, находим последовательно $\frac{dy}{y} = -P(x)dx$; $\int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx$; $\ln y = -\int P(x)dx + \ln|C|$, или, наконец, $y = Ce^{-\int P(x)dx}$, где C — произвольная постоянная.

Общее решение неоднородного линейного уравнения можно найти исходя из общего решения соответствующего однородного уравнения по методу Лагранжа (Жозеф Луи Лагранж (1736-1813) родился в Турине в итало-французской семье. 19 лет от роду он стал профессором математики артиллерийской школы в Турине. Создатель вариационного исчисления. Наиболее значительный труд «Аналитическая механика»), варьируя произвольную постоянную, т. е. полагая $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$, где $C(x)$ — некоторая подлежащая определению дифференцируемая функция от x. Для нахождения $C(x)$ подставляем y в исходное уравнение, что приводит к уравнению $C'(x)\, e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$, отсюда $C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}\, dx + C$, где C — произвольная постоянная.

Тогда искомое общее решение неоднородного уравнения будет иметь вид: $y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\, dx + C\right]$.

Линейные уравнения первого порядка можно интегрировать также методом Бернулли, который заключается в следующем:

Полагая $y = uv$, где u, v — две неизвестные функции, преобразуем исходное уравнение к виду $u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$ или $u[v' + P(x)v] + u'v = Q(x)$.

Пользуясь тем, что одна из неизвестных функций (например v) может быть выбрана совершенно произвольно (поскольку лишь произведение uv должно удовлетворять исходному уравнению) принимают

за v любое частное решение уравнения $v' + P(x)v = 0$ (например, $v = e^{-\int P(x)dx}$), обращающее, следовательно, в нуль коэффициент при u в последнем уравнении.

Предыдущее уравнение приведется тогда к уравнению $vu' = Q(x)$ или $u' = \frac{Q(x)}{v} = Q(x)e^{\int P(x)dx}$, из которого находим u:

$u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx + C.$

Перемножая u и v, находим для решения исходного уравнения прежнее выражение $y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx + C\right]$.

Замечание 4. На практике поступают следующим образом: вводят подстановку $y = e^{-\int P(x)dx}u(x)$. (9)

Эта подстановка (9) приводит уравнение (8) к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример 5. Решить дифференциальное уравнение $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

Так как $P(x) = 2x$, $\int P(x)dx = \int 2xdx = x^2$, $-\int P(x)dx = -x^2$,

Значит, делаем подстановка $\begin{array}{l} y = ue^{-x^2} \\ y' = u'e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}u \end{array}\Bigg| \begin{array}{l} 2x \\ 1 \end{array} +$

$+y + y' = u'^{e^{-x^2}}, xe^{-x^2} = e^{-x^2}\frac{du}{dx}$, сокращая на e^{-x^2} и разделяя переменные $x\,dx = du \;=>\; u = \frac{x^2}{2} + C$. Подставив u в $y = ue^{-x^2}$, получаем $y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)e^{-x^2}$.

Решим это же уравнение другим способом (**метод Лагранжа**) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

Ищем решение соответствующего однородного уравнения

$y' + 2xy = 0$

$dy = -2xy\,dx$ делим на y

$\frac{dy}{y} = -2x\,dx$ => интегрируя, получаем $\ln|y| = -x^2 + C$ => $y = e^{-x^2+C}$ (e^C обозначим вновь через C) $y = Ce^{-x^2}$. (*)

Ищем решение исходного неоднородного уравнения в виде $y = C(x)e^{-x^2}$, где $C(x)$ — неизвестная функция. Подставляем в исходное уравнение

$C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2} + 2xC(x)e^{-x^2} = xe^{-x^2}$.

Сокращая на e^{-x^2}, имеем $C'(x) = x \Rightarrow C(x) = \int x\,dx, C(x) = \frac{x^2}{2} + C$, после подстановки которого в (*) получаем $y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right) e^{-x^2}$.

Уравнение вида $y' + P(x)y = Q(x)y^m$ называется *уравнением Бернулли,* т. к. $m \neq 0, m \neq 1$ (при $m = 0$ уравнение является линейным, а при $m = 1$ — уравнением с разделяющимися переменными).

После умножения его обеих частей на y^{-m} и подстановки $z = y^{1-m}$, где z — новая искомая функция, оно приводится к линейному.

Преобразование уравнения Бернулли в линейное будем проводить в такой последовательности:

1) Умножим обе части уравнения на y^{-m}.

2) Введем подстановку $z = y^{1-m}$. Обе части этого равенства продифференцируем:

$(1 - m)y^{-m}y' = z' \Rightarrow y^{-m}y' = \frac{z'}{1-m}$.

3) Полученное уравнение проинтегрируем как линейное с помощью подстановки $z = u(x)e^{-\int P(x)dx}$.

4) Возвращаемся к искомой функции, заменяя z на y^{1-m}.

Пример 6. Найти общее решение уравнения $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}$.

Умножим обе части на $y^{-1/2}$. Получим $y^{-1/2}y' + 4xy^{1/2} = 2xe^{-x^2}$.

Делаем подстановку $y^{1-1/2} = y^{1/2} = z$. $\frac{1}{2\sqrt{y}}y' = z' \Rightarrow 2z' + 4xz = 2xe^{-x^2}$ (делим на 2). Имеем $z' + 2xz = xe^{-x^2}$. (См. предыдущий пример). Откуда общий интеграл $z = e^{-x^2}\left(C + \frac{x^2}{2}\right)$. Возвращаясь к искомой функции $\sqrt{y} = e^{-x^2}\left(C + \frac{x^2}{2}\right) \Rightarrow y = e^{-2x^2}\left(C + \frac{x^2}{2}\right)^2$.

Замечание 5. На практике при решении уравнений Бернулли их не сводят к линейным, а интегрируют подстановкой $y = u(x)v(x)$ или методом Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной).

Уравнением Риккати по имени итальянского математика и инженера Я. Ф. Риккати (1676-1754) называют ОДУ вида $\frac{dy}{dx} = C(x) + b(x)y + a(x)y^2$ (*), где $a(x), b(x), C(x)$ — функции, непрерывные в

некотором интервале изменения x. Это ОДУ содержит в себе частные случаи уже рассмотренных ранее уравнений: если $a(x) = 0$, то (*) — линейное неоднородное уравнение ОДУ, а если $C(x) = 0$ — уравнение Бернулли с $m = 2$.

К сожалению, решение уравнения Риккати в общем случае не всегда удается проинтегрировать. Однако, если известно одно частное решение ОДУ (*), то его общее решение можно найти при помощи двух последовательных операций интегрирования.

Действительно, пусть $y = \check{y}(x)$ — частное решение (*), выполнив подстановку $t = y(x) - \check{y}(x)$ получим $\frac{dt}{dx} + \frac{d\check{y}}{dx} = C(x) + b(x)y + +b(x)\check{y}(x) + a(x)t^2 + 2a(x)\check{y}(x)t + a(x)\check{y}^2(x)$.

Так как $\check{y}(x)$ — решение ОДУ (*), то окончательно имеем:

$\frac{dt}{dx} = \big(b(x) + 2a(x)\check{y}(x)\big)t + a(x)t^2$.

Это уравнение Бернулли с $m = 2$. Заменой $t = \frac{1}{z}$ его можно свести к линейному неоднородному ОДУ, для нахождения общего решения которого достаточно выполнить последовательно две операции интегрирования.

Пример 7. Пусть дано уравнение Риккати $\frac{dy}{dx} + y^2 - xy = 1$.

Оно имеет частное решение $y(x) = x$. Замена $y = x + t$ приводит его к уравнению Бернулли $\frac{dt}{dx} + y^2 - xt = 0$. Положим $t(x) = = u(x)v(x)$, тогда можно записать $v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} + u^2v^2 + xuv = 0$.

Приравняв к нулю коэффициенты при u, получим ОДУ $\frac{dv}{dx} + xv = 0$, имеющее частное решение $v(t) = e^{-x^2/2}$. Теперь ОДУ для нахождения $u(x)$ принимает вид $\frac{du}{dx} = -u^2e^{-x^2/2}$.

Разделяя переменные и интегрируя, получаем с учетом потерянного решения $u(x) = 0$, имеем $u(x) = \frac{1}{C+\Phi(x)}$ и $u(x) = 0$, где $\Phi(x)$ — первообразная функции $e^{-x^2/2}$. В итоге исходное уравнение Риккати имеет решения $y(x) = x + \frac{e^{-x^2/2}}{C+\Phi(x)}$ и $y(x) = x$.

Замечание 6. Особых решений уравнение Риккати не имеет.

§ 6. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Уравнение вида $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ (10)
называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$, где $P(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Q(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y}$.

Для того, чтобы уравнение (10) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Если уравнение (10) является уравнением в полных дифференциалах, оно может быть записано в виде $d\big(U(x,y)\big) = 0$ и $U(x,y) = C$ — общий интеграл этого уравнения, где C — произвольная постоянная.

Функция $U(x,y)$ может быть найдена следующим образом. Интегрируя равенство $P(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}$ по x при фиксированном y и замечая, что произвольная постоянная в этом случае может зависеть от y, имеем: $U(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y)$. (11)

Затем из равенства $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx + \varphi'(y) = Q(x,y)$ находим функцию $\varphi(y)$, подставив которую в (11) получаем функцию $U(x,y)$. Для записи общего (решения) интеграла исходного уравнения достаточно выбрать одну из функций получаемого семейства.

Замечание 7. Более простой метод отыскания функции $U(x,y)$ состоит в вычислении так называемого криволинейного интеграла второго рода
$U(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, где точки $M_0(x_0,y_0)$ и $M(x,y)$ лежат в области непрерывности функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ и их частных производных, причем, $M_0(x_0,y_0)$ — некоторая фиксированная точка.

Пример 8. Найти общее решение уравнения $(2x+y)dx + +(x+2y)dy = 0$.

$P(x,y) = 2x + y, Q(x,y) = x + 2y$.

$\frac{\partial P}{\partial y}=1$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=1$, т. е. уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Следовательно, левая часть уравнения есть полный дифференциал некоторой функции $U(x,y)$. Тогда $\frac{\partial U}{\partial x}=(2x+y), \frac{\partial U}{\partial y}=$ $=(x+2y)$.

Проинтегрируем $\frac{\partial U}{\partial x}=(2x+y)$ по x => $U=x^2+yx+\varphi(y)$.

Найдем произвольную функцию $\varphi(y)$, продифференцировав последнее выражение по y $\frac{\partial U}{\partial y}=x+\varphi'(y)$, получаем уравнение:

$x+\varphi'(y)=x+2y$ => $\varphi'(y)=2y$ => $\varphi(y)=y^2$.

Таким образом, общий интеграл нашего уравнения имеет вид: $x^2+xy+y^2=C$.

§ 7. Уравнения, не разрешенные относительно производной

Обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) первого порядка, не разрешенное относительно производной, имеет вид

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0. \qquad (12)$$

Допустим, ОДУ (12) можно разрешить относительно $\frac{dy}{dx}$ (пусть и неоднозначно), т. е. можно получить r соотношений $\frac{dy}{dx}=f_i(x,y)$, $i=1,2,\dots,r$. (13)

Тогда к каждому из r ОДУ (13) можно применять методы интегрирования, изложенные выше.

Но приведение к виду (13) не всегда возможно. Поэтому решение ОДУ (12) часто приходится искать, используя параметр, например $p=\frac{dy}{dx}$.

Рассмотрим ряд частных случаев.

Предположим, что (12) можно разрешить относительно y, т. е. записать в виде $y=f(x,p)$. Вычислим полный дифференциал $dy=$ $=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial p}dp$. Поскольку $dy=p\,dx$, то его можно представить как $M(x,p)dx+N(x,p)dp=0$, интегрируя которое (если это возможно),

найдем общее решение $x = x(p, C), C = const$. Тогда общее решение исходного ОДУ (12) в параметрической форме будет иметь вид: $\begin{cases} x = x(p, C) \\ y = f(x, p). \end{cases}$

Пример 9. В уравнении $\ln\frac{dy}{dx} + \sin\frac{dy}{dx} = x$ положим $p = \frac{dy}{dx}$ и запишем $x = \ln p + \sin p$. Далее, т. к. $dy = p\,dx$, то имеем $dy = p\left(\frac{1}{p} + \cos p\right)dp$ и интегрируя, получаем общее решение исходного ОДУ в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = \ln p + \sin p\,; \\ y = p + \cos p + p\sin p + C, \end{cases} \quad p > 0, C = const.$$

Рассмотренным методом решают, в частности, уравнения Лагранжа и Клеро.

Уравнением Лагранжа называют ОДУ вида

$$y = x\,\varphi(p) + \psi(p), p = \frac{dy}{dx}, \tag{14}$$

где $\varphi(p)$ и $\psi(p)$ — непрерывно дифференцируемые функции, $\varphi(p) \neq p$.

Поскольку $dy = p\,dx$ и $dy = \varphi(p)dx + x\varphi'(p)dp + \psi'(p)dp$, то можно записать $\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}x + \frac{\psi'(p)}{\varphi(p)-p} = 0.$ (15)

Так как ОДУ (15) линейно относительно $t(p)$, то его можно проинтегрировать по p. После интегрирования получим $x = x(p, C)$, $C = const$.

Подставив $x = x(p, C)$ в (14), запишем общее решение уравнения Лагранжа в параметрической форме $\begin{cases} x = x(p, C) \\ y = x(p, C)\varphi(p) + \psi(p) \end{cases}$.

Пример 10. Рассмотрим ОДУ $\frac{dy}{dx} + y - x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0.$

Это уравнение Лагранжа.

Обозначим $p = \frac{dy}{dx}, (\varphi(p) = p^2, \psi(p) = -p)$.

Тогда ОДУ (15) примет вид: $\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p-1}x = \frac{1}{p(p-1)}$. Решая его, получим: $\begin{cases} x = \frac{p - \ln p + C}{(p-1)^2} \\ y = xp^2 - p \end{cases}, p > 0, C = const.$

Частным случаем уравнения Лагранжа является *уравнение Клеро*

$$y = xp + \psi(p), p = \frac{dy}{dx}, \qquad (16)$$

названное по имени французского математика и астронома А. К. Клеро (1713-1765).

Применим ту же процедуру, что и при решении уравнения Лагранжа. То есть $dy = p\,dx + x\,dp + \psi'(p)dp$, а т. к. $dy = p\,dx$, то $\left(x + \psi'(p)\right)dp = 0$, где либо $p = const$, либо $x = -\psi'(p)$. В первом случае в соответствии с (16) имеем общее решение уравнения Клеро в виде $y(x) = Cx + \psi(p)$, а во втором — особое решение этого ОДУ в параметрической форме $\begin{cases} x = -\psi'(p) \\ y = -p\,\psi'(p) + \psi(p) \end{cases}$.

Действительно, касательная к интегральной кривой (16) в точке, соответствующей фиксированному значению параметра p, имеет уравнение $y = px + \psi(p)$, т. е. входит в семейство прямых, задаваемых решением $y(x) = Cx + \psi(p)$, причем угловой коэффициент касательной в этой точке, согласно правилу дифференцирования функции, заданной параметрически, равен $y'_x = \frac{y'_p}{x'_p} = \frac{-\psi'(p) - p\,\psi''(p) + \psi'(p)}{-\psi''(p)} = p$.

Вместе с тем при значении параметра $C = p$ эта точка лежит на прямой $y(x) = Cx + \psi(C)$, так и на интегральной кривой (16). Следовательно, решение (16) особое, а интегральная кривая является огибающей однопараметрического семейства прямых $y(x) = Cx + \psi(C)$.

Пример 11. Решим уравнение Клеро $y = x\,y' + \frac{y'^2}{2}$.

Здесь $\psi(y') = \frac{y'^2}{2}$. Согласно изложенному выше, общим решением этого ОДУ будет $y(x) = Cx + \psi(p)$, а (16) задает особое решение, причем $x = -\psi'(p) = -p$, а $y = -p\psi'(p) + \psi(p) = -\frac{p^2}{2}$.

Таким образом, особое решение исходного ОДУ принимает вид: $x = -p, y = -\frac{p^2}{2}$ или, после исключения p, $y(x) = -\frac{x^2}{2}$, т. е. интегральная кривая особого решения как огибающая семейства прямых $y(x) = Cx + \frac{C^2}{2}$ будет параболой (рис. 7.3).

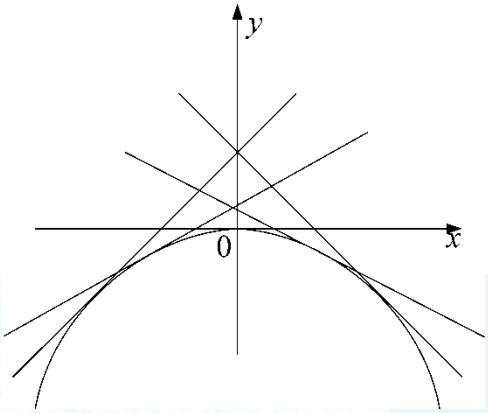


Рис. 7.3

(последнее будет обосновано после формулировки варианта теоремы Коши существования и единственности решения ОДУ первого порядка, но вида (12), т. е. ОДУ, не разрешенного относительно производной).

Теорема 2. (Теорема Коши)

Пусть функция $F(x, y, p)$, *где* $p = \frac{dy}{dx}$, *в окрестности точки* $M(x_0, y_0, p_0)$ *непрерывна по всем переменным и непрерывно дифференцируема по y и p. Пусть, кроме того,* $F(M) = 0$ *и в точке* $M\,\frac{\partial F}{\partial p} \neq 0$. *Тогда существует единственное решение* $y = y(x)$ *задачи Коши для ОДУ (12), удовлетворяющее начальному условию* $y(x_0) = x_0$.

Из этой теоремы следует, что особое решение ОДУ (12), если таковые существуют, удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0 \\ \frac{\partial F(x,y,p)}{\partial p} = 0 \end{cases}. \qquad (17)$$

Для отыскания особого решения необходимо из системы (17) исключить p. Полученное после этого соотношение $\Phi(x, y) = 0$ определяет так называемую *дискриминантную кривую*. Каждую ветвь этой кривой необходимо проверить, чтобы узнать, соответствует ли она решению ОДУ (12), и если соответствует, то это решение, вообще говоря, особое.

Для уравнения Клеро $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$ при $x = -\psi'(p)$, и система (17) дает решение (16), которое является особым.

§ 8. Дифференциальные уравнения высших порядков

Основные понятия. Теорема Коши

Дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид:

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (18)$$

или $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$. (19)

Задачей Коши для дифференциального уравнения (19) называется задача отыскания решения $y(x)$, удовлетворяющего заданным начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \qquad (20)$$

Общим решением уравнения (18) или (19) называется такая функция $y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n)$, которая при любых допустимых значениях параметров $C_1, C_2, \dots, C_n$ является решением этого дифференциального уравнения и для любой задачи Коши с условиями (20) найдутся постоянные $C_1, C_2, \dots, C_n$, определяемые из системы уравнений

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0, C_1, \dots, C_n) \\ y_0' = \varphi'(x_0, C_1, \dots, C_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_0^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, \dots, C_n). \end{cases}$$

Уравнение $\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$, определяющее общее решение как неявную функцию, называется *общим интегралом дифференциального уравнения*.

Теорема (существования и единственности решения задачи Коши). *Если дифференциальное уравнение (19) таково, что функция* $f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$ *в некоторой области D изменения своих аргументов непрерывна и имеет непрерывные частные производные* $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$, *то для любой точки* $\left(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}\right) \in D$ *существует такой интервал* $x_0 - h < x < x_0 + h$, *на котором существует и притом единственное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям (20).*

Уравнения, допускающие понижения порядка

Первый тип. *Уравнения, содержащие только производную порядка n и независимую переменную, имеют вид:* $F\left(x, y^{(n)}\right) = 0$.

Если удается это уравнение разрешить относительно $y^{(n)}$, то оно записывается так: $y^{(n)} = f(x)$. (21)

Общее решение имеет вид:

$$y = \underbrace{\int dx \int dx \ldots \int f(x)}_{n\ раз} dx + C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \cdots + C_n x^{n-1}. \quad (22)$$

Из этого видно, что для получения общего решения уравнения (21) нужно *n* раз проинтегрировать функцию $f(x)$ и прибавить к полученному результату многочлен от *x* степени *(n-1)*, коэффициентами которого являются произвольные постоянные.

Если задача Коши решается для уравнения (21) с начальными условиями, то частное решение уравнения (21) примет вид:

$$y = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x} f(x)dx + + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{(n-1)} +$$

$$+ \frac{y_0^{(n-2)}}{(n-2)!}(x - x_0)^{(n-2)} + \cdots + y'(x - x_0) + y_0.$$

Пример 12. Найти общее решение уравнения $y'' = \frac{1}{cos^2 x}$ и его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\ln 2}{2}$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

Интегрируя первый раз, получаем $y' = tg\, x + C_1$. Повторное интегрирование дает: $y = -\ln\,|\cos x| + C_1 x + C_2$.

Это и есть общее решение. Подставив теперь в полученное общее решение и в выражение для первой производной $x = \frac{\pi}{4}$ и соответственно $y = \frac{\ln 2}{2}, y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ получим систему двух уравнений с неизвестными C_1 и C_2. Решив ее, найдем значения параметров $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$, соответствующие искомому частному решению, которое, следовательно, имеет вид: $y = -\ln\,|\cos x|$.

Второй тип. *Уравнения, не содержащие искомой функции.*

Уравнение порядка *n*, не содержащее искомой функции, имеет такой вид: $F\left(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$. (23)

Порядок его может быть понижен на единицу с помощью подстановки $y' = P(x)$, (24)
где $P(x)$ — новая функция. Эта подстановка приводит к уравнению
$f\left(x, P, P', P'', \dots, P^{(n-1)}\right) = 0.$ (25)

Если уравнение (22) не содержит ни искомой функции *y*, ни ее производных до порядка *(k-1)* включительно, т. е. имеет вид
$f\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0,$ (26)
то его порядок может быть понижен на *k* единиц при помощи подстановки $y^{(k)} = P(x)$.

После определения функции $P(x)$ уравнение (26) оказывается приведенным к виду уравнения (21). К этому же типу уравнений относятся и такие, которые содержат только две последовательные производные, т. е. уравнения вида $f\left(y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0$. Если это уравнение можно решить относительно $y^{(n)}$, то оно принимает вид: $y^{(n)} = \varphi(y^{(n-1)})$ и интегрируется подстановкой $y^{(n-1)} = P(x)$, (27)
которая приводит к уравнению $\frac{dP}{dx} = \varphi(x)$. Определив из этого уравнения функцию $P(x)$ и подставив ее в (27) придем к уравнению (21).

Пример 13. Найти общее решение ОДУ $y'' + 2xy'^2 = 0$.

Решение. Воспользуемся подстановкой $y' = P(x)$. Получим $P' + 2xP^2 = 0$, а это уравнение с разделяющимися переменными.

$\frac{dP}{P^2} = -2x\,dx \;=>\; -\frac{1}{P} = -x^2 + C_1^2 \;=>\; P = \frac{1}{x^2+C_1^2} \;=>$

$y' = \frac{1}{x^2+C_1^2} \;=>\; y = \frac{1}{C_1} arctg\, \frac{x}{C_1} + C_2.$

Проверяем на особые решения (мы делили на P^2 и могли потерять)

$P^2 = 0\; P = 0.$ Значит $\frac{1}{x^2+C_1^2} \neq 0 \;=>\; C_1^2 - x^2 = 0 \;=>\; C_1 = x \;=>$ $y = C_1 - x$. Имеем, $y' = 0, y = C$ — особое решение.

Третий тип. *Уравнения, не содержащие независимой переменной.*

Эти уравнения имеют в общем случае такой вид:

$F\left(y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0.$ (28)

Понижение порядка на единицу достигается подстановкой $y' = P(y)$, где $P(y)$ — новая искомая функция. В этом случае за независимую переменную принимается не *x*, а *y*. Поэтому вторая и последующие производные должны быть преобразованы так, чтобы независимой переменной была *y*.

$y'' = [P(y)]'_x = \frac{dP}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dP}{dy}P$, т. к. $\frac{dy}{dx} = P$

$$y''' = \left(\frac{dP}{dy}P\right)'_x = \left(\frac{dP}{dy}P\right)'_y \frac{dy}{dx} = \left(\frac{d^2P}{dy^2}P + \frac{dP}{dy}\frac{dP}{dy}\right)P = \frac{d^2P}{dy^2}P^2 + \left(\frac{dP}{dy}\right)^2. \quad (29)$$

Поэтому уравнение (28) перепишется так:

$F\left(y,\ P,\ \frac{dP}{dy},\ \frac{d^2P}{dy^2}, \dots,\ \frac{d^{n-1}P}{dy^{n-1}}\right) = 0.$

Если удается найти общее решение этого уравнения, то оно будет иметь вид: $F\left(y, P, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}\right) = 0.$ (30)

Так как $P = \frac{dy}{dx}$, то (30) — уравнение первого порядка, из которого определится искомая функция y.

Частный случай. Если уравнение (28) имеет вид:

$f(y, y'') = 0$ (31)

и его удается разрешить относительно y''так, что

$y'' = \varphi(y),$ (32)

то интегрирование, кроме указанного приема, можно провести так: умножим обе части на $2y'dx$ и приведем уравнение к виду:

$2y'y''dx = 2\varphi(y)y'dx.$ (33)

Левая часть этого уравнения $2y'y''dx = d(y'^2)$, а в правой части $y'dx = dy$, поэтому (33) перепишется так:

$d(y'^2) = 2\varphi(y)dy,$

отсюда $y'^2 = 2\int \varphi(y)dy + C_1$, $y' = \sqrt{2\int \varphi(y)dy + C_1}$.

Последнее уравнение допускает разделение переменных, проинтегрировав его, найдем: $x + C_2 = \int \frac{dy}{\sqrt{2\int \varphi(y)dy + C_1}}$, т. е. определим x как функцию от y.

Следует отметить, что этот прием интегрирования уравнения (31) не дает ничего существенно нового по сравнению с указанным общим приемом замены y'' по формулам (29).

Замечание 8. К уравнению вида (31) приводятся также и уравнения вида $y^{(n)} = f\left(y^{(n-1)}\right)$, содержащие только две производные, порядки которых отличаются на две единицы. В этом случае применяется подстановка $y^{(n-2)} = P(y)$.

Пример 14. Найти общий интеграл уравнения $y'' = \frac{1}{\sqrt{y}}$.

Решение. Пусть $y' = P(y)$, тогда по формулам (29) $y'' = \frac{dP}{dy}P$, уравнение перепишется так: $P\frac{dP}{dy} = \frac{1}{\sqrt{y}}$. Разделяя переменные, получаем $P\,dP = \frac{dy}{\sqrt{y}}$ => $\frac{P^2}{2} = 2\sqrt{y} + 2C_1$ => $P^2 = 4\sqrt{y} + 4C_1$ (произвольную постоянную мы ввели под видом $2C_1$ с тем, чтобы в последующем извлечь корень из 4).

$P = \sqrt{4(\sqrt{y} + C_1)} = 2\sqrt{\sqrt{y} + C_1}$, т. к. $P = \frac{dy}{dx}$, последнее уравнение перепишется так: $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{\sqrt{y} + C_1}$. Разделяя переменные, получаем $\frac{dy}{2\sqrt{\sqrt{y}+C_1}} = dx$. Интегрируя, получаем $\frac{1}{2}\int\frac{dy}{\sqrt{\sqrt{y}+C_1}} = x + C_2$, $\frac{1}{2}\int\frac{dy}{\sqrt{\sqrt{y}+C_1}}\Big|\ \sqrt{y} + C_1 = z^2$, окончательно получаем $x + C_2 = \frac{2}{3}(\sqrt{y} + C_1)\sqrt{\sqrt{y} + C_1}$.

§ 9. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

Линейным дифференциальным уравнением порядка n называется уравнение вида:

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + P_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = f(x), \qquad (34)$$

где $f(x)$ — функция независимой переменной x, по которой вычислены производные.

Отличительной чертой линейного уравнения является то, что искомая функция y и все ее производные входят в это уравнение в первой степени.

Отметим некоторые особенности данного уравнения.

1. Предполагается, что функции $P_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ и правая часть уравнения — функция $f(x)$ непрерывны в промежутке *(a, b)*, случаи $a = -\infty, b = +\infty$ не исключаются. Функции $P_i(x)$ называются *коэффициентами уравнения*.

2. Задача Коши для этого уравнения при сделанном предположении всегда имеет единственное решение при любых начальных усло-

виях, лишь бы точка $x = x_0$ находилась в промежутке *(a, b)* непрерывности функций $P_i(x)$ и $f(x)$.

3. Если в уравнении (34) правая часть $f(x)$ тождественно равна нулю в промежутке *(a, b)*, то уравнение (34) примет вид:

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + P_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = 0 \quad (35)$$

и называется в этом случае *линейным однородным уравнением*. При $f(x) \neq 0$ уравнение (34) называется *неоднородным*.

4. Если функция $y_1(x)$ является решением линейного однородного уравнения (35), то и $C_1y_1(x)$ — произведение ее на произвольную постоянную величину C_1 — также является решением этого уравнения.

5. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями линейного однородного уравнения (35), то и их сумма $y_1(x) + y_2(x)$ также является решением этого уравнения. Если функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ являются решениями уравнения (35), то и функция $y = C_1y_1(x) + +C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x)$, где C_i — произвольные постоянные, также является решением этого уравнения. Функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ называются решениями уравнения (35).

6. Две функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются *линейно независимыми в промежутке* (a, b), если их отношение $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}$ в этом промежутке не является постоянной величиной. Если же отношение $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}$ — постоянная величина, то эти функции называются *линейно зависимыми*.

7. Если имеется *n* функций $y_1, y_2, \dots, y_n$, то они называются *линейно независимыми в промежутке* (a, b) при условии, что равенство $\propto_1 y_1 + \propto_2 y_2 + \cdots + \propto_n y_n = 0$ (где $\propto_i, i = \overline{1, n}$ — постоянные) может выполняться только тогда, когда все коэффициенты $\propto_i$ равны 0. Если же это равенство в промежутке (a, b) имеет место, когда хотя бы один из коэффициентов $\propto$ не равен 0, то функции называются *линейно зависимыми*.

8. Если функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ являются решениями уравнения (35) и в промежутке (a, b) они линейно независимы, то общее решение этого уравнения имеет вид: $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n$. (36)

Эта формула определяет структуру общего решения линейного однородного уравнения (35) порядка *n* и указывает способ построения общего решения. Таким образом, чтобы найти решение линейного

однородного уравнения, надо найти n его частных линейно зависимых в (a, b) решений, после этого каждое из них умножить на произвольную постоянную величину и все эти произведения сложить. Система линейно независимых решений называется *фундаментальной*.

9. Для того, чтобы $y_1, y_2, \dots, y_n$ были линейно независимы в промежутке (a, b), необходимо и достаточно, чтобы их так называемый определитель Вронского был отличен от нуля хотя бы в одной точке x_0 промежутка (a, b), в котором непрерывны коэффициенты уравнения (35).

То есть, чтобы проверить линейную независимость функций $y_1, y_2, \dots, y_n$, надо составить их *определитель Вронского* $W(x)$ и убедиться, что хотя бы при одном значении x из промежутка (a, b) он не равен 0.

$$W(x) = W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Уравнение (35) имеет n и только n линейно независимых решений.

Если известно частное решение $y_1(x)$ линейного однородного уравнения (35), то его порядок можно понизить на единицу при помощи подстановки $y = y_1 \int u\,dx$ (*), где $u = u(x)$ — новая искомая функция. Полученное в результате подстановки (*) уравнение также будет линейным.

§ 10. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Характеристическое уравнение. Если в уравнении (34) коэффициенты постоянные, то оно называется линейным однородным уравнением с постоянными коэффициентами и имеет вид:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \qquad (37)$$

где все a_i $(i = \overline{1, n})$ вещественные числа, y — искомая функция, x — независимая переменная.

Решение этого уравнения ищется в виде $y = e^{kx}$. Это приводит к алгебраическому уравнению степени n:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \cdots + a_{n-1} k + a_n = 0, \qquad (38)$$

которое называется *характеристическим*.

Таким образом, чтобы составить характеристическое уравнение (38) надо в уравнении (37) заменить производные степенями неизвестной величины k, причем степень k должна быть равна порядку соответствующей производной, а сама искомая функция y заменена 1.

I. Если все корни характеристического уравнения $k_1, k_2, \dots, k_n$ числа вещественные и среди них нет равных между собой, то получим n частных линейно независимых решений уравнения (37):

$y_1 = e^{k_1 x}$; $y_2 = e^{k_2 x}$; ... ; $y_n = e^{k_n x}$.

II. Если все корни характеристического уравнения числа вещественные, но среди них есть равные, то каждому корню x_i кратности l соответствует l линейно независимых частных решений уравнения (37) $y_1 = e^{k_i x}$; $y_2 = x\, e^{k_i x}$; $y_2 = x^2\, e^{k_i x}$, ... ; $y_n = x^{l-1} e^{k_i x}$.

III. Если среди корней характеристического уравнения имеются комплексные, но не равные между собой, то каждой паре сопряженных комплексных корней $\propto + \beta_i$ и $\propto - \beta_i$ соответствует два частных линейно независимых решения уравнения (37) вида: $e^{\propto x} \cos \beta x$ и $e^{\propto x} \sin \beta x$.

Если же среди комплексных корней характеристического уравнения имеются кратные комплексные корни, то корню $\propto + \beta_i$ кратности l (корень $\propto - \beta_i$ имеет ту же кратность) соответствует $2l$ частных линейно независимых решений уравнения (37), которые имеют вид:

$e^{\propto x} \cos \beta x\,, x e^{\propto x} \cos \beta x\,, x^2 e^{\propto x} \cos \beta x\,, \dots, x^{e-1} e^{\propto x} \cos \beta x$

$e^{\propto x} \sin \beta x\,, x e^{\propto x} \sin \beta x\,, x^2 e^{\propto x} \sin \beta x\,, \dots, x^{e-1} e^{\propto x} \sin \beta x$.

В заключение приведем схему решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами:

1) Составляем характеристическое уравнение $k^n + a_1 k^{n-1} + {} + a_2 k^{n-2} + \cdots + a_{n-1} k + a_n = 0$.

2) Находим корни характеристического уравнения $k_1, k_2, \dots, k_n$.

3) В зависимости от характера корней выписываем частные линейно независимые решения дифференциального уравнения.

4) Подставляя их в формулу $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$, получаем общее решение дифференциального уравнения (37).

Пример 15. Найти общее решение уравнения $y^{v} + 6y'' + 9y' = 0$.

Составим характеристическое уравнение $k^5 + 6k^3 + 9k = 0$, его можно переписать в виде $k(k^2 + 3)^2 = 0$ и найти его корни $k_1 = 0$, $k_2 = k_3 = 3i$, $k_4 = k_5 = -3i$, им соответствуют решения $y_1 = e^{ox} = 1$, $y_2 = e^{ox}\cos 3x = \cos 3x$, $y_3 = \sin 3x$, $y_4 = x\cos 3x$, $y_5 = x\sin 3x$.

Общее решение имеет вид: $y = C_1 + C_2\cos 3x + C_3\sin 3x + C_4 x\cos 3x + C_5 x\sin 3x$.

§ 11. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения

Предполагается, что функции $P_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ и правая часть уравнения — функция $f(x)$ непрерывны в промежутке *(a, b)*, случаи $a = -\infty, b = +\infty$ не исключаются. Функции $P_i(x)$ называются коэффициентами уравнения.

1. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение имеет вид:

$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + P_2 y^{(n-2)} + \cdots + P_{n-1}y' + P_n(x)y = f(x). \qquad (39)$$

2. Общее решение линейного неоднородного уравнения находится так:

а) найти одно какое-нибудь его частное решение;

б) найти общее решение соответствующего однородного уравнения;

в) сложить эти два решения. Сумма их и будет общим решением уравнения (40).

Так, если частное решение неоднородного уравнения есть *Y*, а общее решение соответствующего однородного есть $c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$, то общее решение линейного неоднородного уравнения (40)

$$y_{\text{о.н.}} = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n + Y. \qquad (40)$$

3. Если правая часть уравнения (40) есть сумма двух функций

$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + P_2 y^{(n-2)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n = f_1(x) + f_2(x), \qquad (41)$$

следует рассматривать два уравнения, у которых левые части такие же, как в (41), но в одном из них правой частью будет функция $f_1(x)$,

а во втором — $f_2(x)$, т. е. необходимо рассмотреть следующие уравнения:

$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + P_2 y^{(n-2)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n = f_1(x). \qquad (42)$$

$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + P_2 y^{(n-2)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n = f_2(x). \qquad (43)$$

Если функции Y_1 и Y_2 — соответственно частные решения уравнений (42) и (43), то их сумма $Y_1 + Y_2$ будет частным решением (41) (это свойство называется положением решений и распространяется на случай, когда правая часть — сумма *n* решений).

4. Если известно общее решение однородного линейного уравнения, соответствующего заданному неоднородному, то его частное решение *Y* можно найти с помощью квадратур методом, который указал Лагранж. Этот метод называется методом *вариации (изменения) произвольных постоянных*.

Получив общее решение соответствующего однородного уравнения $y_{o.o} = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$, поступают так: полагают, что в этом решении величины C_i являются не постоянными, а функциями независимой переменной *x*. Записывают это так:

$$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + \ldots + c_n(x)y_n.$$

Для определения функций $C_i, (i = \overline{1,n})$ составляется система уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \cdots + C_n'(x)y_n = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \cdots + C_n'(x)y_n' = 0 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = 0 \end{array}\right\}. \qquad (44)$$

Рассмотрим подробно этот метод для линейных дифференциальных неоднородных уравнений второго порядка:

$$y' + P_1(x)y' + P_2(x)y = f(x). \qquad (45)$$

Получив общее решение $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ (46)

однородного уравнения, поступают следующим образом: полагают, что в этом решении величины $c_1(x)$ и $c_2(x)$ являются не постоянными, а функциями независимой переменной x и записывают $y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$.

Для определения функций $c_1(x)$ и $c_2(x)$ составляется система (44).

$$\left.\begin{array}{l} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{array}\right\}. \qquad (47)$$

Определитель этой системы — *определитель Вронского*. Так как (46) есть общее решение (45), то функции y_1 и y_2 линейно независимы и их определитель не равен 0. Поэтому система (47) имеет всегда решение и притом единственное. Решая эту систему уравнений относительно $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, получим:

$$\left.\begin{array}{ll} C_1'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W} & C_1'(x) = \dfrac{-y_2 f(x)}{W} \\ C_2'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{W} & C_2'(x) = \dfrac{y_1 f(x)}{W} \end{array}\right\}, \tag{48}$$

где определитель Вронского $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$.

Из (48) интегрированием находим:

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2 f(x)}{W} dx + C_1, C_2(x) = \int \frac{y_1 f(x)}{W} dx + C_2 . \tag{49}$$

Подставляя (49) в (46) получим: $y = \left(-\int \frac{y_2 f(x)}{W} dx + C_1\right) y_1 + \left(\int \frac{y_1 f(x)}{W} dx + C_2\right) y_2$.

Раскрывая скобки, найдем $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_2 \int \frac{y_1 f(x)}{W} dx - y_1 \int \frac{y_2 f(x)}{W} dx$.

Сравнивая с (40), замечаем, что первые два слагаемых $c_1 y_1 + c_2 y_2$ в правой части — общее решение однородного уравнения, соответствующего (45), а последние два слагаемых — частное решение неоднородного уравнения (45).

Обозначая эти два слагаемых через Y, получаем формулу *частного решения* линейного неоднородного уравнения второго порядка: $Y = y_2 \int \frac{y_1 f(x)}{W} dx - y_1 \int \frac{y_2 f(x)}{W} dx$. В более компактной форме частное решение линейного неоднородного уравнения второго порядка может быть записано так:

$$Y = \begin{vmatrix} \int \frac{y_1 f(x)}{W} dx & \int \frac{y_2 f(x)}{W} dx \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}. \tag{50}$$

Все величины, входящие в эту формулу, известны.

Замечание 9. Следует иметь в виду, что система (47) так же, как и формула (50), имеет место тогда, когда коэффициент при старшей производной равен единице. Функция $f(x)$ есть правая часть уравнения при этом предположении.

Метод вариации произвольных постоянных — универсальный. Он позволяет при помощи квадратур определить частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (34), если известно общее решение соответствующего ему однородного уравнения.

Пример 16. Проинтегрировать уравнение $y'' + y = tg^2 x$.

Корни характеристического уравнения $k^2 + 1 = 0$ — комплексные сопряженные $k_{1,2} = \pm i$, следовательно, общее решение *однородного уравнения* есть $y_{o.o} = c_1 \cos x + c_2 \sin x$.

Общее решение неоднородного уравнения ищем в виде:

$y_{н.o} = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x$, т. к. для данного примера

$y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$, $y_1' = -\sin x$, $y_2' = \cos x$, составляем систему

$$\left.\begin{aligned} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = tg^2 x \end{aligned}\right\}.$$

Из этой системы найдем функции $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$.

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ tg^2 x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = -\frac{sin^3 x}{cos^2 x};$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & tg^2 x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{sin^2 x}{\cos x};$$

$$C_1(x) = -\int \frac{sin^3 x}{cos^2 x} dx = -\int \frac{\sin x(1 - cos^2 x)}{cos^2 x} dx =$$

$$= -\frac{1}{\cos x} - \cos x + C_1;$$

$$C_2(x) = \int \frac{sin^2 x}{\cos x} dx = \int \frac{1 - cos^2 x}{\cos x} dx = \ln tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \sin x + C_2.$$

Подставив найденные значения $C_1(x)$ и $C_2(x)$, получим общее решение данного дифференциального уравнения:

$$y = \left(-\frac{1}{\cos x} - \cos x + C_1\right) \cos x + \left[-\sin x + \ln tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C_2\right] \sin x;$$

$$y = -1 - cos^2 x + C_1 \cos x - sin^2 x + \sin x \ln tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C_2 \sin x =$$

$$= -2 + C_1 \cos x + C_2 \sin x + \sin x \ln tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

§ 12. Метод неопределенных коэффициентов для определения частного решения неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами

Пусть в уравнении $y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_n(y) = f(x)$ коэффициентами являются не функции, а вещественные числа, а его правая часть $f(x)$ имеет вид: $f(x) = e^{\propto x}[P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x]$, (51)
где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, которые могут быть одной и той же степени и разных степеней. Если они разной степени, то пусть n — их наивысшая степень (при $n = 0$ эти многочлены попросту постоянные величины). Величины $\propto$ и β — вещественные числа.

В рассматриваемом случае метод вариации произвольных постоянных для определения частного решения неоднородного уравнения, конечно, также применим. Однако здесь можно отыскать частное решение более простым способом, пользуясь которым не понадобится вычислять интегралы. Интегрирование уравнения можно провести с помощью только алгебраических операций методом, который называется методом неопределенных коэффициентов.

Если правая часть имеет вид (51), то следует рассмотреть два случая.

1) Число $\propto + \beta i$ не является корнем характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения. В этом случае частное решение неоднородного уравнения:

$Y_1 = e^{\propto x}[p(x)\cos\beta x + q(x)\sin\beta x]$, (52)

$p(x)$ и $q(x)$ — многочлены одной и той же степени, равной наивысшей степени многочленов $P(x)$ и $Q(x)$. Коэффициенты многочленов $p(x)$ и $q(x)$ — числа, подлежащие определению в (52), только эти коэффициенты и подлежат определению, числа же $\propto$ и β те же, что и в (51).

2) Если число $\propto + \beta i$ является корнем кратности r ($r \geq 1$) характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения ищется в виде $Y_2 = x^r e^{\propto x}[p(x)\cos\beta x + q(x)\sin\beta x]$.

Здесь многочлены $p(x)$ и $q(x)$, степень которых равна наивысшей степени многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, подлежат определению; показа-

тель степени r равен кратности корня $\propto + \beta i$ характеристического уравнения. Таким образом, и в этом случае определению подлежат только коэффициенты многочленов $p(x)$ и $q(x)$, все же остальные числа $\propto, \beta, r$ — известны.

Неопределенные коэффициенты многочленов $p(x)$ и $q(x)$ как в том, так и в другом случае находятся так:
в заданное уравнение подставляется Y и сравниваются коэффициенты при одинаковых степенях независимой переменной в левой и правой частях уравнения.

Замечание 10. Рассматриваемый вид неоднородного линейного уравнения (коэффициенты постоянные, а правая часть имеет вид (51)) встречается очень часто, а механика их интегрирования исключительно проста.

Пример 17. Найти общее решение уравнения $y'' - y = e^{-x}$.

Найдем сперва решение однородного уравнения: $y'' - y = 0$.

$k^2 - 1 = 0, k_1 = -1, k_2 = 1 \ => \propto = -1, \beta = 0, \propto + \beta i = -1, r = 1$

$y_{o.o} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. Теперь отыщем частное решение.

$y_2 = Ae^{-x}x,\ y_2' = -Ae^{-x}x + Ae^{-x},\ y_2'' = Ae^{-x}x - Ae^{-x} - Ae^{-x}$.

$Ae^{-x}x - Ae^{-x} - Ae^{-x} - Ae^{-x}x = e^x \ => \ -2A = 1 \ => \ A = -\frac{1}{2}$

$y_{\text{н}.o} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} e^{-x}\, x.$

§ 13. Уравнение Эйлера. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (основные понятия)

Уравнение Эйлера является линейным дифференциальным уравнением, которое имеет вид:

$$(ax+b)^n (y)^{(n)} + a_1 (ax+b)^{n-1} (y)^{(n-1)} + \\ + a_2 (ax+b)^{n-2} (y)^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_n y = f(x), \qquad (53)$$

где все a_i $(i = 1,2, \dots)$, а также a и b — вещественные числа, а правая часть $f(x)$ — функция независимой переменной x, и по этой переменной вычислены все производные в (53).

В частном случае, когда $a = 1, b = 0$ уравнение (53) принимает вид:

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + a_2 x^{n-2} y^{(n-2)} + \cdots$$
$$+a_{n-1} x y' + a_n y = f(x). \qquad (54)$$

Уравнение Эйлера (53) и (54) представляют собой частный случай линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

В приложениях математики уравнение Эйлера встречается часто. Если ввести замену независимой переменной по формуле

$$ax + b = e^t \ (t = \ln|ax + b|) \qquad (55)$$

в случае, если уравнение имеет вид (53), или

$$x = e^t \ (t = \ln|x|), \qquad (56)$$

если уравнение имеет вид (54), то уравнение Эйлера приводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами.

Из (55) следует
$$\left.\begin{aligned} y' &= ae^{-t}\frac{dy}{dt} \\ y'' &= a^2 e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) \\ y''' &= a^3 e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\}. \qquad (57)$$

Делая в (52) замену переменных по формулам (42), это уравнение преобразуем в линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, которое умеем интегрировать.

Пример 18. Найти общее решение уравнения $x^2 y'' + 5xy' + 3y = 0$.

Решение. Это уравнение Эйлера, т. е. вида (54). Произведем замену переменной $x = e^t$ по формуле (56) на основании (57) при $a = 1$ и получим $y' = e^{-t}\frac{dy}{dt}, y'' = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$. (57')

Подставляя эти значения производных в заданное уравнение и замечая, что на основании (56) $x^2 = e^{2t}$, получаем $e^{2t}\underbrace{e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)}_{y''} +$ $+5e^t \underbrace{e^{-t}\frac{dy}{dt}}_{y'} + 3y = 0$. Отсюда следует, что $\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + 5\frac{dy}{dt} + 3y = 0$.

Делая приведение подобных членов, имеем: $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = 0$.

Далее, применяя формулы (57'), получим уравнение:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 12y = t, \qquad (58)$$

которое является линейным неоднородным уравнением с постоянными коэффициентами. Поступаем так: отбрасываем правую часть и ищем общее решение уравнения $\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 12y = t$. Его характеристическое уравнение $k^3 + 3k + 12 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{39}}{2}i$.

Частные решения уравнения:

$$y_1 = e^{-3/2t}\cos\frac{\sqrt{39}}{2}t\,,\ \ y_2 = e^{-3/2t}\sin\frac{\sqrt{39}}{2}t,$$

а его общее решение будет таковым:

$$y_{o.o} = C_1e^{-3/2t}\cos\frac{\sqrt{39}}{2}t + C_2e^{-3/2t}\sin\frac{\sqrt{39}}{2}t.$$

Теперь отыщем частное решение уравнения (58). Сравнивая его с (51) $f(x) = e^{\propto x}[P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x]$, отмечаем, что $\propto = 0, \beta = 0$. Число $\propto + \beta i$ не является корнем характеристического уравнения (среди его корней числа нуль нет). Частное решение ищем в виде: $Y_2 = At + B$

$$\begin{array}{r|l} 12 & Y_2 = At + B \\ 3 & Y_2' = A \\ 1 & Y_2'' = 0 \\ \hline \end{array}$$

$t = 12At + 12B + 3A$. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях буквы t в левой и правой частях, получим $12A = 1$, $A = \frac{1}{12}$, $12B + 3A = 0$, $B = -\frac{1}{48}$ => $Y_2 = \frac{1}{12}t - 48$.

Итак, $y_{o.н} = C_1e^{-3/2t}\cos\frac{\sqrt{39}}{2}t + C_2e^{-3/2t}\sin\frac{\sqrt{39}}{2}t + \frac{1}{12}t - 48$. Теперь следует возвратиться к старой переменной x $(t = \ln x)$. Окончательно получим:

$$y = x^{-3/2}\left[C_1\cos\left(\frac{\sqrt{39}}{2}\ln x\right) + C_2\sin\left(\frac{\sqrt{39}}{2}\ln x\right)\right] + \frac{1}{12}\ln x - \frac{1}{48}.$$

Пример 19. Найти общее решение уравнения $x^2y'' + 4xy' + 12y = \ln x$.

Предложенное уравнение — уравнение Эйлера. От уравнения, решенного ранее (см. пример 17), оно отличается наличием правой части, являющейся функцией той независимой переменной, по которой вычислены производные.

Как и раньше, это линейное уравнение с переменными коэффициентами может быть преобразовано в линейное уравнение с постоянными коэффициентами с помощью подстановки (57) $x = e^t$, $t = \ln|x|$.

§ 14. Системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

Нормальной системой дифференциальных уравнений называется система уравнений вида:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}\right\}. \qquad (59)$$

В этой системе уравнений неизвестными являются n функций $x_1, x_2, \dots, x_n$, а независимой переменной — t.

Особенности нормальной системы дифференциальных уравнений:

1) Все входящие в систему уравнения являются уравнениями первого порядка.

2) Все уравнения системы разрешены относительно производных искомых функций $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}$. Если нормальная система уравнений (59) линейна, а коэффициенты при неизвестных функциях постоянны, то она имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + \varphi_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + \varphi_2(t) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + \varphi_n(t) \end{aligned}\right\}. \qquad (60)$$

Все искомые функции $x_1, x_2, \dots, x_n$ входят в систему (60) в первой степени, а функции $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ — функции независимой переменной t, по которой вычислены производные.

Если все эти функции равны нулю, то система (60) называется однородной, а если хотя бы одна из них не равна нулю — неоднородной.

Число произвольных постоянных, входящих в общее решение нормальной системы уравнений, равно числу неизвестных функций, входящих в систему. Произвольные постоянные определяются из начальных или краевых условий.

Способ интегрирования нормальных систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами покажем на примере однородной системы из трех уравнений.

Пример 20. Найти общее решение системы: $\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x - y + z \\ \frac{dy}{dt} &= -x + 5y - z \\ \frac{dz}{dt} &= x - y + 3z \end{aligned}\right\}.$

Решение. Неизвестными функциями являются x, y, z, а независимой переменной — t. Приведем решение этой системы к решению одного уравнения, порядок которого равен числу уравнений, входящих в систему.

Для этого любое из уравнений системы продифференцируем по t и заменим в полученном уравнении производные $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ и $\frac{dz}{dt}$ их выражениями из системы. Проделаем это, например, с первым уравнением, получим $\frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt}$. (A)

Заменим в этом уравнении производные $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, стоящие в правой части, их выражениями из второго и третьего уравнений заданной системы и получим уравнение $\frac{d^2x}{dt^2} = 3\underbrace{(3x - y + z)}_{\frac{dx}{dt}} - \underbrace{(-x + 5y - z)}_{\frac{dy}{dt}} + \underbrace{(x - y + 3z)}_{\frac{dz}{dt}}$, откуда после приведения подобных членов в правой части найдем $\frac{d^2x}{dt^2} = 11x - -9y + 7z$. (B)

Это уравнение опять дифференцируем по t и получим $\frac{d^3x}{dt^3} = 11\frac{dx}{dt} - 9\frac{dy}{dt} + 7\frac{dz}{dt}$.

Снова заменим в правой части производные $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ и $\frac{dz}{dt}$ их выражениями из заданной системы и получим уравнение $\frac{d^3x}{dt^3} = 11(3x - y + z) - -9(3x - y + z) + 7(3x - y + z)$, которое после приведения подобных членов в правой части запишется так: $\frac{d^3x}{dt^3} = 49x - 63y + 41z.$ (C)

Рассмотрим систему уравнений, состоящую из первого уравнения заданной системы, т. е. уравнения, обе части которого мы дифференцировали, и уравнений (B) и (C)

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x - y + z \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= 11x - 9y + 7z \\ \frac{d^3x}{dt^3} &= 49x - 63y + 41z \end{aligned}\right\}. \qquad (D)$$

Чтобы прийти к уравнению, содержащему только одну неизвестную функцию, из первых двух уравнений системы (D) определим функции y и z. Из этих уравнений следует

$$\left.\begin{aligned} y - z &= 3x - \frac{dx}{dt} \\ 9y - 7z &= 11x - \frac{d^2x}{dt^2} \end{aligned}\right\}.$$

Решая их относительно y и z, получим $y = \dfrac{-10x + 7\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{d^2x}{dt^2}}{2}$,

$$z = \frac{-16x + 9\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{d^2x}{dt^2}}{2}. \qquad (E)$$

Подставляя эти значения y и z в третье уравнение системы (D), найдем

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 49x - 63\frac{-10x + 7\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}}{2} + 41\frac{-16x + 9\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}}{2}.$$

После упрощений в правой части получаем:

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 36x - \frac{d^2x}{dt^2} + 11\frac{d^2x}{dt^2}. \qquad (F)$$

Уравнение (F) — линейное однородное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами. Перепишем его так:

$$\frac{d^3x}{dt^3} - 11\frac{d^2x}{dt^2} + 36\frac{d^2x}{dt^2} - 36x = 0 \qquad (G)$$

и найдем его общее решение по известным правилам.

Составляем характеристическое уравнение: $k^3 - 11k^2 + 36k - -36 = 0$. Его корнями являются $k_1 = 2, k_2 = 3, k_3 = 6$. Частными решениями уравнения (G) будут функции: $x_1 = e^{2t}, x_2 = e^{3t}, x_3 = e^{6t}$, а его общим решением $x = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + C_3e^{6t}$.

Чтобы определить две остальные неизвестные функции y и z, воспользуемся выражением (E). После подстановки в (E) выражений $x, \frac{dx}{dt}$ и $\frac{d^2x}{dt^2}$ получим $y = C_2e^{3t} - 2C_3e^{3t}, z = -C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + C_3e^{6t}$.

§ 15. Системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

С линейными системами дифференциальных уравнений второго порядка приходится встречаться часто в теоретической механике, сопротивлении материалов и в других приложениях математики.

Система дифференциальных уравнений, разрешенных относительно наивысших производных искомых функций, называется *канонической*.

В случае трех неизвестных функций x, y, z и независимой переменной t эта система уравнений записывается так:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= f\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \varphi\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \psi\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \end{aligned}\right\}. \qquad (61)$$

Общее решение этой системы содержит шесть произвольных постоянных, для определения которых задается шесть начальных условий (в механике это начальное положение и скорость точки в некоторый момент времени $t = t_0$). Для определения решения канонической системы (61) применяется такой же прием, как и при решении рассмотренных выше нормальных систем: *последовательным дифференцированием одного уравнения системы (или нескольких ее уравнений) следует исключить все искомые функции, кроме одной.*

Сущность этого приема подробно разберем на примере.

Пример 21. Найти общее решение системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -2x - 4y \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= x - 7y \end{aligned}\right\}.$$

Решение. Продифференцируем первое уравнение два раза по t и получим:

$$\frac{d^4x}{dt^4} = -2\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{d^2y}{dt^2}. \qquad (62)$$

Подставим в (62) вместо $\frac{d^2y}{dt^2}$ его выражение из второго уравнения системы. Тогда $\frac{d^4x}{dt^4} = -2\frac{d^2x}{dt^2} - 4(x - 7y)$, или

$$\frac{d^4x}{dt^4} = -2\frac{d^2x}{dt^2} - 4x + 28y. \qquad (63)$$

Из первого уравнения системы определим y и подставим его в уравнение (63) $y = \frac{1}{4}\left(-2x - \frac{d^2x}{dt^2}\right)$. (64)

С этим значением y уравнение (63) перепишется так: $\frac{d^4x}{dt^4} = -2\frac{d^2x}{dt^2} - 4x + 28\,\frac{1}{4}\left(-2x - \frac{d^2x}{dt^2}\right)$, раскрывая скобки, получим: $\frac{d^4x}{dt^4} + 9\frac{d^2x}{dt^2} + 18x = 0$. Характеристическое уравнение $k^4 + 9k^2 + 18 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm\sqrt{3}i, k_{3,4} = \pm\sqrt{6}i$.

Функция $x = C_1\cos\sqrt{3}t + C_2\sin\sqrt{3}t + C_3\cos\sqrt{6}t + C_4\sin\sqrt{6}t$. (65)

Теперь из (64) найдем y, из (65) находим $\frac{d^2x}{dt^2} = -3C_1\cos\sqrt{3}t - 3C_2\sin\sqrt{3}t - 6C_3\cos\sqrt{6}t - 6C_4\sin\sqrt{6}t$. Подставляя x и $\frac{d^2x}{dt^2}$ в (64), окончательно получаем:

$$y = \frac{1}{4}C_1\cos\sqrt{3}t + \frac{1}{4}C_2\sin\sqrt{3}t + C_3\cos\sqrt{6}t + C_4\sin\sqrt{6}t.$$

Типовые задачи и алгоритмы их решения

1. Постановка задачи. Доказать, что функция $y = y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $F(x, y, y') = 0$.

Алгоритм решения.

Для доказательства того, что функция $y = y(x)$ удовлетворяет уравнению $F(x, y, y') = 0$, достаточно вычислить производную $y'(x)$, подставить $y(x)$ и $y'(x)$ в это уравнение и убедиться в том, что получается тождество, т. е. $F(x, y(x), y'(x)) \equiv 0$ для всех допустимых x.

Пример 22. Доказать, что функция $y = -\sqrt{x^4 - x^2}$ удовлетворяет уравнению $xyy' - y^2 = x^4$.

Решение. Имеем $y' = -\frac{x(2x^2-1)}{\sqrt{x^4-x^2}}$. Подставим y и y' в левую часть уравнения и проведем необходимые преобразования: $x\left(-\sqrt{x^4 - x^2}\right)\left(-\frac{x(2x^2-1)}{\sqrt{x^4-x^2}}\right) - (x^4 - x^2) = x(2x^3 - x) - x^4 + x^2 = x^4$.

Получаем тождество $x^4 \equiv x^4$.

Ответ: $y = -\sqrt{x^4 - x^2}$ удовлетворяет заданному уравнению.

Пример 23. Найти интегральные кривые дифференциального уравнения

$6xdx - 6ydy = 2x^2ydy - 3xy^2dx$.

Решение.

а) Перепишем исходное уравнение в виде:

$3x(2 + y^2)dx = 2y(x^2 + 3)dy$.

Поскольку $x^2 + 3 > 0$ и $2 + y^2 > 0$, разделяем переменные, т. е. представляем в виде: $\frac{3x}{x^2+3}dx = \frac{2y}{2+y^2}dy$.

б) Вычислим интегралы в уравнении $\int \frac{3x}{x^2+3}dx = \int \frac{2y}{2+y^2}dy$.

Имеем $\int \frac{3x}{x^2+3}dx = \frac{3}{2}\ln(x^2 + 3) + C_1$, $\int \frac{2y}{2+y^2}dy = \ln(2 + y^2) + C_2$.

Следовательно, $\frac{3}{2}\ln(x^2 + 3) = \ln(2 + y^2) + C_0$, где $C_0 = C_2 - C_1$.

в) Упростив это равенство, получим $\frac{(x^2+3)^3}{(2+y^2)} = C$.

Ответ: Интегральные кривые определяются уравнением $\frac{(x^2+3)^3}{(2+y^2)} = C$ при всевозможных значениях C.

Пример 24. Найти интегральные кривые дифференциального уравнения

$$y' = \frac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}.$$

Решение.

а) Данное уравнение является однородным. Преобразуем его к виду: $y' = \dfrac{1 + 2\dfrac{y}{x} - 5\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{2 - 6\dfrac{y}{x}}$ (мы разделили числитель и знаменатель правой части заданного уравнения на x^2).

б) Делаем подстановку $y = xz(x)$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y' = z + xz'$ и уравнение приводится к виду: $z'x + z = \frac{1+2z-5z^2}{2-6z}$, т. е. к уравнению с разделяющимися переменными.

В результате простых преобразований получаем $\frac{dz}{dx}x = \frac{1+z^2}{2-6z}$.

в) Разделяем переменные ($1 + z^2 \neq 0$ и $x \neq 0$): $\frac{2-6z}{1+z^2}dz = \frac{dx}{x}$.

г) Интегрируя, получаем: $2arctg\, z - 3\ln(1 + z^2) = \ln|x| + C$.

Заменяя z на y/x, приходим к окончательному ответу.

Ответ: Интегральные кривые определяются уравнением:

$$2\, arctg\, \frac{y}{x} - \ln\frac{(x^2 + y^2)^3}{|x|^5} = C$$

при всех возможных значениях C.

2. Постановка задачи. Решить задачу Коши для уравнения

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (66)$$

с начальным условием $y(x_0) = y_0$. (66')

Алгоритм решения.

а) Запишем соответствующее однородное линейное уравнение: $y' + p(x)y = 0$. (67)

Это уравнение с разделяющимися переменными.

б) Разделяя переменные и интегрируя, получим общее решение однородного уравнения (66) $y = C\exp\{-\int p(x)dx\}$. (68)

в) Применяем метод вариации произвольной постоянной:

1) ищем решение неоднородного уравнения (66) в виде (68), считая C неизвестной функцией x, т. е. полагая $C = C(x)$;

2) подставляем в уравнение (66) y и y', определяемые из соотношения (68), где $C = C(x)$. Из полученного дифференциального уравнения определяем функцию $C(x)$;

г) Таким образом, общее решение неоднородного уравнения получаем в виде: $y = C(x)\exp\{-\int p(x)dx\}$. (68')

Здесь $C(x)$ содержит произвольную постоянную C_0.

д) Используя начальные условия (66'), находим значение C_0 и получаем решение поставленной задачи Коши. Записываем ответ в виде $y = \varphi(x)$.

Пример 25. Найти решение задачи Коши для уравнения

$$y' - \frac{1}{x}y = -\frac{2}{x^2} \qquad (69)$$

с начальным условием $y(1) = 1$.

Решение.

а) Записываем соответствующее однородное уравнение $y' - \frac{1}{x}y = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными.

б) Разделяя переменные и интегрируя, получаем общее решение однородного уравнения $y = Cx$.

в) Применяем метод вариации произвольной постоянной:

1) ищем решение неоднородного уравнения (69) в виде: $y = C(x)x$, где $C(x)$ — неизвестная функция x.

2) подставляя в уравнение (69) $y = C(x)x$ и $y' = C'(x)x + C(x)$, получаем дифференциальное уравнение относительно $C(x)$: $C'(x)x = -\frac{2}{x^2}$. Разделяя переменные $dC = -\frac{2}{x^3}dx$ и интегрируя, получаем $C(x) = \frac{1}{x^2} + C_0$, где C_0 — произвольная постоянная.

г) Таким образом, общее решение неоднородного уравнения (69) имеет вид: $y = \left(\frac{1}{x^2} + C_0\right)x$. (70)

д) Используя начальное условие $y(1) = 1$, получаем $\frac{1}{1^2} + C_0 = 1$, находим $C_0 = 0$ и подставляем в общее решение (70).

Ответ: $y = 1/x$.

Пример 26. Найти решение задачи Коши $xy' + y = xy^2$ (71)

с начальным условием $y(1) = 1$.

Решение.

Преобразовав уравнение к виду: $y' + \frac{1}{x}y = y^2$, убеждаемся, что это уравнение Бернулли с $\propto = 2$.

а) С помощью подстановки $y = z^{\frac{1}{1-\propto}} = z^{-1}$ уравнение (71) приводится к линейному $z' - \frac{1}{x}z = -1$. (72)

б) Решаем уравнение (72) методом вариации произвольной постоянной:

1) решаем однородное уравнение $z' - \frac{1}{x}z = 0$, получаем $z = Cx$;

2) ищем решение неоднородного уравнения в виде $z = C(x)x$;

3) подставляя в уравнение (72) $z = C(x)x$, $z' = C'(x)x + C(x)$, получаем уравнение с разделяющимися переменными $C'(x)x = -1$.

Разделяя переменные и интегрируя, получаем $C(x_0) = C_0 - \ln x$. Таким образом, общее решение уравнения (72) имеет вид: $z = x(C_0 - \ln x)$, или, после замены $z = y^{-1}$, $y = \frac{1}{x(C_0 - \ln x)}$.

в) Используя начальное условие $y(1) = 1$, имеем: $\frac{1}{1(C_0 - 0)} = 1$. Откуда $C_0 = 1$.

Ответ: $y = \frac{1}{x(1-\ln x)}$.

Пример 27. Найти интегральные кривые дифференциального уравнения

$$x\,dx + y\,dy + \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = 0. \qquad (73)$$

Решение.

а) Преобразуем уравнение (73): $\left(x - \frac{y}{x^2+y^2}\right)dx + \left(y + \frac{x}{x^2+y^2}\right)dy = 0$.

В данном случае $P(x,y) = \left(x - \frac{y}{x^2+y^2}\right)$, $Q(x,y) = \left(y + \frac{x}{x^2+y^2}\right)$.

Эти функции непрерывно дифференцируемы в области $x^2 + y^2 > 0$. Кроме того, $\frac{\partial}{\partial y}\left(x - \frac{y}{x^2+y^2}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(y + \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ $(x^2 + y^2 > 0)$. Поэтому $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ — дифференциал некоторой функции $U(x,y)$ в любой односвязной области D, не содержащей точку $x = 0, y = 0$. Следовательно, уравнение (73) является уравнением в полных дифференциалах и может быть записано в виде: $dU(x,y) = 0$ при $(x,y)\epsilon D$.

При этом $\frac{\partial U}{\partial x} = x - \frac{y}{x^2+y^2}, \frac{\partial U}{\partial y} = y + \frac{x}{x^2+y^2}$. (74)

б) Интегрируя первое равенство в (74) по x, получим, что при $y \neq 0$ $U = \int \left(x - \frac{y}{x^2+y^2}\right) dx = \frac{x^2}{2} - arctg\ \frac{x}{y} + \varphi(y)$, где $\varphi(y)$ — неизвестная функция, которую еще предстоит найти.

в) Дифференцируя U по y, имеем $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} + \varphi'(y)$. Используя второе равенство в (74), получим $\frac{x}{x^2+y^2} + \varphi'(y) = y + \frac{x}{x^2+y^2}$. После преобразования имеем $\varphi'(y) = y$.

г) Отсюда $\varphi(y) = \frac{y^2}{2} + C$, и, следовательно $U(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2} - -arctg\ \frac{x}{y} + C, y > 0$ или $y < 0$.

Ответ: интегральные кривые в области $y > 0$ или в области $y < 0$ определяются уравнением $\frac{x^2+y^2}{2} - arctg\ \frac{x}{y} = C$ при всевозможных значениях C.

Пример 28. Найти общее решение дифференциального уравнения $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 12x^3$.

Решение.

а) Поскольку дифференциальное уравнение не содержит y, то полагая $y' = p(x)$, имеем $y'' = p'(x)$. Получаем дифференциальное уравнение первого порядка $(1 + x^2)p' + 2xp = 12x^3$.

б) Уравнение $p' + \frac{2x}{1+x^2}p = \frac{12x^3}{1+x^2}$ линейное относительно p и p'. Решая его, например, методом вариации произвольной постоянной, находим $p = \frac{3x^4+C}{1+x^2}$.

в) Так как $p = y'(x)$, имеем $y' = \frac{3x^4+C}{1+x^2}$. Интегрируя, получим общее решение $y = (C + 3)arctg\ x + x^3 - 3x + C_2$.

Ответ: $y = C_1 arctg\ x + x^3 - 3x + C_2$.

Пример 29. Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения $y''y^3 + 1 = 0$ с начальными условиями

$y(1) = -1, y'(1) = -1$.

Решение.

а) Поскольку дифференциальное уравнение не содержит явно независимой переменной x, полагаем $y' = p(y)$, где $p(y)$ — новая неиз-

вестная функция. Тогда по формуле для производной сложной функции имеем:

$y'' = \frac{d}{dx}y' = \frac{d}{dx}p(y) = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$. Получим уравнение первого порядка относительно $p(y)$ $\frac{dp}{dy}py^3 = -1$.

б) Разделяя переменные и интегрируя, находим $p^2 = \frac{1}{y^2} + C_1$, т. е. $y' = -\sqrt{\frac{1}{y^2} + C_1}$ (минус мы выбрали из начального условия $y'(1) = -1 < 0$).

в) Из начальных условий (обоих) имеем $y' = -1$ при $y = -1$. Отсюда, $C_1 = 0$. Учитывая, что в силу первого начального условия $y < 0$ и, следовательно, $|y| = -y$, получаем $y' = \frac{1}{y}$.

г) Разделяя переменные и интегрируя, находим $x = \frac{y^2}{2} + C_2$.

д) Из начального условия $y(1) = -1$ получим $C_2 = 1/2$. Следовательно, $y = -\sqrt{2x - 1}$ (минус мы выбрали из начального условия $y(1) = -1 < 0$).

Ответ: $y = -\sqrt{2x - 1}$.

3. Постановка задачи. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = e^{\propto x}[P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx],$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени n, $Q_m(x)$ — многочлен степени m и p, q, a, b — действительные числа.

Алгоритм решения.

Общее решение неоднородного линейного уравнения n-го порядка имеет следующую структуру:

$$y_{\text{о.н.}} = y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.н.}} = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n + y_{\text{ч.н.}}, \quad (75)$$

где $y_1, y_2, \dots, y_n$ — фундаментальная система решений и $y_{\text{о.о.}}$ — общее решение соответствующего однородного уравнения, $y_{\text{ч.н.}}$ — какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения.

а) Записываем соответствующее однородное уравнение

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (76)$$

и ищем его решение в виде $y = e^{\lambda x}$, где λ — неизвестное число.

Подставляя $y = e^{\lambda x}, y' = \lambda e^{\lambda x}$ и $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ в уравнение (76) и сокращая $e^{\lambda x}$, получаем так называемое характеристическое уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. (77)

б) Решаем характеристическое уравнение. Обозначим корни характеристического уравнения λ_1 и λ_2. Тогда фундаментальная система решений и общее решение уравнения (76) записываются в одном из следующих трех видов:

1) если λ_1 и λ_2 вещественны и $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то фундаментальная система решений — это $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ и общее решение имеет вид:

$y_{\text{о.о.}} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$;

2) если λ_1 и λ_2 вещественны и $\lambda_1 = \lambda_2$, то фундаментальная система решений — это $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_1 x}$ и общее решение имеет вид:

$y_{\text{о.о.}} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_1 x}$;

3) если λ_1 и λ_2 комплексные, т. е. $\lambda_{1,2} = \propto \pm i\beta$, то фундаментальная система решений — это $y_1 = e^{\propto x} \cos \beta x$, $y_2 = e^{\propto x} \sin \beta x$ и общее решение имеет вид:

$y_{\text{о.о.}} = e^{\propto x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.

в) Ищем какое-либо частное решение неоднородного уравнения. Поскольку правая часть уравнения имеет вид:

$$e^{\propto x}[P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx], \quad (78)$$

можно применить метод подбора частных решений:

если $a \pm ib$ не является корнем характеристического уравнения (76), то $y_{\text{ч.н.}} = e^{\propto x}\left[\widetilde{P_k}(x) \cos bx + \widetilde{Q_k}(x) \sin bx\right]$, где $\widetilde{P_k}(x)$ и $\widetilde{Q_k}(x)$ — многочлены степени $k = max\{n, m\}$ с неопределенными коэффициентами;

если $a \pm ib$ есть корень характеристического уравнения (76) кратности s, то $y_{\text{ч.н.}} = x^s e^{\propto x}\left[\widetilde{P_k}(x) \cos bx + \widetilde{Q_k}(x) \sin bx\right]$, где $\widetilde{P_k}(x)$ и $\widetilde{Q_k}(x)$ — многочлены степени $k = max\{n, m\}$ с неопределенными коэффициентами.

г) Находим неопределенные коэффициенты, подставляя $y_{\text{ч.н.}}$ в исходное уравнение. Записываем ответ по формуле (75).

Пример 30. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения $y'' + y = x \sin x$. (79)

Решение.

а) Записываем соответствующее однородное уравнение

$$y'' + y = 0 \quad (80)$$

и ищем его решение в виде $y = e^{\lambda x}$, где λ — неизвестное число. Подставляя $y = e^{\lambda x}, y' = \lambda e^{\lambda x}$ и $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ в уравнение (80) и сокращая $e^{\lambda x}$, получаем так называемое характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$.

б) Характеристическое уравнение имеет два комплексно сопряженных корня $\lambda_{1,2} = \pm i$. Имеем фундаментальную систему решений $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$ и общее решение однородного уравнения (80) $y_{\text{о.о.}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

в) Ищем какое-либо частное решение неоднородного уравнения (79). В нашем случае правая часть неоднородного уравнения имеет вид (79) с $a = 0, b = 1, n = 0, m = 1$. Так как характеристическое уравнение имеет комплексные корни $a \pm bi = \pm i$ кратности $s = 1$ и $max\{n, m\} = 1$, то частное решение ищем в виде: $y_{\text{ч.н.}} = x[(A_1 x + +A_2)\cos x + (B_1 x + B_2)\sin x]$, где A_1, A_2, B_1, B_2 — неизвестные числа (неопределенные коэффициенты).

г) Находим неопределенные коэффициенты, дифференцируя $y_{\text{ч.н.}}$ два раза и подставляя в уравнение (79). Приравнивая коэффициенты в обеих частях равенства при $\cos x, x\cos x, \sin x, x\sin x$, получим четыре уравнения:

$$\begin{cases} 2A_1 + 2B_2 = 0, \\ 4B_1 = 0, \\ -2A_2 + 2B_1 = 0 \\ -4A_1 = 1, \end{cases}$$ из которых определяем

$A_1 = -\frac{1}{4}, A_2 = 0, B_1 = 0, B_2 = \frac{1}{4}$.

Таким образом, $y_{\text{ч.н.}} = -\frac{x^2}{4}\cos x + \frac{x}{4}\sin x$.

По формуле (75) находим общее решение неоднородного уравнения $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{x^2}{4}\cos x + \frac{x}{4}\sin x$.

Ответ: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{x^2}{4}\cos x + \frac{x}{4}\sin x$.

4. Постановка задачи. Найти решение задачи Коши для линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = f(x) \tag{81}$$

с начальными условиями $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$. (81′)

Алгоритм решения.

а) Записываем соответствующее однородное уравнение с постоянными коэффициентами $y'' + p_1 y' + p_2 y = 0,$ (82)
находим фундаментальную систему решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ и общее решение однородного уравнения $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$.

б) Применяем *метод Лагранжа* (метод вариации произвольных постоянных). Если известна фундаментальная система решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ однородного уравнения (82), то общее решение соответствующего неоднородного уравнения (81) может быть найдено по формуле $y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$, где функции $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ определяются из системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases} \quad (83)$$

Интегрируя, находим функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ и записываем общее решение неоднородного уравнения.

в) используя начальные условия (81′), находим решение задачи Коши.

Записываем ответ в виде $y = y(x)$.

Пример 31. Найти решение задачи Коши

$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$ с начальными условиями $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

Решение.

а) Записываем соответствующее однородное уравнение: $y'' + y = 0$.

Находим фундаментальную систему решений $y_1 = \cos x$ и $y_2 = \sin x$ и общее решение однородного уравнения $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

б) Применяем метод Лагранжа (метод вариации произвольных постоянных):

1) ищем решение данного неоднородного уравнения в виде $y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$;

2) записываем систему уравнений для определения функций $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ C_1'(x)(-\sin x) + C_2'(x)\cos x = \frac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Решая ее (т. к. решение ищем в окрестности точки $x = 0$, то $\cos x > 0$), получим $C_1'(x) = -\mathrm{tg}\, x, C_2'(x) = 1$.

Интегрируя, находим $C_1(x) = \ln\cos x + C_1^*, C_2(x) = x + C_2^*$;

3) записываем полученное общее решение данного неоднородного уравнения $y = (\ln\cos x + C_1^*)\cos x + (x + C_2^*)\sin x$.

в) используя начальные условия, определяем константы C_1^* и C_2^*. Так как $y(0) = (\ln\cos 0 + C_1^*)\cos 0 + (0 + C_2^*)\sin 0 = 1$, то $C_1^* = 1$. Так как $y'(0) = (\ln\cos 0 + C_1^*)\sin 0 + \left(-\frac{\sin 0}{\cos 0}\right)\cos 0 + \sin 0 + (0 + C_2^*)\cos 0 = 0$, то $C_2^* = 0$.

Ответ: $y = \cos x\,(\ln\cos x + 1) + x\sin x$.

Резюме

Рассматриваются основные виды обыкновенных дифференциальных уравнений, методы их решения, теорема существования и единственности для дифференциальных уравнений, а также решение задачи Коши.

Глава 8. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Большая часть великих идей современных математиков,
если не все, получила свое начало в наблюдении.
Дж. Сильвестр

Эта глава посвящена классической теории бесконечных сумм чисел, или числовых рядов. Понятие числовых сумм фактически было известно в Древней Греции (Евдох, Евклид, Архимед). Нахождение бесконечных сумм являлось составной частью так называемого метода исчерпывания, широко используемого древнегреческими учеными для нахождения площадей фигур, объемов тел, длин кривых и т. д. Так, например, Архимед для вычисления площади параболического сегмента (т. е. фигуры, ограниченной прямой и параболой) нашел сумму бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем.

Как самостоятельное понятие «ряд» математики стали использовать в XVIII в. И. Ньютон и Г. Лейбниц применяли ряды для решения алгебраических и дифференциальных уравнений. Теория рядов в XVIII-XIX вв. развивалась в работах И. Бернулли, Б. Тейлора, К. Маклорена, Л. Эйлера, Ж. Д'Аламбера, Ж. Лагранжа и др. Строгая теория рядов была создана в XIX в. на основе понятия предела в трудах К. Гаусса, Б. Больцано, О. Коши, П. Дирихле, И. Абеля, К. Вейерштрасса, Б. Римана и др.

Цели и задачи

Сформировать представление о понятии числового ряда, полезности его суммы, а также о различных областях применения числовых рядов.

Знать признаки сходимости числовых рядов, признаки сравнения, Коши, Д'Аламбера, Лейбница, основные свойства и теоремы степенных рядов, разложение основных функций в ряды Тейлора.

Уметь определять вид числового ряда, находить сумму ряда, область сходимости степенного ряда, раскладывать функцию в ряд Тейлора, находить с помощью рядов пределы и решать дифференциальные уравнения.

§ 1. Основные понятия и определения

Определение 1. Пусть $\{a_n\} = a_1, a_2, \dots, a_n$ — числовая последовательность. Выражение вида $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) назовем *числовым рядом*, числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ — членами ряда, а число a_n — n-м или общим членом ряда.

В дальнейшем в качестве индекса суммирования в выражении (1) будем использовать любые буквы латинского алфавита, например i, j, k.

Определение 2. Сумму конечного числа n первых членов ряда (1) $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ назовем *n-й частичной суммой* данного ряда.

Таким образом, $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Определение 3. Если для последовательности $\{S_n\}$ частичных сумм ряда (1) существует конечный предел $\lim_{n=\infty} S_n = S$, то ряд (1) называется *сходящимся*, а число S — *суммой* данного ряда $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если предел последовательности $\{S_n\}$ не существует или равен бесконечности, то ряд называется *расходящимся*.

Рассмотрим, например, ряд

$$a - a + a - a + \dots \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a, (a \in R, a \neq 0). \quad (2)$$

Последовательность частичных сумм $S_1 = a_1, S_2 = 0, \dots, S_{2n-1} = a_1, S_{2n} = 0$ этого ряда не имеет предела и поэтому ряд расходится.

Теперь исследуем вопрос о сходимости ряда, составленного из элементов геометрической прогрессии $a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ $(a \neq 0)$.

Сумма n первых членов этого ряда имеет вид:

$$S_n = a + aq + aq^2 + .. + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q} \quad (q \neq 1). \quad (3)$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, |q| < 1 \\ \infty, |q| > 1 \end{cases}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} a/1-q, |q| < 1 \\ \infty, |q| > 1 \end{cases}$.

При $q = -1$ ряд совпадает с рядом (2) при $q = -1$ $S = na$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$.

Следовательно, ряд (3) сходится при $|q| < 1$ и его сумма $S = a/(1-q)$ при $|q| \geq 1$ расходится.

Выражение вида $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + .. + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ представляет собой числовой ряд, *называемый n-м остатком ряда* (1). Для сходящегося ряда можно записать равенство $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = S_n + r_n$. Очевидно, что если числовой ряд (1) сходится, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \text{ то } \lim_{n\to\infty} r_n = 0. \qquad (4)$$

Можно доказать, что условие (4) является не только необходимым, но и достаточным для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, т. е. из его выполнения следует сходимость указанного ряда.

§ 2. Необходимый признак сходимости ряда

Теорема 1. *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. (5)

Доказательство. Пусть $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, т. к. $S_n = S_{n+1} + a_n$, то $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$. Итак, если ряд (1) сходится, то выполняется условие (5). Отсюда вытекает достаточный признак расходимости ряда. Если условие (5) не выполнено, т. е. предел $\lim_{n\to\infty} a_n$ не равен нулю или не существует, то ряд $\sum_{n=\infty}^{\infty} a_n$ расходится. Подчеркнем, что из выполнения условия (5) не обязательно следует сходимость ряда (1), т. е. оно не является достаточным признаком сходимости ряда.

Пример 1. Исследовать на сходимость гармонический ряд

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + .. + \tfrac{1}{n} + .. = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n}. \qquad (6)$$

Решение. Очевидно, что $\lim_{n-\infty} \tfrac{1}{n} = 0$, однако гармонический ряд расходится. Действительно, предположим, что ряд (6) сходится и его сумма равна S, тогда $\lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0$. Из нера-

венства $S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + .. + \frac{1}{2n} \geq n \cdot 1/2n = 1/2$, $n \in N$. Предельным переходом по n получаем противоречие $0 \geq 1/2$.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n$.

Данный ряд расходится, т. к. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + 1/n\right)^n = e \neq 0$.

§ 3. Простейшие свойства числовых рядов

1. Перестановка, отбрасывание или добавление конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость (расходимость).

Действительно, указанные операции изменяют на одну и ту же постоянную величину все частичные суммы ряда, начиная с некоторого номера, а это не влияет на сходимость или расходимость последовательности частичных сумм ряда.

2. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и их суммы равны S_a *и* S_b соответственно, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ также сходится и $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + {}$ $+b_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k) =$ $= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = S_a + S_b$.

Отметим, что обратное неверно, т. е. из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ в общем случае не следует сходимость рядов $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, что показывает пример: ряд $(1-1) + (1-1) + \cdots$ сходится, а ряды $\sum_{k=1}^{\infty} 1$ и $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)$ расходятся.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ называется *суммой рядов* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

3. Если ряд сходится $(\sum_{k=1}^{\infty} a_k)$ и его сумма равна S, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k$ также сходится и $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k = \alpha S$. Действительно, $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha a_k = \alpha \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = aS'$, что и требовалось доказать.

Операции суммирования рядов и умножения рядов на число называются *линейными операциями над рядами.*

§ 4. Ряды с неотрицательными членами

Рассмотрим некоторые признаки сходимости рядов с неотрицательными членами.

Теорема 2. *Для того чтобы ряд с неотрицательными членами сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограниченной.*

Теорема 3 (интегральный признак Коши). *Если неотрицательная интегрируемая функция $f(x)$ на промежутке $[1;+\infty)$ монотонно убывает, члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ имеют вид $a(n) = f(n)$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно, причем в случае сходимости*

$$\int_1^{\infty} f(x)dx \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \int_1^{\infty} f(x)dx + a_1. \qquad (7)$$

Пример 3. Исследовать на сходимость обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, p \in R$. (8)

Решение. При $p = 1$ ряд совпадает с гармоническим рядом (6) и расходится. Если $p \le 0$, то $\frac{1}{n^p} \ge 1\ \forall n \in N$ и $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} \nrightarrow 0$. В этом случае ряд расходится, т. к. нарушается необходимое условие сходимости ряда. Пусть $p > 0$ *и* $p \ne 1$. Положим $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Функция $f(x)$ монотонно убывает на промежутке $[1;\infty)$. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{A\to\infty} \int_1^{A} \frac{dx}{x^p} =$

$$= \lim_{A\to\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^A = \left(\frac{1}{1-p}\right) \lim_{A\to\infty}(A^{1-p} - 1) = \begin{cases} \frac{1}{1-p}, \text{если } p > 1 \\ \infty, \text{если } 0 < p < 1 \end{cases}.$$

Следовательно, *обобщенный гармонический ряд сходится при* $p > 1$ *и расходится при* $p \le 1$.

Теорема 4 (Признак сравнения). *Если для членов рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ справедливо неравенство $0 \le a_n \le b_n\ \ \forall n \ge n_0 \in N$, то*

1) *из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$;*

2) *из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Доказательство. Предположим сначала, что $n_0 = 1$.

1) Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Обозначим через S_n и S_n' n-е частичные суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ соответственно, заметим, что $S_n \le S_n'$ $\forall_n \notin N$, тогда из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует ограниченность последовательности $\{S_n'\}$, а значит и последовательности $\{S_n\}$. А это влечет сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2) Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Тогда последовательность $\{S_n\}$ неограничена, следовательно, неограничена и последовательность $\{S_n'\}$, а значит ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится.

Если же $n_0 > 1$, то для доказательства теоремы достаточно рассмотреть ряды $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$, т. к. отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость. Доказанный признак является достаточным для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд

$1 + 1/2^2 + 1/3^3 + .. + 1/n^n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^n$. Так как $\frac{1}{n^n} \le \frac{1}{n^2}$ $\forall n \ge 2$ и обобщенный гармонический ряд сходится, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^n$ сходится ($p = 2 > 1$), то сходится и данный ряд.

Теорема 5 (Предельный признак сравнения). *Пусть для членов рядов* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n, b_n > 0$ *существует предел* $lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L, 0 < L < \infty$, *тогда ряды* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся и расходятся одновременно.*

Доказательство. Из определения предела $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L$ для любого положительного ε, например $0<\varepsilon<L$, найдется номер n_0, такой, что $L-\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}<L+\varepsilon, \forall n>n_0$ или т. к. $b_n>0$: $(L-\varepsilon)b_n<a_n<$ $<(L+\varepsilon)b_n, \forall n>n_0$. Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(L-\varepsilon)b_n$ и, следовательно, сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

Аналогично доказывается, что из сходимости (расходимости) ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ следует сходимость (расходимость) ряда $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$.

Из предельного признака сравнения следует, что сходимость (расходимость) ряда $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ является необходимым и достаточным условием сходимости (расходимости) соответствующего ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, и наоборот.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n}$.

Решение. Сравним этот ряд с гармоническим. Поскольку $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi\,sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}=\pi\,,(0<\pi<\infty)$ и гармонический ряд расходится, то расходится и исходный ряд.

Замечание 1. При применении признаков сходимости рядов, сформулированных в предыдущих теоремах, в качестве рядов, используемых для сравнения, выбирают, как правило:

1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}, a\neq 0$, из элементов геометрической прогрессии, сходящийся при $|q|<1$ и расходящийся при $|q|>1$.

2. Обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, сходящийся при $p>1$ и расходящийся при $p\leq 1$.

Если же имеются ряды вида $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_k(n)}{Q_l(n)}$, где $P_k(n)$ — многочлен от n степеней k, а $Q_l(n)$ — многочлен от n степеней l, то вопрос о сходимости рядов такого вида полностью исчерпывается сравнением с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, где $P=l-k$. Удобнее при этом использовать признак сравнения в предельной форме.

Отметим, что признаки сравнения не всегда удобно применять, поскольку для их использования в каждом конкретном случае необходимо найти соответствующий вспомогательный ряд, общих конструктивных приемов построения которого не существует. Поэтому на практике часто пользуются другими признаками, основанными на свойствах члена исследуемого ряда.

Теорема 6 (Признак Д'Аламбера). *Пусть для ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, *существует предел* $lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. (9)

Тогда

1) *при* $L < 1$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится*;

2) *при* $L > 1$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится*.

Доказательство. По определению предела из равенства (9) следует, что для любого $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого номера, выполняются неравенства: $L - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon \; \forall n \geq n_0$. (10)

1. Если $L < 1$, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что число $q = L + \varepsilon < 1$. Тогда из неравенства $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q \; \forall n \geq n_0$ получаем, что $a_{n_0+1} < a_{n_0} q$

$$a_{n_0+2} < a_{n_0+1} q < a_{n_0} q^2$$

… … … … … … … … …

$$a_{n_0+k} < a_{n_0+k-1} q < a_{n_0} q^k \; .$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n_0} q^k$ при $|q| < 1$ сходится, то сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_0+k} = \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_к$, а следовательно и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. Если $L > 1$, то найдется такое ε, что число $q = L - \varepsilon > 1$. Тогда из соотношения (10) следует неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} > q \; \forall n \geq n_0$ или $a_{n+1} > q a_n \; \forall n \geq n_0$. Это означает, что начиная с номера n_0, члены ряда возрастают, т. е. необходимый признак сходимости не выполняется и ряд расходится.

Пример 6. Исследовать сходимости ряда $1 + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \cdots + \frac{n!}{n^n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Решение. Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)! n^n}{(n+1)^{n+1} n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} \, .$$

Следовательно, $L = \frac{1}{e} < 1$ и данный ряд сходится.

Замечание 2. Для расчета больших значений факториалов часто пользуются *формулой Стирлинга* $n! \approx \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$.

Замечание 3. Если в условиях теоремы $L = 1$, то о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ нельзя сказать ничего определенного. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующий пример.

Исследовать сходимость обобщенного гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, $p \in R$, применив признак Д'Аламбера. Для любых $p \in R$: $L = \lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{(n+1)^p} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^p} = 1$. Тем не менее, известно, что обобщенный гармонический ряд при различных p может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Теорема 7 (признак Коши). *Пусть для ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ *существует предел* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = L$. (11)

Тогда

5) *при* $L < 1$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится*;

6) *при* $L > 1$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится*.

Доказательство. По определению предела из равенства (11) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер n_0, что выполняется неравенство: $L - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon \; \forall n \geq n_0$. (12)

1. Если $L < 1$, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что число $q = L + \varepsilon < 1$. Тогда имеем $a_n < q^n \; \forall n \geq n_0$, и, согласно признаку сравнения, из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ при $0 < q < 1$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. Если $L > 1$, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что $L - \varepsilon = q > 1$. Тогда получаем $a_n > q^n \; \forall n \geq n_0$. Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$, $q > 1$, согласно признаку сравнения, следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пример 7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2n}{n+1})^n$.

Решение. Так как $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{2n}{n+1})^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1} =$ $= 2 > 1$, то данный ряд расходится.

Замечание 4. Можно доказать, что если существует предел $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$, то существует и предел $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ (и они равны между собой). Обратное утверждение не всегда имеет место. Другими словами, признак Коши «сильнее» признака Д'Аламбера.

Интересно, что можно дать закон построения целой бесконечной цепи признаков сходимости положительных рядов, каждый из которых сильнее (в указанном выше смысле) предыдущего. Ни один из них не является «универсальным», т. е. не может дать ответа для любого ряда. Признак Д'Аламбера является первым звеном этой цепи.

§ 5. Знакочередующиеся ряды

Определение 4. *Знакочередующимся* называется ряд, все члены которого поочередно меняют знак: $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + .. (-1)^{n-1} a_{n+..}$, где a_n, $n = 1,2$ ... числа одного знака. Такой ряд удобно записывать в виде $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a^n$. (13)

Теорема 8 (Признак Лейбница). *Если члены знакочередующегося ряда (13) удовлетворяют условиям:*

1) $a_n \geq a_{n+1}\ \forall n \in N$;

2) $lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a^n$ *сходится, а его сумма* S *не превосходит первого члена, т. е.* $S \leq a_1$.

Доказательство. Рассмотрим частичную сумму ряда (13) $S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + .. + (a_{2n-1} - a_{2n})$. Так как все выражения в круглых скобках неотрицательны, то последовательность четных частичных сумм (S_{2n}) ряда неубывающая, с другой стороны

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - .. - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1. \quad (14)$$

Таким образом, последовательность (S_{2n}) не возрастает и ограничена сверху, а следовательно, сходится. Обозначим $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$. Из соотношения $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} + a_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S$ следует, что и сумма ряда (13) равна S. Из неравенства (14) заключаем, что $S \leq a_1$ и т. д.

Ряд, удовлетворяющий условиям теоремы, называется *рядом Лейбница.*

Следствие. Остаток $r_n = (-1)^n(a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots)$ ряда Лейбница удовлетворяет неравенству $|r_n| \leq a_{n+1}$.

Действительно, ряд Лейбница $\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-n-1}a_k = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \ldots$ только знаком отличается от остатка r_n ряда (13) и не превосходит своего первого члена a_{n+1}, что и требовалось доказать.

§ 6. Знакопеременные ряды

Ряды, содержащие как положительные, так и отрицательные члены, называются *знакопеременными.*

Примеры знакопеременных рядов:

1. $1-1-1+1+1-1-1+\cdots+(-1)^{n(n-1)/2}+\cdots=$
$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n(n-1)/2}$;

2. $\sin\alpha+\frac{\sin 2\alpha}{2}+\cdots+\frac{\sin n\alpha}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n}, \alpha\neq\frac{\pi k}{2}, k\in N.$

Очевидно, что знакочередующиеся являются частным случаем знакопеременных рядов. Выясним, существует ли связь между сходимостями этих рядов.

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. Рассмотрим знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

Теорема 9. *Если сходится ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, *то сходится и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

Доказательство. Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ по свойству 3 линейных операций над рядами следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}2|a_n|$. Далее, поскольку $0\leq a_n+|a_n|\leq 2|a_n|\ \forall n\in N$, то из признака сравнения вытекает сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+|a_n|)$. А так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ представим в виде разности сходящихся рядов $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=$ $=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+|a_n|)-\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, то он сходится.

В последней теореме сформулирован достаточный признак сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. Обратное утверждение в общем случае не имеет места, т. е. приведенный признак не является необходимым. В связи с этим сформулируем следующее.

Определение 5. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ называется *абсолютно сходящимся*. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$называется *условно сходящимся*.

Пример 8. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Решение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ — расходящийся гармонический ряд. Но исходный ряд сходится по признаку Лейбница, следовательно, он сходится условно.

Следует отметить, что абсолютно и условно сходящиеся ряды обладают качественно различными свойствами: перестановка членов абсолютно сходящегося ряда не нарушает его сходимости, и сумма ряда не изменяется, совершенно так же, как и у конечных сумм.

Напротив, в условно сходящемся ряде можно всегда, путем надлежащей перестановки членов, придать сумме ряда произвольное значение и даже сделать его расходящимся (теорема Римана).

Пример 9. Возьмем ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=ln2$ умножаем обе части этого равенства на множитель $\frac{1}{2}$ и пишем полученный ряд над исходным: $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+..=\frac{1}{2}ln2$. Сложим теперь оба ряда почленно, соединяя вместе члены, стоящие друг над другом. В результате получим $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}=\frac{3}{2}ln2$. Но этот ряд можно, очевидно, получить из первоначального путем перестановки членов; выходит, что от перестановки сумма ряда умножилась на $\frac{3}{2}$.

Легко себе представить, какое впечатление должно было произвести открытие этого кажущегося парадокса на математиков XVIII в., которые привыкли оперировать с бесконечными рядами, не обращая внимания на характер их сходимости.

§ 7. Функциональные ряды

Основные определения

Пусть $u_1(x), u_2(x),\ldots,u_n(x)$ — последовательность функций, определенных на некотором множестве X.

Ряд вида $u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, членами которого являются функции $u_n(x)$ называется *функциональным*. Каждому значению $x_0\in X$ соответствует числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$. Этот числовой ряд может быть сходящимся или расходящимся. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ сходится, то x_0 называется *точкой сходимости функционального ряда.*

Множество всех точек сходимости функционального ряда называется *областью сходимости*. Обозначим ее через D. Очевидно, что

$D \subseteq X$. Если множество D пусто, то ряд расходится в каждой точке множества X.

Конечная сумма $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x_0)$ называется *n-частичной суммой* ряда, а функция $S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$, определенная в области D, — суммой ряда.

Функция $r_n(x)$, определенная в области D и задаваемая формулой $r_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x_0)$, называется *n-м остатком ряда*. Очевидно, что $r_n \to 0\, \forall x \in D$, если $n \to \infty$. Сходимость функционального ряда в каждой точке $x \in D$ называется *поточечной сходимостью*.

Функциональный ряд называется *абсолютно сходящимся* на множестве $D_1 \in X$, если в каждой точке этого множества сходится ряд $\sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)|$.

Равномерная сходимость функциональных рядов

Функциональный ряд называется *равномерно сходящимся* в области D к функции $S(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $n_0(\varepsilon)$, не зависящий от x, такой, что

$$|r_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon,\ \forall n > n_0(\varepsilon),\ \forall x \in D.$$

Отметим, что различие определений поточечной и равномерной сходимости функционального ряда состоит лишь в том, что в первом случае номер n_0 зависит от ε и $x \in D$, т. е. $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$, а во втором только от ε, т. е. $n_0 = n_0(\varepsilon)$. Поточечную сходимость также называют неравномерной.

Для функциональных рядов справедлива теорема.

Теорема 10 (признак Вейерштрасса). *Если члены ряда* $\sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)|$ *удовлетворяют неравенствам* $|u_n(x)| \le a_n\ \forall n \in N,\ \forall x \in D$ *и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, *сходится, то функциональный ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится равномерно в области* D.

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, члены которого удовлетворяют неравенству $|u_n(x)| \le a_n \ \ \forall n \in N, \ \forall x \in D,$ называют *мажоратным рядом*, или *мажорантой* для функционального ряда $\sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)|$, а функциональный ряд в этом случае называется *мажорируемым* на множестве D.

§ 8. Степенные ряды

Частным случаем функциональных рядов являются степенные ряды. Дальнейшее изложение мы посвятим только им.

Определение 6. Ряд вида

$$a_0 + a_1(x-\alpha) + \cdots + a^n(x-\alpha)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-\alpha)^n, \qquad (15)$$

где a_n, x, α — действительные числа, членами которого являются степенные функции, называется *степенным рядом* по степеням $x-\alpha$, а числа a_n — *коэффициентами* степенного ряда.

При $\alpha = 0$ получаем степенной ряд по степеням x:

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \qquad (16)$$

Поскольку заменой $x - \alpha = X$ ряд (15) можно свести к ряду (16), то ограничимся рассмотрением рядов (16).

Степенной ряд (16) всегда сходится в точке $x = 0$. При $x \neq 0$ степенной ряд может сходиться, так и расходиться. Для степенных рядов справедлива следующая теорема.

Теорема 11 (Абеля). *Если степенной ряд (16) сходится в точке $x_0 \neq 0$, то он сходится абсолютно в интервале $-|x_0| < x < |x_0|$ и сходится равномерно на отрезке $-q \le x \le q$, где $0 < q < |x_0|$.*

Доказательство. Так как по условию теоремы числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$, и следовательно, существует такое число $M > 0$, что $|a_n x_0^n| < M, \forall n \in N$. Пусть $|x| < |x_0|$, тогда $\sum_{n=0}^{\infty} |a^n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n| * \left|\frac{x}{x_0}^n\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{x}{x_0}^n\right|$.

Члены ряда $\sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{x}{x_0}^n\right|$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ и поэтому данный ряд сходится. Следовательно, ряд (16) в точке $x_0 \neq 0$ сходится абсолютно.

Если $|x| \leq q < x_0$, то $\left|\frac{x}{x_0}\right| < \frac{q}{|x_0|} < 1$. Отсюда следует, что ряд (16) мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum_{n=0}^{\infty} M(\frac{q}{|x_0|})^n$, и значит, по признаку Вейерштрасса сходится равномерно на отрезке $[-q; q]$.

Следствие. Если в точке $x_1 \neq 0$ степенной ряд (16) расходится, то он расходится во всех точках x, таких, что $|x| > |x_0|$.

Действительно, если бы ряд (16) сходился в точке x, то по теореме Абеля он сходился абсолютно в точке x_1, что противоречит условию.

Из теоремы Абеля вытекает, что если степенной ряд (16) сходится хотя бы в одной точке $x \neq 0$, то всегда существует число $R > 0$, такое, что степенной ряд сходится (абсолютно) для всех $x \in]-R; R[$ и расходится для всех $x \in]-\infty; -R[\cup]R; +\infty[$.

При $x = \pm R$ ряд (16) может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Неотрицательное число R, что степенной ряд (16) сходится в $]-R; R[$ и расходится при $|x| > R$, называют *радиусом сходимости*, а интервал $]-R; R[$ — *интервалом сходимости степенного ряда (16).* Если ряд (16) сходится только в точке $x \in R$, то $R = \infty$.

Для нахождения радиуса сходимости степенного ряда используют признаки Д'Аламбера и Коши. Предположим, например, что существует предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$, тогда $\sqrt{a_n x^n} = L|x|$ и по признаку Коши при $L|x| < 1$ ряд сходится абсолютно, а при $L|x| > 1$ расходится. Следовательно, $R = \frac{1}{L} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$.

§ 9. Свойства степенных рядов

Теорема 12. *Если радиус сходимости степенного ряда отличен от нуля, то его сумма $S(x)$ непрерывна на интервале сходимости* $]-R; R[$.

Доказательство. Пусть x — произвольная точка интервала сходимости. Всегда существует такое число $q > 0$, что $|x| < q < R$. По предыдущей теореме степенной ряд сходится равномерно на отрезке $[-q; q]\subset]-R; R[$. Тогда, согласно теореме о непрерывности суммы равномерно сходящегося функционального ряда, $S(x)$ непрерывна на отрезке $[-q; q]$, а следовательно, и в точке. В силу произвольности

выбора точки $x \in]-R;R[$ получаем непрерывность функции $S(x)$ на $]-R;R[$. Что и требовалось доказать.

Теорема 13. *Операции почленного дифференцирования и интегрирования на любом промежутке* $[x_0;x]\subset]-R;R[$ *степенного ряда* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *не изменяют его радиуса сходимости.*

Доказательство. Ограничимся рассмотрением случая, когда существует $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Обозначим через R_1 радиус сходимости почленно продифференцированного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. $R_1 = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n a_n}{(n+1)a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$.

Аналогично, пусть R_2 — радиус сходимости ряда, полученного почленным интегрированием ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{x_0}^{x} a_n t^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n+1}x^{n+1} - \frac{a_n}{n+1}x_0^{n+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x_0^{n}.$$

Замечание 5. Выше мы воспользовались тем, что условие $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ влечет за собой расходимость не только числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, но и ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, т. к. нарушается необходимый признак его сходимости $L > 1 \Rightarrow |a_n| \to \infty \Rightarrow a_n \neq 0$.

Аналогично, если существует предел $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$, то применив признак Д'Аламбера, получим $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Замечание 6. Для встречающихся на практике случаев, когда пределы $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ и $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ не существуют, радиус сходимости можно найти, применяя непосредственно признаки Коши и Д'Аламбера.

Пример 10. Пусть дан ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{3^n}$, имеем $a_{2n} = \frac{1}{3^n}, a_{2n+1} = 0$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = 0$, т. е. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ не существует. Однако $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{x^{2n}}{3^n}} = \frac{x^2}{3} < 1$, т. е. $R = \sqrt{3}$.

Пример 11. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n5^n}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}}\frac{n5^n}{(x-3)^n}\right| = \frac{|x-3|}{5} < 1$, $\quad -5 < x-3 < 5$ или $-2 < x < 8$. В точке $x = -2$ получаем условно сходящийся ряд

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, а в точке $x=8$ расходящийся гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Таким образом, область сходимости ряда $x\in]-2;8[$.

Теорема 14. *Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ можно почленно интегрировать на любом отрезке $[x_0;x]$, принадлежащем интервалу сходимости.*

Доказательство теоремы следует из равномерной сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ на отрезке $[x_0;x]\subset]-R;R[$ и теоремы о почленном интегрировании функционального ряда.

Следствие. Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ можно почленно интегрировать любое число раз на отрезке $[x_0;x]\subset]-R;R[$.

Пример 12. Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Решение. Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n2^{2n}=1-x^2+x^4-\cdots+$ $+(-1)^nx^{2n}+\cdots$ $(*)$, полученный почленным дифференцированием данного ряда. Так как члены ряда образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $-x^2$, то его сумма $S(x)=\frac{1}{1+x^2}$, если $|x|<1$. Интегрируя ряд (*) почленно на отрезке $[0;x]\subset]-1;1[$,

$$arctg\,x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nt^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}dt=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Следовательно, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=arctg|x|<1$.

Таким образом, функция $y=arctg\,x$ является суммой исходного ряда. Значит, числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x_0^{n+1}$ сходится абсолютно по признаку сравнения в силу неравенства $\left|\frac{a_n}{n+1}x_0^{n+1}\right|\le|a_nx_0^{n+1}|, n=0,1,\ldots$ и сходимости ряда $|x_0|\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx_0^n|$, т. к. $x_0\in]-R;R[$, получаем, $R_2=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n(n+2)}{(n+1)a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=R$.

Теорема 15. *Если радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ отличен от нуля, то степенной ряд можно почленно дифференцировать на интервале сходимости и для его суммы $S(x)$ справедливо равенство $S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}$.*

Доказательство. Пусть x — произвольная точка интервала сходимости $]-R;R[$, т. е. ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ сходится. Выберем такое число q, что $|x|<q<R$ на отрезке $[-q;q]\subset]-R;R[$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}$ согласно предыдущей теореме сходится равномерно. Следовательно, на ука-

занном отрезке, а значит и в точке x ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можно почленно дифференцировать, и справедливо равенство $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, что и требовалось доказать.

Следствие. Степенной ряд на интервале сходимости $]-R; R[, R \neq 0$, можно почленно дифференцировать любое число раз.

Действительно, т. к. результатом почленного дифференцирования степенного ряда является степенной ряд с тем же радиусом сходимости, то к нему применима последняя теорема.

Пример 13. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = \frac{x^2-2x+19}{(x-3)^2(2x+5)}$.

Решение. Разложим $f(x)$ на элементарные дроби. Имеем $f(x) = \frac{1}{2x+5} + \frac{2}{(x-3)^2}$. По формуле суммы геометрической прогрессии: $\frac{1}{2x+5} = \frac{1}{5}\frac{1}{1+\frac{2x}{5}} = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{2x}{5})^n,\ |x| < \frac{5}{2}$ и $\frac{2}{(x-3)} = -\frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}} =$ $= -\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{3})^n, |x| < 3$. Складывая ряды для $\frac{1}{2x+5}$ и $\frac{2}{(x-3)^2}$, имеем $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\frac{2^n}{5^{n+1}} + \frac{2(n+1)}{3^{n+2}}\right)x^n, |x| < \frac{5}{2}$.

§ 10. Ряды Тейлора

Пусть функция $f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 производные любого порядка. Поставим ей в соответствие степенной ряд

$$f(x) \sim f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f^n(x_0)}{2!}(x-x_0) + \cdots \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \quad (17)$$

Он называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$ в точке x_0. Если $x_0 = 0$, то ряд Тейлора имеет вид:

$$f(x) \sim f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

и называется (ошибочно!) рядом Маклорена.

Радиус сходимости R степенного ряда (17) может быть как равным нулю, так и отличным от него, причем в последнем случае сумма $S(x)$

ряда Тейлора может не совпадать с $f(x)$. Важно определить, когда в формуле (17) допустим знак равенства, т. е. когда ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$, для которой он составлен.

Если $S(x) = f(x)$ на $]x_0 - R; x_0 + R[$, то говорят, что функция $f(x)$ разложима в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Легко увидеть, что частичные суммы ряда (17) $S_n(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ представляют собой многочлен Тейлора $P_n(x)$ функции $f(x)$ в точке x_0. Если ряд сходится к функции $f(x)$, справедливо равенство

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = S_n(x) + R_n(x). \quad (18)$$

Из равенства (18) следует

Теорема 16. *Для того, чтобы бесконечно дифференцируемая в окрестности точки x_0 функция $f(x)$ была разложима в ряд Тейлора в окрестности этой точки, необходимо и достаточно, чтобы*

$$lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \ \forall x \epsilon]x_0 - R; x_0 + R[. \quad (19)$$

Подчеркнем, что в равенство (19) входит остаточный член **не ряда**, **а формулы Тейлора**, которые в общем случае различны. В самом деле, если ряд Тейлора сходится к $S(x) \neq f(x)$, то из равенств $R_n(x) = f(x) - P_n(x) = f(x) - S_n(x), r_n(x) = S(x) - S_n(x)$ следует, что $R_n(x) \neq r_n(x)$. Если $S(x) = f(x)$, то, очевидно, что $R_n(x) = r_n(x)$. Напомним, что остаток $R_n(x)$ формулы Тейлора может быть представлен в одном из следующих видов:

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, c \in]x_0; x[$ — форма Лагранжа;

$R_n(x) = 0((x - x_0)^n), x \to x_0$ — форма Пеано.

На практике часто используется следующий достаточный признак разложимости функции в ряд Тейлора.

Теорема 17. *Если для любых $x \in]+x_0 - R; x_0 + R[$ все производные функции $f(x)$ ограничены одной и той же константой M, то ряд Тейлора (17) сходится к функции $f(x)$ в интервале $|x - x_0| < R$.*

Доказательство. Согласно представлению остаточного члена формулы Тейлора в форме Лагранжа имеем $|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\right| \leq M\frac{R^{n+1}}{(n+1)!} \ \forall x \in]x_0 - R; x_0 + R[$. Числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}$ сходится по признаку Д'Аламбера. Тогда на основании необходимого признака сходимости ряда $\lim_{n\to\infty} R_n = 0 \ \forall x \in]x_0 - R; x_0 + R[$.

Решим теперь следующую задачу. Известно, что в окрестности точки x_0 некоторый степенной ряд по степеням $x - x_0$ сходится к бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$, т. е.

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots \quad (20)$$

Является ли ряд (20) рядом Тейлора функции $f(x)$?

После последовательного почленного дифференцирования степенного ряда (20), что допустимо, согласно теореме о дифференцировании степенного ряда и следствию из нее, имеем:

$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \cdots$

$f''(x) = 2a_2(1 + 3 * 2a_3(x - x_0) + \cdots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + \cdots$

… … … … … …

$f^n = n!\, a_n + (n+1)n + \cdots + 2a_{n+1}(x - x_0) + \cdots$

При $x = x_0$ получаем $a_0 = f(x_0)$, $a_1 = f'(x_0)$, $a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \ldots, a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Отсюда следует:

Теорема 18. *Если степенной ряд по степеням $x - x_0$ сходится к функции $f(x)$ в окрестности точки x_0, то он является рядом Тейлора функции $f(x)$ в окрестности этой точки.*

§ 11. Разложение элементарных функций в ряд Маклорена

Представим разложение в ряд Маклорена некоторых основных функций.

1. $\boldsymbol{f(x) = e^x}$. Так как $f^{(n)} = e^x$ и $\left|f^{(n)}(x)\right| = e^x - e^A$ при $|x| < A$, где A — сколь угодно большое положительное число на основании последней теоремы, заключаем, что функция e^x разложима в ряд Маклорена, сходящийся к ней при любом $x \in R$. При этом $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, поскольку $a_n = f^{(n)}(0) = \frac{1}{n!}$.

2. $\boldsymbol{f(x) = chx}$**.** Используя предыдущее разложение, определение функции $y = chx$ и свойство суммы сходящихся рядов, имеем:

$chx = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}) =$

$= \frac{1}{2}(\sum_{n=0}^{\infty}\left(1 + (-1)^n\right)\frac{x^n}{n!}\Big) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!},$

т. е. $chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}, \forall x \in R.$

3. $\boldsymbol{f(x) = shx}$. Так как $shx = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = (chx)'$, то на основании теоремы о конечном дифференцировании степенного ряда, используя разложение для chx, получаем:

$shx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \forall x \in R.$

4. $\boldsymbol{f(x) = \sin x}$. Так как $f^{(n)}(x) = \sin^{(n)}x = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$ и $\left|f^{(n)}(x)\right| = \left|\sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)\right| \le 1, \forall x \in R,$ то $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots +$ $+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \forall x \in R.$

Действительно, $a_k = \frac{sin^{(k)}(0)}{k!} = \frac{sin\frac{\pi k}{2}}{k!} = \begin{cases} 0, & \text{если } k = 2n \\ \frac{(-1)^n}{(2n+1)}, & \text{если } k = 2n+1 \end{cases}.$

5. $\boldsymbol{f(x) = \cos x}$. Из равенства $\cos x = (\sin x)'$, используя формулу, получаем искомое разложение:

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)\frac{x^{2n}}{(2n)!}, \forall x \in R.$

6. $\boldsymbol{f(x) = \ln(1 + x)}$. На основании теоремы о почленом интегрировании степенного ряда с учетом выражения для суммы бесконечно-убывающей геометрической прогрессии имеем:

$\ln(1 + x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n)dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$, т. е.

$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}, \forall x \in]-1; 1[.$

Можно показать, что последнее равенство верно и при $x = 1$, т. е. для всех $]-1; 1]$.

7. $\boldsymbol{f(x) = (1 + x)^{\alpha}, \alpha \in R}$. В данном случае оценка производных $f^{(n)}(x)$ затруднительна, поэтому воспользуемся другим, более общим приемом. Функция $f(x) = (1 + x)^{\alpha}$ удовлетворяет равенству $(*)$ $(1 + x)\,f'(x) = \alpha f(x)$ и условию $f(0) = 1$. Так как решение задачи

Коши для дифференциального уравнения (*) единственно, то если найдется степенной ряд $1+\sum_{n=}^{\infty} a_n x^n$, удовлетворяющий уравнению (*), он будет искомым разложением заданной функции. Итак,

$(1+x)(a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots)=\alpha(1+a_1x+$ $+a_2x^2+\cdots+a_nx^n)$ или $a_1+(a_1+2a_2)x+(2a_2+3a_3)x^2+$ $+\ldots(na_n+(n+1)a_{n+1})x^n+\ldots=\alpha+\alpha a_1x+\alpha a_2x^2+\cdots+\alpha a_nx^n+\ldots$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, имеем:

$a_1=\alpha=\frac{\alpha}{1!};\ a_1+2a_2=\alpha a_1 => a_2=\frac{a_1(\alpha-1)}{2}-\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!},$

$2a_2+3a_3=\alpha a_2 => a_3=\frac{a_2(\alpha-2)}{3}=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\ldots. =>$

$=> a_n=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}, n\in N,$

т. е. $(1+x)^\alpha=1+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$

$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\ x^n, \forall x\in]-1;1[\,.$ $(**)$

Поскольку радиус сходимости полученного ряда равен 1, что несложно проверить, использовав признак Д'Аламбера. Ряд, стоящий в правой части формулы (**), называется *биномиальным.* При $\alpha=n\in N$ все коэффициенты ряда (**), начиная с $(n+1)$, обращаются в нуль, и степенной ряд преобразуется в бином Ньютона $(1+x)^n=1+nx+$ $+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\cdots+x^n=\sum_{k=0}^{n}c_n^kx^k$.

§ 12. Методы разложения функций в ряд Маклорена

Разложение функции в ряд Тейлора по определению часто связано с громоздкими вычислениями при нахождении производных и сложностью исследования его сходимости.

Иногда удается избежать указанных трудностей, используя вспомогательные приемы. Проиллюстрируем их применение на конкретных примерах.

1. Метод, использующий формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Пример 14. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=-2$ функцию $f(x)=\frac{1}{(1+x)}$.

Решение. Так как $\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1+(x+2)-2}=-\frac{1}{1-(x+2)}$, то при $|x+2|<1$

$\frac{1}{1+x}=-(1+(x+2)+(x+2)^2+\cdots+(x+2)^n+\cdots)=$

$=-\sum_{n=0}^{\infty}(x+2)^n,\ \forall x\in]-3;-1[.$

2. Метод подстановки.

Пример 15. Разложить функцию $f(x)=\sin 2x$ по степеням $x-\frac{\pi}{4}$.

Решение. Запишем следующую цепочку равенств:

$$\sin 2x=\begin{vmatrix} x-\frac{\pi}{4}=t \\ x=t+\frac{\pi}{4}\end{vmatrix}=\sin 2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=\cos 2t=|2t=t_1|=\cos t_1=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t_1^{2n}}{(2n)!},\forall t_1\in R\ .$$

Возвращаясь к старой переменной x по формуле $t_1=2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, получаем:

$$\sin 2x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n},\forall x\in R.$$

3. Метод интегрирования.

Пример 16. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$.

Решение. Так как $\ln\frac{1+x}{1-x}=2\int_0^x\frac{dt}{1-t^2}$ и $\frac{1}{1-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n}$, то $\ln\frac{1+x}{1-x}=2\int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n})dt=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\forall x\in]-1;1[.$

4. Метод дифференцирования.

Пример 17. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=-\frac{2x}{(1-x^2)^2}$.

Решение. Так как $\frac{2x}{(1-x^2)^2}=(\frac{1}{(1-x^2)^2})'$ и $\frac{1}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}$ при $|x|<1$, то $\frac{2x}{(1-x^2)^2}=(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n})'=(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}+\cdots)'=2x+$ $+4x^3+\cdots++2nx^{2n-1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}2nx^{2n-1},\forall x\in]-1;1[.$

Заметим, что для разложения функции в ряд Тейлора используют и другие методы, основанные на операциях умножения и деления рядов, которые здесь не рассматриваются.

§ 13. Приложения степенных рядов

Приближенное вычисление значений функции

Для нахождения приближенного значения функции $f(x)$ в точке x с заданной точностью поступим следующим образом: разложим функцию $f(x)$ в ряд по степеням $x - x_1$ с интервалом сходимости, содержащим точку x_0, где x_1 — точка, в которой значения функции и ее производных легко вычисляются точно. Переменной x придадим значение x_0 и в полученном числовом ряде $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_0 - x_1)^n$ оставим только члены, гарантирующие заданную точность вычисления. Максимальное число n_0 таких членов ряда определим из соответствующей оценки, либо остатка $R_n(x_0)$ формулы Тейлора, либо остатка $r_n(x_0)$ ряда Тейлора, т. к. в случае сходимости степенного ряда функции $f(x)$ они равны между собой.

Пример 18. Вычислить с точностью $\varepsilon = 0{,}01$ число e.

Решение. Так как $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$, $0 < c < x, \forall x \in R$, то из оценки $|R_n(1)| = \frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} \leq 0{,}01$ следует, что $n \geq 5$, т. е. $n_0 = 5$. Итак, $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \approx 2 + {}$ $+0{,}5 + 0{,}167 + 0{,}042 + 0{,}008 = 2{,}717$ или $e \approx 2{,}72$ $(\varepsilon = 0{,}01)$. Отметим, что в данном примере мы считали $x_0 = 1, x_1 = 0$.

Пример 19. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x) = \arcsin x$.

Решение. Воспользуемся разложением в ряд производной функции и последующим почленным интегрированием ряда. Найдем производную $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, которую можно рассматривать как степенную функцию $(1+x)^\alpha$ при $\alpha = -\frac{1}{2}$ с заменой x на $-x^2$ по формуле $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1*3}{2*4}x^2 + \frac{1*3*5}{2*4*6}x^3 + \cdots$ имеем: $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1*3}{2*4}x^4 + \frac{1*3*5}{2*4*6}x^6 + \cdots + \frac{1*3*5*\ldots*(2n-1)}{2*4*6*\ldots*2n}x^{2n} + \cdots$

Отсюда, интегрируя от 0 до x, где $|x| < 1$, получаем: $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$
$= \arcsin t \ |_0^x = \int_0^x dt + \frac{1}{2}\int_0^x t^2 dt + \frac{3!!}{4!!}\int_0^x t^4 dt + .. + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\int_0^x t^{2^n} dt + \ldots =$
$= x_1 + \frac{1}{2}\frac{x^2}{3} + \frac{3!!}{4!!}\frac{x^5}{5} + \frac{5!!}{6!!}\frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2^{n+1}}}{2n-1} + \cdots$

Итак, для $|x| < 1$ имеем разложение:

$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2^{n+1}}$.

(Можно проверить, что это разложение верно и при $x = \pm 1$).

Применение правила умножения рядов

Разложение в степенной ряд функции $\Psi(x) = f(x)\varphi(x)$ может быть осуществлено с помощью правила умножения рядов, если разложения функций $f(x)$и $\varphi(x)$ известны.

Пусть в некоторой окрестности нуля имеют место разложения $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$,

$\varphi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n$, тогда произведение $f(x)\varphi(x)$ разлагается в той же окрестности нуля в степенной ряд $(*) f(x)\varphi(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0)x^n + \cdots$. В частности, при $f(x) = \varphi(x)$ получается следующее правило возведения степенного ряда в квадрат:

$(**)[f(x)] = a_0^2 + 2a_0 a_1 x + (2a_0 a_1 + a_1^2)x^2 +$
$+(2a_0 a_3 + 2a_1 a_2)x^3 + (2a_0 a_4 + 2a_1 a_3 + a_2^2)x^4 + \cdots$

Пример 20. Разложить в степенной ряд по степеням x функцию $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$.

Решение. В интервале $-1 < x < 1$ имеют место разложения $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$, $\ln(1+x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$, поэтому по формуле (*) $\frac{\ln(1+x)}{1+x} = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\right)(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots) =$
$= x - \left(1 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^3 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)x^4 + \cdots$
$(-1 < x < 1)$.

Интегрирование дифференциальных уравнений

Степенные ряды могут применяться также для решения дифференциальных уравнений, например, в случае, если их решение не удается найти в элементарных функциях.

Пример 21. Найти решение уравнения $(*) yy' = \sin y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = \pi/2$.

Решение. Уравнение $(*)$ допускает разделение переменных $\frac{ydy}{\sin y} = dx$ $(**)$, однако интеграл от левой части уравнения $(**)$ не выражается в элементарных функциях. Можно убедиться, что в окрестности точки $x_0 = 0$ уравнение $(*)$ удовлетворяет условиям теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши. Будем искать его в виде ряда Маклорена $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n$. Так как $y(0) = \pi/2$, а $(***)$ $y' = \frac{\sin y}{y}$, то $y'(0) = 2/\pi$. Дифференцируя по x обе части равенства $(***)$, находим $(****) y'' = \frac{(y' \cos y) y - y' \sin y}{y^2} = \frac{y'(y \cos y - \sin y)}{y^2}$, откуда следует $y'(0) = -\frac{y'(0) \sin(\pi/2)}{(\pi/2)^2} = -(\frac{2}{\pi})^3$. Снова дифференцируя обе части равенства $(****)$, находим $y'''(0)$. Продолжая этот процесс, можно получить любое число членов разложения в ряд Маклорена искомого решения $y = y(x)$: $y = \pi/2 + 2/\pi\, x - 2^3/\pi^3\, x^2 + \cdots$

Применение рядов к раскрытию неопределенностей

Разложение функций в ряд можно использовать при раскрытии неопределенностей. Покажем на примерах, как это можно сделать.

Пример 22. Раскрыть неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$ $\lim_{x \to 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2 (e^x - 1)}$

Решение. Разложим функции $\sin x$, $\cos x$ и e^x в соответствующие ряды.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2(e^x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(1-\frac{x^2}{2}+\cdots\right)-(x-\frac{x^2}{6}+\cdots)}{x^2\left(x+\frac{x^2}{2}+\cdots\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{60}+\cdots}{x^3(1+\frac{x}{2}+\cdots)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^3}\frac{(-{}^1/_3+x^2({}^1/_{60}+\cdots)}{(1+x({}^1/_2+\cdots)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-{}^1/_3+x^2({}^1/_{60}+\cdots)}{1+x({}^1/_2+\cdots)}=-\frac{1}{3}.$$

При переходе к пределу в последнем равенстве рассуждаем следующим образом: сумма ряда, стоящего в круглых скобках в числителе, является непрерывной функцией от x и при $x\to 0$ стремится к числу $\frac{1}{60}$. Поэтому $\lim_{x\to 0}x^2\left(\frac{1}{60}+\cdots\right)=0*\frac{1}{60}=0$. Аналогично в знаменателе имеем: $\lim_{x\to 0}x\left(\frac{1}{2}+\cdots\right)=0*\frac{1}{2}=0$.

Приближенное вычисление интегралов

Многие определенные интегралы, не выражающиеся в элементарных функциях, могут быть вычислены с помощью рядов.

Пример 23. Вычислить $\int_0^{1/3}e^{-x^2}dx$ с точностью $\varepsilon=0{,}001$.

Решение. Имеем $e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}$ $\forall x\in R, \int_0^{1/3}e^{-x^2}dx=$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{1/3}x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}(\frac{1}{3})^{2n+1}$.

$|r|\le\frac{1}{(n+1)!(2n+3)3^{2n+3}}\le 0{,}001$, следовательно $n\ge 1 => n_0=1$ и $\int_0^{1/3}e^{-x^2}dx\approx\frac{1}{3}-\frac{1}{3*3^3}\approx 0{,}3333-0{,}0123=0{,}321$.

Окончательно получаем $\int_0^{1/3}e^{-x^2}dx\approx 0{,}321$ $(\varepsilon=0{,}001)$.

Пример 24. Вычислить $\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$ с точностью $\varepsilon=0{,}001$.

Решение. Используя разложения для $\sin x$, получаем $\frac{\sin x}{x}=$ $=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ $\forall x\in R => \int_0^1\frac{\sin x}{x}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^1 x^{2n}dx=$ $=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)}, |r|\le\frac{1}{(2n+3)!(2n+3)}\le 0{,}001$ при $n\ge 2$, т. е. $n_0=2$.

Следовательно, $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \approx 1 - \frac{1}{3*3!} + \frac{1}{5*5!} \approx 1 - 0{,}0555 + 0{,}0016 =$ $= 0{,}9461$ или $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \approx 0{,}946$ $(\varepsilon = 0{,}001)$.

§ 14. Нахождение сумм числовых рядов. Убыстрение сходимости

При нахождении суммы числового ряда вычисляют его частичную сумму, для которой величина остатка ряда не превосходит заданной абсолютной погрешности. Используя известные разложения в степенные ряды, сумму числового ряда в некоторых случаях можно выразить в виде значения функции в определенной точке.

Итак, нам потребуются следующие равенства

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)} = \frac{1}{\alpha+n}. \qquad (*)$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)} = \frac{1}{2(\alpha+n)(\alpha+n+1)}. \qquad (**)$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)\ldots(\alpha+k+p)} = \frac{1}{p(\alpha+n)\ldots(\alpha+n+p-1)},$$

$$p \in N. \qquad (***)$$

При нахождении суммы числового ряда требуется брать большое число членов, если остаток этого ряда медленно стремится к нулю. Такой ряд следует преобразовать в ряд, остаток которого стремится к нулю быстрее. Данное преобразование называется *убыстрением сходимости ряда*. Одним из методов убыстрения сходимости является *метод Куммера*. Неизвестная сумма A сходящегося ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad (21)$$

вычисляется по формуле $A = qB + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k - qb_k)$, (22)

где B — известная сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ такого, что существует предел $q = \lim_{k\to 1} \frac{a_k}{b_k} \neq 0$.

Пример 25. Найти сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ с точностью до 10^{-3}.

Решение. Выясним, сколько членов данного ряда нужно взять для достижения требуемой точности. Оценивая остаток, получаем $\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n} < 0{,}001$, откуда следует, что $n > 1000$, т. е. для достижения указанной точности требуется взять 1001 член исходного ряда.

Улучшим сходимость ряда. Положив в (22) $a_k = \frac{1}{k^2}$, $b_k = \frac{1}{k(k+1)}, q = 1, a_k - qb_k = \frac{1}{k^2(k+1)}$, находим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)}. \qquad (23)$$

Применяя формулу (22) для преобразования ряда $\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)}$, положив теперь

$$a_k = \frac{1}{k^2(k+1)},\ b_k = \frac{1}{k(k+1)(k+2)},\ q = 1, a_k - qb_k = \frac{1}{k^2(k+1)(k+2)}.$$

Тогда, учитывая (23), имеем $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} +$ $+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)(k+2)} = 1 + \frac{1}{2*2} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2(k+1)(k+2)}}$.

Вычисление суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ свелось к вычислению суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)(k+2)}$.

Оценивая остаток $\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)(k+2)} < \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)k(k+1)(k+2)} =$ $= \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{3n(n+1)(n+2)}$, получаем $\frac{1}{3n^3} < 0{,}001 \cdot 2$, откуда $n^3 > \frac{1}{3} * 2000 \approx 666{,}7$, или $n \geq 9$, т. е. требуемая точность достигается при $n = 9$.

Следовательно, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)(k+2)} =$ $= 1 + 0{,}25 + 2 * 0{,}195 = 1{,}645$. Применив преобразование (22) еще раз к ряду $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)(k+2)}$, можно было бы еще более улучшить сходимость.

§ 15. Вычисление сумм числовых рядов

Используя известные разложения в степенные ряды, сумму заданного числового ряда иногда удается выразить через значение некоторой функции в определенной точке.

Пример 26. Найти сумму сходящегося числового ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}. \qquad (*)$$

Решение. Рассмотрим степенной ряд

$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)}$, $S(0) = 0$,

сходящийся равномерно при $x \in [-1; 1]$.

Ряд $S'(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x \operatorname{arctg} x$ сходится равномерно на $[0; 1]$, поскольку в этом случае он является рядом Лейбница и $|r_n(x)| \le \frac{|x|^{2n+2}}{2n+1} \le \frac{1}{2n+1}$. Тогда ряд $S(x)$ можно дифференцировать почленно на $[0; 1]$. Решая дифференциальное уравнение $S'(x) = x \operatorname{arctg} x$ с начальным условием $S(0) = 0$, находим $S(x) = \int_0^x t \operatorname{arctg} t \, dt = \frac{1}{2}\left((1 + x^2)\operatorname{arctg} x - x\right) \forall x \in [0; 1]$. Так как сумма числового ряда (*) равна $S(1)$, то $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2}(2 \operatorname{arctg} 1 - 1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

На практике промежуточные вычисления производят, как правило, с одним или двумя дополнительными знаками и результат округляют.

Пример 27. Вычислить $\sin 18°$ с точностью $\varepsilon = 0{,}0001$.

Решение. Так как $18° = \frac{\pi}{10}$ и ряд $\sin\frac{\pi}{10} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{10}\right)^{2n+1}$ является рядом Лейбница, то из оценки $\left|r\left(\frac{\pi}{10}\right)\right| \le \frac{1}{(2(n+1)+1)!} \left(\frac{\pi}{10}\right)^{2(n+1)+1} \le 0{,}0001$ получаем $n \ge 1$, т. е. $n_0 = 1$.

Таким образом, $\sin 18° \approx \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{3!10^3} \approx 0{,}31416 - 0{,}00517 = 0{,}30899$ или $\sin 18° \approx 0{,}3090$ $(\varepsilon = 0{,}0001)$.

Пример 28. Вычислить $\sqrt[5]{33}$ с точностью $\varepsilon = 0{,}0001$.

Решение. Используя биномиальное разложение, получаем знакочередующийся (начиная с $n \ge 2$) ряд $\sqrt[5]{33} = \sqrt[5]{32+1} = 2\sqrt[5]{1 + \frac{1}{32}} =$

$= 2(1+\frac{1}{32})^{\frac{1}{5}} = 2(1+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{32}\right) - \frac{2}{125}(\frac{1}{32})^2 + \frac{6}{125}\left(\frac{1}{32}\right)^3 - \cdots\Big) = 2 +$
$+\frac{1}{5*16} - \frac{1}{8*25*32} + \frac{3}{8*125*32^2} - \cdots$

Так как третий член ряда по абсолютной величине заведомо меньше заданной точности $\frac{1}{8*25*32} = \frac{1}{400*32} \leq \frac{1}{10^4}$, то для решения задачи достаточно ограничиться двумя членами ряда, т. е. $n_0 = 2$.

Следовательно, $\sqrt[5]{33} \approx 2 + \frac{1}{5*16} = 2 + 0{,}0125 = 2{,}0125$ или $\sqrt[5]{33} \approx 2{,}0125$ $(\varepsilon = 0{,}0001)$.

Пример 29. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x) = \frac{1}{x+2}$ по степеням $x-1$.

Решение. Преобразуем эту функцию так, чтобы можно было использовать разложение функции $\frac{1}{1-x}$. Полагая $\frac{1}{x+2} = \frac{a}{1-b(x-1)}$, из тождества $1 - b(x-1) = a(x+2)$ найдем $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$. Следовательно, $\frac{1}{x+2} = \frac{1}{3} * \frac{1}{1-\frac{x-1}{3}}$. Заменив в разложении функции $\frac{1}{1-x}$ переменную x на $\frac{x-1}{3}$, получим $\frac{1}{x+2} = \frac{1}{3}[1 - \frac{x-1}{3} + \frac{(x-1)^2}{3^2} - \cdots + (-1)^n \frac{(x-1)^n}{3^n}]$. Это разложение справедливо, когда $\left|\frac{x-1}{-3}\right| < 1, -3 < x-1 < 3, -2 < x < 4$.

Пример 30. Разложить $f(x) = \ln\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-x}}$ в степенной ряд по степеням x.

Решение. Известно, что $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ $(-1 < x \leq 1)$, поэтому $\ln(1+2x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n x^n}{n}$, $\left(-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right)$, $\ln(1-x) =$
$= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}, (-1 < x < 1)$. Отсюда $\ln\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-x}} = \frac{1}{3}[\ln(1+2x) - \ln(1-x)] =$
$= \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^{n+1}2^n + 1]\frac{x^n}{n} = \frac{1}{3}\left(3x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{3}x^3 - \frac{15}{4}x^4 + \cdots\right) =$
$= x - \frac{1}{2}x^2 + x^3 - -\frac{5}{4}x^4 + \cdots (-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2})$.

Типовые задачи и алгоритмы их решения

1. Постановка задачи. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A}{n^2+pn+q}$, где A, p, q — целые числа.

Алгоритм решения.

а) По условию задачи $a_n = \frac{A}{n^2+pn+q}$.

Если корни знаменателя различаются на целое число, т. е. $n^2 + +pn + q = (n+a)(n+a+k)$, где k — натуральное число, то члены последовательности частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ легко найти, т. к. в выражении $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ многие слагаемые взаимно уничтожаются.

б) Разлагаем общий член ряда на элементарные дроби $\frac{A}{n^2+pn+q} = = \frac{1}{k}\left(\frac{A}{n+a} - \frac{A}{n+a+k}\right)$. Выпишем несколько членов ряда так, чтобы было видно, какие слагаемые сокращаются при вычислении частичных сумм ряда.

в) Находим n-ю частичную сумму ряда $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

г) Сократим соответствующие слагаемые и вычислим сумму ряда по формуле $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ и записываем ответ.

Пример 31. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{72}{n^2+5n+4}$.

Решение.

Решение будем производить по представленному выше алгоритму.

а) Корни знаменателя $n = -1$ и $n = -4$ различаются на целое число, т. е. $n^2 + 5n + 4 = (n+1)(n+1+3)$. Следовательно, члены последовательности частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ легко найти, так что в выражении $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ многие слагаемые взаимно уничтожаются.

б) Разлагаем общий член ряда на элементарные дроби

$a_n = \frac{72}{n^2+5n+4} = \frac{24}{n+1} - \frac{24}{n+4}$ и выписываем несколько членов ряда:

$a_1 = \frac{24}{2} - \frac{24}{5}, a_2 = \frac{24}{3} - \frac{24}{6}, a_3 = \frac{24}{4} - \frac{24}{7},$

$a_4 = \frac{24}{5} - \frac{24}{8}, a_5 = \frac{24}{6} - \frac{24}{9}, a_6 = \frac{24}{7} - \frac{24}{10},$

… … … … … … … … … … … … … … … … … … … …

$a_{n-5} = \frac{24}{n-4} - \frac{24}{n-1}, a_{n-4} = \frac{24}{n-3} - \frac{24}{n},$

$a_{n-3} = \frac{24}{n-2} - \frac{24}{n+1}, a_{n-2} = \frac{24}{n-1} - \frac{24}{n+2},$

$a_{n-1} = \frac{24}{n} - \frac{24}{n+3}, a_n = \frac{24}{n+1} - \frac{24}{n+4}.$

в) Сокращая все слагаемые, какие возможно, находим n-ю частичную сумму ряда: $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{24}{2} + \frac{24}{3} + \frac{24}{4} - \frac{24}{n+2} - \frac{24}{n+3} - \frac{24}{n+4} = 26 - \frac{24}{n+2} - \frac{24}{n+3} - \frac{24}{n+4}.$

г) Вычисляем сумму ряда по формуле $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(26 - \frac{24}{n+2} - \frac{24}{n+3} - \frac{24}{n+4}\right) = 26.$

2. Постановка задачи. Исследовать сходимость ряда с неотрицательными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = f(n, u_1(n), u_2(n), \dots)$, $u_1(n), u_2(n), \dots$ — функция с известными наименьшими и наибольшими значениями (например, синус, косинус и т. п.), причем функция f монотонно зависит от $u_1, u_2, \dots$.

Алгоритм решения.

а) Прежде всего, проверяем, что $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится, т. к. не выполнено необходимое условие сходимости ряда).

б) Поскольку $a_n \geq 0$, применяем первую теорему сравнения.

Чтобы сделать вывод о сходимости (расходимости) дальнейшего ряда, мы должны установить справедливость одной из двух гипотез (проверяем их в любом порядке).

I. Исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

II. Исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Итак, проверяем **первую гипотезу**. Чтобы установить, что исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, нужно найти *сходящийся* ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ такой, что $a_n \leq b_n (*)$. В качестве эталонного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ используем один из следующих рядов: сходящийся обобщенно гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{n^p}$ при $p > 1$, а также — сходящийся геометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} cq^n$ при $0 < q < 1$ (где c — некоторое положительное число).

Если существует сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ такой, что выполняется неравенство (*), то по первой теореме сравнения исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. В противном случае, проверяем вторую гипотезу.

Гипотеза вторая. Чтобы установить, что исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, надо найти *расходящийся* ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ такой, что $a_n \geq b_n$.

В качестве эталонного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ используем один из следующих рядов: расходящийся обобщенно гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{n^p}$ при $p \leq 1$, а также расходящийся геометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} cq^n$ при $q \geq 1$ (c — некоторое положительное число).

Если существует расходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ такой, что выполняется неравенство $a_n \geq b_n$, то по первой теореме сравнения исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Для оценки общего члена ряда используются неравенства:

$-1 \leq \cos n \leq 1, -1 \leq \sin n \leq 1,$

$1 \leq \ln n \leq n^p (\forall n > 0), \frac{\pi}{4} \leq arctg\, n \leq \frac{\pi}{2}$ и т. п.

Пример 32. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin(n))}$.

Решение.

а) Проверим необходимое условие сходимости

$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin(n))} = 0$. Условие сходимости выполнено.

б) Так как $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ и $1 \leq 2 + \sin(n) \leq 3$ при всех $n \geq 1$ и $\frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin(n))} > 0$, то можно применить первую теорему сравнения.

Чтобы сделать вывод о сходимости (расходимости) данного ряда, мы должны установить справедливость одной из двух гипотез (проверяем в любом порядке).

I. Исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Поскольку $-1 \leq \sin(n) \leq 1$, имеем $1 \leq 2 + \sin(n) \leq 3, \sqrt{n^3+1} < 2n^{3/2}$, и, следовательно,

$$\frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin(n))} \geq \frac{2n^{3/2}}{n^2} = \frac{2}{n^{1/2}}.$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{1/2}}$ расходится как гармонический с $p = \frac{1}{2} < 1$, то гипотеза о сходимости исходного ряда не подтвердилась. Проверяем вторую гипотезу.

II. Исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Поскольку $1 \leq 2 + \sin(n) \leq 3$, $\sqrt{n^3+1} > \sqrt{n^3}$, и, следовательно, $\frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin(n))} \geq \frac{n^{\frac{3}{2}}}{3n^2} = \frac{1}{3n^{\frac{1}{2}}}$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^{\frac{1}{2}}}$ расходится как гармонический с $p = \frac{1}{2} < 1$, то по первой тео-

реме сравнения расходится и исходный ряд. Итак, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)}$ расходится.

Пример 33. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} arcsin\frac{n}{(n^2+3)^{5/2}}$.

Решение.

1. Проверим необходимое условие сходимости:

$$\lim_{n\to\infty} arcsin\frac{n}{(n^2+3)^{5/2}} = 0.$$

2. Проверяем, что члены данного ряда положительны. Действительно, $arcsin\frac{n}{(n^2+3)^{5/2}} > 0$ при всех $n \geq 1$, т. к. $n/(n^2+3)^{\frac{5}{2}} \in (0,1)$.

3. Сделаем вывод о сходимости или расходимости данного ряда, используя вторую (предельную) теорему сравнения.

Имеем $arcsin\frac{n}{(n^2+3)^{5/2}} \sim \frac{1}{n^4}$ при $n \to \infty$. Ряд $\sum_{n\to\infty}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ сходится как гармонический с $p = 4 > 1$. Следовательно, в силу второй (предельной) теоремы сравнения исходный ряд также сходится. Исходный ряд сходится.

3. Постановка задачи. Исследовать сходимость ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, (где $a_n \sim b_n$ и b_n содержит произведения многих сомножителей, например, факториалы).

Алгоритм решения.

1. Проверяем, что $a_n > 0$ при всех $n \geq 1$.
2. Упрощаем, если требуется, выражение a_n, т. е. будем исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ такого, что $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$, а затем воспользуемся второй теоремой сравнения.
3. Вычисляем b_{n+1}.
4. Вычисляем предел $\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} = \delta$.
5. Применяем признак Д'Аламбера и вторую теорему сравнения.

Если $\delta < 1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Следовательно, по второй теореме сравнения сходится и исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Если $\delta > 1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится. Следовательно, по второй теореме сравнения, расходится и исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пример 34. Исследовать сходимость ряда

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1*4*7*\ldots*(3n-2)}{n!} sin\frac{1}{2^{n+1}}$.

Решение.

1. Проверяем, что члены ряда положительны. Действительно,

$$a_n = \frac{1*4*7*\ldots*(3n-2)}{n!}\sin\frac{1}{2^{n+1}} > 0 \text{ при всех } n \geq 1.$$

2. Поскольку $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, можно упростить выражение для a_n:

$$\frac{1*4*7*\ldots*(3n-2)}{n!}\sin\frac{1}{2^{n+1}} \sim \frac{1*4*7*\ldots*(3n-2)}{2^{n+1}n!},$$

т. е. будем исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, где $b_n = \frac{1*4*7*\ldots*(3n-2)}{2^{n+1}n!}$, и затем воспользуемся второй теоремой сравнения. Поскольку в произведении сомножителей содержатся факториалы, следует применить признак Д'Аламбера.

3. Вычисляем b_{n+1}: $b_{n+1} = \frac{1*4*7*\ldots*(3n-2)(3n+1)}{2^{n+1}(n+1)!}$.

4. Вычисляем δ: $\delta = \lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1*4*7*\ldots*(3n-2)(3n+1)}{2^{n+1}(n+1)!} * \frac{2^{n+1}n!}{1*4*7*\ldots*(3n-2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2(n+1)} = \frac{3}{2}$.

5. Применяем признак Д'Аламбера и вторую теорему сравнения.

Так как $\delta = \frac{3}{2} > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1*4*7*\ldots*(3n-2)}{2^{n+1}n!}$ расходится. Следовательно, по второй теореме сравнения расходится и исходный ряд.

Пример 35. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 arctg^{2n}\frac{\pi}{4n}$.

Решение.

1. Проверяем, что члены ряда положительны. Действительно, $a_n = n^4 arctg^{2n}\frac{\pi}{4n} > 0$ при всех $n \geq 1$.

2. Поскольку $arctg\, x \sim x$ при $x \to 0$, упрощаем выражение для a_n:

$n^4 arctg^{2n}\frac{\pi}{4n} \sim n^4(\frac{\pi}{4n})^{2n}$, т. е. будем исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, где $b_n = n^4(\frac{\pi}{4n})^{2n}$, а затем воспользуемся второй теоремой сравнения. Очевидно, что $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}$ существует и легко вычисляется. В таком случае применяем радикальный признак Коши.

3. Вычисляем δ по формуле $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n} = \delta$, учитывая, что $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$. $\delta = \lim_{n\to\infty}[n^4(\frac{\pi}{4n})^{2n}]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{4}{n}}(\frac{\pi}{4n})^{2n} = 0 < 1$.

4. Применяем радикальный признак Коши и вторую теорему сравнения.

Так как $\delta = 0 < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 (\frac{\pi}{4n})^{2n}$ сходится. Следовательно, по второй теореме сравнения сходится и исходный ряд.

Замечание 7. Полезно иметь в виду, что $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{lnn} = 1$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{P(n)} = 1$, где $P(n)$ — многочлен относительно n.

Пример 36. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{(n^2-2)\ln(2n)}$.

Решение.

1. Упрощаем выражение для $a_n = \frac{3n}{(n^2-2)\ln(2n)} \sim \frac{3}{n\ln n}$.

И будем исследовать сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{n\ln n}$ с помощью интегрального признака Коши, т. к. функция $f(x) = \frac{3}{x\ln x}$ имеет очевидную первообразную $F(x) = 3\ln\ln x$. Затем используем вторую теорему сравнения.

2. Исследуем сходимость несобственного интеграла по определению:

$$\int_2^{+\infty} \frac{3dx}{x\ln x} = \lim_{b\to+\infty} \int_2^b \frac{3dx}{x\ln x} = 3\lim_{b\to+\infty} [\ln\ln b - \ln\ln 2] = +\infty.$$

Интеграл расходится.

3. Применяем интегральный признак Коши. Функция $f(x) = \frac{3dx}{x\ln x}$ непрерывна в промежутке $[2, +\infty)$ и убывает на нем. Следовательно, из расходимости интеграла следует расходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{n\ln n}$. По второй теореме сравнения расходится и исходный ряд.

4. Постановка задачи. Исследовать сходимость знакочередующегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, a_n > 0.$$

Алгоритм решения.

1. Проверяем, что $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится, т. к. не выполнено необходимое условие сходимости ряда).

2. Исследуем сходимость ряда, составленного из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, используя теоремы сравнения и признаки сходимости для рядов с положительными членами. Если ряд из модулей сходится, то исходный ряд сходится абсолютно.

3. Если ряд из модулей расходится, то остается еще возможность того, что исходный ряд сходится условно.

Чтобы исследовать эту возможность, применяем признак Лейбница. В данном случае, если условия признака Лейбница выполнены, то исходный ряд сходится условно (т. к. уже выяснено, что абсолютно он не сходится).

Пример 37. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Решение.

1. Проверим необходимое условие сходимости:

$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=0.$

2. Исследуем сходимость ряда, составленного из модулей:

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Так как при $n\to\infty$ $1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\sim\frac{1}{2n}$, то по второй (предельной) теореме сравнения ряд из модулей расходится.

3. Проверяем условия признака Лейбница:

а) ряд знакочередующийся с $a_n=1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}$;

б) члены ряда убывают по абсолютной величине:

$$1-\cos\frac{1}{\sqrt{n+1}}<1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\ \forall n\geq 1;$$

в) члены ряда стремятся к нулю при $n\to\infty$ (п. 1 алгоритма решения).

Следовательно, по признаку Лейбница исходный ряд сходится условно.

5. Постановка задачи. Вычислить сумму знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n, a_n>0$, с заданной точностью α.

Алгоритм решения.

1. Если $a_{n+1}<a_n$ и $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, то для остатка ряда R_n справедливо неравенство $|R_n|\leq a_{n+1}$.

2. Если $a_{n+1}<\alpha$, то и $|R_n|<\alpha$. Поэтому решая неравенство $a_{n+1}<\alpha$, находим количество членов ряда, которое необходимо взять для вычисления суммы ряда с заданной точностью α.

3. Непосредственно вычисляем n-ю частичную сумму и записываем ответ $S \sim S_n = a_1 - a_2 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n$.

Пример 38. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(1+n^3)^2}$ с точностью $\alpha = 0{,}001$.

Решение.

1. Данный ряд знакочередующийся и сходящийся (абсолютно). Члены ряда убывают по абсолютной величине: $\frac{n+1}{(1+(n+1)^3)^2} < \frac{n}{(1+n^3)^2}$. Следовательно, справедливо неравенство $|R_n| \leq a_{n+1} = \frac{n+1}{(1+(n+1)^3)^2}$.

2. Если $a_{n+1} < \alpha$, то и $|R_n| < \alpha$. Поэтому, решая неравенство $\frac{n+1}{(1+(n+1)^3)^2} < \frac{1}{1000}$, находим количество членов ряда, которое необходимо взять для вычисления суммы ряда с заданной точностью α. Получаем $n \geq 3$, т. е. достаточно взять первые три члена ряда.

3. Вычисляем $S_3 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{81} - \frac{3}{28^2} \approx -0{,}229$.

Пример 39. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n^2+\sqrt{n+1})^{x+1}}$.

Решение.

1. Для каждого фиксированного x все члены данного ряда положительны:

$$a_n = \frac{n^3}{(n^2+\sqrt{n+1})^{x+1}} > 0 \ \forall n \geq 1.$$

2. Используем вторую (предельную) теорему сравнения. Имеем $\frac{n^3}{(n^2+\sqrt{n+1})^{x+1}} \sim \frac{1}{n^{2(x+1)-3}}$ при $n \to \infty$. Так как при $2(x+1) - 3 > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2(x+1)-3}}$ сходится, а при $2(x+1) - 3 \leq 1$ расходится (как обобщенный гармонический), то по второй теореме сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n^2+\sqrt{n+1})^{x+1}}$ сходится при всех $x > 1$. Итак, область сходимости исходного ряда — $(1, \infty)$.

6. Постановка задачи. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$.

Алгоритм решения.

1. Если существуют пределы $\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$ или $\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}$, то можно найти радиус сходимости степенного ряда по формуле Д'Аламбера $R=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$ или по формуле Коши $R=$ $=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}$. Тогда интервал сходимости ряда есть $-R<x-x_0<R$.

Замечание 8. Формулы Д'Аламбера и Коши применимы лишь тогда, когда все коэффициенты степенного ряда c_n отличны от нуля. В противном случае находим $\delta(x)$ по одной из формул:

$\delta(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{|f_{n+1}|}{|f_n|}$ или $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n(x)|}$, где $f_n(x)$ — общий член ряда. По признакам Д'Аламбера и Коши ряд сходится при $\delta<1$ и расходится при $\delta>1$. Следовательно, находим интервал сходимости, решая неравенство $\delta(x)<1$.

2. Исследуем поведение степенного ряда в граничных точках интервала сходимости $x=x_0\pm R$. Записываем ответ.

Пример 40. Найти область сходимости ряда

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5}{2n+1}(x+1)^n$.

Решение.

1. В данном случае $c_n=\frac{(n+1)^5}{2n+1}\neq 0$ при всех n. Поэтому можно применить формулы Д'Аламбера или Коши для радиуса сходимости степенного ряда. По формуле Д'Аламбера

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^5}{2n+1}}{\frac{(n+2)^5}{2n+3}}=1.$$

Следовательно, интервал сходимости определяется неравенствами $-1<x+1<1$ и имеет вид: (-2, 0).

2. Исследуем сходимость ряда в граничных точках интервала сходимости. В точке $x=-2$ степенной ряд принимает вид: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5}{2n+1}(-1)^5$, а в точке $x=0$ — $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5}{2n+1}(-1)^5$.

Оба ряда расходятся, т. к. не удовлетворяют необходимому условию сходимости рядов $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^5}{2n+1}(\pm1)^n\neq 0$. Следовательно, в этих

точках ряд расходится. Итак, область сходимости степенного ряда $(-2, 0)$.

7. Постановка задачи. Найти сумму функционального ряда вида $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{f(x)^n}{n}$ и указать область сходимости ряда к этой сумме.

Алгоритм решения.

1. Находим область сходимости ряда. По признаку Коши интервал сходимости определяется неравенством $|f(x)| < 1$. Если $f(x) = 1$, ряд сходится условно (по признаку Лейбница). Следовательно, область сходимости определяется неравенствами $-1 \leq f(x) < 1$.

2. Делаем в исходном ряду замену $f(x) = t$, получим степенной ряд $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^n}{n}$ с областью сходимости $[-1, 1)$.

3. Известна формула для вычисления суммы членов бесконечно убывающей прогрессии:

$$\sum_{n=k}^{\infty} t^n = \frac{t^k}{1-t}, |t| < 1.$$

4. Кроме того, имеем очевидное равенство:

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^n}{n} = \int_0^t \sum_{n=k}^{\infty} u^{n-1} du, t \in (-1, 1).$$

5. Учитывая, что степенной ряд можно почленно интегрировать на любом отрезке $[0, t]$, целиком принадлежащем интервалу сходимости, и используя формулу $\sum_{n=k}^{\infty} t^n = \frac{t^k}{1-t}, |t| < 1$, получаем:

$$S(t) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^n}{n} = \int_0^t \sum_{n=k}^{\infty} u^{n-1} du = \int_0^t \frac{u^k}{1-u} du, t \in (-1, 1).$$

Заметим, что т. к. ряд $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^n}{n}$ сходится в граничной точке $t = -1$, то сумма ряда непрерывна в этой точке (справа). Следовательно, $S(-1) = \lim_{t \to -1+0} S(t)$.

6. Вычисляем интеграл, делаем замену t на $f(x)$ и записываем ответ.

Замечание 9. Если ряд имеет вид $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{f(x)^n}{(n+a)(n+b)}$, то применяем теорему о почленном интегрировании степенного ряда дважды или разлагаем дробь на элементарные: $\frac{1}{(n+a)(n+b)} = \left(\frac{1}{n+a} - \frac{1}{n+b}\right) \frac{1}{b-a}$ и вычисляем сумму каждого ряда почленным интегрированием.

Пример 41. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin^n x}{n}$ и указать область сходимости ряда к этой сумме.

Решение.

1. Находим область сходимости ряда. По признаку Коши интервал сходимости определяется неравенством $|\sin x| <1$.

В граничных точках при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ $(k = 0, \pm 1, \dots)$.

2. Сделаем замену $\sin x = t$. Получим геометрический ряд с областью сходимости $[-1, 1)$.

3. Используем формулу для вычисления членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} = \frac{1}{1-t}, |t| < 1$.

4. Кроме того, имеем очевидное равенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t u^{n-1}du, t \in (-1, 1).$$

5. Учитываем, что степенной ряд можно почленно интегрировать на любом отрезке $[0, t]$, целиком принадлежащем интервалу сходимости, и используя формулу $\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} = \frac{1}{1-t}, |t| < 1$, получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n} = \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} u^{n-1}du = \int_0^t \frac{1}{1-u}du = -\ln(1-t), |t| < 1.$$

6. Заменяя t на $\sin x$, получаем при $x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ $S(x) = -\ln(1 - \sin x)$. Итак, сумма исходного ряда $S(x) = -\ln(1 - \sin x)$, а область сходимости — все $x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Пример 42. Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(n+6)x^{7n}$ и указать область сходимости к этой сумме.

Решение.

1. Находим область сходимости ряда.

По признаку Коши интервал сходимости определяется неравенством $|x^7| < 1$. Отсюда $-1 < x < 1$. В граничных точках $x = \pm 1$ ряд расходится, т. к. не выполнено необходимое условие сходимости. Следовательно, ряд сходится в интервале (-1, 1).

2. Делаем в исходном ряду замену $x^7 = t$ и записываем его в виде суммы двух рядов $S(t) = 6\sum_{n=0}^{\infty} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} nt^n = 6S_1(t) + S_2(t)$. Следовательно, достаточно найти суммы рядов:

$$S_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, S_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} nt^n.$$

3. Используем формулу для вычисления суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}, |t| < 1$. Следовательно, $S_1(t) = \frac{1}{1-t}$ при всех $t \in (-1, 1)$.

4. Кроме того, имеем очевидное равенство:

$$\sum_{n=0}^{\infty} nt^n = t\sum_{n=0}^{\infty} nt^{n-1} = t\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dt} t^n.$$

5. Учитывая, что степенной ряд можно почленно дифференцировать в любой точке интервала сходимости, получаем $S_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nt^n = y\frac{d}{dt}\sum_{n=1}^{\infty} t^n = t\frac{d}{dt}\frac{t}{1-t} = \frac{t}{(1-t)^2}, t \in (-1, 1)$. Таким образом, $S(t) = 6S_1(t) + S_2(t) = \frac{6}{1-t} + \frac{t}{(1-t)^2} = \frac{6-5t}{(1-t)^2}, t \in (-1, 1)$. Заменяя t на x^7, получим $\sum_{n=0}^{\infty}(n+6)x^{7n} = \frac{6-5x^7}{(1-x^7)^2}$ $\forall x \in (-1, 1)$.

Сумма исходного ряда равна $S(x) = \frac{6-5x^7}{(1-x^7)^2}$, а область сходимости $\forall x \in (-1, 1)$.

8. Постановка задачи. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням x $(x_0 = 0)$.

Алгоритм решения.

1. Преобразуем функцию $f(x)$ к виду, допускающему использование табличных разложений $e^x, \sin x, \cos x, (1+x)^m, \ln(1+x)$.

2. Находим разложение функции в ряд Тейлора, используя табличные разложения, сложение (вычитание) рядов, умножение ряда на число.

3. Определяем область сходимости полученного ряда к функции $f(x)$.

Замечание 10. Если необходимо разложить функцию в ряд Тейлора по степеням $x - x_0$, сначала делаем замену переменной $t = x - x_0$, находим разложение по степеням t и возвращаемся к переменной x.

Пример 43. Разложить функцию $f(x) = \frac{3}{2-x-x^2}$ в ряд Тейлора по степеням x $(x_0 = 0)$.

Решение.

1. Чтобы использовать табличные разложения, разложим данную функцию на элементарные дроби:

$$\frac{3}{2-x-x^2} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x+2}.$$

2. Используя табличное разложение $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \cdots + t^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, t \in (-1, 1)$, получим $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, x \in (-1, 1)$, $\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+x/2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}, x \in (-2, 2)$. Таким образом, $\frac{3}{2-x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right) x^n$.

3. Областью сходимости полученного ряда является пересечение вышеуказанных областей сходимости, т. е. (–1, 1)∩(–2, 2) = (–1, 1).

9. Постановка задачи. Вычислить интеграл $\int_0^b f(x)dx$ с точностью α, где $f(x)$ разложима в степенной ряд, имеющий радиус сходимости $R > b$.

Алгоритм решения.

Практические вычисления обычно сводятся к суммированию того или иного числового ряда. В данном случае такой ряд получается, если разложить подынтегральное выражение в степенной ряд и проинтегрировать его почленно.

1. Разлагаем подынтегральную функцию в степенной ряд по степеням $xf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ и определяем его область сходимости.

2. Степенной ряд можно интегрировать почленно по любому отрезку, принадлежащему интервалу сходимости. Поэтому, интегрируя почленно полученный ряд и используя формулу Ньютона–Лейбница, получаем $\int_0^b f(x)dx = \int_0^b \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{b^{n+1}}{n+1}$.

3. Вычисляем сумму числового ряда с заданной точностью (оценивая остаток ряда).

Замечание 11. Если разложить подынтегральную функцию в ряд не по степеням x, а по степеням $x - \frac{b}{2}$, то ряд будет сходиться быстрее, т. е. для обеспечения заданной точности может потребоваться меньше слагаемых, однако в итоге вычисления оказываются более сложными.

Пример 44. Вычислить интеграл $\int_0^{0,1} \cos(100x^2)\, dx$ с точностью $\alpha = 0{,}001$.

Решение.

1. Разлагаем подынтегральную функцию в ряд Тейлора по степеням x:

$$\cos(100x^2) = 1 - \frac{(10^2x^2)^2}{2!} + \frac{(10^2x^2)^4}{4!} - \frac{(10^2x^2)^6}{6!} + \cdots =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(10^2x^2)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{10^{4n}x^{4n}}{(2n)!}.$$

Разложение справедливо при всех x.

2. Интегрируем почленно полученный ряд:

$$\int_0^{0,1} \cos(10^2x^2)\,dx = \int_0^{0.1} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{10^{4n}x^{4n}}{(2n)!}\,dx =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{10^{4n}}{(2n)!}\int_0^{0.1} x^{4n}dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{10^{4n}}{(2n)!}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\Big|_0^{0,1} =$$
$$= \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4n+1)(2n)!}.$$

3. Оценим остаток ряда. Так как ряд знакочередующийся,

$$a_n = \frac{1}{10(4n+1)(2n)!} > a_{n+1} = \frac{1}{10(4n+5)(2n+2)!}$$

и $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то справедливо неравенство $|R_n| \le a_{n+1} = \frac{1}{10(4n+5)(2n+2)!}$. Для вычисления интеграла с заданной точностью достаточно взять два члена ряда, т. к. $R_1 \le \frac{1}{10*9*4!} < 0{,}001$.

4. Производя вычисления, получаем $\int_0^{0,1} \cos(100x^2)\,dx \cong \frac{1}{10} - \frac{1}{10*5*2!} \cong 0{,}090$. Итак, $\int_0^{0,1} \cos(100x^2)\,dx \cong 0{,}090 \pm 0{,}001$.

Резюме

Рассматриваются сходимость числовых рядов, область сходимости функциональных рядов, разложение функции в ряд Тейлора, а также различные приложения рядов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Наконец, вами прочитана эта толстая книга. Авторы надеются, что она помогла вам успешно сдать экзамен по математике. Что же дальше? А дальше ждут увлекательные математические предметы, такие, как: «Теория вероятностей» (где вы познакомитесь с Его Величеством Случаем), «Экономико-математические методы и модели», «Теория игр», «Финансовая и актуарная математика», «Теория принятия решений» и многие другие.

Иногда приходится слышать: «А какой толк от математики?» Подобная точка зрения аналогична взгляду на музыку, лишь как на средство повышения удоев молока. Может быть, такой чисто прагматический подход и имеет место, но он не только не устанавливает суть, но и оказывается губительным. Разумеется, конкретная польза от математики есть, но она не столько в бухгалтерии и полетах в космос, сколько в восприятии окружающего мира и глубинном развитии человека. Знание математики влияет на стиль жизни и мышления, решение едва ли не любых бытовых и гуманитарных проблем. Незримо и неявно, но кардинальным образом. Знание математики — это совершенно иной фундамент для психологической надстройки, это «амулет баланса» и «магнит стремления к абсолюту»! По мнению академика В. И. Арнольда: «Слово «математика» означает наука об истине».

Читайте книги, решайте задачи и почаще вспоминайте слова великого русского режиссера К. С. Станиславского: «Ничему нельзя научить, всему можно только научиться». Мы искренне желаем вам удачи в этом.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЯ

Вопросы и упражнения к главе 1

1. Напишите с помощью кванторов определение ограниченного сверху множества. Постройте отрицание этого определения, пользуясь правилом построения отрицаний.

2. Дайте определение точной верхней (нижней) грани ограниченного сверху (снизу) множества.

3. Сформулируйте теорему о существовании точных граней числовых множеств.

4. Докажите единственность точных граней, т. е. что ограниченное сверху (снизу) множество имеет только одну точную верхнюю (нижнюю) грань.

5. Покажите, что точные грани могут как принадлежать, так и не принадлежать множеству. Приведите примеры числовых множеств X, у которых:

а) $\sup X \in X$; б) $\sup X \notin X$; в) $\inf X \in X$; г) $\inf X \notin X$.

Имеет ли множество X в случаях а) и б) наибольший, а в случаях в) и г) наименьший элемент?

6. Что означает символическая запись: а) $\sup X = +\infty$; б) $\inf X = -\infty$.

7. Пусть A — множество чисел, противоположных по знаку числам из множества B. Докажите, что: а) $\inf A = -\sup B$; б) $\sup A = -\inf B$.

8. Найти $\sup A$ и $\inf A$, если а) $A = \{n \in N : n^2 - 16 < 0\}$; б) $A = \{r \in Q : r^2 < 7\}$.

9. Приведите пример непустого множества $A \subset R$, которое одновременно открыто и замкнуто.

10. Является ли периодической функция $f(x) = \sin|x|$? Ответ обосновать.

Тест для самопроверки

1. Область определения функции $y = (x-2)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ равна:

а) $(0,1)$; б) $(-\infty,0] \cup (1,+\infty)$; в) $[0,1)$; г) $\{x : x \neq 1\}$.

2. Функция $f(x)$ неограничена на множестве X, если:

а) $\forall\varepsilon>0\exists x\in X: f(x)>\varepsilon$; в) $\forall\varepsilon>0\exists x\in X: |f(x)|>\varepsilon$;

б) $\forall\varepsilon>0\ \forall x\in X\Rightarrow f(x)>\varepsilon$; г) $\exists\varepsilon>0\ \exists x\in X: |f(x)|>\varepsilon$.

3. Среди функций $y=\cos x$, $y=\sin x+\sqrt{x^2+1}$, $y=\sin 2x+\cos^2 x$, $y=\sin x+\sqrt[3]{\cos x}$, $y=|\cos x|$ число периодических функций равно:

а) 2; б) 3; в) 4; г) 5.

4. Для скольких функций из следующего списка $y=\dfrac{x^2}{1+x}$, $y=\sqrt{3x-x^3}$, $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$, $y=\arcsin(1-x)+\lg(\lg x)$, $y=\sqrt[4]{\lg(\operatorname{tg} x)}$ область определения является замкнутым множеством:

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

5. Среди функций $y=|x+1|$, $y=x$, $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, $y=\operatorname{tg}x$ нечетных:

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

Ответы к упражнениям

1. Множество X ограничено сверху, если $\exists M:\forall x\in X\Rightarrow x\le M$.

Множество X неограниченно сверху, если $\forall M\ \exists x\in X: x>M$.

2. см. гл. 1 § 3.

3. см. гл. 1 § 3.

4. см. замечание в гл. 1 § 3.

5. а) $X=[0,1]$; б) $X=[0,1)$; в) $X=[0,1]$; г) $X=(0,1]$. В случае (а) множество X имеет наибольший элемент, в случае (в) множество X имеет наименьший элемент.

6. а) множество X неограниченно сверху; б) множество X неограниченно снизу.

8. а) $\sup A=3,\ \inf A=1$; б) $\sup A=\sqrt{7},\ \inf A=-\sqrt{7}$.

9. $A=R$.

10. Нет.

Вопросы и упражнения к главе 2

Найти предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если:

1. $x_n = \dfrac{n^2}{n+1} - \dfrac{n^3}{n^2+1}$; 2. $x_n = \sqrt{n^3+n} - \sqrt[3]{\sqrt{n^9+n^7}+n^3}$; 3. $x_n = \left(1+\dfrac{1}{3^n}\right)^{n!}$.

Найти предел функции:

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$; 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$; 6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[7]{x}-1}$;

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2} - \sqrt{x^2-2x})$; 8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

9. Докажите, что уравнение $x^3 - 5\sin x = 4$ имеет по крайней мере один вещественный корень.

10. Приведите пример функции, которая непрерывна на конечном интервале (a,b), но неограниченна на этом интервале.

Тест для самопроверки

1. Предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}$ равен:

а) 1; б) 2; в) $\dfrac{2}{3}$; г) $+\infty$.

2. Сколько из написанных ниже утверждений верны:

$\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{\ln n}} - 1 \approx \dfrac{1}{n\ln n}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos\ln x - 1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x} = 1$;

функция $f(x) = \begin{cases} e^{1/x^2}\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ непрерывна в точке 0:

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

3. Предел функции $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x})$ равен:

а) 0; б) $\dfrac{1}{2}$; в) 1; г) $+\infty$.

4. При каких значениях параметров a, b предел функции $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)} - x)$ равен 1:

а) $a=1, b=-1$; б) $a=b=1$; в) $a=b=\sqrt{2}$; г) ни при каких.

5. Для функции $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^3}, & x\neq 0\\ f(0)=0\end{cases}$ точка $x_0=0$ является:

а) точкой непрерывности; в) разрывом первого рода;
б) устранимым разрывом; г) разрывом второго рода.

Ответы к упражнениям

1. -1. 2. $-\dfrac{1}{3}$. 3. $+\infty$. 4. $-\dfrac{1}{2}$. 5. 2. 6. $\dfrac{7}{5}$.

7. 2. 8. 1. 9. Рассмотреть поведение функции при $x\to\pm\infty$ и воспользоваться теоремой Больцано–Коши (первой).

10. Например, $\operatorname{tg} x$ на интервале $-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}$.

Вопросы и упражнения к главе 3

Найти производную функции:

1. $y=\dfrac{2x}{1-x^2}$; 2. $y=\dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$; 3. $y=\dfrac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$.

Найти дифференциалы указанного порядка от следующих функций:

4. $y=\operatorname{tg} x$, d^3y; 5. $y=e^{u(x)}$, d^3y; 6. $y=f(x),\ x=\varphi(t)$, d^3y.

Вычислить пределы:

7. $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{(a+y)^{a+y}-a^a}{y}$; 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}$; 9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^x$.

10. Разложить функцию $y=\operatorname{tg} x$ в окрестности нуля по формуле Тейлора до $o(x^5)$.

Тест для самопроверки

1. Производная функции $y=\dfrac{1+x}{1+x^2}$ равна:

а) $y'=\dfrac{1-2x+x^2}{(1+x^2)^2}$; б) $y'=\left(\dfrac{1+x}{1+x^2}\right)^2$; в) $y'=\dfrac{1-2x-x^2}{(1+x^2)^2}$; г) $y'=\left(\dfrac{1-x}{1+x^2}\right)^2$.

2. Предел $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{2\cos x}$ равен:

а) 1; б) ∞; в) $e^{\frac{1}{\pi}}$; г) 0.

3. Коэффициент при x^6 в разложении функции $y=\sqrt[3]{8+x^2}$ по формуле Маклорена равен:

а) $\frac{27}{2048}$; б) $\frac{1}{486}$; в) $\frac{1}{4096}$; г) 0.

4. На каком из указанных промежутков функция $y=\frac{\ln^2 x}{x}$ возрастает:

а) $(0,1)$; б) $(1,e)$; в) $(1,e^2)$; г) (e,e^2).

5. Сколько асимптот имеет функция $y=x-\sqrt{x^2-x+1}$:

а) одну; б) две; в) три; г) ни одной.

Ответы к упражнениям

1. $y'=\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$.

2. $y'=\frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$.

3. $y'=\frac{1-x+4x^2}{(1-x)^3(1+x)^4}$.

4. $d^3y=(2+8\operatorname{tg}^2x+6\operatorname{tg}^4x)dx^3$.

5. $d^3y=e^u(u'''+3u''u'+u'^3)dx^3$.

6. $d^3y=f'''dx^3+3f''d^2xdx+f'd^3x$.

7. $a^a(\ln a+1)$.

8. 3.

9. $e^{-\frac{2}{\pi}}$.

10. $\operatorname{tg} x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^5)$.

Вопросы и упражнения к главе 4

1. Сформулируйте определение первообразной.
2. Запишите по памяти таблицу основных интегралов.
3. Перечислите основные методы для нахождения неопределенного интеграла.
4. Приведите примеры функций, интегралы от которых не выражаются в элементарных функциях.

5. Сформулируйте определение интеграла Римана.

6. Может ли неограниченная функция быть интегрируемой?

7. Сформулируйте основную теорему анализа (теорему Барроу) и ее следствие (формулу Ньютона–Лейбница).

8. Дайте определение несобственного интеграла 2-го рода.

9. Напишите формулу для вычисления объема тела вращения относительно оси Оx и оси Оy.

10. Дайте определение верхних и нижних сумм Дарбу.

11. Найти интеграл:

а) $\int x^3 e^{-x} dx$; б) $\int x \ln x dx$.

12. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}$.

13. Вычислить интеграл от рациональной функции:

а) $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx$; б) $\int \frac{dx}{x^4 + x^2}$.

14. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = 4 - x, y = 0$; б) $xy = 4, x = 4, y = 4, x = 0, y = 0$.

15. Вычислить интеграл:

а) $\int_1^2 \frac{dx}{x}$; б) $\int_0^{\pi} \sin x dx$; в) $\int_0^2 x(3-x) dx$.

16. Найти длину дуги кривой $y = x^{\frac{3}{2}}$ от $x = 0$ до $x = 4$.

17. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Оx.

а) Дуги синусоиды $y = \sin x$ от $x = 0$ до $x = \pi$.

б) Дуги кривой $y^2 = 4 + x$, отсеченной прямой $x = 2$.

18. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Оy площади, заключенной между $xy = 2, y = 1, x = 0$.

19. Выяснить сходимость интеграла:

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-3)^2}.$$

20. $\int_1^{+\infty} \frac{1 + \ln x}{x} dx$.

Тест для самопроверки

1. Первообразная функции $\cos 2x$ равна:

а) $2\sin 2x + C$; б) $\sin 2x + C$; в) $\frac{1}{2}\sin 2x + C$; г) $2\cos 2x + C$.

2. Следующий метод применим для вычисления интеграла $\int \ln x dx$:

а) подстановки; б) разложение на простейшие; в) по частям; г) табличный интеграл.

3. Величина интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ равна:

а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{6}$; в) $\frac{\pi}{8}$; г) $\frac{\pi}{2}$.

4. Площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$, равна:

а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{2}$; г) 1.

5. Несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}+1}{x^a + \sin x} dx$ x будет сходиться при следующих значениях параметра a:

а) $a \in (\frac{3}{2}, +\infty)$; б) $a \in (1, \frac{3}{2})$; в) $a \in (-\infty, 1)$; г) при любых значениях a.

Ответы к упражнениям

1. а) $-e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6) + C$; б) $\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$.

2. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2tg\frac{x}{2}+1}{tg\frac{x}{2}-2}\right| + C$.

3. а) $\ln|x-2| + \ln|x+5| + C$; б) $-\frac{1}{x}arctgx + C$.

4. а) $\frac{32}{3}$; б) $4\ln(4e)$.

5. а) $\ln 2$; б) 2; в) $\frac{10}{3}$.

6. $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$.

7. а) $2\pi(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$; б) $\frac{62\pi}{3}$.

8. 4π.

9. Расходится.

10. Расходится.

Вопросы и упражнения к главе 5

1. Запишите уравнение плоскости.
2. Как найти расстояние от данной точки до плоскости?
3. Каковы условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей?
4. Как определить угол между двумя плоскостями?
5. Что такое эксцентриситет эллипса?
6. Виды преобразований уравнения второго порядка.
7. Как найти точку пересечения прямой и плоскости?
8. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
9. Что такое направляющий вектор прямой?
10. Канонические уравнения прямой.
11. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\overrightarrow{BC}$, если $A(1,0,-2), B(2,-1,3), C(0,-3,2)$.
12. Найдите угол между плоскостями: $x-3y+5=0,\ 2x-y+5z-16=0$.
13. Найдите координаты точки A, равноудаленной от точек B и C, если $A(0,0,z), B(5,1,0), C(0,2,3)$.
14. Напишите канонические уравнения прямой: $\begin{cases} 2x+y+z-2=0 \\ 2x-y-3z+6=0 \end{cases}$.
15. Найдите точку пересечения прямой и плоскости, если $L: \frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{4}$, $P: x+2y+3z-14=0$.
16. Найдите точку M_1, симметричную точке M относительно прямой, если $M(0,-3,-2)$, $L: \frac{x-1}{1}=\frac{y+1,5}{-1}=\frac{z}{1}$.

17. Точка $P(2,-1,-1)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составьте уравнение этой плоскости.

18. Вычислите расстояние от точки $P(2,3,-1)$ до прямой $\begin{cases} x = t+1 \\ y = t+2 \\ z = 4t+13. \end{cases}$

19. Докажите, что прямая $L:\begin{cases} 5x-3y+2z-5=0 \\ 2x-y-z-1=0 \end{cases}$ лежит в плоскости $4x-3y+7z-7=0$.

20. Найдите точки пересечения прямой $L:\begin{cases} 2x+y-z-3=0 \\ x+y+z-1=0 \end{cases}$ с координатными плоскостями.

Тест для самопроверки

1. Траекторией движения точки $M(x,y)$, которая при этом остается вдвое ближе к точке $A(1,2)$, чем к точке $B(-2,4)$ является:

а) прямая линия; б) окружность; в) гипербола; г) эллипс.

2. Решение уравнения $DXA = CB$ с помощью обратных матриц D^{-1}, A^{-1} имеет вид:

а) $D^{-1}A^{-1}CB$; б) $A^{-1}CD^{-1}B$; в) $D^{-1}CBA^{-1}$; г) $CD^{-1}A^{-1}B$.

3. Для решения системы линейных уравнений $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 3x+5y=2 \\ 3x+4y+3z=-1 \end{cases}$ можно применить:

а) метод Гаусса; в) метод обратной матрицы;

б) метод Крамера; г) любой метод.

4. Угол между прямой $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{12}=\frac{z-1}{3}$ и плоскостью $6x-3y+2z=0$ равен:

а) $\operatorname{arctg}\frac{4}{13}$; б) $\arccos\frac{12}{71}$; в) $\arcsin\frac{18}{91}$; г) $\operatorname{arctg}\frac{23}{81}$.

5. Ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 4 & 0 \\ 1 & 17 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ равен:

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

Ответы к упражнениям

11. $2x+2y+z=0.$

12. $\cos\Phi=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}.$

13. $(0,0,-\dfrac{13}{6}).$

14. $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-8}=\dfrac{z-2}{4}.$

15. $(1,2,3).$

16. $(1,1,1).$

17. $2x-y-z-6=0.$

18. 6.

20. $(2,-1,0),\left(\dfrac{4}{3},0,-\dfrac{1}{3}\right),(0,2,-1).$

Вопросы и упражнения к главе 6

1. Дайте определение замкнутого множества. Может ли множество быть одновременно:

а) открытым и замкнутым;

б) не открытым и не замкнутым?

Являются ли замкнутыми следующие множества:

а) m-мерный шар;

б) m-мерная сфера;

в) ε-окрестность точки;

г) m-мерный параллелепипед?

2. Докажите утверждение: для того, чтобы множество было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы оно содержало все свои предельные точки.

3. Как определяются понятия предела и непрерывности функции двух переменных?

4. Сформулируйте определения частных производных первого порядка функции нескольких переменных.

5. Сформулируйте теорему о равенстве смешанных производных.

6. Что называется дифференциалом высших порядков?

7. Как вычисляется производная функции по направлению и ее градиент?

8. Сформулируйте необходимое и достаточное условие локального экстремума функции двух переменных.

9. Дайте определения условного экстремума функции двух переменных и как он находится.

10. Как найти глобальный экстремум (наибольшее и наименьшее значение) функции двух переменных?

11. Найти:

а) область определения функции $z = \arcsin\frac{x}{y^2} + +\arcsin(1-y)$;

б) y и y' для неявной функции $xe^y - y + 1 = 0$.

12. Найти точки разрыва функции $x = \ln(4 - x^2 - y^2)$.

13. Найти частные производные следующих функций:

а) $z = x^2 + y^3 + 3x^2y^3$; б) $z = arctg\frac{y}{x}$; в) $z = xy\ln(xy)$.

14. Найти d^2z для неявной функции $x = f(x, y)$, заданной уравнением $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$, при $x = -2, y = 0$; известно, что $z(-2, 0) = 1$ найдите все частные производные второго порядка и по ним составьте d^2z.

15. Найти производную функции $z = 6xy^3 + 5x^2$ по направлению $e = i + 3j$ в точке (1, 3) .

16. Найти градиент $z = \frac{xy}{x^2+y^2+1}$ в точке (0, 3).

17. Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x, y) = 2x^2 - xy - -y^2 - 6x - 3y$ в окрестности точки (1, -2).

18. Найти локальные экстремумы функции $f(x, y) = 5xy + +2(x - 3y + 1)^2$.

19. Найти условные экстремумы функции $z = f(x, y) = 6 - 5x - 4y$ относительно уравнения связи $\varphi(x, y) = x^2 - y^2 - 9 = 0$.

20. Найти наибольшее (M) и наименьшее (m) значения функции $z = x^2 + y^2 - 4x$,

$-2 \le x \le 1, -1 \le y \le 3$.

Тест для самопроверки

1. Множество, на котором определена функция $z = \frac{1}{x^2+y^2-1}$ является:

а) открытым; б) замкнутым; в) линейно связным; г) выпуклым.

2. Длина вектора градиента функции $z = x + e^{x+5y}$ в точке (0, 0) равна:

а) $\sqrt{27}$; б) $\sqrt{28}$; в) $\sqrt{26}$; г) $\sqrt{30}$.

3. Число точек, в которых функция $z = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26$ имеет строгий локальный экстремум равно:

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

4. Условный экстремум функции $z = x^2 - y^2$ при условии $2x - y = 3$ равен:

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

5. Наибольшее (M) и наименьшее (m) значения функции $z = x^3 + +y^3 - 3xy$,

$0 \le x \le 2, -1 \le y \le 2$ соответственно равны:

а) $M = 11,\ m = 0$; в) $M = 12,\ m = -2$;

б) $M = 10,\ m = -3$; г) $\mathrm{M} = 13,\ \mathrm{m} = -1$.

Ответы к упражнениям

11.

а) Криволинейный треугольник, образованный прямой $y = 2$ и параболами $y^2 = \pm x$, исключая вершину $(0, 0)$;

б) $y' = \frac{e^y}{1-xe^y}$, $y'' = \frac{e^{2y}(2-xe^y)}{(1-xe^y)^3}$.

12. Все точки окружности $x^2 + y^2 = 4$.

13. а) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 6xy^3, \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + 9x^2y^2$;

б) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$;

в) $\frac{\partial z}{\partial x} = y\ln(xy) + y, \frac{\partial z}{\partial y} = x\ln(xy) + x$.

14. $d^2z = \frac{4}{15}dx^2 + \frac{4}{15}dy^2$.

15. $\frac{685}{\sqrt{10}}$.

16. $3i$.

17. $f(x, y) = 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2$.

18. В точке $\left(-\frac{12}{19}, \frac{4}{19}\right)$ функция имеет строгий локальный минимум $f\left(-\frac{12}{19}, \frac{4}{19}\right) = -\frac{10}{19}$.

19. В точке (-5, 4) функция $f(x, y)$ имеет условный минимум $z_{min}(-5, 4) = 15$, а в точке (5, –4) — условный максимум $z_{max}(5, -4) = -3$.

20. $M = 21,\ m = -3$.

Вопросы и упражнения к главе 7

1. Какое уравнение называется дифференциальным? Что называется порядком дифференциального уравнения?

2. Что называется решением дифференциального уравнения?

3. Что определяет уравнение $y' = f(x, y)$?

4. Дайте определение условия Липшица.

5. Сформулируйте теорему Коши.

6. Какое решение дифференциального уравнения называется общим, а какое частным? Каков их геометрический смысл?

7. Какое решение ОДУ называют особым? Каков его геометрический смысл? Как они интегрируются?

8. Что понимается под методом вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)?

9. Какое дифференциальное уравнение второго порядка называется линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами? В каких случаях оно называется однородным и неоднородным?

10. Какова структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?

11. Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x},\ y(1) = 0, y'(1) = 0$.

12. Найти общее решение дифференциального уравнения $ydx + (1 + x^2)dy = 0$.

13. Доказать, что функция $y = xe^{-x^2/2}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $xy' = (1 - x^2)y$.

14. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$.

15. Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения $xy' + y - e^x = 0, y(0) = 1$.

16. Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения $xy' = 4y + x^2\sqrt{y}, y(1) = 0$.

17. Найти общее решение дифференциального уравнения $(x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$.

18. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' = 1 - y'^2$.

19. Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения $y''y^3 = 1, y\left(\frac{1}{2}\right) = 1, y'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

20. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y = \cos x$.

Тест для самопроверки

1. Число особых решений дифференциального уравнения $x\sqrt{1 - y^2}dx + y\sqrt{1 - x^2}dy = 0$ равно:

а) 0 (нет особых решений);

б) одно;

в) два;

г) три.

2. Общий интеграл дифференциального уравнения $y^2\, dx\, (x^2 - xy)dy = 0$ имеет вид:

а) $y\, e^{-y/x} = C$;

б) $x\, e^{-x/y} = C$;

в) $x^2 e^{-y/x} = C$;

г) $y^2\, e^{-y/x} = C$.

3. Частное решение уравнения $y' - 3x^2y = x^5 + x^2$, удовлетворяющее начальным условиям $y = 1$ при $x = 0$ имеет вид:

а) $y = 2e^{x^3} + \frac{x^3}{3} - 1$;

б) $y = \frac{5}{3}e^x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}$;

в) $y = \frac{5}{3}e^{x^3} - \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}$;

г) $y = 2e^{x^3} - \frac{x^3}{3} + 1$.

4. Частное решение уравнения $y'' - 4y' + 4y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y = y' = 1$ при $x = 0$, имеет вид:

а) $e^{3x}(1+x)$; в) $e^{2x}(1-x)$;
б) $e^{3x}(1-x)$; г) $e^{2x}(1+x)$.

5. Общее решение дифференциального уравнения $y'' + 3y' + 2y = \cos 2x$ имеет вид:

а) $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{3}{20}\cos 2x + \frac{5}{20}\sin 2x$;

б) $y = C_1e^x + C_2e^{2x} - \frac{3}{20}\cos 2x - \frac{5}{20}\sin 2x$;

в) $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{1}{20}\cos 2x - \frac{3}{20}\sin 2x$;

г) $y = C_1e^x + C_2e^{2x} - \frac{1}{20}\cos 2x + \frac{3}{20}\sin 2x$.

Ответы к упражнениям

11. $y = (1 - x + x\ln x)e^{-x}$.

12. $\ln|y| + arctg\, x = C$.

14. $e^{-\frac{y}{x}} + \ln|x| = C$.

15. $y = \frac{e^x - 1}{x}$.

16. $y = \frac{x^4}{4} ln^2|x|$.

17. $\frac{x^2}{2} + xy + y^2 = C$.

18. $y = \ln|e^{2x} + C_1| - x + C_2$.

19. $2y^2 - 4x^2 = 1$.

20. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{x}{2}\sin x$.

Вопросы и упражнения к главе 8

1. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n^2+5n+6}$.

2. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctg(n^3)}{n(n+2)(n+3)}$.

3. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2}{2^n(n+1)!}$.

4. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+1)ln^2n}$.

5. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3n+1}{n(n+2)}$.

6. Вычислить сумму знакочередующегося ряда с заданной точностью α. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, $\alpha = 0{,}01$.

7. Найти области сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n9^n}$.

8. Найти сумму функционального ряда и указать область его сходимости к этой сумме $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n x^n}{n}$.

9. Разложить функцию $\frac{5}{6-x-x^2}$ в ряд Тейлора ($x_0 = 0$).

10. Найти сумму функционального ряда и указать область его сходимости к этой сумме $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n+1}$.

Тест для самопроверки

1. Следующий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^3+1}$ будет:

а) расходиться на основании интегрального признака Коши;

б) сходиться на основании признака Д'Аламбера;

в) сходиться на основании признака сравнения;

г) расходиться, потому что нарушен необходимый признак сходимости.

2. Общий член числового ряда $2+10+26+82+242+730+\ldots$:

а) 3^n+1; в) $3^{2n-2}+1$;

б) 3^n-1; г) $3^n+(-1)^n$.

3. Среди приведенных ниже рядов

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)\ln n}{n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 5^n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{10n+1}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^5}}$ количество абсолютно сходящихся равно:

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

4. Область сходимости степенного ряда $1-\frac{x}{5\sqrt{2}}+\frac{x^3}{5^2\sqrt{3}}-\frac{x^5}{5^3\sqrt{4}}+\ldots$ имеет вид:

а) $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$; б) $[-3,3)$; в) $(-\sqrt{2},\sqrt{2}]$; г) $(-3,3]$.

5. Третий коэффициент в разложении в ряд Маклорена функции $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$ имеет вид:

а) $\frac{2x^3}{9}$; б) $\frac{2x^2}{7}$; в) $\frac{2x^4}{3}$; г) $\frac{2x^5}{5}$.

Ответы к упражнениям

1. $S = 2$.
2. Ряд сходится.
3. Ряд сходится $(\delta = 0)$.
4. Ряд сходится.
5. Ряд сходится условно.
6. $S \cong 0{,}84$.
7. $(-7, 11)$.
8. $S = -\ln(1 - 6x), x \in [-1/6\,, 1/6)$.
9. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)x^n,\ x \in (-2, 2)$.
10. $S = \frac{x^2}{(1-x)^2},\ x \in (-1, 1)$.

Ключи к тестам для самоконтроля

Глава 4. **1.** в) **2.** в) **3.** б) **4.** б) **5.** а)
Глава 5. **1.** в) **2.** в) **3.** а) **4.** в) **5.** б)
Глава 6. **1**. а) **2.** в) **3.** б) **4.** в) **5.** г)
Глава 7. **1**. в) **2**. а) **3**. в) **4**. в) **5**. г)
Глава 8. **1.** в) **2.** г) **3.** б) **4.** а) **5**. г)

Задания для контрольных работ

Правила выбора и выполнения контрольных работ в I и II семестрах

Домашние контрольные работы в первом и во втором семестрах состоят из 8 задач. Задачи у всех студентов одинаковы, различны только числовые данные: *А*, *Б*, *В* и *Г*,
где *А* — длина полного имени (число букв);
Б — длина фамилии (число букв);
В — длина полного имени отца (число букв);
Г — последняя цифра номера зачетки.
Например, Иванова Ирина Николаевна, № 0286751
Ирина — 5, *А* = 5;
Иванова — 7, *Б* = 7;
Николай — 7, *В* = 7;
№ 0286751 — *Г* = 1.

При выполнении контрольной работы необходимо ***строго*** придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без их соблюдения, не засчитываются и возвращаются студенту для переработки.

1. Задания данной контрольной работы должны быть оформлены в Microsoft Office Word 2007, с использованием для формул Microsoft Equation.

2. На титульном листе контрольной работы должны быть ясно написаны фамилия студента (*Б*), имя (*А*), отчество (полное имя отца — *В*), учебный номер (шифр — последняя цифра — *Г*). Кроме того, титульный лист данного контрольного мероприятия должен содержать следующую таблицу:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

Должны быть указаны даты отсылки работы в университет и адрес студента.

3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго со своими числовыми значениями (*А*=..., *Б*=…, *В*=..., *Г*=...)

Контрольные работы, содержащие не все задачи или не свои числовые значения *А*, *Б*, *В*, *Г* — не засчитываются.

4. Решение задачи необходимо располагать в порядке, указанном в заданиях, сохраняя номера задач.

5. Перед решением каждой задачи необходимо полностью написать ее условие и свои числовые значения *А*=..., *Б*=…, *В*=..., *Г*=…

6. Решение следует излагать подробно и аккуратно, объясняя все действия по ходу решения и выполняя необходимые чертежи.

7. После получения прорецензированной работы (как зачтенной, так и не зачтенной) студент должен исправить все отмеченные ошибки и недочеты и выполнить все рекомендации. Если рецензент предлагает вместе с решением задачи те или иные исправления или дополнения прислать для повторной проверки, то это следует сделать в короткий срок.

8. Без зачтенной контрольной работы студент к зачету (экзамену) *не допускается*.

Контрольная работа по математике
(первый семестр)

А — длина полного имени (число букв);
Б — длина фамилии (число букв);
В — длина полного имени отца (число букв);
Г — последняя цифра зачетки.

Максимальное количество баллов за работу — 30. Каждое из восьми заданий оценивается следующим образом.

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	сумма
Кол-во баллов	3	4	3	3	3	5	6	3	30

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^{А}+3x^{Б}-(4x^{Б}+5x^{В})^{А}}{(3x^{А}+4x^{В})^{Б}}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x^2A^x}{1+x^2(А+Б)^x}\right)^{1/\sin^3 x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{Ax}{Ax-Б}\right)^{Бx}$.

2. Исследовать функции и построить их графики:

а) $y=\dfrac{(Ax+(Б+Г))(Бx-(А+Г))}{x^2}$;

б) $y=x^{\frac{А}{В+Г}}e^{-\frac{x^2}{Б}}$.

3. Найти неопределенные интегралы и сделать проверку:

а) $\displaystyle\int\frac{(2А+\frac{Г}{2})x^3+(Б-\frac{Г}{3})x^2-\frac{1}{В}+3А}{(А+\frac{Б}{2}+Г)x-А}dx$;

б) $\displaystyle\int\frac{Вx+Б}{\sqrt{(А+Г)x^2-Бx+(В+Г)}}dx$;

в) $\displaystyle\int((В+Г)x-Б)В^{x+А+2}dx$.

4. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^A \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}dx$;

б) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{Г}{A+Б\sin x+B\cos x}dx$;

в) $\int\limits_{-1}^{0} Бx^2\ln(x+(A+B))dx$.

5. Найти обратную матрицу T^{-1} и установить, что $T^{-1}T=E$, где E — единичная матрица третьего порядка:

$$T=\begin{pmatrix} A & B+Г & 1 \\ -2 & Б & -A \\ 3 & A-Б & B \end{pmatrix}$$

6. Найти:

а) размерность пространства решений (количество линейно независимых решений);

б) фундаментальную систему решений (базис пространства решений);

в) общее решение системы линейных уравнений;

г) сделать проверку.

$$\begin{cases} Ax_1-Гx_2-Bx_3+3x_4=0 \\ Бx_1+Bx_2-2Ax_3+4x_4=0 \\ Bx_1-(A+1)x_2-5x_3+Бx_4=0. \end{cases}$$

7. Относительно векторов $\overline{a_1}(A, Б, B)$; $\overline{a_2}(Б, B, Г+1)$; $\overline{a_3}(B, A, Б)$ установить:

а) будут ли они линейно зависимыми;

б) представить (если это возможно) вектор $\overline{a}(1, 2, 3)$ в виде линейной комбинации векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ и сделать проверку.

8. Найти координаты точки пересечения прямой

$$\frac{x-A}{Г-1}=\frac{y+Б}{A+Б}=\frac{z-B}{A+Б+B}$$

и плоскости $x+Ay+Bz-(A+Г)=0$.

Контрольная работа по математике (второй семестр)

А — длина полного имени (число букв);
Б — длина фамилии (число букв);
В — длина полного имени отца (число букв);
Г — последняя цифра зачетки.

Максимальное количество баллов за работу составляет 30. Каждое из восьми заданий оценивается следующим образом.

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	сумма
Кол-во баллов	5	2	5	4	2	4	4	4	30

1. Даны координаты вершин пирамиды $M_1M_2M_3M_4$:

$M_1(А+2Б, Г, 1-В)$; $M_2(2А-1, -Г+В, 2-Б)$;

$M_3(-Г-Б, В-А, А+1)$; $M_4(В-2, 1-Б, А-Г)$.

Найти:

а) длину ребра M_2M_3;

б) угол между ребрами M_1M_2 и M_2M_3;

в) площадь грани $M_1M_2M_3$;

г) объем пирамиды;

д) высоту, опущенную из вершины M_4.

2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D xydxdy$, где D — треугольник с вершинами $M_1(А, Б+В)$, $M_2(-Г+1, А+В)$, $M_3(-Г-Б, А+Б)$.

3. Для функции

$z=(А+Г)x^2+Бy^2-Вxy+Ax+2Б$

найти:

а) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ — производную по направлению от точки $M_1(Г, А+2Б)$ к точке $M_2(2Г-1, -А+В)$ в точке M_1;

б) $grad\, z$ — градиент z в точке M_2;

в) локальные экстремумы функции z;

г) наибольшее и наименьшее значения функции z в треугольнике $M_1M_2M_3$, где $M_3(-Г-Б, А+В)$;

д) уравнение плоскости $M_1M_2M_3$.

4. Найти решение задачи Коши для следующих уравнений:

а) $(Ax^2 + Bx + Б)dy + \dfrac{Бy + B}{Ay^2 + Бy + Г}dx = 0$, $y(0) = 1$;

б) $y' + Ay = e^x y^Б$, $y(0) = 1$.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$Ay'' - 2Бy' + (B + Г)y = x^A - 2\sin Бx + 7e^{Bx}$.

6. Найти суммы рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{A}{n^2 + Bn + (Б + 1)}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n^2 - An + Б)x^n$.

7. Найти радиусы сходимости и области сходимости степенных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^A}{(n + Г)!}(x + Б)^{2n+1}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (x - A)^n}{n^{B/Б} + (Г + A)n + 5}$.

8. Разложить функции:

а) $f(x) = \ln(Ax^2 + Бx + B)$;

б) $f(x) = \dfrac{Ax^3 + Бx^2 - Bx + Г + 2}{Бx^2 + Bx - 1}$

в ряд Тейлора по степеням $x, (x_0 = 0)$.

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

Первый семестр

1. Множества и способы задания множеств. Операции над множествами.
2. Общее понятие функции. Основные определения.
3. Множество вещественных чисел. Аксиома непрерывности. Классификация вещественных чисел. Основное модульное неравенство.
4. Окрестности и полуокрестности. Предельные точки. Открытые и замкнутые множества.
5. Грани числовых множеств. Теорема о точной верхней грани. Лемма Гейне–Бореля–Лебега о покрытиях.
6. Понятие числовой функции и способы их задания. Грани функций.
7. Четные, нечетные, периодические, монотонные функции. Классификация элементарных функций.
8. Понятие числовой последовательности. Аналитическое и геометрическое описание предела.
9. Сходящиеся и расходящиеся последовательности. Бесконечные пределы последовательности и единственность предела.
10. Ограниченность сходящейся последовательности. Предельный переход в неравенствах. Свойство линейности. Предел неубывающей последовательности.
11. Число *e*. Понятие подпоследовательности. Теорема о пределе промежуточной последовательности. Принцип Кантора о вложенных отрезках.
12. Принцип Больцано–Вейерштрасса о сходящейся подпоследовательности. Фундаментальные последовательности и критерий Коши.
13. Замечательные (важнейшие) пределы. Таблица эквивалентных последовательностей.
14. Предел числовой функции. Основные свойства функций, имеющих предел. Свойство устойчивости. Теорема о пределе промежуточной функции. Бесконечные пределы функции.
15. Критерий эквивалентности. Непрерывные функции. Свойства непрерывных функций.
16. Точки разрыва и их классификация. Свойства непрерывных функций на отрезке. Теорема Вейерштрасса.

17. Первая и вторая теоремы Больцано–Коши.
18. Производная. Основные определения. Геометрический смысл производной.
19. Вычисление производных основных элементарных функций. Производная обратной функции. Таблица производных.
20. Дифференцируемость и непрерывность. Простейшие правила вычисления производных.
21. Дифференциал и инвариантность его формы. Производные и дифференциалы высших порядков.
22. Необходимое условие локального экстремума. Теорема Ролля. Теорема Коши.
23. Раскрытие неопределенности по правилу Бернулли–Лопиталя. Другие виды неопределенности.
24. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, в форме Лагранжа. Приложения формулы Тейлора.
25. Исследование функций с помощью производных. Возрастание и убывание функции. Достаточные условия существования экстремума.
26. Исследование функции на выпуклость и вогнутость. Точки перегиба функции.
27. Асимптоты графика функции. Общая схема исследования функции.
28. Первообразная и неопределенный интеграл. Таблица основных интегралов.
29. Основные правила интегрирования. Метод подстановки в неопределенном интеграле.
30. Метод интегрирования по частям. Возвратные интегралы.
31. Интегрирование квадратных иррациональностей. Интегрирование рациональных функций.
32. Определенный интеграл. Теорема о среднем. Основная теорема анализа. Площадь плоской области. Длина дуги кривой. Объем тела вращения. Площадь поверхности вращения.
33. Несобственные интегралы 1-го, 2-го рода.
34. Линейные пространства. Линейная зависимость. Базис, размерность пространства.
35. Матрица и определитель. Свойства определителей.
36. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.
37. Действия над матрицами. Нахождение обратной матрицы.

38. Системы однородных уравнений. Метод Гаусса для однородных уравнений.
39. Понятие ранга матрицы. Теорема Кронекера–Капелли.
40. Метод Крамера. Метод обратной матрицы. Собственные значения и собственные векторы.
41. Векторы. Линейные операции над векторами. Базис. Разложение вектора по базису. Радиус-вектор точки.
42. Скалярное и векторное произведение векторов. Смешанное произведение трех векторов.
43. Различные способы записи уравнения прямой на плоскости. Взаимное расположение двух прямых на плоскости.
44. Различные виды уравнений плоскости. Прямая линия в пространстве. Пучок плоскостей.
45. Линии второго порядка.

Второй семестр

1. Пространства R^n. Основные определения и свойства.
2. Функции нескольких переменных. Теорема Больцано–Вейерштрасса.
3. Частные производные первого и второго порядка функции нескольких переменных. Полный дифференциал и дифференцируемость функций нескольких переменных.
4. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости. Дифференцирование сложной функции. Дифференциалы высших порядков.
5. Выпуклое множество и выпуклость функций нескольких переменных. Свойства выпуклых функций. Непрерывность выпуклых функций.
6. Критерий выпуклости функций. Матрица Гессе. Критерий Сильвестра.
7. Производная функции по направлению и градиент.
8. Экстремумы функции нескольких переменных. Необходимое и достаточное условие экстремума.
9. Формула Тейлора для функции двух переменных.
10. Условный экстремум функции нескольких переменных. Наибольшее и наименьшее значение функции. Метод множителей Лагранжа.

11. Дифференциальное уравнение. Основные определения. Частное и особое решение уравнения.
12. Задача Коши и теорема Коши.
13. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.
14. Однородные и квазиоднородные уравнения.
15. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Метод Лагранжа.
16. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах. Уравнения Лагранжа и Клеро.
17. Дифференциальные уравнения высших порядков. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.
18. Уравнения, допускающие понижения порядка.
19. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Определитель Вронского.
20. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение.
21. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения. Метод вариации произвольных постоянных.
22. Метод неопределенных коэффициентов. Уравнение Эйлера.
23. Системы линейных дифференциальных уравнений. Нормальная система дифференциальных уравнений.
24. Числовой ряд и сумма числового ряда.
25. Простейшие свойства числовых рядов и необходимый признак сходимости ряда.
26. Ряды с неотрицательными членами. Интегральный признак Коши. Признаки сравнения.
27. Признак Д'Аламбера и признак Коши.
28. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.
29. Функциональные ряды и их равномерная сходимость. Область сходимости функционального ряда. Признак Вейерштрасса.
30. Степенные ряды и их свойства. Теорема Абеля. Радиус сходимости степенного ряда.
31. Ряды Тейлора. Остаточный член в форме Лагранжа.
32. Разложение элементарных функций в ряд Маклорена.
33. Методы разложения функций в ряд Маклорена. Правила умножения рядов.
34. Применение рядов к раскрытию неопределенностей.
35. Нахождение сумм числовых рядов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1984. 432 с.
2. Кругликов В. И. Высшая математика. Тюмень: Изд-во ТюмГУ, 2004. 778 с.
3. Математический анализ в вопросах и задачах: учеб. пособ. для вузов / под ред. В. Ф. Бутузова. М.: Высш. шк., 1988. 288 с.
4. Высшая математика для экономических специальностей. Ч. 1 и 2 / под ред. проф. Н. Ш. Кремера. М.: Высшее образование, 2009. 898 с.
5. Каплан И. А., Пустынников В. И. Практикум по высшей математике в упражнениях и задачах: учебное пособие для втузов: в 2 ч. Ч. 1. 5-е изд., испр. М.: Высш. шк., 1996. 304 с.

Дополнительная литература

6. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Губаринов В. Н. Лекции по математическому анализу: учебник. 2-е изд., перераб. М.: Высш. шк., 2000. 295 с.
7. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа: в 2 т. М.: Наука, 1982. 616 с.
8. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа: учеб. пособие: в 3 т. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Высш. шк., 1988. Т. 1. 712 с; Т. 2. 576 с.
9. Никольский С. М. Курс математического анализа: в 2 т. 4-е изд., перераб. Т. 1. М.: Наука, 1990. 528 с; Т. 2. М.: Наука, 1990. 543 с.
10. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. М.: Наука, 1968.
11. Клименко Ю. И. Высшая математика для экономистов в примерах и задачах. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Экзамен, 2006. 734 с.
12. Зимина О. В., Кириллов А. И., Сальникова Т. А. Высшая математика. 2-е изд., перераб. М.: Физико-математическая литература, 2001. 388 с. (Решебник).
13. Красовская И. А. Линейная алгебра. СГУ, 1999. 100 с.

Учебное издание

Антон Павлович ДЕВЯТКОВ,
Александр Анатольевич МАКАРОВ,
Евгений Георгиевич ПЫТКЕЕВ,
Алексей Григорьевич ХОХЛОВ

МАТЕМАТИКА: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебное пособие

Редактор	*Ю. Ф. Евстигнеева*
Технический редактор	*Н. Г. Яковенко*
Компьютерная верстка	*С. Ф. Обрядова*
Печать трафаретная	*А. В. Ольшанский, С. Г. Наумов*
Печать офсетная	*В. В. Торопов, О. А. Булашов*

9 785400 005640

Подписано в печать 28.10.2011. Тираж 1030 экз.
Объем 29,25 усл. печ. л. Формат 60×84/16. Заказ 763.

Издательство Тюменского государственного университета
625003, г. Тюмень, ул. Семакова, 10
Тел./факс (3452) 45-56-60; 46-27-32
E-mail: izdatelstvo@utmn.ru