

УДК 517 (075.8)  
ББК 22.161  
ТЗ5

Тер-Криков А. М., Шабунин М. И. **Курс математического анализа**: Учеб. пособие для вузов. — 3-е изд., исправл. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 672 с. — ISBN 5-9221-0008-4.

Изложение теоретического материала иллюстрируется типовыми примерами. Большое внимание уделено трудным разделам курса математического анализа (равномерная сходимость функциональных рядов и интегралов, зависящих от параметра, равномерная непрерывность функций и т. д.).

Для студентов физико-математических и инженерно-физических специальностей вузов с повышенной подготовкой по математике. Может быть использована при самостоятельном изучении курса.

Второе издание — 1997 г.

Табл. 3. Ил. 185. Библиогр. 20 назв.

Рецензент заведующий кафедрой математики физического факультета МГУ доктор физико-математических наук, профессор *В. Ф. Бутузов*

---

Учебное издание

*ТЕР-КРИКОВ Александр Мартынович,  
ШАБУНИН Михаил Иванович*

## **КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА**

Редактор *Е. Ю. Ходан*  
Оригинал-макет *Н. Л. Ивановой*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 30.08.01.  
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 42. Уч.-изд. л. 44. Тираж 3000 экз. Заказ №

Издательская фирма “Физико-математическая литература”

МАИК “Наука/Интерпериодика”  
117864 Москва, ул. Профсоюзная, 90

Отпечатано с готовых диапозитивов  
в ППП “Типография “Наука”  
121099 Москва, Шубинский пер., 6

ISBN 5-9221-0008-4



---

ISBN 5-9221-0008-4

© ФИЗМАТЛИТ, 2001  
© А. М. Тер-Криков,  
М. И. Шабунин 1997;  
с исправлениями 2001

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

При написании настоящей книги авторы опирались на многолетний опыт чтения курса математического анализа и ведения семинарских занятий в Московском физико-техническом институте. Изложение теоретического материала подкрепляется достаточным числом примеров, помогающих освоению основных идей курса и выработке навыков в решении прикладных задач. Особое внимание уделяется таким традиционно трудным для студентов понятиям, как равномерная непрерывность функции, сходимости несобственных интегралов, равномерная сходимости функциональных рядов и интегралов, зависящих от параметра.

Наряду с традиционными разделами курса математического анализа в книге кратко изложены элементы теории обобщенных функций и простейшие методы получения асимптотических оценок интегралов. Вопросы приближенных вычислений интегралов и сумм рядов в настоящее время обычно входят в курсы вычислительной и прикладной математики и в данной книге не рассматриваются.

Следует отметить, что основы построения и стиль преподавания математического анализа в МФТИ разработаны большим коллективом преподавателей кафедры высшей математики. Это обстоятельство оказало несомненное влияние на авторов при написании предлагаемой читателю книги, которая может служить учебным пособием для физико-математических и инженерно-физических специальностей вузов с повышенной программой по математике. Книга может оказаться полезной и при самостоятельном изучении курса математического анализа.

Тираж первого издания (1988 г.) быстро разошелся и возникла потребность во втором издании (1977 г., издательство МФТИ). Учитывая пожелания читателей, авторы переработали многие разделы курса, и в первую очередь материалы глав X (кратные интегралы) и XIV (ряды Фурье).

При переработке были упрощены доказательства ряда сложных теорем. Больше внимание уделено изложению основных идей доказательств. Авторы стремились избежать чрезмерной детализации, но не в ущерб логической строгости. Так, без существенного ограничения общности дано более простое изложение теории жордановой меры и

кратных интегралов (глава X). В главе XIV упрощены доказательства ряда теорем за счет незначительного сужения классов рассматриваемых функций.

Главы XVI и XVII из первого издания книги, представляющие интерес для более узкого круга учащихся, в настоящее издание не включены.

Опущены также доказательства ряда теорем (интегрируемость по Риману функции, имеющей конечное число точек разрыва первого рода, теорема Римана об условно сходящихся рядах, признак Раабе сходимости ряда и др.). Исключены некоторые примеры повышенной трудности, разобранные в первом издании, добавлены задачи для самостоятельного решения.

Авторы признательны преподавателям и студентам МФТИ, сделавшим ряд ценных замечаний и указавшим авторам на опечатки и неточности, допущенные в первом издании книги.

Особую благодарность авторы выражают профессорам кафедры высшей математики МФТИ П.Б. Гусятникову, В.Б. Лидскому, Е.С. Половинкину и доценту В.И. Чехлову.

В третье издание внесены необходимые исправления и дополнения.

# ГЛАВА I

## ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

### § 1. Рациональные числа. Бесконечные десятичные дроби

**1. Логическая символика.** При изложении курса математического анализа для сокращения будем использовать логические символы  $\forall$ ,  $\exists$ ,  $\Rightarrow$ ,  $\Leftrightarrow$ , значения которых разъясняются в приводимой ниже таблице.

Символ	Название	Разъяснение
$\forall$	Знак <i>общности</i>	Заменяет слова: для любого, для каждого, для всех
$\exists$	Знак <i>существования</i>	Заменяет слова: существует, найдется
$\Rightarrow$	Знак <i>следования (импликации)</i>	Запись $A \Rightarrow B$ означает, что $A$ влечет $B$ или $B$ следует из $A$
$\Leftrightarrow$	Знак <i>равносильности (эквивалентности)</i>	Запись $A \Leftrightarrow B$ означает, что $B$ следует из $A$ и $A$ следует из $B$ . Иначе: $A$ равносильно $B$ ; $A$ необходимо и достаточно для $B$ ; $A$ тогда и только тогда, когда $B$

Символы  $\forall$ ,  $\exists$  называют *кванторами* (общности и существования). Кроме указанных в таблице символов, употребляются также следующие знаки:

- а)  $\vee$  — знак *дизъюнкции*, заменяет союз “или”; запись  $A \vee B$  означает, что имеет место хотя бы одно из высказываний  $A$ ,  $B$ ;
- б)  $\wedge$  — знак *конъюнкции*, заменяет союз “и”;
- в)  $\neg$  — знак *отрицания*; запись  $\neg A$  означает “не  $A$ ” (отрицание высказывания  $A$ ).

Рассмотрим примеры использования логических символов.

Пример 1. Пусть

$$A = \left\{ \begin{array}{l} \text{квадратный трехчлен } y = ax^2 + bx + c \text{ принимает} \\ \text{положительные значения при всех } x \end{array} \right\},$$

$$B = \{D < 0\}, \quad \text{где } D = b^2 - 4ac,$$

$$C = \{D < 0, a > 0\} = \{D < 0\} \wedge \{a > 0\}.$$

Докажем, что  $A \Rightarrow B$ ,  $A \Leftrightarrow C$ .

$\Delta$  а) Предположим, что из  $A$  не следует  $B$ . Тогда  $D = b^2 - 4ac \geq 0$ .

В этом случае квадратный трехчлен  $y = ax^2 + bx + c$  имеет действительные корни  $x_1$  и  $x_2$  ( $x_1 = x_2$  при  $D = 0$ ) и поэтому обращается в нуль при  $x = x_1$  и  $x = x_2$ , что противоречит  $A$ . Итак, предположение о том, что из  $A$  не следует  $B$ , является неверным. Поэтому из  $A$  следует  $B$ , т. е.  $A \Rightarrow B$ .

б) Докажем, что  $A \Rightarrow C$ . Воспользуемся равенством

$$y = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-D}{4a^2} \right]. \quad (1)$$

Так как  $A \Rightarrow \{D < 0\}$ , то выражение в квадратных скобках в формуле (1) положительно, и поэтому из условия  $y > 0$  следует, что  $a > 0$ . Итак,  $A \Rightarrow C$ .

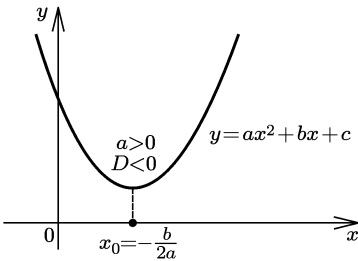


Рис. 1.1

Обратно: если имеет место  $C$ , т. е.  $D < 0$  и  $a > 0$ , то из равенства (1) следует, что  $y > 0$  при всех  $x$ .

Таким образом, квадратный трехчлен  $y = ax^2 + bx + c$  принимает положительные значения при всех действительных значениях  $x$  (рис. 1.1) тогда и только тогда, когда  $a > 0$  и  $D = b^2 - 4ac < 0$ . ▲

Использование кванторов  $\forall, \exists$  позволяет не только сокращать запись,

но и легко строить отрицания утверждений (высказываний, определений), содержащих слова “любой”, “существует”, которые часто встречаются в определениях и теоремах.

**Пример 2.** Пусть заданы числовое множество  $X$  и число  $M$ . Записать с помощью кванторов отрицание утверждений:

а)  $A = \left\{ \begin{array}{l} \text{все элементы } x \text{ числового множества } X \\ \text{удовлетворяют условию } x < M \end{array} \right\};$

б)  $B = \left\{ \begin{array}{l} \text{существует число } M > 0 \text{ такое, что все элементы } x \\ \text{из множества } X \text{ удовлетворяют условию } |x| \geq M \end{array} \right\}.$

Δ а) Пусть  $A$  не имеет места, т. е. не все элементы  $x$  множества  $X$  удовлетворяют условию  $x < M$ . Это означает, что найдется (существует) такой элемент  $x \in X$ , для которого неравенство  $x < M$  не выполняется, т. е. имеет место противоположное неравенство  $x \geq M$ .

Запишем  $A$  и  $\neg A$  с помощью кванторов:

$$A = \{\forall x \in X \rightarrow x < M\},$$

$$\neg A = \{\exists x \in X : x \geq M\}.$$

Здесь знак  $\rightarrow$  заменяет слова “выполняется”, “имеет место”, а двоеточие заменяет слова “такой, что”.

б) Пусть  $B$  не имеет места, т. е. не существует числа  $M > 0$  такого, чтобы для любого  $x \in X$  имело место неравенство  $|x| \geq M$ . Это

означает, что для любого  $M > 0$  неравенство  $|x| \geq M$  не может выполняться для каждого  $x \in X$ . Иначе говоря, существует такой элемент  $x = x_M \in X$  (зависящий, вообще говоря, от  $M$ ), для которого неравенство  $|x| \geq M$  не выполняется, т. е. справедливо неравенство  $|x_M| < M$ . С помощью кванторов утверждения  $B$  и  $\neg B$  можно записать так:

$$B = \{\exists M > 0: \forall x \in X \rightarrow |x| \geq M\},$$

$$\neg B = \{\forall M > 0 \exists x_M \in X: |x_M| < M\}. \quad \blacktriangle$$

Эти примеры показывают, что отрицание утверждения, содержащего кванторы  $\forall$ ,  $\exists$  и свойство  $P$  (в данных примерах это неравенства  $x < M$  и  $|x| \geq M$  соответственно), получается заменой  $\forall$  на  $\exists$ ,  $\exists$  на  $\forall$  и свойства  $P$  — на его отрицание.

**2. Рациональные числа и их свойства.** Понятие рационального числа и основные свойства рациональных чисел известны из курса математики для средней школы. Рациональное число можно записать в виде  $p/q$ , где  $p$  — целое,  $q$  — натуральное число. В частности, любое целое число  $p$  является рациональным, так как его можно записать в виде  $p = p/1$ . Например,  $0 = 0/1$ ,  $1 = 1/1$ .

Пусть  $a = p/q$ ,  $b = p_1/q_1$  — два рациональных числа. Тогда правило упорядочения этих чисел определяется так:

- а) если  $pq_1 = qp_1$ , то  $a = b$ ;
- б) если  $pq_1 > qp_1$ , то  $a > b$ ;
- в) если  $pq_1 < qp_1$ , то  $a < b$ ;

а сумма и произведение чисел  $a$  и  $b$  определяются соответственно равенствами

$$a + b = \frac{pq_1 + qp_1}{qq_1}, \quad ab = \frac{pp_1}{qq_1}.$$

Операции сложения и умножения рациональных чисел обладают свойствами:

- а) коммутативности:

$$a + b = b + a, \quad ab = ba;$$

- б) ассоциативности:

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (ab)c = a(bc);$$

- в) дистрибутивности:

$$a(b + c) = ab + ac;$$

- г) для любого рационального числа  $a$  справедливы равенства

$$a + 0 = a, \quad a \cdot 1 = a.$$

Операции вычитания и деления вводятся как обратные соответственно к операциям сложения и умножения:

а) для любых рациональных чисел  $a$ ,  $b$  существует (и притом единственное) число  $x$  такое, что

$$b + x = a;$$

это число называют *разностью* чисел  $a$  и  $b$  и обозначают  $a - b$ ; в частности, разность  $0 - b$  обозначают  $-b$ ;

б) если  $b \neq 0$ , то существует единственное число  $z$  такое, что

$$bz = a;$$

это число называют *частным* чисел  $a$  и  $b$  и обозначают  $a/b$ .

Отметим еще основные свойства неравенств для рациональных чисел:

а) если  $a > b$  и  $b > c$ , то  $a > c$  (транзитивность);

б) если  $a > b$ , то  $a + c > b + c$  при любом  $c$ ;

в) если  $a > b$  и  $c > d$ , то  $a + c > b + d$ ;

г) если  $a > b$  и  $c > 0$ , то  $ac > bc$ ;

д) если  $a > b$  и  $c < 0$ , то  $ac < bc$ .

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

$\mathcal{N}$  — множество натуральных чисел,

$\mathcal{Z}$  — множество целых чисел,

$\mathcal{Q}$  — множество рациональных чисел.

В множестве  $\mathcal{Q}$  можно выполнять не только четыре арифметических действия, но и решать уравнения и системы уравнений первой степени. Однако даже простейшие квадратные уравнения вида  $x^2 = a$ , где  $a \in \mathcal{N}$ , не всегда разрешимы в множестве  $\mathcal{Q}$ . В частности, уравнение  $x^2 = 2$  не имеет решений в множестве  $\mathcal{Q}$ .

Таким образом, уже проблема решения простых уравнений типа  $x^2 = a$ ,  $x^3 = a$ , где  $a \in \mathcal{N}$ , приводит к необходимости расширения множества рациональных чисел путем добавления к этому множеству новых элементов, называемых *иррациональными числами*. Ниже (без изложения всех подробностей) показывается, как такое расширение строится.

### 3. Бесконечные десятичные дроби и их приближения.

а) *Периодические десятичные дроби*. Из школьного курса алгебры известно, что любое рациональное число можно представить либо в виде конечной, либо в виде бесконечной периодической десятичной дроби, используя алгоритм деления “уголком”. Например, рациональному числу  $3/8$  соответствует конечная десятичная дробь  $0,375$ , т. е.  $3/8 = 0,375$ . Аналогично, рациональному числу  $-27/11$  соответствует бесконечная периодическая десятичная дробь  $-2,4545\dots = -2,(45)$ , т. е.  $-27/11 = -2,(45)$ .

Обратно: зная бесконечную периодическую десятичную дробь, можно найти рациональное число, представлением которого эта дробь является. Для этого используется формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии  $a + aq + aq^2 + \dots = \frac{a}{1 - q}$ ,  $|q| < 1$ .

Например,

$$2,(45) = 2 + \frac{45}{100} + \frac{45}{100^2} + \dots = 2 + \frac{45}{1 - \frac{1}{100}} = 2 + \frac{45}{99} = \frac{27}{11}.$$

Рациональное число, представимое конечной десятичной дробью, будем отождествлять с соответствующей бесконечной десятичной дробью с нулем в периоде. Заметим, что рациональное число, представимое конечной десятичной дробью, можно записать и в виде бесконечной десятичной дроби с цифрой 9 в периоде. Например,  $2,5 = = 2,5(0) = 2,4(9)$ .

Таким образом, между множеством всех рациональных чисел и множеством всех бесконечных периодических десятичных дробей устанавливается взаимно однозначное соответствие, если отождествлять бесконечную десятичную дробь с цифрой 9 в периоде с соответствующей бесконечной десятичной дробью с цифрой 0 в периоде.

Условимся употреблять такие бесконечные периодические десятичные дроби, которые не имеют цифры 9 в периоде. Если бесконечная периодическая десятичная дробь с цифрой 9 в периоде возникает в процессе рассуждений, то будем такую дробь заменять бесконечной десятичной дробью с нулем в периоде.

Упражнение 1. Доказать, что если  $\frac{p}{q}$  ( $p \in \mathbb{N}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ ) — рациональное число, соответствующее бесконечной периодической десятичной дроби  $\alpha$ , то рациональное число  $10^k \frac{p}{q}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) соответствует бесконечной периодической десятичной дроби, получаемой из  $\alpha$  сдвигом запятой вправо на  $k$  разрядов. Используя это правило, показать, что если бесконечная периодическая десятичная дробь имеет вид  $\alpha = a_0, a_1 \dots a_n (b_1 \dots b_m)$ , то

$$\alpha = a_0 + \frac{a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_m - a_1 a_2 \dots a_n}{\underbrace{99 \dots 9}_{m} \underbrace{00 \dots 0}_{n}}.$$

б) *Множество вещественных чисел.* Рассмотрим бесконечную десятичную дробь вида

$$\pm a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots \quad (2)$$

Эта дробь определяется заданием знака  $+$  или  $-$ , целого неотрицательного числа  $a_0$  и последовательности десятичных знаков  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  (множество десятичных знаков состоит из десяти чисел: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Всякую дробь вида (2) будем называть *вещественным числом*. Если перед дробью (2) стоит знак  $+$ , его обычно опускают и пишут

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots \quad (3)$$

Число вида (3) будем называть *неотрицательным вещественным числом*, а в случае, когда хотя бы одно из чисел  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  отлично



от нуля, — *положительным вещественным числом*. Число вида

$$-a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots, \quad (4)$$

где хотя бы одно из чисел  $a_0, a_1, a_2, \dots$  отлично от нуля, будем называть *отрицательным вещественным числом*.

Если  $a = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ ,  $b = -a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ , то число  $b$  называют *противоположным* числу  $a$ , а число  $a$  — *противоположным* числу  $b$ .

Если дробь (2) является периодической, то ее называют *рациональным числом*, а если эта дробь не является периодической, то ее называют *иррациональным числом*. Множество всех десятичных дробей вида (2) называют множеством *вещественных чисел* и обозначают  $R$ , а его подмножество, состоящее из непериодических десятичных дробей, — множеством *иррациональных чисел* и обозначают  $J$ .

Приведем примеры иррациональных чисел.

$$1) \quad a = 0,1234567891011\dots \quad (5)$$

Здесь после запятой стоят натуральные числа, выписанные подряд, начиная с единицы.

$$2) \quad b = 27,1010010001000010\dots \quad (6)$$

Здесь после запятой выписаны подряд числа  $10, 10^2 = 100, 10^3 = 1000, 10^4 = 10000$  и т. д.

У п р а ж н е н и е 2. Показать, что числа  $a$  и  $b$ , заданные равенствами (5) и (6), являются иррациональными.

в) *Десятичные приближения вещественных чисел*. Поставим в соответствие неотрицательному вещественному числу (3) конечные десятичные дроби

$$\bar{\alpha}_n = a_0, a_1 \dots a_n + \frac{1}{10^n}, \quad \underline{\alpha}_n = a_0, a_1 \dots a_n$$

и будем называть их  $n$ -ми десятичными приближениями числа  $\alpha = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$  соответственно с *избытком* и *недостатком*. Если  $\alpha$  — отрицательное вещественное число вида (4), то для него  $n$ -е десятичные приближения с избытком и недостатком определяются соответственно равенствами

$$\bar{\alpha}_n = -a_0, a_1 \dots a_n, \quad \underline{\alpha}_n = -a_0, a_1 \dots a_n - \frac{1}{10^n}.$$

Десятичные приближения найдут применение при определении арифметических операций на множестве  $R$  (§ 3).

У п р а ж н е н и е 3. Показать, что для любого вещественного числа его десятичные приближения обладают следующими свойствами:

$$а) \quad \bar{\alpha}_k - \underline{\alpha}_k = \frac{1}{10^k}, \quad k \in N;$$

$$б) \quad \underline{\alpha}_1 \leq \underline{\alpha}_2 \leq \dots \leq \underline{\alpha}_n \leq \dots;$$

$$в) \quad \bar{\alpha}_1 \geq \bar{\alpha}_2 \geq \dots \geq \bar{\alpha}_n \geq \dots;$$

$$г) \quad \underline{\alpha}_n < \bar{\alpha}_m \text{ для любых } n \text{ и } m.$$

#### 4. Сравнение вещественных чисел.

а) *Сравнение неотрицательных чисел.* Два неотрицательных вещественных числа

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots \quad \text{и} \quad \beta = b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$$

называют *равными* и пишут  $\alpha = \beta$ , если  $a_k = b_k$  при  $k = 0, 1, 2, \dots$ , т. е.

$$\{\alpha = \beta\} \Leftrightarrow \{a_k = b_k, k = 0, 1, 2, \dots\}.$$

В частности,  $\{\alpha = 0\} \Leftrightarrow \{a_k = 0, k = 0, 1, 2, \dots\}$ .

Дадим определение соотношений  $\alpha < \beta$  и  $\alpha > \beta$ . Говорят, что число  $\alpha$  *меньше* числа  $\beta$ , и пишут  $\alpha < \beta$ , если либо  $a_0 < b_0$ , либо  $a_0 = b_0$  и существует такой номер  $n$ , что  $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_{n-1} = b_{n-1}$ , но  $a_n < b_n$ , т. е.

$$\{\alpha < \beta\} \Leftrightarrow \{a_0 < b_0\} \vee \{\exists n \in \mathbb{N}: a_k = b_k, k = \overline{0, n-1}; a_n < b_n\}.$$

Запись  $k = \overline{0, n-1}$  означает, что равенство  $a_k = b_k$  выполняется при значениях  $k$  от 0 до  $n-1$  включительно, так что  $n$  — наименьший номер, для которого это равенство не выполняется и имеет место неравенство  $a_n < b_n$ . Аналогично

$$\{\alpha > \beta\} \Leftrightarrow \{a_0 > b_0\} \vee \{\exists n \in \mathbb{N}: a_k = b_k, k = \overline{0, n-1}; a_n > b_n\}.$$

Из определения равенства  $\alpha = \beta$  и неравенств  $\alpha < \beta$  и  $\alpha > \beta$  следует, что для любых неотрицательных вещественных чисел  $\alpha$  и  $\beta$  выполняется одно из трех условий:  $\alpha = \beta$ ,  $\alpha < \beta$ ,  $\alpha > \beta$ .

Отметим еще, что для любого неотрицательного вещественного числа  $\alpha$  справедливо неравенство  $\alpha \geq 0$ .

б) *Сравнение произвольных вещественных чисел.* Назовем *модулем вещественного числа*  $\alpha$  вещественное число, обозначаемое символом  $|\alpha|$ , представимое той же бесконечной десятичной дробью, что и число  $\alpha$ , но взятое со знаком  $+$ . Таким образом, если

$$\alpha = \pm a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots, \quad \text{то} \quad |\alpha| = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots,$$

откуда следует, что  $|\alpha|$  — неотрицательное вещественное число при любом  $\alpha$ .

Введем теперь правило сравнения двух вещественных чисел  $\alpha$  и  $\beta$  для случая, когда хотя бы одно из этих чисел отрицательно (правило сравнения неотрицательных чисел введено выше).

Если  $\alpha$  — неотрицательное,  $\beta$  — отрицательное число, то считают, что  $\alpha > \beta$ .

Если оба числа  $\alpha$  и  $\beta$  отрицательны ( $\alpha < 0, \beta < 0$ ), то будем считать, что:

- 1)  $\alpha = \beta$ , если  $|\alpha| = |\beta|$ ,
- 2)  $\alpha < \beta$ , если  $|\beta| < |\alpha|$ .

Таким образом, правило сравнения сформулировано для любых вещественных чисел.

Замечание 1. Легко убедиться в том, что сформулированное правило сравнения вещественных чисел в применении к рациональным числам, записанным в виде бесконечных десятичных дробей, приводит к тому же результату, что и правило сравнения рациональных чисел (п. 2), представленное в виде отношения целых чисел.

Замечание 2. Если  $\underline{\alpha}_n, \underline{\beta}_n$  —  $n$ -е приближения с недостатком, а  $\overline{\alpha}_n, \overline{\beta}_n$  —  $n$ -е приближения с избытком чисел  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно, то из правила сравнения вещественных чисел следует, что:

- 1)  $\underline{\alpha}_n \leq \alpha \leq \overline{\alpha}_n, \underline{\beta}_n \leq \beta \leq \overline{\beta}_n$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ ;
- 2)  $\alpha < \beta \Rightarrow \exists n: \overline{\alpha}_n < \underline{\beta}_n$ .

в) *Транзитивность правила сравнения.* Докажем, что если  $\alpha < \beta$  и  $\beta < \gamma$ , то  $\alpha < \gamma$ . Ограничимся доказательством для случая, когда сравниваются неотрицательные числа. Пусть

$$\begin{aligned}\alpha &= a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots, \\ \beta &= b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots, \\ \gamma &= c_0, c_1 c_2 \dots c_n \dots\end{aligned}$$

Пусть  $p$  и  $m$  — наименьшие номера, для которых нарушаются соответственно равенства  $a_k = b_k$  и  $b_k = c_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), и пусть, например,  $p \leq m$ . Тогда  $p$  — наименьший номер, при котором нарушается равенство  $a_k = c_k$  и имеет место неравенство  $a_p < c_p$ . По правилу сравнения вещественных чисел отсюда следует, что  $\alpha < \gamma$ .

### 5. Свойства вещественных чисел, связанные с неравенствами.

Лемма 1. Если  $\alpha$  и  $\beta$  — вещественные числа, причем  $\alpha < \beta$ , то найдется такое рациональное число  $r$ , что

$$\alpha < r < \beta. \quad (7)$$

О а) Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  — рациональные числа ( $\alpha \in \mathbb{Q}, \beta \in \mathbb{Q}$ ). Тогда для них определены арифметические операции, и в качестве  $r$  можно взять число  $\frac{\alpha + \beta}{2}$ , так как

$$\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta.$$

б) Пусть по крайней мере одно из чисел  $\alpha, \beta$  является иррациональным. Будем считать, что  $\beta \in \mathbb{J}$ . Предположим для определенности, что  $\alpha \geq 0$  и что

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$$

Так как  $\beta > \alpha$  и  $\alpha \geq 0$ , то  $\beta > 0$ . Пусть

$$\beta = b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$$

Пусть  $p$  — наименьший номер, при котором нарушается равенство  $a_k = b_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Будем считать, что  $p > 0$ . Тогда

$$a_0 = b_0, \dots, a_{p-1} = b_{p-1}, a_p < b_p. \quad (8)$$

По условию  $\beta \in J$ , и, значит,  $\beta$  не может быть конечной десятичной дробью (бесконечной периодической дробью с периодом 0). Поэтому найдется номер, больший  $p$  (обозначим его  $p + m$ ) и такой, что

$$b_{p+m} > 0. \quad (9)$$

Покажем, что рациональное число  $r = a_0, a_1 \dots a_{p-1} b_p \dots b_{p+m-1}(0)$  удовлетворяет условию (7). Из (8) следует, что  $\alpha < r$ . Далее,  $r = b_0, b_1 \dots b_{p+m-1}(0) < b_0, b_1 \dots b_{p+m-1} b_{p+m} \dots$  в силу условия (9), т. е.  $r < \beta$ . Итак, доказано, что  $\alpha < r < \beta$ , причем  $r \in Q$ . ●

Следствие. Если  $\alpha \in R$ ,  $\beta \in R$  и  $\alpha < \beta$ , то

$$\exists r \in Q \quad \exists r' \in Q: \alpha < r < r' < \beta. \quad (10)$$

Упражнение 4. Пусть  $\alpha \in R$ ,  $\beta \in R$  и  $\alpha < \beta$ . Доказать, что

$$\exists \gamma \in J: \alpha < \gamma < \beta.$$

Лемма 2. Пусть  $\delta \in R$ ,  $\delta' \in R$  и пусть существуют такие последовательности рациональных чисел  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$ , что для всех  $n \in N$  справедливы неравенства

$$x_n \leq \delta \leq \delta' \leq y_n, \quad (11)$$

$$y_n - x_n \leq \frac{1}{10^n}. \quad (12)$$

Тогда

$$\delta = \delta'. \quad (13)$$

○ Пусть равенство (13) не выполняется; тогда из условия (11) следует, что  $\delta < \delta'$ . В силу следствия из леммы 1 существуют рациональные числа  $r$  и  $r'$  такие, что

$$\delta < r < r' < \delta'. \quad (14)$$

Из (14) следует, что  $r' - r > 0$ , и поэтому

$$\exists m \in N: r' - r > \frac{1}{10^m}. \quad (15)$$

Из (11) и (14) следует, что

$$x_n \leq \delta < r < r' < \delta' \leq y_n,$$

откуда в силу транзитивности правила сравнения получаем

$$x_n < r < r' < y_n. \quad (16)$$

Используя неравенства (15), (12), (16) и свойства неравенств для рациональных чисел, получаем

$$\frac{1}{10^m} < r' - r < y_n - x_n \leq \frac{1}{10^n},$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{10^m} < \frac{1}{10^n}. \quad (17)$$

Неравенство (17) должно выполняться при фиксированном  $m \in \mathbb{N}$  и при любом  $n \in \mathbb{N}$ . Однако при  $n = m$  неравенство (17) не выполняется. Поэтому неравенство  $\delta < \delta'$  не может иметь места, т. е. справедливо равенство (13). ●

### 6. Геометрическая интерпретация вещественных чисел.

Рассмотрим прямую  $l$  (рис. 1.2), выберем на ней начало отсчета (точ-

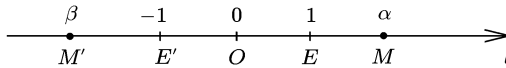


Рис. 1.2

ку  $O$ ) и масштабный отрезок  $OE$  длины 1. Числу 0 поставим в соответствие точку  $O$ , числу 1 — точку  $E$ , числу  $-1$  — точку  $E'$ , симметричную точке  $E$  относительно  $O$ . Положительному числу  $\alpha = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$  поставим в соответствие точку  $M$ , находящуюся справа от  $O$  на расстоянии  $\alpha$ , а отрицательному числу  $\beta = -b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$  — точку  $M'$ , находящуюся слева от  $O$  на расстоянии  $|\beta|$ .

Эту прямую будем называть *числовой прямой* или *числовой осью*. Из аксиом геометрии и свойств вещественных чисел следует, что между множеством вещественных чисел  $\mathbb{R}$  и числовой прямой  $l$  устанавливается взаимно однозначное соответствие: каждому вещественному числу соответствует единственная точка числовой прямой и, наоборот, каждой точке числовой прямой соответствует некоторое вещественное число. Поэтому в дальнейшем будем отождествлять множество  $\mathbb{R}$  с множеством точек числовой прямой, а вещественные числа часто будем называть *точками*.

Условимся о следующих обозначениях для некоторых наиболее употребительных числовых множеств:

- 1) *отрезок*  $[a, b] = \{x: a \leq x \leq b\}$ ;
- 2) *интервал*  $(a, b) = \{x: a < x < b\}$ ;
- 3) *полуинтервалы*  $[a, b) = \{x: a \leq x < b\}$ ,  $(a, b] = \{x: a < x \leq b\}$ .

Точки  $a$  и  $b$  называют *концами отрезка, интервала, полуинтервала* ( $a$  — *левым концом*,  $b$  — *правым*); отрезок  $[a, b]$ , интервал  $(a, b)$ , полуинтервалы  $[a, b)$  и  $(a, b]$  называют *конечными промежутками* (или *промежутками*), а точки  $x$  такие, что  $a < x < b$ , — их *внутренними точками*.

Наряду с конечными промежутками рассматривают также *бесконечные промежутки*:

- а) интервалы

$$(a, +\infty) = \{x: x > a\} \quad \text{и} \quad (-\infty, a) = \{x: x < a\};$$

б) полуинтервалы

$$[a, +\infty) = \{x: x \geq a\} \quad \text{и} \quad (-\infty, a] = \{x: x \leq a\};$$

в)  $(-\infty, +\infty) = \{x: x \in \mathbb{R}\}$  — множество вещественных чисел.

Напомним также, что если каждый элемент множества  $A$  является элементом множества  $B$ , то пишут  $A \subset B$  или  $B \supset A$  и говорят, что  $A$  является *подмножеством множества  $B$* . Например,  $J \subset R$ ,  $Q \subset R$ .

Множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств  $A$  и  $B$ , называется *объединением множеств  $A$  и  $B$*  и обозначается  $A \cup B$ .

Множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, кото-

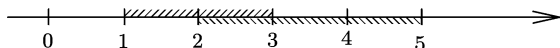


Рис. 1.3

рые принадлежат как множеству  $A$ , так и множеству  $B$ , называется *пересечением множеств  $A$  и  $B$*  и обозначается  $A \cap B$ .

Например, если  $A = [1, 3]$ ,  $B = (2, 5)$ , то  $A \cup B = [1, 5]$ ,  $A \cap B = (2, 3]$  (рис. 1.3).

Отметим, что

$$J \cup Q = R, \quad J \cap Q = \emptyset,$$

где  $\emptyset$  — *пустое множество*, т. е. множество, не содержащее элементов.

## § 2. Точные грани числовых множеств

**1. Верхняя и нижняя грани числовых множеств.** Множество  $X$  вещественных чисел ( $X \subset \mathbb{R}$ ) называется *ограниченным сверху*, если существует вещественное число  $C$  такое, что все элементы множества  $X$  не превосходят  $C$ , т. е.

$$\exists C \in \mathbb{R}: \forall x \in X \rightarrow x \leq C. \quad (1)$$

Всякое вещественное число  $C$ , обладающее свойством (1), называют *верхней гранью числового множества  $X$* .

Аналогично множество  $X \subset \mathbb{R}$  называется *ограниченным снизу*, если

$$\exists C' \in \mathbb{R}: \forall x \in X \rightarrow x \geq C'. \quad (2)$$

Всякое число  $C'$ , удовлетворяющее условию (2), называют *нижней гранью числового множества  $X$* .

Если числовое множество ограничено как сверху, так и снизу, его называют *ограниченным*, т. е.  $\{X \text{ — ограниченное множество}\} \Leftrightarrow \{\exists C' \in \mathbb{R} \exists C \in \mathbb{R}: \forall x \in X \rightarrow C' \leq x \leq C\}$ .

Пример 1. Записать  $\lceil A$  с помощью кванторов, если

$$A = \{C \text{ — верхняя грань множества } X \subset R\}.$$

$\Delta$  По условию  $A = \{\forall x \in X \rightarrow x \leq C\}$ . Используя правило построения отрицания (§ 1, пример 2), получаем

$$\lceil A = \{\exists x_0 \in X : x_0 > C\}. \blacktriangle$$

Пример 2. Записать  $\lceil B$ , если

$$B = \{\text{множество } X \text{ ограничено снизу}\}.$$

$\Delta$  По условию  $B = \{\exists C \in R : \forall x \in X \rightarrow x \geq C\}$ . Поэтому

$$\lceil B = \{\forall C \in R \quad \exists x_C \in X : x_C < C\}. \blacktriangle$$

Упражнение 1. Записать с помощью кванторов отрицания следующих утверждений:

- а)  $A = \{\text{множество } X \subset R \text{ ограничено сверху}\}$ ;
- б)  $B = \{C \text{ — нижняя грань множества } X\}$ ;
- в)  $D = \{\text{множество } X \text{ является ограниченным}\}$ .

**2. Определение точной верхней и нижней грани.** Пусть числовое множество  $X$  ограничено сверху, тогда выполняется условие (1), а число  $C$  является верхней гранью множества  $X$ . Ясно, что любое число, большее  $C$ , также является верхней гранью множества  $X$ . Таким образом, ограниченное сверху числовое множество имеет бесконечно много верхних граней, среди которых особую роль играет наименьшая. Речь идет о числе  $M$ , обладающем следующими свойствами:

- а)  $M$  — верхняя грань множества  $X$ ;
- б) любое число  $M'$  меньше  $M$ , не является верхней гранью множества  $X$ .

Это число  $M$  будем в дальнейшем называть точной верхней гранью множества  $X$ . Сформулируем определение точной верхней грани с помощью символов. Чтобы подчеркнуть важность вводимого понятия (и будем так поступать в дальнейшем), поставим перед ним слово “определение”.

**Определение 1.** Число  $M$  называется *точной верхней гранью числового множества*  $X$ , если выполняются следующие условия:

$$\text{а) } \forall x \in X \rightarrow x \leq M; \tag{3}$$

$$\text{б) } \forall \alpha < M \exists x_\alpha \in X : x_\alpha > \alpha. \tag{4}$$

Точная верхняя грань числового множества  $X$  обозначается  $\sup X$  (читается “супремум”). Таким образом,

$$\{M = \sup X\} \Leftrightarrow \{\forall x \in X \rightarrow x \leq M\} \wedge \{\forall \alpha < M \quad \exists x_\alpha \in X : x_\alpha > \alpha\}.$$

**Замечание 1.** Число  $M = \sup X$  может как принадлежать, так и не принадлежать множеству  $X$ . Например, если  $X$  — множество чисел  $x$  таких, что  $1 \leq x < 2$ , то  $\sup X = 2 \notin X$ . Если  $X_1$  — объединение множеств  $X$  и числа 3, то  $\sup X_1 = 3 \in X_1$ .

**Замечание 2.** Из определения точной верхней грани следует, что если у числового множества  $X$  существует точная верхняя грань  $M$ , то она единственна.

**Упражнение 2.** Пусть  $M = \sup X$  и  $x_0 \in X$ . Обозначим  $\tilde{X}$  подмножество множества  $X$ , состоящее из всех элементов  $x \in X$ , удовлетворяющих условию  $x \geq x_0$ , т. е.  $\tilde{X} = \{x \in X : x \geq x_0\}$ . Доказать, что  $\sup \tilde{X} = M$ .

**Определение 2.** Число  $m$  называется *точной нижней гранью числового множества  $X$* , если выполняются следующие условия:

- а)  $\forall x \in X \rightarrow x \geq m$ ;
- б)  $\forall \beta > m \exists x_\beta \in X : x_\beta < \beta$ .

Точная нижняя грань множества  $X$  обозначается  $\inf X$  (читается “инфимум”). Таким образом,

$$\{m = \inf X\} = \{\forall x \in X \rightarrow x \geq m\} \wedge \{\forall \beta > m \exists x_\beta \in X : x_\beta < \beta\}.$$

**Упражнение 3.** Записать с помощью кванторов утверждения:

- а) число  $M$  не является точной верхней гранью числового множества  $X$ ;
- б) число  $m$  не является точной нижней гранью числового множества  $X$ .

**Упражнение 4.** Пусть у числового множества  $X$  существует его точная верхняя грань  $\sup X$ . Рассмотрим множество  $Y$ , состоящее из чисел, противоположных числам множества  $X$ , т. е.  $Y = \{y : y = -x, x \in X\}$ . Показать, что  $\inf Y = -\sup X$ .

### 3. Существование точной верхней (нижней) грани.

**Теорема 1.** Если непустое множество вещественных чисел  $X$  ограничено сверху, то существует  $\sup X$ ; если непустое множество  $X$  ограничено снизу, то существует  $\inf X$ .

Ограничимся доказательством существования точной верхней грани. По условию множество  $X$  не пусто, т. е. содержит хотя бы один элемент. Возможны два случая:

- 1) множество  $X$  содержит хотя бы одно неотрицательное число;
- 2) все элементы множества  $X$  отрицательны.

**Первый случай.** Предположим, что все элементы множества  $X$  неотрицательны. По условию множество  $X$  ограничено сверху и поэтому выполняется условие (1). Пусть  $C = c_0, c_1 c_2 \dots c_n \dots$ ; тогда  $c_0$  — неотрицательное целое число, причем  $C < c_0 + 1$ , где  $c_0 + 1 = n_0 \in \mathbb{N}$ . Следовательно,

$$\forall x \in X \rightarrow x \leq C < n_0. \quad (5)$$

Если  $x = a_0, a_1 a_2 \dots = a_0, \{a_n\}$  — произвольный элемент множества  $X$ , то из (5) следует, что  $0 \leq a_0 < n_0$ . Рассмотрим множество  $E$  целых частей элементов множества  $X$ . Так как  $E$  — конечное непустое множество целых неотрицательных чисел, то в этом множестве



есть наибольший элемент  $\bar{a}_0$ . Обозначим

$$X_0 = \{x \in X : x = \bar{a}_0, \{a_n\}\}.$$

Множество  $X_0$  состоит из всех тех элементов множества  $X$ , у которых целая часть равна  $\bar{a}_0$ ; множество  $X_0$  непустое, причем  $X \supset X_0$ .

Пусть  $E_1$  — множество первых десятичных знаков элементов множества  $X_0$ . Так как множество  $E_1$  конечно (его элементами могут быть числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) и непусто, то существует  $\bar{a}_1 = \max_{x \in X_0} a_1$  — наибольший из первых десятичных знаков элементов множества  $X_0$ .

Пусть  $X_1 = \{x \in X : x = \bar{a}_0, \bar{a}_1 a_2 \dots\}$ ; тогда  $X \supset X_0 \supset X_1$ . Обозначим  $\bar{a}_2 = \max_{x \in X_1} a_2$  наибольший из вторых десятичных знаков элементов множества  $X_1$ ,

$$X_2 = \{x \in X_1 : a_2 = \bar{a}_2\} = \{x \in X : x = \bar{a}_0, \bar{a}_1 \bar{a}_2 a_3 \dots\}.$$

Продолжая эти рассуждения, построим последовательность  $\{X_k\}$  непустых множеств и последовательность десятичных знаков  $\{\bar{a}_k\}$  такие, что  $X \supset X_0 \supset X_1 \supset \dots \supset X_{k-1} \supset X_k \supset \dots$ ,

$$\bar{a}_k = \max_{x \in X_{k-1}} a_k,$$

$$X_k = \{x \in X_{k-1} : a_k = \bar{a}_k\} = \{x \in X : x = \bar{a}_0, \bar{a}_1 \dots \bar{a}_k a_{k+1} \dots\}.$$

Рассмотрим десятичную дробь  $\bar{x} = \bar{a}_0, \bar{a}_1 \dots = \bar{a}_0, \{\bar{a}_n\}$ . Покажем, что  $x = \sup X$ , т. е. что

$$\forall x \in X \rightarrow x \leq \bar{x}, \quad (6)$$

$$\forall x' < \bar{x} \quad \exists \tilde{x} \in X : \tilde{x} > x'. \quad (7)$$

Возьмем произвольное число  $x \in X$  и пусть  $x = a_0, \{a_n\}$ . Чтобы проверить выполнение условия (6), рассмотрим три возможных случая:

$$x \notin X_k \quad \text{при} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (8)$$

$$x \in X_k \quad \text{при} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

$$\exists m : x \in X_{m-1}, \quad x \notin X_m. \quad (10)$$

Из (8) следует, что  $a_0 < \bar{a}_0$  и поэтому  $x < \bar{x}$ . Если выполнено условие (9), то  $a_k = \bar{a}_k$  при  $k = 0, 1, 2, \dots$ , откуда, по определению числа  $\bar{x}$ , справедливо равенство  $x = \bar{x}$ . Наконец, из (10), согласно определению множества  $X_m$  и числа  $\bar{x}$ , следует, что

$$x = \bar{a}_0, \bar{a}_1 \dots \bar{a}_{m-1} a_m \dots < \bar{a}_0, \bar{a}_1 \dots \bar{a}_{m-1} \bar{a}_m(0) \leq \bar{x},$$

и поэтому  $x < \bar{x}$ . Таким образом, неравенство (6) доказано.

Проверим условие (7). Если  $x' < 0$ , то (7) имеет место при любом  $\tilde{x} \in X$ , так как все элементы множества  $X$  неотрицательны.

Пусть  $0 \leq x' < \bar{x}$  и  $x' = a'_0, \{a'_n\}$ . Тогда либо  $a'_0 < \bar{a}_0$ , либо  $a'_k = \bar{a}_k$  при  $k = 0, m-1, a'_m < \bar{a}_m$ . В первом случае в качестве  $\tilde{x}$  можно взять любой элемент множества  $X_0$ , так как из условий  $a'_0 < \bar{a}_0$  и  $\tilde{x} \in X_0$  следует, что

$$x' < \tilde{x} = \bar{a}_0, a_1 \dots a_n \dots \leq \bar{x}, \quad \text{т. е. } x' < \tilde{x} \leq \bar{x} \quad \text{и} \quad \tilde{x} \in X_0 \subset X.$$

Во втором случае условию (7) удовлетворяет произвольный элемент  $\tilde{x} \in X_m$ , так как

$$x' = \bar{a}_0, \bar{a}_1 \dots \bar{a}_{m-1} a'_m \dots < \bar{a}_0, \bar{a}_1 \dots \bar{a}_{m-1} \bar{a}_m a_{m+1} \dots = \tilde{x} \leq \bar{x}.$$

Таким образом,  $x' < \tilde{x} \leq \bar{x}$ , где  $\tilde{x} \in X_m \subset X$ . Условие (7) проверено.

Итак, условия (6) и (7) выполняются, т. е.  $x = \sup X$ . Тем самым доказано существование точной верхней грани в предположении, что все элементы множества  $X$  неотрицательны.

Если множество  $X$  содержит хотя бы один неотрицательный элемент  $x_0 \geq 0$ , то множество  $\{\tilde{X} = x \in X : x \geq x_0\}$  состоит из неотрицательных чисел, причем  $\sup X = \sup \tilde{X}$  (упр. 2). Поэтому непустое ограниченное сверху числовое множество  $X$  имеет точную верхнюю грань.

Второй случай. Если все элементы множества  $X$  отрицательны, то произвольный элемент  $x \in X$  записывается в виде

$$x = -a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots \quad (11)$$

Пусть  $a_0^*$  — наименьшее из чисел  $a_0$  в записи (11) для всех  $x \in X$ ,  $a_1^*$  — наименьший из первых десятичных знаков тех элементов множества  $X$ , у которых  $a_0 = a_0^*$ ;  $a_2^*$  — наименьший из вторых десятичных знаков тех элементов множества  $X$ , у которых  $a_0 = a_0^*$ ,  $a_1 = a_1^*$  и т. д. Указанным способом определяется число  $x^* = -a_0^*, a_1^* \dots a_n^* \dots = -a_0^*, \{a_n^*\}$ . По аналогии с первым случаем доказывается, что число  $x^*$  является точной верхней гранью множества. ●

**Теорема 2.** Если  $X$  и  $Y$  — непустые множества вещественных чисел такие, что для любого  $x \in X$  и любого  $y \in Y$  справедливо неравенство

$$x \leq y, \quad (12)$$

то существуют  $\sup X$  и  $\inf Y$ , причем

$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \rightarrow x \leq \sup X \leq \inf Y \leq y. \quad (13)$$

○ Так как  $X$  — непустое множество, ограниченное сверху любым элементом множества  $Y$  в силу (12), то по теореме 1 существует  $\sup X$ . Аналогично из ограниченности непустого множества  $Y$  снизу любым элементом множества  $X$  следует существование  $\inf Y$ . По определению точных граней

$$\forall x \in X \rightarrow x \leq \sup X, \quad \forall y \in Y \rightarrow \inf Y \leq y. \quad (14)$$

Из (14) следует, что для доказательства утверждения (13) достаточно показать, что

$$\sup X \leq \inf Y. \quad (15)$$

Из неравенства (12) следует, что каждое число  $y \in Y$  является верхней гранью множества  $X$ . Точная верхняя грань множества  $X$ , т. е. число  $\sup X$ , есть наименьшая из всех верхних граней множества  $X$ . Следовательно, для любого  $y \in Y$  выполняется неравенство

$$\sup X \leq y. \quad (16)$$

Из неравенства (16) следует, что  $\sup X$  есть нижняя грань множества  $Y$ . Точная нижняя грань множества  $Y$ , т. е. число  $\inf Y$ , есть наибольшая из всех нижних граней множества  $Y$ . Значит,  $\sup X \leq \inf Y$ . ●

Замечание 3. Пусть  $\xi$  — любое вещественное число такое, что

$$\sup X \leq \xi \leq \inf Y. \quad (17)$$

Тогда из (13) и (17) следует неравенство

$$x \leq \xi \leq y, \quad (18)$$

которое справедливо для любого  $x \in X$  и любого  $y \in Y$ . Про число  $\xi$ , удовлетворяющее неравенству (18), говорят, что оно отделяет множество  $X$  от множества  $Y$ . Поэтому теорему 2 часто называют *теоремой об отделимости числовых множеств*.

### § 3. Операции над вещественными числами

**1. Сложение и вычитание вещественных чисел.** Суммой двух вещественных чисел  $\alpha$  и  $\beta$  называется такое вещественное число  $\delta$ , что для любых рациональных чисел  $r, s, r', s'$ , удовлетворяющих условиям

$$r \leq \alpha \leq s, \quad r' \leq \beta \leq s', \quad (1)$$

выполняется неравенство

$$r + r' \leq \delta \leq s + s'. \quad (2)$$

Сумма чисел  $\alpha$  и  $\beta$  обозначается  $\alpha + \beta$ .

**Теорема 1.** Для любых вещественных чисел  $\alpha$  и  $\beta$  их сумма существует и единственна.

○ а) Существование суммы. Из условий (1) в силу транзитивности знака неравенства следует, что  $r \leq s, r' \leq s'$ . Отсюда, используя свойства неравенств для рациональных чисел, получаем

$$r + r' \leq s + s'. \quad (3)$$

Пусть  $E$  — множество чисел вида  $r + r'$ ,  $E_1$  — множество чисел вида  $s + s'$ . Тогда по теореме об отделимости числовых множеств (§ 2, теорема 2) существуют числа  $\sup E$  и  $\inf E_1$  и выполняется неравенство

$$r + r' \leq \sup E \leq \inf E_1 \leq s + s'.$$

Поэтому число  $\delta = \sup E$  удовлетворяет условиям (2), т. е.  $\delta$  — сумма чисел  $\alpha$  и  $\beta$ .

б) Единственность суммы. Пусть  $\delta$  и  $\delta'$  удовлетворяют условиям (2) и пусть  $\delta \leq \delta'$ . Тогда  $r + r' \leq \delta \leq \delta' \leq s + s'$ . Докажем, что  $\delta = \delta'$ . Заметим, что неравенства (1) будут выполняться, если в качестве  $r$  и  $r'$  ( $s$  и  $s'$ ) взять  $(n + 1)$ -е десятичные приближения (§ 1, п. 3, в)) с недостатком (с избытком) соответственно для чисел  $\alpha$  и  $\beta$ , т. е.

$$\underline{\alpha}_{n+1} \leq \alpha \leq \bar{\alpha}_{n+1}, \quad \underline{\beta}_{n+1} \leq \beta \leq \bar{\beta}_{n+1}. \quad (4)$$

Так как сумма вещественных чисел  $\alpha$  и  $\beta$  существует, то из условий (4) с учетом неравенства  $\delta \leq \delta'$  получаем

$$r_n = \underline{\alpha}_{n+1} + \underline{\beta}_{n+1} \leq \delta \leq \delta' \leq \bar{\alpha}_{n+1} + \bar{\beta}_{n+1} = s_n, \quad (5)$$

где

$$s_n - r_n = \bar{\alpha}_{n+1} - \underline{\alpha}_{n+1} + \bar{\beta}_{n+1} - \underline{\beta}_{n+1} = \frac{2}{10^{n+1}} < \frac{1}{10^n}. \quad (6)$$

Последовательности  $\{r^n\}$  и  $\{s^n\}$  удовлетворяют условиям (5) и (6) и по лемме 2 (§ 1, п. 5) справедливо равенство  $\delta = \delta'$ . ●

Вычитание вещественных чисел по аналогии с вычитанием рациональных чисел вводится как действие, обратное сложению (§ 1, п. 2).

**2. Умножение и деление вещественных чисел.** Произведением двух положительных вещественных чисел  $\alpha$  и  $\beta$  называют такое вещественное число  $\delta$ , что для любых рациональных чисел  $r, s, r', s'$ , удовлетворяющих условиям

$$0 < r \leq \alpha \leq s, \quad 0 < r' \leq \beta \leq s', \quad (7)$$

выполняется неравенство

$$rr' \leq \delta \leq ss'. \quad (8)$$

Произведение чисел  $\alpha$  и  $\beta$  обозначается  $\alpha\beta$ .

**Теорема 2.** *Произведение любых двух положительных вещественных чисел существует и единственно.*

○ Доказательство существования произведения проводится по аналогии с доказательством существования суммы (теорема 1). В качестве  $\delta$  можно взять  $\sup G$ , где  $G$  — множество чисел вида  $rr'$ , а  $r$  и  $r'$  — рациональные числа, удовлетворяющие условиям (7). Докажем единственность произведения.

Пусть  $a_0$  — целая часть числа  $\alpha$ ,  $b_0$  — целая часть числа  $\beta$ ,  $\underline{\alpha}_m$ ,  $\underline{\beta}_m$  — десятичные приближения с недостатком,  $\bar{\alpha}_m$ ,  $\bar{\beta}_m$  — десятичные приближения с избытком для чисел  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно. Тогда

$$\underline{\alpha}_m \leq \alpha \leq \bar{\alpha}_m \leq a_0 + 1, \quad \underline{\beta}_m \leq \beta \leq \bar{\beta}_m \leq b_0 + 1.$$

Выберем  $k \in \mathbb{N}$  так, чтобы выполнялось неравенство

$$a_0 + b_0 + 2 < 10^k.$$

Тогда для любого  $m$  справедливо неравенство

$$\underline{\alpha}_m + \overline{\beta}_m < 10^k, \quad (9)$$

так как  $\underline{\alpha}_m \leq a_0 + 1$  и  $\overline{\beta}_m \leq b_0 + 1$ .

Предположим, что существуют числа  $\delta$  и  $\delta'$ , удовлетворяющие условию (8), причем  $\delta \leq \delta'$ . Возьмем в неравенствах (7) и (8) в качестве чисел  $r, s, r', s'$  соответственно  $\underline{\alpha}_{n+k}, \overline{\alpha}_{n+k}, \underline{\beta}_{n+k}, \overline{\beta}_{n+k}$  и обозначим  $r_n = \underline{\alpha}_{n+k} \underline{\beta}_{n+k}, s_n = \overline{\alpha}_{n+k} \overline{\beta}_{n+k}$ . Тогда, используя (8) и (9), получаем

$$\begin{aligned} s_n - r_n &= (\overline{\alpha}_{n+k} - \underline{\alpha}_{n+k}) \overline{\beta}_{n+k} + \underline{\alpha}_{n+k} (\overline{\beta}_{n+k} - \underline{\beta}_{n+k}) = \\ &= \frac{\overline{\beta}_{n+k}}{10^{n+k}} + \frac{\underline{\alpha}_{n+k}}{10^{n+k}} \leq \frac{10^k}{10^{n+k}} = \frac{1}{10^n} \end{aligned}$$

для любого  $n \in N$ .

Применяя лемму 2 § 1, получаем  $\delta = \delta'$ . ●

Произведение любых вещественных чисел  $\alpha$  и  $\beta$  определяется следующими правилами:

1) если  $\alpha = 0$ , то  $\alpha\beta = 0$  для любого  $\beta \in R$ ;

2) если  $\alpha < 0, \beta < 0$ , то  $\alpha\beta = |\alpha| \cdot |\beta|$ ;

3) если  $\alpha > 0, \beta < 0$ , или  $\alpha < 0, \beta > 0$ , то  $\alpha\beta = -|\alpha| \cdot |\beta|$ .

Ниже будет показано (п. 3, утверждение 2), что уравнение  $x\alpha = \beta$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — произвольные вещественные числа, имеет при  $\alpha \neq 0$  единственное решение. Это решение называется *частным* от деления числа  $\beta$  на число  $\alpha$  и обозначается через  $\beta/\alpha$ .

**3. Свойства вещественных чисел.** Можно показать, что операции сложения и умножения вещественных чисел обладают теми же свойствами, что и соответствующие операции для рациональных чисел (§ 1, п. 2). Ограничимся доказательством свойства ассоциативности.

Утверждение 1. Для любых вещественных чисел  $\alpha, \beta, \gamma$  справедливо равенство

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma.$$

○ Обозначим  $\delta = \alpha + (\beta + \gamma), \delta' = (\alpha + \beta) + \gamma$  и докажем, что  $\delta = \delta'$ . Предположим, что  $\delta \leq \delta'$ . Используя неравенства (4) и неравенство

$$\underline{\gamma}_{n+1} \leq \gamma \leq \overline{\gamma}_{n+1}, \quad (10)$$

где  $\underline{\gamma}_{n+1}$  и  $\overline{\gamma}_{n+1}$  — соответственно десятичные приближения  $(n+1)$ -го порядка числа  $\gamma$  с недостатком и с избытком, из определения суммы вещественных чисел получаем

$$\underline{\alpha}_{n+1} + \underline{\beta}_{n+1} \leq \alpha + \beta \leq \overline{\alpha}_{n+1} + \overline{\beta}_{n+1}, \quad (11)$$

$$\underline{\beta}_{n+1} + \underline{\gamma}_{n+1} \leq \beta + \gamma \leq \overline{\beta}_{n+1} + \overline{\gamma}_{n+1}. \quad (12)$$

Применяя неравенства (10)–(12) и первое из неравенств (4), по определению суммы находим

$$(\underline{\alpha}_{n+1} + \underline{\beta}_{n+1}) + \underline{\gamma}_{n+1} \leq (\alpha + \beta) + \gamma \leq (\bar{\alpha}_{n+1} + \bar{\beta}_{n+1}) + \bar{\gamma}_{n+1}, \quad (13)$$

$$\underline{\alpha}_{n+1} + (\underline{\beta}_{n+1} + \underline{\gamma}_{n+1}) \leq \alpha + (\beta + \gamma) \leq \bar{\alpha}_{n+1} + (\bar{\beta}_{n+1} + \bar{\gamma}_{n+1}). \quad (14)$$

В силу ассоциативности сложения рациональных чисел левые части неравенств (13) и (14) равны числу  $r_n = \underline{\alpha}_{n+1} + \underline{\beta}_{n+1} + \underline{\gamma}_{n+1}$ , а правые части равны числу  $\rho_n = \bar{\alpha}_{n+1} + \bar{\beta}_{n+1} + \bar{\gamma}_{n+1}$ . Поэтому из (13) и (14) с учетом неравенства  $\delta \leq \delta'$  получаем

$$r_n \leq \delta \leq \delta' \leq \rho_n, \quad (15)$$

где  $\rho_n - r_n = \frac{3}{10^{n+1}} < \frac{1}{10^n}$ , откуда в силу леммы 2, § 1 следует, что  $\delta = \delta'$ . ●

Аналогично доказывается справедливость других свойств операций сложения и умножения.

Отметим, что кроме свойств неравенств, указанных в § 1 (п. 2), для вещественных чисел справедливы следующие свойства:

- 1) если  $a \neq 0$ ,  $ab = 0$ , то  $b = 0$ ;
- 2) если  $a > b > 0$  и  $c > d > 0$ , то  $ac > bd$ ;
- 3) если  $a > b$ , то  $a^{2n+1} > b^{2n+1}$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ ;
- 4) если  $a > b \geq 0$ , то  $a^n > b^n$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ .

Утверждение 2. Если  $\alpha$  и  $\beta$  — вещественные числа, и  $\alpha \neq 0$ , то их частное  $\beta/\alpha$  существует и единственно.

○ Рассмотрим сначала случай, когда  $\alpha > 0$  и  $\beta = 1$ . Пусть  $\underline{\alpha}_n$  и  $\bar{\alpha}_n$  — десятичные приближения числа  $\alpha$  с недостатком и с избытком. Так как  $\alpha > 0$ , то найдется такое  $m \in \mathbb{N}$ , что  $\underline{\alpha}_m > 10^{-m}$ . Обозначим через  $X$  множество рациональных чисел вида  $\frac{1}{\bar{\alpha}_{m+n}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , а через  $Y$  — множество рациональных чисел вида  $\frac{1}{\underline{\alpha}_{m+n}}$ . В силу теоремы 2, § 2 существует вещественное число  $x$ , разделяющее множества  $X$  и  $Y$ , т. е.

$$\frac{1}{\bar{\alpha}_{n+m}} \leq x \leq \frac{1}{\underline{\alpha}_{n+m}}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (16)$$

Так как  $\underline{\alpha}_n \leq \alpha \leq \bar{\alpha}_n$ , то из определения произведения вещественных чисел следует, что при  $n \in \mathbb{N}$

$$1 - 10^{-n} \leq \frac{\alpha_{n+m}}{\bar{\alpha}_{n+m}} \leq x\alpha \leq \frac{\bar{\alpha}_{n+m}}{\underline{\alpha}_{n+m}} \leq 1 + 10^{-n}. \quad (17)$$

В силу леммы 2, § 1 получаем, что  $x\alpha = 1$ , т. е.  $x = \frac{1}{\alpha}$ .

Если  $\alpha < 0$ , то положим  $\frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{|\alpha|}$ .

Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  — вещественные числа и  $\alpha \neq 0$ . Пользуясь ассоциативностью операции умножения вещественных чисел, нетрудно показать, что число  $x = \beta \frac{1}{\alpha}$  — есть решение уравнения  $x\alpha = \beta$ . Покажем, что это решение единственно. Если  $x\alpha = \beta$  и  $y\alpha = \beta$ , то  $(x - y)\alpha = 0$ . Так как  $\alpha \neq 0$ , то  $x - y = 0$ , т. е.  $x = y$ . ●

Перечислим те свойства вещественных чисел, в которых используется понятие модуля вещественного числа:

$$|-a| = |a|, \quad |ab| = |a| \cdot |b|, \quad (18)$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \quad |a - b| \geq ||a| - |b||. \quad (19)$$

Докажем неравенства (19). Складывая неравенства  $-|a| \leq a \leq |a|$  и  $-|b| \leq b \leq |b|$ , получаем, что  $-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$ , т. е.  $|a + b| \leq |a| + |b|$ . Так как  $a = (a - b) + b$ ,  $b = (b - a) + a$ , то  $|a| \leq |a - b| + |b|$  и  $|b| \leq |b - a| + |a| = |a - b| + |a|$ . Следовательно,  $|a - b| \geq |a| - |b|$  и  $|a - b| \geq |b| - |a|$ , т. е.  $|a - b| \geq ||a| - |b||$ .

Пусть  $\alpha, \delta$  — заданные вещественные числа, причем  $\delta > 0$ . Тогда неравенство

$$|x - a| < \delta \quad (20)$$

равносильно (рис. 3.1) двойному неравенству

$$a - \delta < x < a + \delta,$$

т. е. множество решений неравенства (20) — интервал  $(a - \delta, a + \delta)$ ; в частности, неравенство

$$|x| < \delta, \quad \text{где } \delta > 0,$$

равносильно двойному неравенству

$$-\delta < x < \delta.$$

Неравенство

$$|x - a| > \delta, \quad \delta > 0, \quad (21)$$

выполняется при  $x < a - \delta$  и при  $x > a + \delta$  (рис. 3.2), т. е. множество

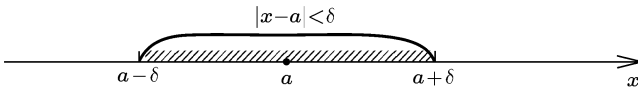


Рис. 3.1

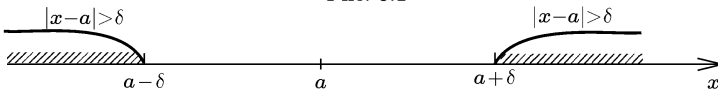


Рис. 3.2

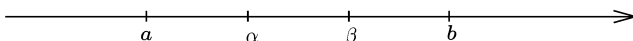


Рис. 3.3

решений неравенства (21) — объединение бесконечных интервалов

$(-\infty, a - \delta)$  и  $(a + \delta, +\infty)$ ; в частности, неравенство

$$|x| > \delta$$

выполняется при  $x < -\delta$  и при  $x > \delta$ .

Если  $a < b$  и  $\alpha, \beta$  — любые точки отрезка  $[a, b]$ , т. е.  $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$  (рис. 3.3) или  $a \leq \beta \leq \alpha \leq b$ , то

$$|\alpha - \beta| \leq b - a. \quad (22)$$

Неравенство (22) имеет очевидный геометрический смысл: расстояние между точками  $\alpha$  и  $\beta$  не превосходит расстояния между точками  $a$  и  $b$ .

**4. Арифметический корень.** Как известно, уравнения вида

$$x^m = a, \quad (23)$$

где  $m$  — натуральное число, не всегда имеют корни на множестве рациональных чисел даже в случае, когда  $a \in \mathbb{N}$ . Введение иррациональных чисел связано, в частности, с потребностью находить корни уравнений вида (23).

Предполагая, что  $a$  — заданное положительное число (не обязательно рациональное),  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$ , будем искать положительное число  $\xi$ , удовлетворяющее уравнению (23). Это число  $\xi$  назовем *арифметическим корнем степени  $m$  из числа  $a$*  и обозначим  $\sqrt[m]{a}$ .

**Утверждение 3.** Для любого  $m \in \mathbb{N}$  и любого  $a > 0$  существует единственный арифметический корень степени  $m$  из числа  $a$ .

○ Если существует число  $\xi \in \mathbb{Q}$  такое, что  $\xi^m = a$ , то это число и будет искомым. Поэтому достаточно ограничиться предположением, что такого рационального числа нет.

Пусть  $X = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0, x^m < a\}$ ,  $Y = \{y \in \mathbb{Q} : y > 0, y^m > a\}$ . Выберем такое число  $p \in \mathbb{N}$ , чтобы выполнялось неравенство  $1/p < a < p$ , тогда  $1/p^m < a^m < p^m$  и поэтому  $1/p \in X$ ,  $p \in Y$ . Следовательно,  $X, Y$  — непустые множества.

По определению множеств  $X$  и  $Y$  для любого  $x \in X$  выполняется неравенство  $x^m < a$ , а для любого  $y \in Y$  — неравенство  $a < y^m$ , откуда следует, что  $x^m < y^m$ . Так как  $x > 0$ ,  $y > 0$ , то неравенство  $x^m < y^m$  равносильно неравенству  $x < y$ , откуда согласно теореме об отделимости числовых множеств (§ 2) следует, что существует  $\sup X$  и  $\inf Y$ , причем

$$x \leq \sup X \leq \inf Y \leq y \quad (24)$$

для всех  $x \in X$  и для всех  $y \in Y$ .

Обозначим  $\xi = \sup X$  и докажем, что  $\xi$  — арифметический корень степени  $m$  из числа  $a > 0$ , т. е.  $\xi^m = a$ , где  $\xi > 0$ . Пусть  $x < \xi < y$ .

Очевидно, что  $x \in X$ . Если  $x \notin X$ , то  $x^m > 0$  и, следовательно,  $x \in Y$ . Но тогда из (24) следует, что  $x \geq \xi$ , что противоречит условию  $x < \xi$ . Аналогично получаем, что  $y \in Y$ . Поэтому

$$x^m < a < y^m. \quad (25)$$



Так как  $x < \xi < y$ , то

$$x^m < \xi^m < y^m. \quad (26)$$

Чтобы воспользоваться леммой 2, § 1, оценим разность  $y^m - x^m$ . Применяя формулу  $y^m - x^m = (y - x)(y^{m-1} + xy^{m-2} + \dots + x^{m-1})$  и учитывая, что  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $y > x$ , получаем

$$0 < y^m - x^m < (y - x)my^{m-1}. \quad (27)$$

Будем в дальнейшем в качестве элементов  $y \in Y$  брать все те и только те элементы множества  $Y$ , которые удовлетворяют условию  $y \leq p$ , где  $p$  — указанное выше натуральное число ( $p \in Y$ ). Тогда из (27) следует, что  $0 < y^m - x^m < (y - x)mp^{m-1}$ . Выберем далее  $s \in \mathcal{N}$  так, чтобы выполнялось неравенство  $mp^{m-1} \leq 10^s$ ; тогда

$$0 < y^m - x^m < (y - x)10^s. \quad (28)$$

Пусть  $\bar{\xi}_k$  и  $\underline{\xi}_k$  —  $k$ -е десятичные приближения числа  $\xi$  соответственно с избытком и с недостатком. Тогда  $x_n < \xi < y_n$ , где  $x_n = \underline{\xi}_{n+s}$ ,  $y_n = \bar{\xi}_{n+s}$  и  $x_n \in \mathcal{Q}$ ,  $y_n \in \mathcal{Q}$  для любого  $n \in \mathcal{N}$ .

При  $x = x_n$  и  $y = y_n$  неравенство (28) принимает вид

$$0 < y_n^m - x_n^m < (y_n - x_n)10^s = \frac{1}{10^n}, \quad (29)$$

причем это неравенство выполняется при любом  $n \in \mathcal{N}$ .

По лемме 2, § 1 из (29), а также из неравенств, которые получаются из (25) и (26) заменой  $x$  на  $x_n$  и  $y$  на  $y_n$ , следует, что  $\xi^m = a$ , т. е.  $\xi$  — арифметический корень  $m$ -й степени из числа  $a > 0$ .

Единственность числа  $\xi$  следует из того, что разным положительным числам соответствуют и разные  $n$ -е степени их: если  $0 < \xi < \xi_1$ , то  $\xi^n < \xi_1^n$ . ●

**5. Метод математической индукции. Суммирование. Бином Ньютона.** При вычислении пределов и в других разделах математического анализа нам потребуются некоторые сведения из курса элементарной математики. Имеются в виду метод математической индукции и его применение для доказательства тождеств и неравенств, суммирование и бином Ньютона.

а) *Метод математической индукции.* Чтобы доказать, что некоторое утверждение верно для любого  $n \in \mathcal{N}$  (номера  $n$ ), достаточно доказать, что:

1) это утверждение верно при  $n = 1$ ;

2) из предположения о справедливости утверждения для номера  $n$  следует справедливость этого утверждения для следующего номера  $n + 1$ .

Такой метод доказательства называют *методом математической индукции*.

Приведем примеры применения этого метода.

Пример 1. Доказать равенство

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (30)$$

△ При  $n = 1$  равенство (30) верно ( $1 = 1$ ). Нужно доказать, что из предположения о справедливости формулы (30) следует справедливость равенства

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \quad (31)$$

Прибавляя к обеим частям верного равенства (30) слагаемое  $(n+1)^2$ , получаем

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2. \quad (32)$$

Преобразуя правую часть равенства (32), находим

$$\frac{n+1}{6}(2n^2 + 7n + 6) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Таким образом, равенство (31) является верным, и поэтому формула (30) справедлива при любом  $n \in \mathbb{N}$ . ▲

Утверждение 4. Если  $x \geq -1$ , то для любого  $n \in \mathbb{N}$  выполняется неравенство Бернулли

$$(1+x)^n \geq 1+nx. \quad (33)$$

○ При  $n = 1$  утверждение (33) верно ( $1+x = 1+x$ ). Нужно доказать, что при  $x \geq -1$  из предположения о справедливости неравенства (33) следует справедливость неравенства

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x. \quad (34)$$

Если неравенство (33) является верным, то при умножении обеих частей его на  $1+x$ , где  $1+x \geq 0$ , получим верное неравенство

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x),$$

где  $(1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$ , так как  $nx^2 \geq 0$ .

Таким образом, при  $x \geq -1$  справедливо неравенство (34), и поэтому неравенство (33) является верным при любом  $n \in \mathbb{N}$ . ●

б) *Суммирование*. Если  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — заданные числа, то их сумму обозначают символом  $\sum_{k=1}^n a_k$ , т. е.

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

а число  $k$  называют *индексом суммирования*. Аналогично символом

$\sum_{k=m}^{m+p} a_k$  обозначают сумму чисел  $a_m, a_{m+1}, \dots, a_{m+p}$ .

Сумма не зависит от того, какой буквой обозначен индекс суммирования, а операция суммирования обладает свойством линейности, т. е. для любых чисел  $A$  и  $B$  справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^n (Aa_k + Bb_k) = A \sum_{k=1}^n a_k + B \sum_{k=1}^n b_k.$$

Отметим, что равенство

$$\sum_{k=1}^p a_{k+m} = \sum_{k=m+1}^{m+p} a_k$$

называют *формулой замены индекса суммирования*.

Аналогично

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} a_k = \sum_{k=n-n_1}^{n-n_2} a_{n-k}.$$

Из курса школьной математики известны формулы для сумм арифметической и геометрической прогрессии.

Если  $\{a_n\}$  — арифметическая прогрессия с разностью  $d$ , то сумму  $S_n$  первых  $n$  членов прогрессии можно записать в виде

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n \quad (35)$$

или выразить через  $n$  и  $a_1$ :

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n.$$

Если  $\{b_n\}$  — геометрическая прогрессия со знаменателем  $q \neq 1$ , то сумму  $S_n$  первых  $n$  членов прогрессии можно записать так:

$$S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1 - q} = b_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}. \quad (36)$$

Задачу о нахождении суммы вида  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ , где  $\{a_n\}$  — заданная числовая последовательность, обычно рассматривают как задачу о представлении  $S_n$  в виде функции от  $n$ , удобной для вычислений.

В частности, если существует последовательность  $\{b_k\}$  такая, что для всех  $k \in \mathbb{N}$  справедливо равенство  $a_k = b_{k+1} - b_k$ , то

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (b_{k+1} - b_k) = \\ &= b_2 - b_1 + b_3 - b_2 + \dots + b_n - b_{n-1} + b_{n+1} - b_n, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$S_n = \sum_{k=1}^n (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_1. \quad (37)$$

Пример 2. Найти формулу для суммы  $S_n$ , если:

а)  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}}$ , где  $\{a_k\}$  — арифметическая прогрессия, все члены и разность  $d$  которой отличны от нуля;

$$\text{б) } S_n = \sum_{k=1}^n \sin kx; \quad (38)$$

$$\text{в) } S_n = \sum_{k=1}^n k^2.$$

△ а) Так как  $a_{k+1} - a_k = d$  для любого  $k \in \mathbb{N}$ , то

$$\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \left( \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) \frac{1}{d}.$$

Применяя формулу (37) для  $b_k = -\frac{1}{da_k}$ , получаем

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{da_1} - \frac{1}{d(a_1 + nd)}. \quad (39)$$

б) Умножая обе части равенства (38) на  $2 \sin \frac{x}{2}$ , находим

$$2 \sin \frac{x}{2} S_n = \sum_{k=1}^n 2 \sin \frac{x}{2} \sin kx.$$

Используя равенство

$$2 \sin \frac{x}{2} \sin kx = \cos \left( k - \frac{1}{2} \right) x - \cos \left( k + \frac{1}{2} \right) x$$

и формулу (37) для  $b_k = -\cos \left( k - \frac{1}{2} \right) x$ , получаем

$$2 \sin \frac{x}{2} S_n = \cos \frac{x}{2} - \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) x = 2 \sin \frac{n+1}{2} x \sin \frac{n}{2} x,$$

откуда

$$S_n = \sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \sin \frac{n}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}. \quad (40)$$

Формула (40) справедлива при условии, что  $\sin \frac{x}{2} \neq 0$ .

Если  $\sin \frac{x}{2} = 0$ , то  $S_n = 0$ .

в) Воспользуемся тождеством

$$(x + 1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1. \quad (41)$$

Полагая в (41)  $x = 1, 2, \dots, n$  и складывая получаемые равенства, находим

$$\sum_{k=1}^n ((k + 1)^3 - k^3) = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + n. \quad (42)$$

Так как левая часть (42) в силу равенства (37) равна  $(n + 1)^3 - 1$ , а  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n + 1)}{2}$  (формула (35)), то из равенства (42) следует, что

$$3S_n = (n + 1)^3 - (n + 1) - \frac{3}{2}n(n + 1),$$

откуда

$$S_n = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}. \quad (43)$$

Заметим, что формула (43) была доказана в примере 1 методом математической индукции.  $\blacktriangle$

в) *Бином Ньютона*. Из курса школьной математики известно, что

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \\ (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Утверждение 6. Для любых чисел  $a, b$  и при любом  $n \in \mathbb{N}$  справедлива формула бинома Ньютона

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \dots + C_n^k a^{n-k}b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n, \quad (44)$$

где

$$C_n^0 = 1, \quad C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{k!}; \quad k = \overline{1, n}; \quad k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k. \quad (45)$$

Правую часть формулы называют *разложением бинома*, числа  $C_n^k$  — *биномиальными коэффициентами*, слагаемое  $C_n^k a^{n-k} b^k$  —  $k$ -м членом разложения бинома.

○ Воспользуемся методом математической индукции. При  $n = 1$  формула (44) верна, так как ее правая часть равна  $C_1^0 a + C_1^1 b = a + b$ .

Предполагая справедливым равенство (44), докажем, что верна формула

$$(a + b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k. \quad (46)$$

Умножая обе части равенства (44) на  $a + b$ , получаем

$$(a + b)^{n+1} = A_n + B_n,$$

где

$$A_n = a^{n+1} + \sum_{k=1}^n C_n^k a^{n+1-k} b^k,$$

$$B_n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{k=1}^n C_n^{k-1} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}.$$

Следовательно,

$$(a + b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^n (C_n^k + C_n^{k-1}) a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}. \quad (47)$$

Сравнивая правые части формул (46) и (47), заключаем, что для доказательства равенства (46) достаточно показать, что

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k. \quad (48)$$

Используя формулу (45), находим

$$C_n^{k-1} = \frac{n(n-1)\dots(n-(k-2))}{(k-1)!} = \frac{kn(n-1)\dots(n-(k-2))}{k!}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} C_n^k + C_n^{k-1} &= \frac{n(n-1)\dots(n-(k-2))}{k!} (n-(k-1) + k) = \\ &= \frac{(n+1)((n+1)-1)\dots((n+1)-(k-1))}{k!} = C_{n+1}^k. \end{aligned}$$

Формула (48) верна, и поэтому справедливо равенство (46). Следовательно, формула (44) верна при любом  $n \in \mathbb{N}$ . ●

Отметим, что

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))(n-k)!}{k!(n-k)!},$$

т. е.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (49)$$

Поэтому формулу (44) можно записать в виде

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k, \quad \text{где } 0! = 1.$$

Из формулы (49) следует, что

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \quad (50)$$

**Замечание 1.** Разложение бинома (44) содержит  $n + 1$  член, причем в силу равенства (49) коэффициенты членов разложения, равноудаленных от концов разложения, одинаковы, а сумма степеней чисел  $a$  и  $b$  в каждом члене разложения равна  $n$ .

**Замечание 2.** Из формулы (44) при  $a = 1$ ,  $b = x$  находим

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \dots + C_n^k x^k + \dots + nx^{n-1} + x^n. \quad (51)$$

Если  $x > 0$ , то все слагаемые в правой части равенства (51) положительны, и поэтому

$$(1+x)^n > 1 + nx, \quad x > 0, \quad (52)$$

$$(1+x)^n > C_n^k x^k, \quad x > 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (53)$$

Отметим, что неравенство (52) справедливо при  $x > -1$  (утверждение 4).

**6. Счетность множества рациональных чисел.** Множества  $X$  и  $Y$  называют *эквивалентными* и пишут  $X \sim Y$ , если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие. Это означает, что:

а) каждому элементу  $x \in X$  соответствует единственный элемент  $y \in Y$ ;

б) каждый элемент  $y \in Y$  при этом соответствует некоторому элементу  $x \in X$ ;

в) разным элементам множества  $X$  соответствуют разные элементы множества  $Y$ .

Множество  $X$ , эквивалентное множеству натуральных чисел  $N$ , называется *счетным*. Если обозначить через  $x_n$  элемент счетного множества  $X$ , соответствующий числу  $n \in N$ , то образуется последовательность  $\{x_n\}$ . Говорят также, что элементы счетного множества можно занумеровать числами натурального ряда.

**Упражнение 1.** Доказать, что любое бесконечное подмножество счетного множества есть счетное множество.

**Упражнение 2.** Доказать, что объединение конечного или счетного числа счетных множеств есть счетное множество.

**Теорема 3.** *Множество рациональных чисел  $Q$  счетно.*

○ Пусть  $E$  — множество положительных рациональных чисел.

Это множество состоит из всех несократимых дробей вида  $p/q$ , где  $p \in N$ ,  $q \in N$ . Выпишем подряд все несократимые дроби, у которых сумма числителя  $p$  и знаменателя  $q$  равна двум, трем, четырем, пяти и т. д. Получим последовательность

$$\underbrace{\frac{1}{1}}_{p+q=2}, \quad \underbrace{\frac{1}{2}, \frac{2}{1}}_{p+q=3}, \quad \underbrace{\frac{1}{3}, \frac{2}{1}}_{p+q=4}, \quad \underbrace{\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}}_{p+q=5}, \quad \underbrace{\frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}}_{p+q=6}, \quad \dots \quad (54)$$

В этой последовательности, состоящей из разных чисел, содержатся все элементы множества  $E$ . Обозначим  $n$ -й член последовательности (54) через  $r_n$ . Тогда все рациональные числа, т. е. все элементы множества  $Q$ , содержатся в последовательности

$$0, r_1, -r_1, r_2, -r_2, \dots, r_n, -r_n, \dots$$

Поэтому  $Q$  — счетное множество. ●

**7. Несчетность множества вещественных чисел.** Множество, не являющееся конечным или счетным, называется *несчетным*.

Теорема 4. *Множество вещественных чисел  $R$  несчетно.*

○ Докажем, что множество положительных вещественных чисел  $R_+$  несчетно. Предположим противное. Тогда все элементы множества  $R_+$  содержатся в последовательности  $\{\alpha_k\}$ , где

$$\alpha_k = a_0^{(k)}, a_1^{(k)} a_2^{(k)} \dots$$

Покажем, что существует число  $\beta = 0, b_1 b_2 \dots$ , не содержащееся в последовательности  $\{\alpha_k\}$ . Выберем число  $b_1$  так, чтобы  $b_1 \neq a_1^{(1)}$ ,  $b_1 \neq 9$ ,  $b_1 \neq 0$ . Вообще, для любого  $k \in N$  выберем  $b_k$  так, чтобы  $b_k \neq a_k^{(k)}$ ,  $b_k \neq 9$ ,  $b_k \neq 0$ . Тогда  $\beta \neq \alpha_k$  при любом  $k \in N$ . Это противоречит предположению о том, что любое число  $\beta \in R_+$  содержится в последовательности  $\{\alpha_k\}$ . Таким образом, множество  $R_+$  не является счетным, а поэтому и множество  $R$  также несчетно. ●

## УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ I

1. Показать, что справедливы следующие соотношения:

а)  $\uparrow(A \wedge B) \Leftrightarrow \uparrow A \vee \uparrow B$ ;

б)  $\uparrow(A \vee B) \Leftrightarrow \uparrow A \wedge \uparrow B$ .

2. Пусть  $A, B, C$  — подмножества некоторого множества  $E$ . Показать, что:

а)  $(A \subset C) \wedge (B \subset C) \Leftrightarrow (A \cup B) \subset C$ ;

б)  $(C \subset A) \wedge (C \subset B) \Leftrightarrow C \subset (A \cap B)$ .

3. Пусть  $X, Y$  — непустые ограниченные множества вещественных чисел, а  $E$  — множество всевозможных чисел вида  $x + y$ , где  $x \in X, y \in Y$ . Показать, что  $E$  — ограниченное множество, причем  $\sup E = \sup X + \sup Y$ ,  $\inf E = \inf X + \inf Y$ .

4. Пусть  $X, Y$  — непустые ограниченные множества неотрицательных вещественных чисел,  $E$  — множество всевозможных чисел  $xy$ , где  $x \in X, y \in Y$ . Показать, что  $E$  — ограниченное множество, причем  $\sup E = \sup X \times \sup Y$ ,  $\inf E = \inf X \cdot \inf Y$ .

5. Пусть  $X, Y$  — множества чисел, и пусть  $E$  — множество всевозможных чисел вида  $x - y$ , где  $x \in X, y \in Y$ . Показать, что  $\sup E = \sup X - \inf Y$ .

6. Пусть  $X$  и  $Y$  — непустые множества вещественных чисел такие, что:

а)  $\forall x \in X$  и  $\forall y \in Y$  выполняется неравенство  $x \leq y$ ;

б)  $\forall \varepsilon > 0$  существуют  $x_\varepsilon \in X, y_\varepsilon \in Y$  такие, что  $y_\varepsilon - x_\varepsilon < \varepsilon$ .



Показать, что  $\sup X = \inf Y$ .

7. Пусть  $S_n(p) = \sum_{k=1}^n k^p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ . Доказать, что

$$\sum_{p=1}^m C_{m+1}^p S_n(p) = (n+1)^{m+1} - (n+1).$$

Пользуясь этой формулой, доказать, что

$$S_n(3) = \sum_{k=1}^3 k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

8. Доказать формулу

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_p)^n = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_p=n} \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_p!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_p^{k_p},$$

где суммирование ведется по всем целым неотрицательным  $k_1, k_2, \dots, k_p$  таким, что  $k_1 + k_2 + \dots + k_p = n$ .

9. Доказать неравенство

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

связывающее среднее гармоническое, среднее геометрическое и среднее арифметическое положительных чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 4. Определение предела последовательности.  
Свойства сходящихся последовательностей

**1. Числовые последовательности.** Если каждому натуральному числу  $n$  поставлено в соответствие некоторое вещественное число  $x_n$ , то говорят, что задана *числовая последовательность* (или просто последовательность)

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Кратко последовательность обозначают символом  $\{x_n\}$  или  $(x_n)$ , при этом  $x_n$  называют *членом* или *элементом* этой последовательности,  $n$  — номером члена  $x_n$ .

Числовая последовательность — это функция, область определения которой есть множество  $N$  всех натуральных чисел; множество значений этой функции, т. е. совокупность чисел  $x_n, n \in N$ , называют *множеством значений последовательности*.

Множество значений последовательности может быть как конечным, так и бесконечным, в то время как множество ее элементов всегда является бесконечным: любые два разных элемента последовательности отличаются своими номерами.

Например, множество значений последовательности  $\{(-1)^n\}$  состоит из двух чисел 1 и  $-1$ , а множества значений последовательностей  $\{n^2\}$  и  $\{1/n\}$  бесконечны.

Последовательность может быть задана с помощью формулы, позволяющей вычислить каждый член последовательности по его номеру. Например, если  $x_n = ((-1)^n + 1)/2$ , то каждый нечетный член последовательности равен 0, а каждый четный член равен 1.

Иногда последовательность задается *рекуррентной формулой*, позволяющей находить члены последовательности по известным предыдущим. При таком способе задания последовательности обычно указывают:

а) первый член последовательности  $x_1$  (или несколько членов, например,  $x_1, x_2$ );

б) формулу, связывающую  $n$ -й член с соседними (например, с  $(n - 1)$ -м и  $(n + 1)$ -м членами).

Так, арифметическая прогрессия с разностью  $d$  и геометрическая прогрессия со знаменателем  $q \neq 0$  задаются соответственно рекур-

рентными формулами

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad b_{n+1} = b_n q.$$

Зная первые члены этих прогрессий  $a_1$  и  $b_1$ , можно получить формулы для  $(n + 1)$ -х членов прогрессий:

$$a_{n+1} = a_1 + nd, \quad b_{n+1} = b_1 q^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Рекуррентной формулой

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 3,$$

и условиями  $x_1 = 1, x_2 = 1$  задается *последовательность Фибоначчи*.

В некоторых случаях последовательность может быть задана описанием ее членов. Например, если  $x_n$  — простое число с номером  $n$ , то  $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 5, x_4 = 7, x_5 = 11$  и т. д.

Отметим, наконец, что последовательность  $\{x_n\}$  можно изобразить:

- а) точками с координатами  $(n; x_n), n \in \mathbb{N}$ , на плоскости;
- б) точками  $x_n, n \in \mathbb{N}$ , на числовой оси.

## 2. Определение предела последовательности.

**Определение.** Число  $a$  называется *пределом последовательности*  $\{x_n\}$ , если для каждого  $\varepsilon > 0$  существует такой номер  $N_\varepsilon$ , что для всех  $n \geq N_\varepsilon$  выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Если  $a$  — предел последовательности, то пишут  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  или  $x_n \rightarrow a$  при  $n \rightarrow \infty$ .

С помощью логических символов это определение можно записать в виде

$$\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \right\} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon: \forall n \geq N_\varepsilon \rightarrow |x_n - a| < \varepsilon. \quad (1)$$

Последовательность, у которой существует предел, называют *сходящейся*.

Таким образом, последовательность  $\{x_n\}$  является сходящейся, если

$$\exists a \in \mathbb{R}: \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon: \forall n \geq N_\varepsilon \rightarrow |x_n - a| < \varepsilon. \quad (2)$$

Последовательность, не являющуюся сходящейся, называют *расходящейся*; иначе говоря, последовательность называют расходящейся, если никакое число не является ее пределом.

Заметим, что если  $x_n = a$  для всех  $n \in \mathbb{N}$  (такую последовательность называют *стационарной*), то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

Из определения (1) следует, что последовательность  $\{x_n\}$  имеет предел, равный  $a$ , тогда и только тогда, когда последовательность  $\{x_n - a\}$  имеет предел, равный нулю, т. е.

$$\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \right\} \Leftrightarrow \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a) = 0 \right\}.$$

Пример 1. Записать с помощью логических символов отрицания следующих утверждений:

а)  $A = \{\text{число } a \text{ — предел последовательности } \{x_n\}\}$ ;

б)  $B = \{\{x_n\} \text{ — сходящаяся последовательность}\}$ .

Δ а) Используя указанное в п. 1 § 1 правило построения отрицания утверждения, содержащего символы  $\forall$ ,  $\exists$ , из (1) получаем

$$\neg A = \{\exists \varepsilon_0 > 0: \forall k \in \mathbb{N} \exists n \geq k: |x_n - a| \geq \varepsilon_0\},$$

где  $n$  зависит, вообще говоря, от  $k$ , т. е.  $n = n(k)$ .

б) Из (2) следует, что

$$\neg B = \{\forall a \in \mathbb{R} \exists \varepsilon_0 > 0: \forall k \in \mathbb{N} \exists n \geq k: |x_n - a| \geq \varepsilon_0\}. \blacktriangle$$

Пример 2. Пользуясь определением, найти предел последовательности  $\{x_n\}$ , если:

а)  $x_n = \frac{n-1}{n}$ ;      б)  $x_n = \frac{a}{n^r}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $r = \frac{1}{m}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ;

в)  $x_n = q^n$ ,  $|q| < 1$ ;      г)  $x_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$ ;

д)  $x_n = \sum_{k=1}^n q^{k-1}$ ,  $|q| < 1$ ;      е)  $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ .

Δ а) Докажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ . Так как  $x_n = 1 - 1/n$ , то  $|x_n - 1| = 1/n$ . Возьмем произвольное число  $\varepsilon > 0$ . Неравенство  $|x_n - 1| < \varepsilon$  будет выполняться, если  $1/n < \varepsilon$ , т. е. при  $n > 1/\varepsilon$ . Выберем в качестве  $N_\varepsilon$  какое-нибудь натуральное число, удовлетворяющее условию  $N_\varepsilon > 1/\varepsilon$ , например, число  $N_\varepsilon = [1/\varepsilon] + 1$ , где  $[x] = E(x)$  — целая часть числа  $x$ , т. е. наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ . Тогда для всех  $n \geq N_\varepsilon$  будет выполняться неравенство  $|x_n - 1| = 1/n \leq 1/N_\varepsilon < \varepsilon$ . По определению предела это означает, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ , т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1$ .

б) Так как  $|x_n| \leq |a|/n^r$ , а неравенство  $|a|/n^r < \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$ , равносильно каждому из неравенств  $n^r > |a|/\varepsilon$ ,  $n > (|a|/\varepsilon)^{1/r}$ , то при всех  $n \geq N_\varepsilon$ , где  $N_\varepsilon = [(|a|/\varepsilon)^{1/r}] + 1$ , справедливо неравенство  $|x_n| < \varepsilon$ . Следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a/n^r = 0$ .

в) Если  $q = 0$ , то  $x_n = 0$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ , и поэтому  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

Пусть  $q \neq 0$ . Обозначим  $r = 1/|q|$ , тогда  $r > 1$ , так как  $|q| < 1$ . Поэтому  $r = 1 + \alpha$ , где  $\alpha > 0$ , откуда

$$\frac{1}{|q|^n} = r^n = (1 + \alpha)^n > \alpha n$$

в силу неравенства Бернулли (§ 3, п. 5, (33)). Следовательно,

$$|x_n| = |q|^n < \frac{1}{\alpha n}, \quad (3)$$

и для всех  $n \geq N_\varepsilon$ , где  $N_\varepsilon = [1/(\alpha\varepsilon)] + 1$ , выполняются неравенства  $|x_n| < \frac{1}{\alpha n} \leq \frac{1}{\alpha N_\varepsilon} < \varepsilon$ . Это означает, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, \quad \text{если } |q| < 1.$$

г) Умножив и разделив  $x_n$  на  $\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}$ , получим

$$x_n = \frac{(\sqrt{n+2})^2 - (\sqrt{n+1})^2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}},$$

откуда  $|x_n| < \frac{1}{2\sqrt{n}}$ . Неравенство  $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon$  будет выполняться, если  $\sqrt{n} > \frac{1}{2\varepsilon}$ , т. е. при  $n > \frac{1}{4\varepsilon^2}$ . Пусть  $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{4\varepsilon^2}\right] + 1$ , тогда для всех  $n \geq N_\varepsilon$  выполняются неравенства  $|x_n| < \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{N_\varepsilon}} < \varepsilon$ . Это означает, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) = 0$ .

д) Используя формулу для суммы геометрической прогрессии (§ 3, п. 5, б), (36)), получаем  $x_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^n}{1 - q}$ , откуда в силу (3) следует, что неравенства  $\left|x_n - \frac{1}{1 - q}\right| = \frac{|q|^n}{1 - q} < \frac{1}{(1 - q)\alpha n} < \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$ , выполняются для всех  $n \geq N_\varepsilon$ , где  $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\alpha(1 - q)\varepsilon}\right] + 1$ ,  $\alpha = \frac{1}{|q|} - 1$ , т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{1 - q}$ .

е) Так как  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ , то  $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ , откуда находим  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ . ▲

Пример 3. Пусть  $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\lim_{y \rightarrow \infty} y_n = a$ . Доказать, что последовательность

$$x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k, \dots \quad (4)$$

сходится и ее предел также равен  $a$ .

Δ По определению предела для любого  $\varepsilon > 0$  существуют  $N_1 = N_1(\varepsilon)$  и  $N_2 = N_2(\varepsilon)$  такие, что для всех  $n \geq N_1$  выполняется неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ , а для всех  $n \geq N_2$  выполняется неравенство  $|y_n - a| < \varepsilon$ .

Обозначим  $n$ -й член последовательности (4) через  $z_n$ . Тогда если  $N_\varepsilon = \max(N_1, N_2)$ , то для всех  $n \geq 2N_\varepsilon$  будет выполняться неравенство  $|z_n - a| < \varepsilon$ . В самом деле, если  $n = 2k$  и  $n \geq 2N_\varepsilon$ , то  $z_n = y_k$ , где  $k \geq N_\varepsilon \geq N_2$ , и поэтому  $|z_n - a| = |y_k - a| < \varepsilon$ . Аналогично, если  $n = 2k - 1$  и  $n \geq 2N_\varepsilon$ , то  $z_n = x_k$ , где  $k > N_\varepsilon \geq N_1$ , и поэтому  $|z_n - a| = |x_k - a| < \varepsilon$ . ▲

Пример 4. Доказать, что если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = a.$$

△ Обозначим  $y_k = x_k - a$ ,  $S_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ , тогда

$$S_n - a = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}.$$

Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ , то по заданному  $\varepsilon > 0$  можно найти номер  $N = N_\varepsilon$  такой, что для всех  $n \geq N$  выполняется неравенство  $|y_n| < \varepsilon/2$ . Обозначим  $C = |y_1 + y_2 + \dots + y_N|$ . Тогда, если  $n > N$ , то

$$|S_n - a| \leq \frac{|y_1 + y_2 + \dots + y_N|}{n} + \frac{|y_{N+1}| + \dots + |y_n|}{n} < \frac{C}{n} + \frac{\varepsilon n - N}{2n} \leq \frac{C}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем номер  $\tilde{N} = \tilde{N}_\varepsilon$  такой, что  $C/\tilde{N} < \varepsilon/2$ . Тогда для всех  $n \geq \tilde{N}$  будет справедливо неравенство  $C/n < \varepsilon/2$ .

Пусть, наконец,  $n_\varepsilon = \max(N_\varepsilon, \tilde{N}_\varepsilon)$ ; тогда для всех  $n \geq n_\varepsilon$  выполняется неравенство  $|S_n - a| < \varepsilon$ . Следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a$ . ▲

Обратимся еще раз к определению предела. Согласно определению число  $a$  является пределом последовательности  $\{x_n\}$ , если при всех  $n \geq N_\varepsilon$  выполняется неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ , которое можно записать в виде

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Другими словами, для каждого  $\varepsilon > 0$  найдется номер  $N_\varepsilon$ , начиная с которого все члены последовательности  $\{x_n\}$  принадлежат интервалу  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ .

Этот интервал называют  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $a$  (рис. 4.1) и обозначают  $U_\varepsilon(a)$ , а также  $O_\varepsilon(a)$ , т. е.

$$U_\varepsilon(a) = \{x: a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} = \{x: |x - a| < \varepsilon\}.$$

Итак, число  $a$  — предел последовательности  $\{x_n\}$ , если для каждой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $a$  найдется номер, начиная с которого все члены последовательности принадлежат этой окрестности, так что вне этой окрестности либо нет ни одного члена последовательности, либо содержится лишь конечное число членов.

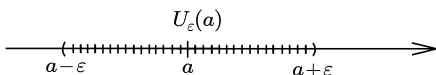


Рис. 4.1

С помощью логических символов определение предела последовательности “на языке окрестностей” можно записать так:

$$\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \right\} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon: \forall n \geq N_\varepsilon \rightarrow x_n \in U_\varepsilon(a).$$

Пример 5. Доказать, что последовательность  $\{x_n\}$ , где  $x_n = (-1)^n$ , является расходящейся.

$\Delta$  На числовой оси члены последовательности  $\{x_n\}$  изображаются точками  $-1$  и  $1$ , причем  $x_{2k} = 1$ ,  $x_{2k-1} = -1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Любое число  $a$ , где  $a \neq \pm 1$ , не может быть пределом последовательности, так как существует  $\varepsilon$ -окрестность точки  $a$  (достаточно взять  $\varepsilon = \min(|a + 1|, |a - 1|)$ ), не содержащая ни одного члена последовательности. Число  $1$  также не является пределом последовательности, так как существует такая  $\varepsilon$ -окрестность точки  $a$  ( $\varepsilon = 1/2$ ), что вне ее содержится бесконечно много членов последовательности (все члены с нечетными номерами). Аналогичное утверждение справедливо и для точки  $-1$ . Таким образом, ни одно число не является пределом последовательности, т. е.  $\{x_n\}$  — расходящаяся последовательность.  $\blacktriangle$

Упражнение 1. Доказать, что если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0.$$

### 3. Единственность предела последовательности.

Теорема 1. Числовая последовательность может иметь только один предел.

$\circ$  Предположим, что последовательность  $\{x_n\}$  имеет два различных предела  $a$  и  $b$ , причем  $a < b$  (рис. 4.2). Выберем  $\varepsilon > 0$  таким, чтобы

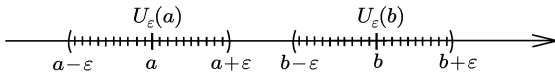


Рис. 4.2

$\varepsilon$ -окрестности точек  $a$  и  $b$  не пересекались (не имели общих точек). Возьмем, например,  $\varepsilon = (b - a)/3$ . Так как число  $a$  — предел последовательности  $\{x_n\}$ , то по заданному  $\varepsilon > 0$  можно найти номер  $N$  такой, что  $x_n \in U_\varepsilon(a)$  для всех  $n \geq N$ . Поэтому вне интервала  $U_\varepsilon(a)$  может оказаться лишь конечное число членов последовательности. В частности, интервал  $U_\varepsilon(b)$  может содержать лишь конечное число членов последовательности. Это противоречит тому, что  $b$  — предел последовательности (любая окрестность точки  $b$  должна содержать бесконечное число членов последовательности). Полученное противоречие показывает, что последовательность не может иметь два различных предела. Итак, сходящаяся последовательность имеет только один предел.  $\bullet$

**4. Ограниченность сходящейся последовательности.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется *ограниченной снизу*, если существует такое число  $C_1$ , что все члены последовательности удовлетворяют условию  $x_n \geq C_1$ , т. е.

$$\exists C_1: \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow x_n \geq C_1.$$

Последовательность  $\{x_n\}$  называется *ограниченной сверху*, если

$$\exists C_2: \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow x_n \leq C_2.$$

Последовательность, ограниченную как снизу, так и сверху, называют *ограниченной*, т. е. последовательность  $\{x_n\}$  называется *ограниченной*, если

$$\exists C_1 \exists C_2: \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow C_1 \leq x_n \leq C_2. \quad (5)$$

Таким образом, последовательность называют ограниченной, если множество ее значений ограничено.

Замечание 1. Условие (5) равносильно следующему:

$$\exists C > 0: \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow |x_n| \leq C. \quad (6)$$

В самом деле, из условия (6) следует (5), если взять  $C_1 = -C$ ,  $C_2 = C$ , а из условия (5) следует (6), если взять  $C = \max(|C_1|, |C_2|)$ .

Геометрически ограниченность последовательности означает, что все члены последовательности содержатся в  $C$ -окрестности точки нуль.

**Теорема 2.** *Если последовательность имеет предел, то она ограничена.*

○ Пусть последовательность  $\{x_n\}$  имеет предел, равный  $a$ . По определению предела для  $\varepsilon = 1$  найдем номер  $N$  такой, что при всех  $n \geq N$  имеет место неравенство  $|x_n - a| < 1$ . Так как модуль суммы не превосходит суммы модулей, то

$$|x_n| = |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a|.$$

Поэтому при всех  $n > N$  выполняется неравенство

$$|x_n| < 1 + |a|.$$

Положим  $c = \max(1 + |a|, |x_1|, \dots, |x_{N-1}|)$ , тогда  $|x_n| \leq c$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ , т. е. последовательность  $\{x_n\}$  ограничена. ●

Замечание 2. В силу теоремы 2 всякая сходящаяся последовательность является ограниченной. Обратное неверно: не всякая ограниченная последовательность является сходящейся. Например, последовательность  $\{(-1)^n\}$  ограничена, но не является сходящейся (пример 5).

Замечание 3. Если условие (6) не выполняется, т. е.

$$\forall C > 0 \exists n_C \in \mathbb{N}: |x_{n_C}| > C,$$

то говорят, что последовательность  $\{x_n\}$  не ограничена.

**Пример 6.** Доказать, что последовательность  $\{1/y_n\}$  является ограниченной, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ ,  $b \neq 0$  и  $y_n \neq 0$ , для всех  $n \in \mathbb{N}$ .

△ Так как  $b \neq 0$ , то  $|b| > 0$ . По заданному числу  $\varepsilon = |b|/2$  в силу определения предела последовательности найдется номер  $N_0$  такой, что

$$\forall n \geq N_0 \rightarrow |y_n - b| < \frac{|b|}{2}. \quad (7)$$



Используя неравенство для модуля разности

$$|b| - |y_n| \leq |y_n - b|$$

и неравенство (7), получаем  $|b| - |y_n| < |b|/2$ , откуда  $|y_n| > |b|/2$ , и поэтому для всех  $n \geq N_0$  справедливо неравенство  $|1/y_n| < 2/|b|$ .

Пусть  $C = \max\left(\frac{1}{|y_1|}, \dots, \frac{1}{|y_{N_0-1}|}, \frac{2}{|b|}\right)$ , тогда для всех  $n \in \mathbb{N}$  выполняется неравенство  $|1/y_n| \leq C$ , т. е.  $\{1/y_n\}$  — ограниченная последовательность.  $\blacktriangle$

Упражнение 2. Доказать, что последовательность  $\{x_n\}$  ограничена, если:

$$\text{а) } x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}; \quad \text{б) } x_n = \frac{n^2}{a^n}, \quad a > 1.$$

Упражнение 3. Доказать, что последовательность  $\{x_n\}$  не ограничена, если:

$$\text{а) } x_n = n^{(-1)^n}; \quad \text{б) } x_n = \frac{n\sqrt{n}}{3n+4}.$$

## 5. Свойства сходящихся последовательностей, связанные с неравенствами.

Теорема 3. Если последовательности  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$ ,  $\{z_n\}$  таковы, что

$$x_n \leq y_n \leq z_n \quad \text{для всех } n \geq N_0, \quad (8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a,$$

то последовательность  $\{y_n\}$  сходится и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a.$$

○ По определению предела для любого  $\varepsilon > 0$  найдутся номера  $N_1 = N_1(\varepsilon)$  и  $N_2 = N_2(\varepsilon)$  такие, что  $x_n \in U_\varepsilon(a)$  при всех  $n \geq N_1$  и  $z_n \in U_\varepsilon(a)$  при всех  $n \geq N_2$ . Отсюда и из условия (8) следует (рис. 4.3), что при

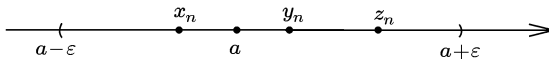


Рис. 4.3

всех  $n \geq N$ , где  $N = \max(N_0, N_1, N_2)$ , выполняется условие  $y_n \in U_\varepsilon(a)$ . Это означает, что существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ .  $\bullet$

Замечание 4. Теорему 3 называют теоремой о трех последовательностях или теоремой о пределе “зажатой” последовательности.

Пример 7. Пусть  $\alpha_n \geq -1$  при всех  $n \in \mathbb{N}$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ . Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{1 + \alpha_n} = 1, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

△ Докажем сначала, что

$$1 - |\alpha_n| \leq \sqrt[k]{1 + \alpha_n} \leq 1 + |\alpha_n|, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

В самом деле, если  $\alpha_n \geq 0$ , то

$$1 \leq \sqrt[k]{1 + \alpha_n} \leq (\sqrt[k]{1 + \alpha_n})^k = 1 + \alpha_n = 1 + |\alpha_n|,$$

а если  $-1 \leq \alpha_n < 0$ , то

$$1 \geq \sqrt[k]{1 + \alpha_n} \geq (\sqrt[k]{1 + \alpha_n})^k = 1 + \alpha_n = 1 - |\alpha_n|,$$

откуда следуют неравенства (10). Применяя теорему 3, получаем утверждение (9). ▲

Пример 8. Доказать, что если  $a > 1$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1. \quad (11)$$

△ Если  $a > 1$ , то  $\sqrt[n]{a} > 1$ . Обозначая  $\sqrt[n]{a} - 1 = \alpha_n$ , получаем  $\sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n$ , где  $\alpha_n > 0$ , откуда

$$a = (1 + \alpha_n)^n > \alpha_n n \quad (12)$$

в силу неравенства Бернулли. Так как  $\alpha_n > 0$ , то из (12) следует, что  $0 < \alpha_n < a/n$ , т. е.  $0 < \sqrt[n]{a} - 1 < a/n$ . Применяя теорему 3 и результат примера 2, б), получаем соотношение (11). ▲

Пример 9. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1. \quad (13)$$

△ Заметим, что  $\sqrt[n]{n} - 1 = \alpha_n > 0$  при  $n > 1$ , откуда  $n = (1 + \alpha_n)^n > C_n^2 \alpha_n^2$  (§ 3, п. 5, (53)), где  $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} > \frac{n^2}{4}$  при  $n > 2$ . Следовательно,  $n > \frac{n^2}{4} \alpha_n^2$ , или  $\alpha_n^2 < \frac{4}{n}$ , и так как  $\alpha_n > 0$ , то  $0 < \alpha_n < \frac{2}{\sqrt{n}}$ , т. е.

$$0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Используя теорему 3 и результат примера 2, б), получаем утверждение (13). ▲

Пример 10. Пусть  $a > 1$ ,  $p \in \mathbb{N}$ . Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{a^n} = 0. \quad (14)$$

△ Если  $a > 1$ , то  $a = 1 + \alpha$ , где  $\alpha > 0$ , откуда  $a^n = (1 + \alpha)^n > C_n^{p+1} \alpha^{p+1}$  при  $n > p$  (§ 3, п. 5, (53)).

Пусть  $n > 2p$ , тогда  $C_n^{p+1} = \frac{n(n-1)\dots(n-p)}{(p+1)!} > \frac{n}{(p+1)!} \left(\frac{n}{2}\right)^p$ , так как  $n - k > \frac{n}{2}$  при  $1 \leq k \leq p$ . Отсюда следует, что  $0 < \frac{n^p}{a^n} < \frac{2^p(p+1)!}{n}$ , и поэтому справедливо утверждение (14). ▲

Теорема 4. Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b, \quad (15)$$

причем

$$a < b, \quad (16)$$

то

$$\exists N_0: \forall n \geq N_0 \rightarrow x_n < y_n. \quad (17)$$

○ Как и в теореме 1, выберем  $\varepsilon > 0$  таким, чтобы  $\varepsilon$ -окрестности точек  $a$  и  $b$  (рис. 4.2) не пересекались (возьмем, например,  $\varepsilon = (b - a)/3 > 0$ ). Согласно определению предела по заданному  $\varepsilon$  можно найти номера  $N_1$  и  $N_2$  такие, что  $x_n \in U_\varepsilon(a)$  при всех  $n \geq N_1$  и  $y_n \in U_\varepsilon(b)$  при всех  $n \geq N_2$ . Пусть  $N_0 = \max(N_1, N_2)$ . Тогда при всех  $n \geq N_0$  выполняются неравенства

$$x_n < a + \varepsilon < b - \varepsilon < y_n,$$

откуда следует утверждение (17). ●

Следствие 1. Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  и  $a < b$ , то

$$\exists N_0: \forall n \geq N_0 \rightarrow x_n < b. \quad (18)$$

○ Для доказательства утверждения (18) достаточно в теореме 2 взять  $y_n = b$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . ●

Следствие 2. Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$  и

$$\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow x_n \geq y_n, \quad (19)$$

то

$$a \geq b. \quad (20)$$

○ Предположим, что неравенство (20) не выполняется. Тогда  $a < b$  и по теореме 4 справедливо утверждение (17), которое противоречит условию (19). Поэтому должно выполняться неравенство (20). ●

Замечание 5. В частности, если для сходящейся последовательности  $\{x_n\}$  выполняется для всех  $n \in \mathbb{N}$  (или для всех  $n \geq N_0$ ) неравенство  $x_n \geq \alpha$  ( $x_n \leq \beta$ ), то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \alpha$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \beta$ ). Отсюда следует, что если все члены сходящейся последовательности  $\{x_n\}$  принадлежат отрезку  $[a, b]$ , т. е.  $a \leq x_n \leq b$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ , то и предел этой последовательности принадлежит отрезку  $[a, b]$ , т. е.  $a \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq b$ .

Замечание 6. В следствии 2 утверждается, что если соответствующие члены двух сходящихся последовательностей связаны знаком нестрогого неравенства, то такое же неравенство справедливо и для пределов этих последовательностей. Короче: предельный переход сохраняет знак нестрогого неравенства. Однако знак строгого неравенства, вообще говоря, не сохраняется, т. е. если  $x_n > y_n$  при  $n \geq N_0$  и последовательности  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$  сходятся, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ . Например, если  $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ ,  $y_n = 1 - \frac{1}{n}$ , то  $x_n > y_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , но  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1$ .

**§ 5. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Арифметические операции над сходящимися последовательностями**

**1. Бесконечно малые последовательности.** Последовательность  $\{\alpha_n\}$  называется *бесконечно малой*, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0.$$

Это означает, что для любого  $\varepsilon > 0$  найдется номер  $N = N_\varepsilon$  такой, что  $|\alpha_n - 0| = |\alpha_n| < \varepsilon$  для всех  $n \geq N_\varepsilon$ .

Понятие бесконечно малой последовательности используется для доказательства свойств сходящихся последовательностей. Пусть число  $a$  — предел последовательности  $\{x_n\}$ . Обозначим  $\alpha_n = x_n - a$ . По определению предела

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon: \forall n \geq N_\varepsilon \rightarrow |x_n - a| = |\alpha_n| < \varepsilon,$$

т. е.  $\{\alpha_n\}$  — бесконечно малая последовательность. Обратное: если  $x_n = a + \alpha_n$ , где  $\{\alpha_n\}$  — бесконечно малая последовательность, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

Приведем примеры бесконечно малых последовательностей, используя результаты примеров 2, 8–10:

- а)  $\{a/n^r\}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $r = \frac{1}{m}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ;    б)  $\{q^n\}$ ,  $|q| < 1$ ;
- в)  $\{\sqrt[n]{a} - 1\}$ ,  $a > 1$ ;    г)  $\{\sqrt[n]{n} - 1\}$ ;    д)  $\{n^p/a^n\}$ ,  $p \in \mathbb{N}$ ,  $a > 1$ .

При изучении свойств сходящихся последовательностей нам потребуется ввести арифметические операции над последовательностями. Назовем суммой, разностью, произведением и частным двух последовательностей  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  соответственно последовательности  $\{x_n + y_n\}$ ,  $\{x_n - y_n\}$ ,  $\{x_n y_n\}$ ,  $\{x_n/y_n\}$ . При определении частного предполагается, что  $y_n \neq 0$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ .

Бесконечно малые последовательности обладают следующими свойствами:

а) алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность;

б) произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность является бесконечно малой последовательностью.

○ а) Пусть  $\{\alpha_n\}$  и  $\{\beta_n\}$  — бесконечно малые последовательности. Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существуют номера  $N_1 = N_1(\varepsilon)$  и  $N_2 = N_2(\varepsilon)$  такие, что  $|\alpha_n| < \varepsilon/2$  при всех  $n \geq N_1$  и  $|\beta_n| < \varepsilon/2$  при всех  $n \geq N_2$ . Если  $N = N_\varepsilon = \max(N_1, N_2)$ , то, используя неравенства для модуля суммы (разности), получаем для всех  $n \geq N$  неравенство

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно,  $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$  — бесконечно малая последовательность.

Доказанное свойство с помощью индукции распространяется на любое число слагаемых.

б) Пусть  $\{\alpha_n\}$  — ограниченная последовательность,  $\{\beta_n\}$  — бесконечно малая последовательность. По определению ограниченной последовательности

$$\exists C > 0: \forall n \in N \rightarrow |\alpha_n| < C,$$

а по определению бесконечно малой последовательности

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon: \forall n \geq N_\varepsilon \rightarrow |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{C}.$$

Отсюда следует, что

$$\forall n \geq N_\varepsilon \rightarrow |\alpha_n \beta_n| = |\alpha_n| \cdot |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{C} C = \varepsilon,$$

т. е.  $\{\alpha_n \beta_n\}$  — бесконечно малая последовательность. ●

В частности, если  $\{\alpha_n\}$  — стационарная последовательность, т. е.  $\alpha_n = a$  для всех  $n \in N$ , а  $\{\beta_n\}$  — бесконечно малая последовательность, то  $\{\alpha_n \beta_n\}$  — бесконечно малая последовательность.

*З а м е ч а н и е.* Так как бесконечно малая последовательность ограничена (§ 4, теорема 2), то из доказанного свойства следует, что произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

**2. Бесконечно большие последовательности.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется *бесконечно большой*, если для любого  $\delta > 0$  существует такой номер  $N_\delta$ , что для всех  $n \geq N_\delta$  выполняется неравенство  $|x_n| > \delta$ . В этом случае пишут  $\lim_{n \rightarrow \infty} = \infty$  и говорят, что последовательность *имеет бесконечный предел*.

Используя логические символы, это определение можно записать так:

$$\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \right\} \Leftrightarrow \forall \delta > 0 \quad \exists N_\delta: \forall n \geq N_\delta \rightarrow |x_n| > \delta. \quad (1)$$

Дадим геометрическую интерпретацию определения (1). Назовем  $\delta$ -окрестностью  $\infty$  (рис. 5.1) множество  $E = \{x \in R: |x| > \delta\}$ . Если

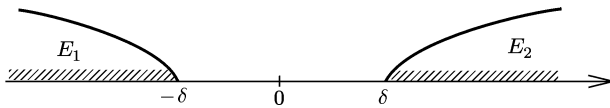


Рис. 5.1

последовательность  $\{x_n\}$  имеет бесконечный предел, то в любой  $\delta$ -окрестности  $\infty$  лежат все члены последовательности, за исключением, быть может, конечного числа членов.

Аналогично вводятся для последовательности  $\{x_n\}$  понятия бесконечного предела, равного  $-\infty$  и  $+\infty$ . Эти пределы обозначаются

соответственно символами  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  и определяются так:

$$\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \right\} \Leftrightarrow \forall \delta > 0 \exists N_\delta : \forall n \geq N_\delta \rightarrow x_n < -\delta, \quad (2)$$

$$\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \right\} \Leftrightarrow \forall \delta > 0 \exists N_\delta : \forall n \geq N_\delta \rightarrow x_n > \delta. \quad (3)$$

Множества  $E_1 = \{x \in \mathbb{R} : x < -\delta\}$  и  $E_2 = \{x \in \mathbb{R} : x > \delta\}$ , где  $\delta > 0$ , назовем  $\delta$ -окрестностями  $-\infty$  и  $+\infty$  соответственно (см. рис. 5.1). Тогда  $E = E_1 \cup E_2$ .

Согласно определению (3) последовательность  $\{x_n\}$  имеет предел, равный  $+\infty$ , если в  $\delta$ -окрестности символа  $+\infty$  содержатся все члены этой последовательности, за исключением, быть может, конечного числа их. Аналогичный смысл имеет определение (2).

В дальнейшем под пределом последовательности будем понимать конечный предел, если не оговорено противное.

Приведем примеры последовательностей, имеющих бесконечный предел.

Если  $x_n = -\sqrt{n}$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ ; если  $x_n = n^2/(n+2)$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ ; если  $x_n = (-1)^n 2^n$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ .

У п р а ж н е н и е 1. Доказать, что если  $x_n \neq 0$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ , то последовательность  $\{x_n\}$  является бесконечно большой тогда и только тогда, когда  $\{1/x_n\}$  — бесконечно малая последовательность.

У п р а ж н е н и е 2. Можно ли утверждать, что:

- всякая бесконечно большая последовательность является неограниченной;
- всякая неограниченная последовательность является бесконечно большой?

У п р а ж н е н и е 3. Пусть  $\{x_n\}$  — ограниченная, а  $\{y_n\}$  — бесконечно большая последовательность. Доказать, что  $\{x_n + y_n\}$  — бесконечно большая последовательность.

У п р а ж н е н и е 4. Доказать, что если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = +\infty$ .

### 3. Арифметические операции над сходящимися последовательностями.

Теорема. Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ , то:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b$ ;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = ab$ ;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$  при условии, что  $y_n \neq 0$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) и  $b \neq 0$ .

○ Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ , то  $x_n = a + \alpha_n$ ,  $y_n = b + \beta_n$ , где  $\{\alpha_n\}$  и  $\{\beta_n\}$  — бесконечно малые последовательности.

а) Из равенства  $x_n + y_n = a + b + \alpha_n + \beta_n$ , где  $\{\alpha_n + \beta_n\}$  — бесконечно малая последовательность, следует, что  $x_n + y_n \rightarrow a + b$  при  $n \rightarrow \infty$ .

б) Воспользуемся равенством

$$x_n y_n = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n.$$

Так как  $\{\alpha_n\}$  и  $\{\beta_n\}$  — бесконечно малые последовательности, то последовательности  $\{a\beta_n\}$ ,  $\{b\alpha_n\}$  и  $\{\alpha_n \beta_n\}$  также являются бесконечно малыми, откуда следует, что  $\{a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n\}$  — бесконечно малая последовательность. Поэтому  $x_n y_n \rightarrow ab$  при  $n \rightarrow \infty$ .

в) Докажем, что  $\left\{ \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right\}$  — бесконечно малая последовательность. Имеем  $\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{(a + \alpha_n)b - (b + \beta_n)a}{by_n} = \left( \alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n \right) \frac{1}{y_n}$ . Так как  $\{\alpha_n\}$  и  $\{\beta_n\}$  — бесконечно малые последовательности, то и последовательность  $\left\{ \alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n \right\}$  также является бесконечно малой.

По условию  $y \rightarrow b$  при  $n \rightarrow \infty$ , где  $b \neq 0$  и  $y_n \neq 0$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Поэтому (см. пример 6, § 4) последовательность  $\left\{ \frac{1}{y_n} \right\}$  является ограниченной.

Отсюда следует, что  $\left\{ \left( \alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n \right) \frac{1}{y_n} \right\}$  — бесконечно малая последовательность как произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность.

Таким образом,  $\left\{ \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right\}$  — бесконечно малая последовательность, и поэтому  $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{a}{b}$  при  $n \rightarrow \infty$ . ●

Пример 1. Найти  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ , если  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}}$ , где  $\{a_k\}$  — арифметическая прогрессия, все члены и разность  $d$  которой отличны от нуля.

△ Используя равенство

$$S_n = \frac{1}{da_1} - \frac{1}{d(a_1 + nd)},$$

полученное в § 3 (пример 2, а)), находим  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{da_1}$ . ▲

Пример 2. Пусть  $P_k(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_{k-1} x + a_k$ ,  $Q_k(x) = b_0 x^k + b_1 x^{k-1} + \dots + b_{k-1} x + b_k$ , где  $a_0 \neq 0$ ,  $b_0 \neq 0$ . Найдите  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_k(n)}{Q_k(n)}$ .

△ Разделив числитель и знаменатель дроби на  $n^k$ , получаем

$$\frac{P_k(n)}{Q_k(n)} = \frac{a_0 + a_1 \frac{1}{n} + \dots + a_k \frac{1}{n^k}}{b_0 + b_1 \frac{1}{n} + \dots + b_k \frac{1}{n^k}}.$$

Отсюда следует, что искомый предел равен  $a_0/b_0$ , так как  $a/n^p \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  для любого  $a \in R$  и любого  $p \in N$  (§ 4, пример 2, б). ▲

Пример 3. Найти  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , где  $x_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$ .

△ Воспользуемся формулой  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ , полученной

в § 3 (пример 2, в)). Тогда  $x_n = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{2n}\right)$ , откуда находим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{3}. \blacktriangle$$

Пример 4. Найти  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ,  $x_n = \sqrt{n^2 + 2n + 3} - \sqrt{n^2 - 2n + 5}$ .

△ Так как

$$x_n = \frac{(n^2 + 2n + 3) - (n^2 - 2n + 5)}{\sqrt{n^2 + 2n + 3} + \sqrt{n^2 - 2n + 5}} = \frac{4 - \frac{2}{n}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}}},$$

то, используя результат примера 7, § 4, получаем  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ . ▲

Пример 5. Доказать, что последовательность  $\{x_n\}$ , где  $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ , сходится, и найти ее предел.

△ В сумме  $x_n$  каждое слагаемое меньше предыдущего, и поэтому

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < x_n < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

или

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n}} < x_n < \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}.$$

Используя теорему 3, § 4 и результат примера 7, § 4, получаем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ . ▲

Упражнение 5. Доказать, что если существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , где  $a \neq 0$ , а последовательность  $\{y_n\}$  расходится, то последовательность  $\{x_n y_n\}$  также расходится.

Упражнение 6. Доказать, что если одна из последовательностей  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$  сходится, а другая расходится, то последовательность  $\{x_n + y_n\}$  расходится.

Упражнение 7. Найти  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , если:

а)  $x_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k(k+1)$ ; б)  $x_n = \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n k^3$ ; в)  $x_n = \sqrt{(n+a)(n+b)} - n$ .

Упражнение 8. Последовательность  $\{x_n\}$  задана при  $n \geq 3$  рекуррентной формулой  $x_n = (\alpha + 1)x_{n-1} + \alpha x_{n-2}$ , где  $|\alpha| < 1$ , и условиями  $x_1 = a$ ,  $x_2 = b$ . Доказать, что она сходится, и найти  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .



Упражнение 9. Пусть  $\{a_n\}$  — арифметическая прогрессия, все члены которой положительны и разность  $d \neq 0$ . Найти  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , где

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}}.$$

## § 6. Предел монотонной последовательности

**1. Монотонная последовательность. Точные грани последовательности.** Последовательность  $\{x_n\}$  называют *возрастающей* (*неубывающей*), если для любого  $n \in \mathbb{N}$  выполняется неравенство

$$x_{n+1} \geq x_n. \quad (1)$$

Аналогично последовательность  $\{x_n\}$  называют *убывающей* (*невозрастающей*), если для любого  $n \in \mathbb{N}$  справедливо неравенство

$$x_{n+1} \leq x_n. \quad (2)$$

Если неравенство (1) можно записать в виде  $x_{n+1} > x_n$ , а неравенство (2) — в виде  $x_{n+1} < x_n$ , то последовательность  $\{x_n\}$  называют соответственно *строго возрастающей* и *строго убывающей*.

Возрастающую или убывающую последовательность называют *монотонной*, а строго возрастающую или строго убывающую — *строго монотонной*.

Если неравенство (1) выполняется при  $n \geq n_0$ , то последовательность  $\{x_n\}$  называют *возрастающей, начиная с номера  $n_0$*  (при  $n \geq n_0$ ). Аналогично вводятся понятия убывающей, строго убывающей и строго возрастающей последовательности, начиная с номера  $n_0$  (при  $n \geq n_0$ ).

Для доказательства теоремы о пределе монотонной последовательности нам потребуются понятия точной верхней и нижней грани последовательности.

Точную верхнюю (нижнюю) грань множества значений последовательности  $\{x_n\}$  называют *точной верхней (нижней) гранью последовательности* и обозначают соответственно  $\sup\{x_n\}$  и  $\inf\{x_n\}$ .

Определение точной верхней грани  $\sup X$  числового множества  $X$ , введенное в § 2, можно записать так:

$$\{M = \sup X\} \Leftrightarrow \{\forall x \in X \rightarrow x \leq M\} \wedge \{\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in X: x_\varepsilon > M - \varepsilon\}. \quad (3)$$

Аналогично определение точной нижней грани  $\inf X$  числового множества  $X$  можно записать в виде

$$\{m = \inf X\} \Leftrightarrow \{\forall x \in X \rightarrow x \geq m\} \wedge \{\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in X: x_\varepsilon < m + \varepsilon\}. \quad (4)$$

Поэтому определения точной верхней и точной нижней граней последовательности можно записать в виде

$$\{a = \sup\{x_n\}\} \Leftrightarrow \{\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow x_n \leq a\} \wedge \{\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon: x_{N_\varepsilon} > a - \varepsilon\}, \quad (5)$$

$$\{b = \inf\{x_n\}\} \Leftrightarrow \{\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow x_n \geq b\} \wedge \{\forall \varepsilon < 0 \exists N_\varepsilon: x_{N_\varepsilon} < b + \varepsilon\}. \quad (6)$$

Таким образом, число  $a$  — точная верхняя грань последовательности  $\{x_n\}$ , если выполняются условия:

1) все члены последовательности не превосходят  $a$ , т. е.

$$\forall n \in N \rightarrow x_n \leq a; \quad (7)$$

2) для каждого  $\varepsilon > 0$  (рис. 6.1) найдется член последовательности, больший  $a - \varepsilon$ , т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon: x_{N_\varepsilon} > a - \varepsilon. \quad (8)$$

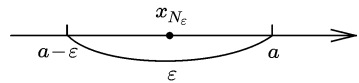


Рис. 6.1

Аналогично разъясняется определение (6) точной нижней грани последовательности.

Упражнение 1. Доказать, что если  $M = \sup X$ , то существует последовательность  $\{x_n\}$ , где  $x_n \in X$  при всех  $n \in N$ , такая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = M$ .

## 2. Признак сходимости монотонной последовательности.

**Теорема 1.** Если последовательность  $\{x_n\}$  является возрастающей и ограниченной сверху, то существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup \{x_n\}.$$

Если последовательность  $\{x_n\}$  является убывающей и ограниченной снизу, то существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf \{x_n\}.$$

○ Ограничимся доказательством теоремы для случая ограниченной сверху и возрастающей последовательности. Если последовательность  $\{x_n\}$  ограничена сверху, т. е. множество чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  ограничено сверху, то по теореме о существовании верхней грани (§ 2) существует точная верхняя грань этой последовательности, определяемая условиями (7), (8). Так как  $\{x_n\}$  — возрастающая последовательность, то

$$\forall n \geq N_\varepsilon \rightarrow x_{N_\varepsilon} \leq x_n. \quad (9)$$

Из (7)–(9) следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon: \forall n \geq N_\varepsilon \rightarrow a - \varepsilon < x_{N_\varepsilon} \leq x_n \leq a, \quad \text{т. е. } x_n \in U_\varepsilon(a).$$

Это означает, согласно определению предела, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = \sup \{x_n\}. \quad \bullet$$

**Замечание 1.** Теорема 1 остается справедливой для последовательности, ограниченной сверху (снизу) и возрастающей (убывающей), начиная с некоторого номера.

**Упражнение 2.** Доказать, что монотонная последовательность сходится тогда и только тогда, когда она ограничена.

Пример 1. Доказать, что если  $x_n = \frac{a^n}{n!}$ , где  $a > 0$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

△ Так как

$$x_{n+1} = \frac{a}{n+1} x_n, \quad (10)$$

то  $x_{n+1} \leq x_n$  при всех  $n \geq n_0$ , где  $n_0 = [a]$ , т. е.  $\{x_n\}$  — убывающая при  $n \geq n_0$  последовательность. Кроме того,  $x_n \geq 0$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ , т. е. последовательность ограничена снизу. По теореме 1 последовательность  $\{x_n\}$  сходится. Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ . Тогда, переходя к пределу в равенстве (10), получаем  $b = 0 \cdot b$ , т. е.  $b = 0$ . Итак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0. \quad \blacktriangle (11)$$

Замечание 2. Утверждение (11) справедливо не только при  $a > 0$ , но и при любом  $a \in \mathbb{R}$ , так как  $\left| \frac{a^n}{n!} \right| \leq \frac{|a|^n}{n!}$ .

Пример 2. Последовательность  $\{x_n\}$  задается рекуррентной формулой

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right), \quad (12)$$

где  $x_1 > 0$ ,  $a > 0$ . Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}. \quad (13)$$

△ Докажем сначала методом индукции, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \rightarrow x_k > 0. \quad (14)$$

В самом деле, из формулы (12) и условий  $x_1 > 0$ ,  $a > 0$  следует, что  $x_2 > 0$ . Предполагая, что  $x_n > 0$ , из равенства (12) получаем  $x_{n+1} > 0$ . Утверждение (14) доказано.

Далее, применяя неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического, из (12) получаем

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right) \geq \sqrt{x_n \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a} \quad \text{при } n \in \mathbb{N},$$

т. е.

$$\forall n \geq 2 \rightarrow x_n \geq \sqrt{a}. \quad (15)$$

Итак, последовательность  $\{x_n\}$  ограничена снизу. Докажем, что она является убывающей. Запишем равенство (12) в виде

$$x_{n+1} - x_n = \frac{a - x_n^2}{2x_n},$$

откуда в силу (14) и (15) получаем

$$\forall n \geq 2 \rightarrow x_{n+1} \leq x_n,$$

т. е. последовательность является убывающей при  $n \geq 2$ . По теореме 1 существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$ , где  $\alpha \geq \sqrt{a} > 0$  в силу условия (15). Переходя в равенстве (12) к пределу, получаем  $\alpha = \frac{1}{2} \left( \alpha + \frac{a}{\alpha} \right)$ , откуда  $\alpha^2 = a$ ,  $\alpha = \sqrt{a}$ , т. е. справедливо утверждение (13). ▲

**3. Число  $e$ .** Рассмотрим последовательность  $\{x_n\}$ , где

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

и покажем, что эта последовательность возрастающая и ограниченная сверху. Используя формулу бинома Ньютона, получаем

$$x_n = 1 + C_n^1 \frac{1}{n} + C_n^2 \frac{1}{n^2} + \dots + C_n^k \frac{1}{n^k} + \dots + \frac{1}{n^n},$$

где

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{k!}, \quad k = \overline{1, n}, \quad C_n^0 = 1.$$

Запишем  $x_n$  в следующем виде:

$$x_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right); \quad (16)$$

тогда

$$x_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right). \quad (17)$$

Все слагаемые в суммах (16) и (17) положительны, причем каждое слагаемое суммы (16) меньше соответствующего слагаемого суммы (17), так как  $1 - \frac{m}{n} < 1 - \frac{m}{n+1}$ ,  $m = \overline{1, n-1}$ , а число слагаемых в сумме (17) на одно больше, чем в сумме (16). Поэтому  $x_n < x_{n+1}$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ , т. е.  $\{x_n\}$  — строго возрастающая последовательность. Кроме того, учитывая, что  $0 < 1 - \frac{m}{n} < 1$  ( $m = \overline{1, n-1}$ ), из равенства (16) получаем  $x_n < 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$ . Так как  $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$  при  $k \in \mathbb{N}$ , то,

используя формулу для суммы геометрической прогрессии, получаем  $x_n < 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1 - (1/2)^n}{1 - 1/2} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}}$ . Следовательно,

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3,$$

т. е.  $\{x_n\}$  — ограниченная последовательность. По теореме 1 существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Этот предел обозначается буквой  $e$ . Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad (18)$$

Число  $e$  является иррациональным, оно служит основанием натуральных логарифмов и играет важную роль в математике. Справедливо приближенное равенство

$$e \approx 2,718281828459045.$$

Упражнение 3. Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$ .

Упражнение 4. Доказать, что последовательность  $\{x_n\}$ , заданная при  $n \in \mathbb{N}$  формулой  $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$  и условием  $x_1 = \sqrt{a}$ , сходится, и найти ее предел.

Упражнение 5. Доказать, что последовательность  $\{x_n\}$ , заданная при  $x \in \mathbb{N}$  рекуррентной формулой  $x_{n+1} = x_n(2 - x_n)$  и условием  $x_1 = a$ , где  $0 < a < 1$ , сходится, и найти ее предел.

**4. Теорема Кантора о вложенных отрезках.** Назовем последовательность отрезков  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots$ , где  $\Delta_n = [a_n, b_n]$ , *стягивающейся*, если выполнены следующие условия:

а) каждый последующий отрезок принадлежит предыдущему, т. е.

$$\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow \Delta_{n+1} \subset \Delta_n; \quad (19)$$

б) длина  $n$ -го отрезка  $\Delta_n$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0. \quad (20)$$

Условие (19) означает, что

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots \leq b_{n+1} \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1. \quad (21)$$

**Теорема 2 (Кантора).** Если последовательность отрезков является стягивающейся, то существует единственная точка, принадлежащая всем отрезкам этой последовательности.

○ а) Существование. Из условия (21) следует, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} \rightarrow a_n \leq b_m. \quad (22)$$

По теореме об отделимости числовых множеств (§ 2, теорема 2) из (22) заключаем, что существует  $\sup\{a_n\} = c$ , причем

$$\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow a_n \leq c \leq b_n,$$

т. е. существует точка  $c$ , принадлежащая всем отрезкам стягивающейся системы  $\{\Delta_n\}$ .

б) Единственность. Пусть существуют две различные точки  $c$  и  $c'$ , принадлежащие всем отрезкам последовательности  $\{\Delta_n\}$ , т. е.  $c \in \Delta_n$  и  $c' \in \Delta_n$  при любом  $n \in \mathbb{N}$ . Так как  $c \neq c'$ , то либо  $c < c'$ , либо  $c' < c$ . Пусть, например,  $c < c'$ . Тогда  $a_n \leq c < c' \leq b_n$  при любом  $n \in \mathbb{N}$ , откуда по свойствам неравенств  $b_n - a_n \geq c' - c = \alpha > 0$  при любом  $n \in \mathbb{N}$ , что противоречит условию (20). Итак,  $\alpha = 0$ , т. е.  $c' = c$ . ●

Упражнение 6. Доказать, что если выполнены условия (20) и (21), то последовательности  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  являются сходящимися, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c, \quad \text{где } c = \sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}.$$

## § 7. Подпоследовательности. Частичные пределы

**1. Подпоследовательность.** Пусть задана последовательность  $\{x_n\}$ . Рассмотрим строго возрастающую последовательность  $\{n_k\}$  натуральных чисел, т. е. такую, что

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$$

Тогда последовательность  $\{y_k\}$ , где  $y_k = x_{n_k}$  при  $k \in \mathbb{N}$ , называется *подпоследовательностью* последовательности  $\{x_n\}$  и обозначается  $\{x_{n_k}\}$ . Например, последовательность нечетных натуральных чисел 1, 3, 5, 7, 9, ..., взятых в порядке возрастания, является подпоследовательностью последовательности натуральных чисел 1, 2, 3, ..., а последовательность 3, 5, 1, 9, 11, 7, ... уже не является подпоследовательностью последовательности натуральных чисел.

Согласно определению подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$  образована из членов исходной последовательности  $\{x_n\}$ , причем порядок следования членов в подпоследовательности такой же, как и в данной последовательности  $\{x_n\}$ . В записи  $\{x_{n_k}\}$  число  $k$  означает порядковый номер члена последовательности  $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$ , а  $n_k$  — номер этого члена в исходной последовательности. Поэтому  $n_k \geq k$ , откуда следует, что  $n_k \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Введем теперь понятие частичного предела. Пусть  $\{x_{n_k}\}$  — подпоследовательность последовательности  $\{x_n\}$ , и пусть существует конечный или бесконечный  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ . Тогда  $a$  называют *частичным пределом последовательности*  $\{x_n\}$ . Например, последовательность  $\{(-1)^n\}$  имеет два частичных предела, а именно  $-1$  и  $1$ . Последовательность  $\{1 + (-1)^n\}$  имеет два частичных предела, а именно  $0$  и  $+\infty$ .

Если  $\{x_n\}$  — ограниченная последовательность, а  $L$  — множество всех ее частичных пределов, то числа  $\sup L$  и  $\inf L$  называют соответственно *верхним* и *нижним пределом* этой последовательности и обозначают соответственно символами  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$  и  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

Например, для последовательности 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ... имеем  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ .

**Упражнение 1.** Доказать, что если некоторая подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$  монотонной последовательности  $\{x_n\}$  сходится и  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ , то существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

**Упражнение 2.** Доказать, что если последовательность имеет предел, то любая ее подпоследовательность имеет тот же предел.

**Упражнение 3.** Привести пример неограниченной последовательности:

- а) не имеющей конечных частичных пределов;
- б) имеющей конечное число конечных частичных пределов;

в) имеющей бесконечно много частичных пределов.

Упражнение 4. Привести пример последовательности такой, что:

а) ее частичными пределами являются все члены данной последовательности;

б) каждое вещественное число — ее частичный предел.

## 2. Существование частичного предела у ограниченной последовательности.

Теорема (Больцано–Вейерштрасса). *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

○ Пусть  $\{x_n\}$  — ограниченная последовательность, тогда все члены последовательности принадлежат некоторому отрезку, т. е.

$$\exists a, b: \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow x_n \in \Delta = [a, b]. \quad (1)$$

Разобьем отрезок  $\Delta = [a, b]$  пополам точкой  $d$ . Тогда по крайней мере один из отрезков  $[a, d]$ ,  $[d, b]$  содержит бесконечное число членов последовательности  $\{x_n\}$ . Если оба отрезка обладают этим свойством, возьмем, например, правый отрезок (и будем так поступать в дальнейшем). Выбранный отрезок, содержащий бесконечное число членов данной последовательности, обозначим  $\Delta_1 = [a_1, b_1]$ , его длина равна

$$b_1 - a_1 = \frac{b - a}{2}.$$

Разделив отрезок  $\Delta_1$  пополам, выберем указанным выше способом из двух получившихся отрезков отрезок  $\Delta_2 = [a_2, b_2]$ , содержащий бесконечное число членов последовательности  $\{x_n\}$ .

Продолжая эти рассуждения, получим последовательность  $\{\Delta_n = [a_n, b_n]\}$  отрезков таких, что:

$$1) \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots \supset \Delta_n \supset \Delta_{n+1} \supset \dots;$$

$$2) b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Следовательно,  $\{\Delta_n\}$  — стягивающаяся последовательность отрезков. По теореме Кантора существует единственная точка  $c$ , принадлежащая всем отрезкам, т. е.

$$\exists c: \forall k \in \mathbb{N} \rightarrow c \in \Delta_k. \quad (2)$$

Покажем, что найдется подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$  последовательности  $\{x_n\}$  такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c. \quad (3)$$

Так как отрезок  $\Delta_1$  содержит бесконечное число членов последовательности  $\{x_n\}$ , то

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}: x_{n_1} \in \Delta_1.$$

Отрезок  $\Delta_2$  также содержит бесконечное число членов данной последовательности, и поэтому

$$\exists n_2 > n_1: x_{n_2} \in \Delta_2.$$

Вообще,

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n_k: x_{n_k} \in \Delta_k, \quad \text{где } n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1} < n_k.$$

Следовательно, существует подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$  последовательности  $\{x_n\}$  такая, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \rightarrow a_k \leq x_{n_k} \leq b_k. \quad (4)$$

Условия (2) и (4) означают, что точки  $c$  и  $x_{n_k}$  принадлежат отрезку  $\Delta_k = [a_k, b_k]$ , и поэтому расстояние между ними не превосходит длины отрезка  $\Delta_k$ , т. е.

$$|x_{n_k} - c| \leq b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}. \quad (5)$$

Так как  $\left\{\frac{1}{2^k}\right\}$  — бесконечно малая последовательность (§ 4, пример 2, в)), то из (5) следует, что справедливо утверждение (3). ●

**Замечание.** Теорему Больцано–Вейерштрасса можно сформулировать так: любая ограниченная последовательность имеет хотя бы один частичный предел.

**Упражнение 5.** Показать, что всякая неограниченная последовательность имеет частичный предел, равный  $\infty$ .

**Упражнение 6.** Доказать, что для того, чтобы  $a$ , где  $a$  — число или один из символов  $+\infty$ ,  $-\infty$ , было частичным пределом последовательности, необходимо и достаточно, чтобы в любой окрестности  $a$  содержалось бесконечное число членов этой последовательности.

## § 8. Критерий Коши сходимости последовательности

**1. Фундаментальная последовательность.** Последовательность  $\{x_n\}$  называют *фундаментальной*, если она удовлетворяет *условию Коши*: для каждого  $\varepsilon > 0$  существует такое натуральное число  $n_\varepsilon$ , что для любого  $n \geq n_\varepsilon$  и любого  $m \geq n_\varepsilon$  справедливо неравенство  $|x_n - x_m| < \varepsilon$ . Кратко это условие можно записать так:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon: \forall n \geq n_\varepsilon \quad \forall m \geq n_\varepsilon \rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon, \quad (1)$$

или в другом виде:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon: \forall n \geq n_\varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N} \rightarrow |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Докажем, что фундаментальная последовательность является ограниченной.

○ Пусть  $\varepsilon = 1$ , тогда согласно условию Коши (1) найдется номер  $n_0$  такой, что для всех  $n \geq n_0$  и для всех  $m \geq n_0$  выполняется неравенство  $|x_n - x_m| < 1$ , и, в частности,  $|x_n - x_{n_0}| < 1$ .



Так как  $|x_n| = |(x_n - x_{n_0}) + x_{n_0}| \leq |x_{n_0}| + |x_n - x_{n_0}| < |x_{n_0}| + 1$  для всех  $n \geq n_0$ , то при всех  $n \in \mathbb{N}$  справедливо неравенство  $|x_n| < C$ , где  $C = \max(|x_1|, \dots, |x_{n_0-1}|, |x_{n_0}| + 1)$ . Это означает, что  $\{x_n\}$  — ограниченная последовательность. ●

Упражнение 1. Доказать, что произведение двух фундаментальных последовательностей есть фундаментальная последовательность.

## 2. Необходимое и достаточное условие сходимости последовательности.

**Теорема (критерий Коши).** *Для того чтобы последовательность имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

○ **Необходимость.** Пусть последовательность  $\{x_n\}$  имеет конечный предел, равный  $a$ . По определению предела

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \forall p \geq N_\varepsilon \rightarrow |x_p - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2)$$

Полагая в (2) сначала  $p = n$ , а затем  $p = m$  и используя неравенство для модуля суммы (разности), получаем

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) - (x_m - a)| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, для любого  $n \geq N_\varepsilon$  и для любого  $m \geq N_\varepsilon$  выполняется неравенство  $|x_n - x_m| < \varepsilon$ , т. е. выполняется условие (1) при  $n_\varepsilon = N_\varepsilon$ .

**Достаточность.** Пусть  $\{x_n\}$  — фундаментальная последовательность. Докажем, что она имеет конечный предел. По определению фундаментальной последовательности

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon \quad \forall m \geq n_\varepsilon \rightarrow |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3)$$

Так как фундаментальная последовательность  $\{x_n\}$  является ограниченной, то по теореме Больцано–Вейерштрасса она содержит сходящуюся подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$ . Пусть ее предел равен  $a$ , т. е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a. \quad (4)$$

Покажем, что число  $a$  является пределом исходной последовательности  $\{x_n\}$ . По определению предела (4)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_\varepsilon : \forall k \geq k_\varepsilon \rightarrow |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5)$$

Пусть  $N_\varepsilon = \max(n_\varepsilon, k_\varepsilon)$ . Фиксируем в (5) номер  $n_k \geq N_\varepsilon$  (такой номер найдется, так как  $n_k \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ ). Тогда при  $m = n_k$  и при всех  $n \geq N_\varepsilon$  в силу (3) выполняется неравенство

$$|x_n - x_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6)$$

Из (5) и (6) следует, что при всех  $n \geq N_\varepsilon$  справедливо неравенство  $|x_n - a| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - a)| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ,

т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . ●

Пример. Доказать, что последовательность  $\{x_n\}$ , где

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n},$$

расходится.

$\Delta$  Последовательность  $\{x_n\}$  расходится, если не выполняется условие Коши (1), т. е.

$$\exists \varepsilon_0 > 0: \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad \exists m \geq k: |x_n - x_m| \geq \varepsilon_0. \quad (7)$$

Пусть задано любое  $k \in \mathbb{N}$ , положим  $n = 2k$ ,  $m = k$ . Тогда

$$|x_n - x_m| = |x_{2k} - x_k| = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} \geq \frac{1}{2k} k = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, условие (7) выполняется при  $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ , и в силу критерия Коши последовательность  $\{x_n\}$  расходится.  $\blacktriangle$

## УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ II

1. Найти  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , если:

а)  $x_n = 2, \underbrace{3434\dots 34}_n$ ;    б)  $x_n = \frac{a^n}{1 + a^{2n}}$ ;

в)  $x_n = \frac{(3n+2)^4 + (n-3)^4}{(2n^2+3)^2 + (n^2+1)^2}$ ;    г)  $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ .

2. Доказать, что если последовательность  $\{x_n\}$  сходится, а последовательность  $\{y_n\}$  расходится, то при  $b \neq 0$  последовательность  $\{ax_n + by_n\}$  расходится.

3. Доказать, что если  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = a$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k-1} = b$ , где  $a \neq b$ , то последовательность  $\{x_k\}$  расходится.

4. Привести пример ограниченных последовательностей  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$ , где  $y_n \neq 0$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ , таких, что последовательность  $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$  не ограничена.

5. Используя логические символы, сформулировать утверждения:

а) последовательность  $\{x_n\}$  не ограничена сверху;

б) последовательность не является убывающей.

6. Пусть существует число  $C > 0$  такое, что  $|y_n| \geq C$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ , а последовательность  $\{x_n\}$  ограничена. Доказать, что последовательность  $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$  ограничена.

7. Доказать, что сходящаяся последовательность  $\{x_n\}$  достигает хотя бы одной из своих точных граней, верхней  $\sup\{x_n\} = \mathcal{M}$  или нижней  $\inf\{x_n\} = m$ , т. е. существует номер  $k$  такой, что  $x_k = \mathcal{M}$ , или существует номер  $p$  такой, что  $x_p = m$ .

8. Доказать, что если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ , то последовательность  $\{x_n\}$  достигает своей точной нижней грани.

9. Доказать, что если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$  и существует число  $C > 0$  такое, что для всех  $n \geq n_0$  выполняется неравенство  $|y_n| \geq C$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \infty$ .

10. Доказать, что всякая монотонная последовательность имеет только один частичный предел.

11. Доказать, что последовательность  $x_n$  является фундаментальной тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \rightarrow |x_n - x_N| < \varepsilon.$$

12. Доказать, что последовательность  $\{x_n\}$  сходится, если сходятся ее подпоследовательности  $\{x_{2k}\}$ ,  $\{x_{2k-1}\}$  и  $\{x_{3k}\}$ .

13. Доказать, что если  $\{x_n\}$  — монотонная последовательность и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , то подпоследовательность  $\{y_n\}$ , где  $y_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} x_k$ , сходится.

14. Привести пример расходящейся последовательности  $\{x_n\}$  такой, что для любого  $p \in \mathbb{N}$  выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+p} - x_n) = 0.$$

15. Привести пример сходящейся последовательности  $\{x_n\}$  такой, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_{n+1} - x_n) = \infty.$$

16. Доказать, что существует конечный  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , если  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$  и для любого  $n \in \mathbb{N}$  выполняются условия

$$\begin{aligned} |x_{n+2} - x_{n+1}| &\leq |x_{n+1} - x_n|, \\ (x_{n+2} - x_{n+1})(x_{n+1} - x_n) &\leq 0. \end{aligned}$$

17. Доказать, что последовательность  $\{x_n\}$  сходится, если существует число  $C > 0$  такое, что для всех  $n \in \mathbb{N}$  выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^n |x_{k+1} - x_k| < C.$$

18. Доказать, что последовательность  $\{x_n\}$ , где

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n},$$

имеет предел  $a$  такой, что  $1/2 < a < 1$ .

19. Последовательность  $\{x_n\}$  задана при всех  $n \in \mathbb{N}$  рекуррентной формулой  $x_{n+1} = 1 - x_n^2$  и условием  $x_1 = a$ , где  $0 < a < 1$ . Доказать, что эта последовательность сходится, и найти ее предел.

20. Пусть  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = b$ ,  $x_n = \frac{x_{n-2} + x_{n-1}}{2}$  при  $n \geq 3$ . Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{a + 2b}{3}.$$

21. Доказать, что если  $x_n > 0$  при  $n \in \mathbb{N}$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = a.$$

22. Доказать, что если  $x_n > 0$  при  $n \in \mathbb{N}$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} = a$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = a.$$

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

§ 9. Числовые функции

**1. Понятие числовой функции.** Пусть дано числовое множество  $X \subset R$ . Если каждому  $x \in X$  поставлено в соответствие по некоторому правилу число  $y$ , то говорят, что на множестве  $X$  определена *числовая функция*.

Правило, устанавливающее соответствие, обозначают некоторым символом, например,  $f$ , и пишут

$$y = f(x), \quad x \in X, \quad (1)$$

а множество  $X$  называют *областью определения функции* и обозначают  $D(f)$ , т. е.  $X = D(f)$ .

В записи (1)  $x$  часто называют *аргументом* или *независимой переменной*, а  $y$  — *зависимой переменной*. Числа  $x$  из множества  $D(f)$  называют *значениями аргумента*. Число  $y_0$ , соответствующее значению  $x_0 \in D(f)$ , называют *значением функции* при  $x = x_0$  (или значением функции в точке  $x_0$ ) и обозначают  $f(x_0)$  или  $f(x)|_{x=x_0}$ . Совокупность всех значений, которые функция принимает на множестве  $D(f)$ , называют *множеством значений функции* и обозначают  $E(f)$ . Заметим, что если  $y_0 \in E(f)$ , то существует по крайней мере одно число  $x_0 \in D(f)$  такое, что  $f(x_0) = y_0$ .

Функцию часто обозначают только символом ( $f$ ,  $\varphi$ ,  $F$  и т. д.), который определяет правило (закон) соответствия. Для обозначения функции используются также записи вида  $x \mapsto f(x)$ ,  $f: X \rightarrow Y$ . Под словом “функция” часто понимают зависимую переменную  $y$ , значения которой определяются значениями независимой переменной  $x$  и правилом  $f$ , или даже само это правило. Термин “функция” имеет синонимы: *отображение, преобразование, морфизм*. Например, говорят, что функция  $f$  отображает множество  $X = D(f)$  на множество  $Y = E(f)$ , и называют множество  $Y$  *образом множества  $X$  при отображении  $f$* . Если  $E(f) \subset E_1$ , то говорят, что функция  $f$  *отображает  $X$  в  $E_1$* .

**2. Равенство функций. Операции над функциями.** Функции  $f$  и  $g$  называют *равными* или *совпадающими*, если они имеют одну и ту же область определения  $X$  и для каждого  $x \in X$  значения этих функций совпадают. В этом случае пишут  $f(x) = g(x)$ ,  $x \in X$  или  $f = g$ .

Например, если  $f(x) = \sqrt{x^2}$ ,  $x \in R$ , и  $g(x) = |x|$ ,  $x \in R$ , то  $f = g$ , так как при всех  $x \in R$  справедливо равенство  $\sqrt{x^2} = |x|$ .

Если  $E' \subset D(f)$ , то функцию  $g(x) = f(x)$ ,  $x \in E'$ , называют *сужением функции  $f$  на множество  $E'$* . Например, если  $E' = [0, +\infty)$ , то функция  $g(x) = x$ ,  $x \in E'$ , является сужением функции  $f(x) = |x|$ ,  $x \in R$ , на множество  $E'$ .

Если равенство  $f(x) = g(x)$  верно при всех  $x \in E'$ , где  $E' \subset D(f) \cap D(g)$ , т. е. сужения функций  $f$  и  $g$  на множество  $E'$  совпадают, то в этом случае говорят, что функции  $f$  и  $g$  *равны на множестве  $E'$* . Например, функции  $\sqrt{x^2}$  и  $x$  равны на множестве  $E' = [0, +\infty)$ .

Естественным образом для функций вводятся арифметические операции. Пусть функции  $f$  и  $g$  определены на одном и том же множестве  $E$ . Тогда функции, значения которых в каждой точке  $x \in E$  равны  $f(x) + g(x)$ ,  $f(x) - g(x)$ ,  $f(x)g(x)$ ,  $f(x)/g(x)$  ( $g(x) \neq 0$  для всех  $x \in E$ ), называют соответственно *суммой, разностью, произведением и частным функций  $f$  и  $g$*  и обозначают  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $fg$ ,  $f/g$ .

Введем понятие сложной функции. Пусть функции  $y = \varphi(x)$  и  $z = f(y)$  определены на множествах  $X$  и  $Y$  соответственно, причем множество значений функции  $\varphi$  содержится в области определения функции  $f$ . Тогда функцию, принимающую при каждом  $x \in X$  значение  $F(x) = f(\varphi(x))$ , называют *сложной функцией* или *суперпозицией (композицией) функций  $\varphi$  и  $f$*  и обозначают  $f \circ \varphi$ . Например, функция  $z = \sqrt{4 - x^2}$ ,  $x \in [-2, 2]$ , является композицией функций  $y = 4 - x^2$ ,  $x \in [-2, 2]$ , и  $z = \sqrt{y}$ ,  $y \in [0, +\infty)$ . Эта функция относится к совокупности *элементарных функций*, т. е. функций, которые можно получить из *основных элементарных функций* с помощью конечного числа арифметических операций и композиций. К основным элементарным функциям относят постоянную, степенную, логарифмическую, тригонометрические и обратные тригонометрические функции. Например, элементарными являются функции:

а) *линейная*  $y = ax + b$ ,  $a \neq 0$ ;

б) *квадратичная*  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ ;

в) *многочлен степени  $n$* , т. е. функция  $y = P_n(x)$ , где  $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_n \neq 0$ ;

г) *рациональная функция*, т. е. функция вида  $y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ , где  $P_n$  и  $Q_m$  — многочлены степени  $n$  и  $m$ ,  $m \neq 0$ .

**3. Способы задания функции.** Числовые функции чаще всего задаются при помощи формул. Такой способ задания называют *аналитическим*. Например, функции  $y = x^2$ ,  $y = |x|^{3/2}$ ,  $y = \sin^3 3x$  заданы на множестве  $R$  аналитически.

Если числовая функция  $f$  задана формулой и не указана область ее определения  $D(f)$ , то принято считать, что  $D(f)$  — множество всех тех значений аргумента, при которых эта формула имеет смысл, и результатом каждой операции, указанной в формуле, является вещест-

венное число. Например, если  $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ , то  $D(f) = [-3, 3]$ , а если  $f(x) = \sqrt{\lg \sin x}$ , то  $D(f)$  — множество корней уравнения  $\sin x = 1$ , т. е. множество чисел  $x_k = \pi/2 + 2\pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ .

Следует отметить, что функция может быть задана различными формулами на разных промежутках. Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } x < 0, \\ x^2, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - \sqrt{x}, & \text{если } x > 1, \end{cases}$$

задана аналитическим способом на  $\mathbb{R}$  с помощью трех различных формул.

Иногда функциональная зависимость описывается с помощью таблицы, содержащей лишь некоторые значения аргумента и соответствующие значения функции. Для значений аргумента, не содержащихся в таблице, значения функции обычно находят приближенно.

На практике часто соответствие между значениями аргумента и значениями функции задается с помощью рисунка. Например, в медицине при изучении работы сердца получают электрокардиограммы — кривые, отражающие изменение с течением времени электрических импульсов в мышце сердца. В практике физических измерений функциональная зависимость часто задается с помощью эскиза графика, снимаемого, например, с экрана осциллографа.

**4. График функции.** Графиком функции  $y = f(x)$ ,  $x \in D(f)$ , в прямоугольной системе координат  $Oxy$  называют множество всех точек плоскости с координатами  $(x, f(x))$ , где  $x \in D(f)$ .

Для каждого  $x_0 \in D(f)$  прямая  $x = x_0$ , параллельная оси  $Oy$ , пересекает график функции  $y = f(x)$ ,  $x \in D(f)$ , в одной точке  $M_0(x_0, y_0)$ , где  $y_0 = f(x_0)$  — значение функции  $f$  при  $x = x_0$ . Значение  $x = a$ , при котором  $f(a) = 0$ , называют нулем функции  $f(x)$ . Если  $x = a$  — нуль функции  $f$ , то график функции  $y = f(x)$  пересекает ось  $Ox$  при  $x = a$ , т. е. в точке  $M(a, 0)$ .

Строго говоря, следует различать график функции, точное определение которого дано выше, и эскиз части графика, принимаемый нередко за график.

**Пример 1.** Построить график функции  $y = E(x)$ , где  $E(x) = [x]$  — целая часть числа  $x$  (наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ).

$\Delta$  Пусть  $x \in [n, n + 1)$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ , тогда  $E(x) = n$ . График функции  $y = E(x)$  изображен на рис. 9.1. Стрелка на графике указывает на то, что точка в ее острие не принадлежит графику.  $\blacktriangle$

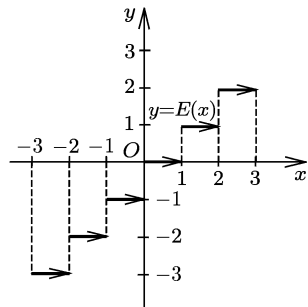


Рис. 9.1

Пример 2. Построить график функции  $y = \text{sign } \sin x$ , где

$$\text{sign } x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

△ Если  $x \in (-\pi + 2k\pi, 2k\pi)$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ , то  $\sin x < 0$ , и поэтому  $\text{sign } \sin x = -1$ .

Если  $x \in (2k\pi, \pi + 2k\pi)$ , то  $\sin x > 0$ , и  $\text{sign } \sin x = 1$ . Если  $x = k\pi$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ , то  $y = 0$ . График функции изображен на рис. 9.2. ▲

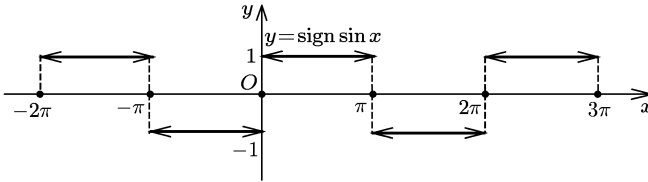


Рис. 9.2

График функции  $y = f(x)$  иногда можно получить (см. таблицу) преобразованием известного графика другой функции  $y = g(x)$ .

Функция $y = f(x)$	Преобразование графика функции $y = g(x)$
$y = g(x) + A$	Сдвиг (параллельный перенос) вдоль оси ординат на $A$
$y = g(x - a)$	Сдвиг вдоль оси абсцисс на $a$
$y = g(-x)$	Симметрия относительно оси ординат
$y = -g(x)$	Симметрия относительно оси абсцисс
$y = Bg(x)$	Умножение каждой ординаты на $B$ , где $B \neq 0$
$y = g(kx)$	Деление каждой абсциссы на $k$ , где $k \neq 0$

Приведем примеры применения преобразований, указанных в таблице.

Пример 3. График квадратичной функции

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0, \quad (2)$$

можно получить сдвигом графика функции  $y = ax^2$  вдоль оси  $Ox$

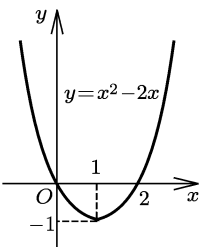


Рис. 9.3

на  $-\frac{b}{2a}$  и вдоль оси  $Oy$  на  $c - \frac{b^2}{4a}$ .

△ Действительно, выделяя полный квадрат, получаем

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Поэтому графиком квадратичной функции (2) является парабола, получаемая сдвигом параболы  $y = ax^2$ . ▲

Например, график функции  $y = x^2 - 2x$ , изображенный на рис. 9.3, можно получить сдвигом графика  $y = x^2$  вдоль оси  $Ox$  на 1 и вдоль оси  $Oy$  на  $-1$ , так как  $x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$ .

Пример 4. График дробно-линейной функции

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad c \neq 0, \quad ad - bc \neq 0, \quad (3)$$

можно получить преобразованием графика функции вида  $y = \frac{k}{x}$ .

△ В самом деле,

$$\frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a\left(x + \frac{d}{c}\right) + b - \frac{ad}{c}}{c\left(x + \frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \frac{1}{x + \frac{d}{c}},$$

откуда следует, что график функции (3) можно получить сдвигом графика гиперболы  $y = \frac{k}{x}$ , где  $k = \frac{bc - ad}{c^2}$ , вдоль оси  $Ox$  на  $-\frac{d}{c}$

и вдоль оси ординат на  $\frac{a}{c}$ . ▲

В частности, если  $y = \frac{3 - 2x}{x + 1}$ , то  $y = \frac{3 - 2x}{x + 1} =$

$$= -2 + \frac{5}{x + 1}.$$

Поэтому график этой функции можно получить сдвигом графика гиперболы  $y = \frac{5}{x}$  вдоль оси  $Ox$  на  $-1$  и вдоль оси  $Oy$  на  $-2$  (рис. 9.4). Отсюда следует, что график функции  $y = \frac{3 - 2x}{x + 1}$  симметричен относительно точки  $(-1, -2)$ .

Пример 5. Построить график функции  $y = \sqrt{-x}$ .

△ График функции  $y = \sqrt{-x}$  можно получить из графика функции

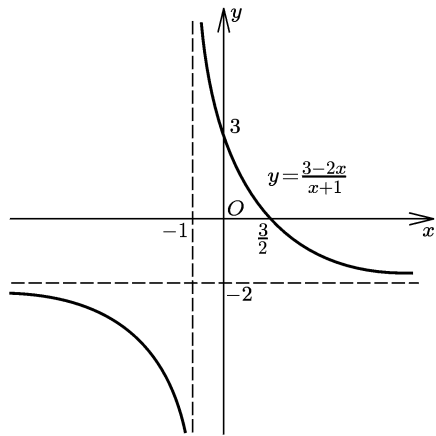


Рис. 9.4

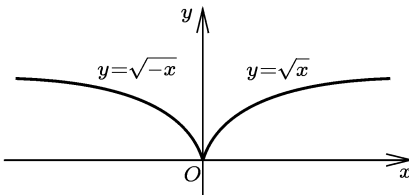


Рис. 9.5

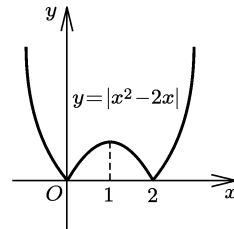


Рис. 9.6

$y = \sqrt{x}$  с помощью симметрии относительно оси ординат (рис. 9.5). ▲

Отметим еще, что график функции  $y = |f(x)|$  можно получить из графика функции  $y = f(x)$  следующим образом:

а) часть графика функции  $f(x)$ , лежащую выше оси  $Ox$  и на этой оси, оставить без изменения;



б) часть графика функции  $f(x)$ , лежащую ниже оси  $Ox$ , симметрично отразить относительно оси  $Ox$ .

Пример 6. Построить график функции  $y = |x^2 - 2x|$ .

△ Применяя указанный выше прием, строим график этой функции (рис. 9.6) с помощью графика функции  $y = x^2 - 2x$  (рис. 9.3). ▲

**5. Четные и нечетные функции.** Функция  $f$ , определенная на множестве  $X$ , называется:

а) *четной*, если для любого  $x \in X$  выполняются условия  $-x \in X$  и  $f(-x) = f(x)$ ;

б) *нечетной*, если для любого  $x \in X$  выполняются условия  $-x \in X$  и  $f(-x) = -f(x)$ .

Четными являются, например, следующие функции:  $y = x^4$ ,  $y = \cos \frac{x}{2}$ ,  $y = \lg |x|$ ,  $y = \frac{\sin x}{x}$ , а нечетными — функции  $y = \frac{1}{x^3}$ ,  $y = \sin^5 2x$ ,  $y = x^2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ,  $y = \arcsin(\sin x)$ .

График четной функции симметричен относительно оси ординат, а

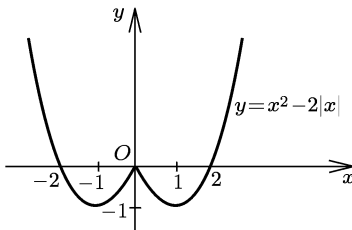


Рис. 9.7

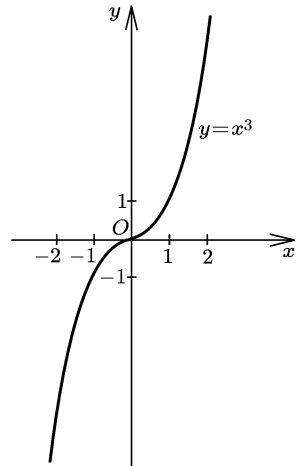


Рис. 9.8

график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Пример 7. Построить график функции  $y = x^2 - 2|x|$ .

△ Если  $x \geq 0$ , то  $y = x^2 - 2x$  (см. рис. 9.3). Так как  $x^2 - 2|x|$  — четная функция, то для построения части графика этой функции, соответствующей значениям  $x \leq 0$ , следует симметрично отразить график  $y = x^2 - 2x$ ,  $x \geq 0$ , относительно оси  $Oy$  (рис. 9.7). ▲

На рис. 9.8 изображен график нечетной функции  $y = x^3$ .

**6. Ограниченные и неограниченные функции.** Функцию  $f$  называют *ограниченной снизу на множестве*  $X \subset D(f)$ , если существует число  $C_1$  такое, что для любого  $x \in X$  выполняется неравенство  $f(x) \geq C_1$ .

Используя символы  $\exists$  и  $\forall$ , это определение можно записать так:

$$\exists C_1: \forall x \in X \rightarrow f(x) \geq C_1.$$

Аналогично функцию  $f$  называют *ограниченной сверху* на множестве  $X \subset D(f)$ , если

$$\exists C_2: \forall x \in X \rightarrow f(x) \leq C_2.$$

Функцию, ограниченную и сверху, и снизу на множестве  $X$ , называют *ограниченной на этом множестве*.

Функция  $f$  является ограниченной на множестве  $X$  тогда и только тогда, когда

$$\exists C > 0: \forall x \in X \rightarrow |f(x)| \leq C. \quad (4)$$

Если неравенство  $|f(x)| \leq C$  выполняется для всех  $x \in D(f)$ , говорят, что *функция  $f$  ограничена*.

Геометрически ограниченность функции  $f$  на множестве  $X$  означает, что график функции  $y = f(x)$ ,  $x \in X$ , лежит в полосе  $-C \leq y \leq C$ .

Например, функция  $y = \sin \frac{1}{x}$ , определенная при  $x \in R$ ,  $x \neq 0$ , ограничена, так как

$$\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1.$$

Функция  $f$  не ограничена на множестве  $X$ , если условие (4) не выполняется, т. е.

$$\forall C > 0 \quad \exists x_C \in X: |f(x_C)| \geq C. \quad (5)$$

Если  $X = D(f)$  и выполнено условие (5), то говорят, что *функция  $f$  не ограничена*.

Пример 8. Доказать, что функция  $y = \frac{1}{x^2}$  не ограничена.

△ Функция  $\frac{1}{x^2}$  определена при  $x \in R$ ,  $x \neq 0$ . Пусть  $C$  — любое положительное число, и пусть  $x_C = \frac{1}{\sqrt{2C}}$ , тогда  $y(x_C) = 2C > C$ , т. е. выполняется условие (5). ▲

Пусть  $Y$  — множество значений, которые функция  $f$  принимает на множестве  $X \subset D(f)$ . Тогда точную верхнюю грань множества  $Y$  называют *точной верхней гранью функции  $f$  на множестве  $X$*  и обозначают  $\sup_{x \in X} f(x)$ , а точную нижнюю грань множества  $Y$  — *точной нижней гранью функции  $f$  на множестве  $X$*  и обозначают  $\inf_{x \in X} f(x)$ .

Если  $X = D(f)$ , то в этих определениях указание на множество  $X$  опускают.

Пусть существует точка  $x_0 \in X \subset D(f)$  такая, что для всех  $x \in X$  выполняется неравенство  $f(x) \leq f(x_0)$ . Тогда говорят, что функция  $f$  принимает в точке  $x_0$  *наибольшее (максимальное) значение на множестве  $X$*  и пишут  $f(x_0) = \max_{x \in X} f(x)$ . В этом случае  $\sup_{x \in X} f(x) = f(x_0)$ .

Аналогично, если  $\exists x_0 \in X \subset D(f): \forall x \in X \rightarrow f(x) \geq f(x_0)$ , то говорят, что функция  $f$  принимает в точке  $x_0$  *наименьшее (минимальное) значение на множестве  $X$* , и пишут  $f(x_0) = \min_{x \in X} f(x)$ . В этом случае

$$\inf_{x \in X} f(x) = f(x_0).$$

Максимальные и минимальные значения называют *экстремальными*.

Например, если  $f(x) = \sin x$ , то  $\sup_{x \in R} f(x) = \max_{x \in R} f(x) = f(x_k)$ , где  $x_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ,  $k \in Z$ ,  $\inf_{x \in R} f(x) = \min_{x \in R} f(x) = f(\tilde{x}_k)$ , где  $\tilde{x}_k = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ,  $k \in Z$ .

**7. Монотонные функции.** Функцию  $f$  называют возрастающей (неубывающей) на множестве  $X \subset D(f)$ , если для любых точек  $x_1 \in X$ ,  $x_2 \in X$  таких, что  $x_1 < x_2$ , выполняется неравенство  $f(x_1) \leq f(x_2)$ . Если это неравенство является строгим ( $f(x_1) < f(x_2)$ ), то функцию  $f$  называют строго возрастающей на множестве  $X$ .

Таким образом, функция  $f$  называется:

а) *возрастающей (неубывающей) на множестве  $X$* , если

$$\forall x_1 \in X \quad \forall x_2 \in X: x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2);$$

б) *строго возрастающей на множестве  $X$* , если

$$\forall x_1 \in X \quad \forall x_2 \in X: x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Аналогично функция  $f$  называется:

а) *убывающей (невозрастающей) на множестве  $X$* , если

$$\forall x_1 \in X \quad \forall x_2 \in X: x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2);$$

б) *строго убывающей на множестве  $X$* , если

$$\forall x_1 \in X \quad \forall x_2 \in X: x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Убывающие и возрастающие функции объединяют названием *монотонные*, а строго возрастающие и строго убывающие — названием *строго монотонные*.

Если  $X = D(f)$ , то в этих определениях указание на множество  $X$  обычно опускают.

**Пример 9.** Доказать, что функция  $f$  строго возрастает на множестве  $X$ , если:

а)  $f(x) = x^3$ ,  $X = R$ ;

б)  $f(x) = \sin x$ ,  $X = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

$\Delta$  а) Если  $0 \leq x_1 < x_2$ , то  $x_1^3 < x_2^3$ , а если  $x_1 < x_2 \leq 0$ , то  $0 \leq -x_2 < -x_1$ , откуда

$$(-x_2)^3 < (-x_1)^3. \quad (6)$$

Так как  $x^3$  — нечетная функция, то неравенство (6) можно записать в виде  $-x_2^3 < -x_1^3$ , откуда  $x_1^3 < x_2^3$ . Наконец, если  $x_1 < 0$ , а  $x_2 > 0$ , то  $x_1^3 < x_2^3$ . Таким образом, неравенство  $x_1^3 < x_2^3$  справедливо для любых  $x_1 \in R$ ,  $x_2 \in R$  таких, что  $x_1 < x_2$ . Поэтому  $x^3$  — строго возрастающая на  $R$  функция.

б) Пусть  $-\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2}$ ; тогда  

$$\sin x_2 - \sin x_1 = 2 \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \cos \frac{x_2 + x_1}{2} > 0,$$

так как  $0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \frac{x_2 + x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$ .

Таким образом, неравенство  $\sin x_2 > \sin x_1$  выполняется для  $x_1, x_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , если  $x_2 > x_1$ . Следовательно, функция  $\sin x$  строго возрастает на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ . ▲

**8. Периодические функции.** Число  $T \neq 0$  называют *периодом функции*  $f$ , если для любого  $x \in D(f)$  значения  $x + T$  и  $x - T$  также принадлежат  $D(f)$  и выполняется равенство

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

Функцию, имеющую период  $T$ , называют *периодической с периодом*  $T$ .

Отметим, что если  $T$  — период функции  $f$ , то каждое число вида  $nT$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \neq 0$ , также является периодом этой функции.

Примерами периодических функций могут служить тригонометрические функции. При этом число  $2\pi$  — наименьший положительный период функций  $\sin x$ ,  $\cos x$ , а  $\pi$  — наименьший положительный период функций  $\operatorname{tg} x$  и  $\operatorname{ctg} x$ .

**Пример 10.** Доказать, что функция  $f(x) = \sin \alpha x$ , где  $\alpha > 0$ , является периодической, и найти ее наименьший положительный период.  $\Delta$  Предположим, что  $f$  — периодическая с положительным периодом  $T$  функция. Тогда для любых  $x \in \mathbb{R}$  должно выполняться равенство

$$\sin \alpha x = \sin \alpha(x + T), \quad (7)$$

откуда при  $x = 0$  получаем

$$\sin \alpha T = 0, \quad T = \frac{k\pi}{\alpha}, \quad \text{где } k \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, положительными периодами функции  $\sin \alpha x$  могут быть только числа  $k\pi/\alpha$ , где  $k \in \mathbb{N}$ . Заметим, что число  $\pi/\alpha$  не является периодом функции  $\sin \alpha x$ , так как в противном случае при всех  $x \in \mathbb{R}$  выполнялось бы равенство  $\sin \alpha x = \sin \alpha(x + \pi/\alpha) = \sin(\pi + \alpha x) = -\sin \alpha x$ , т. е.  $\sin \alpha x = 0$ , что невозможно.

Число  $2\pi/\alpha$  — период функции  $\sin \alpha x$ , так как при любых  $x \in \mathbb{R}$  справедливо равенство  $\sin \alpha x = \sin \alpha(x + 2\pi/\alpha)$ .

Таким образом,  $2\pi/\alpha$  — наименьший положительный период функции  $\sin \alpha x$ . ▲

**9. Обратная функция.** Пусть задана числовая функция  $y = f(x)$ ,  $x \in D(f)$ . Тогда каждому числу  $x_0 \in D(f)$  соответствует единственное число  $y_0 = f(x_0) \in E(f)$ . Нередко приходится по заданному значению функции  $y_0$  находить соответствующее значение аргумента,

т. е. решать относительно  $x$  уравнение

$$f(x) = y_0, \quad y_0 \in E(f). \quad (8)$$

Это уравнение может иметь не одно, а несколько и даже бесконечно много решений. Решениями уравнения (8) являются абсциссы всех точек, в которых прямая  $y = y_0$  пересекает график функции  $y = f(x)$ .

Например, если  $f(x) = x^2$ , то уравнение

$$x^2 = y_0, \quad y_0 > 0,$$

имеет два решения:  $x_0 = \sqrt{y_0}$  и  $\tilde{x}_0 = -\sqrt{y_0}$ . Если  $f(x) = \sin x$ , то уравнение

$$\sin x = y_0, \quad |y_0| \leq 1,$$

имеет бесконечно много решений вида  $x_n = (-1)^n x_0 + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $x_0$  — одно из решений этого уравнения.

Однако существуют функции, для которых уравнение (8) при каждом  $y_0 \in E(f)$  однозначно разрешимо, т. е. имеет единственное решение  $x_0 \in D(f)$ . Этим свойством обладают, например, следующие функции:

- а)  $f(x) = 3x + 4$ ,  $D(f) = \mathbb{R}$ ;
- б)  $f(x) = x^3$ ,  $D(f) = \mathbb{R}$ ;
- в)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $D(f) = \{x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$ .

Если функция  $f$  такова, что каждое значение  $y_0 \in E(f)$  она принимает только при одном значении  $x_0 \in D(f)$ , то эту функцию называют *обратимой*. Для такой функции уравнение

$$f(x) = y$$

можно при любом  $y \in E(f)$  однозначно разрешить относительно  $x$ , т. е. каждому  $y \in E(f)$  соответствует единственное значение  $x \in D(f)$ . Это соответствие определяет функцию, которую называют *обратной к функции  $f$*  и обозначают символом  $f^{-1}$ .

Заметим, что прямая  $y = y_0$  для каждого  $y_0 \in E(f)$  пересекает график обратимой функции  $y = f(x)$  в единственной точке  $(x_0, y_0)$ , где  $f(x_0) = y_0$ .

Обозначая, как обычно, аргумент обратной функции буквой  $x$ , а ее значения — буквой  $y$ , обратную для  $f$  функцию записывают в виде

$$y = f^{-1}(x), \quad x \in D(f^{-1}).$$

Для упрощения записи вместо символа  $f^{-1}$  будем употреблять букву  $g$ .

Отметим следующие свойства, которые показывают, как связаны данная функция и обратная к ней:

1) если  $g$  — функция, обратная к  $f$ , то и  $f$  — функция, обратная к  $g$ ; при этом

$$D(g) = E(f), \quad E(g) = D(f),$$

т. е. область определения функции  $g$  совпадает с множеством значений функции  $f$  и наоборот;

2) для любого  $x \in D(f)$  справедливо равенство

$$g(f(x)) = x,$$

а для любого  $x \in E(f)$  справедливо равенство

$$f(g(x)) = x;$$

3) график функции  $y = g(x)$  симметричен графику функции  $y = f(x)$  относительно прямой  $y = x$ ;

4) если нечетная функция обратима, то обратная к ней функция также является нечетной;

5) если  $f$  — строго возрастающая (строго убывающая) функция, то она обратима, причем обратная к ней функция  $g$  также является строго возрастающей (строго убывающей).

Свойства 1) и 2) следуют непосредственно из определения обратной функции, 4) и 5) — из определений обратной и соответственно нечетной и строго монотонной функции.

Рассмотрим свойство 3). Пусть точка  $(x_0, y_0)$  принадлежит графику функции  $y = f(x)$ , т. е.  $y_0 = f(x_0)$ . Тогда  $x_0 = g(y_0)$ , т. е. точка  $(y_0, x_0)$  принадлежит графику обратной функции  $g$ . Так как точки  $(x_0, y_0)$  и  $(y_0, x_0)$  симметричны относительно прямой  $y = x$  (рис. 9.9), то гра-

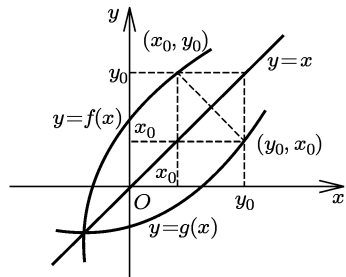


Рис. 9.9

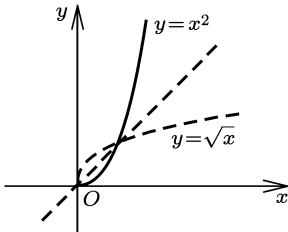


Рис. 9.10

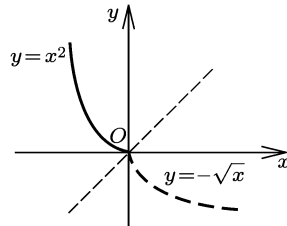


Рис. 9.11

фик функции  $y = g(x)$  симметричен графику функции  $y = f(x)$  относительно этой прямой.

На рис. 9.10 изображены графики взаимно обратных функций  $y = x^2$ ,  $x \geq 0$ , и  $y = \sqrt{x}$ , а на рис. 9.11 — графики взаимно обратных функций  $y = x^2$ ,  $x \leq 0$ , и  $y = -\sqrt{x}$ .

**10. Неявные функции. Параметрически заданные функции.** Пусть  $E$  — множество точек  $M(x, y)$  плоскости  $Oxy$ . Если каждой точке  $M \in E$  поставлено в соответствие по некоторому правилу

(закону) число  $z$ , то говорят, что на множестве  $E$  задана *числовая функция от переменных  $x$  и  $y$* , и пишут  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in E$ .

Например, объем конуса  $v$  есть функция от переменных  $r$  и  $h$ , где  $r$  — радиус основания,  $h$  — высота конуса. Эта функция задается формулой  $v = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ .

Аналогично вводится понятие функции от трех и большего числа переменных.

Пусть функция  $F(x, y)$  определена на некотором множестве точек плоскости. Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 0. \quad (9)$$

Графиком уравнения (9) в прямоугольной системе координат называют множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют этому уравнению. Например, графиком уравнения

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (10)$$

является единичная окружность (рис. 9.12).

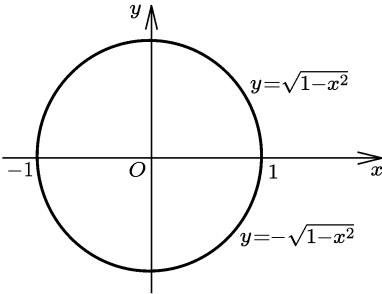


Рис. 9.12

Естественной является постановка вопроса о том, можно ли уравнение (9) однозначно разрешить относительно  $y$ , т. е. найти единственную функцию  $y = f(x)$  такую, что  $F(x, f(x)) = 0$ , где  $x$  принимает значения из некоторого промежутка.

Обратимся к уравнению (10). Если  $|x| > 1$ , то не существует значений  $y$  таких, что пара чисел  $(x, y)$  удовлетворяет уравнению (10). Если  $|x| \leq 1$ , то, решая это уравнение относительно  $y$ , получаем

$$y = \pm \sqrt{1 - x^2}. \quad (11)$$

Таким образом, если  $|x| < 1$ , то из уравнения (10)  $y$  выражается через  $x$  неоднозначно: каждому значению  $x$  соответствуют два различных значения  $y$ , а именно  $y_1 = -\sqrt{1 - x^2}$  и  $y_2 = \sqrt{1 - x^2}$  ( $y_1 = y_2$  при  $x = -1$  и  $x = 1$ ).

Отсюда следует, что всякая функция  $y = f(x)$ , которая в точке  $x \in [-1, 1]$  принимает либо значение  $y_1$ , либо значение  $y_2$ , удовлетворяет уравнению (10), т. е.

$$x^2 + f^2(x) - 1 \equiv 0, \quad x \in [-1, 1].$$

Например, функция  $y = f(x)$ , принимающая значение  $y_1$  при  $x \in [-1, \alpha]$ , где  $-1 < \alpha < 1$ , и значение  $y_2$  при  $x \in [\alpha, 1]$ , удовлетворяет уравнению (10). Меняя  $\alpha$ , можно получить бесконечное множество функций, удовлетворяющих на отрезке  $[-1, 1]$  уравнению (10).

Будем теперь рассматривать уравнение (10) в прямоугольнике

$$K_1 = \{(x, y): -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

В этом случае существует единственная функция  $y = y_1 = \sqrt{1 - x^2}$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ , удовлетворяющая уравнению (10) и такая, что  $y \in [0, 1]$ . Эту функцию называют неявной функцией, определяемой уравнением (10) в прямоугольнике  $K_1$ .

Аналогично в прямоугольнике  $K_1 = \{(x, y): -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 0\}$  неявная функция, определяемая уравнением (10), задается формулой  $y = y_2 = -\sqrt{1 - x^2}$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ .

Вернемся к уравнению (9). Пусть прямоугольник  $K = \{(x, y): |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$  содержится в области определения функции  $F(x, y)$ , и пусть  $F(x_0, y_0) = 0$ . Если на отрезке  $\Delta = [x_0 - a, x_0 + a]$  существует единственная функция  $y = f(x)$  такая, что  $f(x) \in [y_0 - b, y_0 + b]$  и

$$F(x, f(x)) \equiv 0, \quad x \in \Delta,$$

то говорят, что уравнение (9) определяет в прямоугольнике  $K$  переменную  $y$  как неявную функцию переменной  $x$ .

Достаточные условия существования неявной функции и другие вопросы, связанные с неявными функциями, рассматриваются в § 28.

Функция одной переменной может быть задана не только в явном виде  $y = f(x)$  или неявно уравнением  $F(x, y) = 0$ , но также параметрически. Этот способ задания состоит в следующем.

Пусть функции  $x = \varphi(t)$  и  $\psi(t)$  определены на некотором множестве  $E$ , и пусть  $E_1$  — множество значений функции  $\varphi$ . Предположим, что функция  $\varphi$  обратима на множестве  $E$ , и пусть  $t = \varphi^{-1}(x)$  — обратная к ней функция. Тогда на множестве  $E_1$  определена сложная функция  $y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = f(x)$ , которую называют *параметрически заданной* формулами (уравнениями)  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ .

Например, уравнения  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ , где  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , определяют параметрически заданную функцию  $y = f(x)$ . В данном случае  $t = \arccos x$ ,  $y = \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$ .

## § 10. Предел функции

**1. Понятие предела.** Важную роль в курсе математического анализа играет понятие предела, связанное с поведением функции в окрестности данной точки. Напомним, что  $\delta$ -окрестностью точки  $a$  называется интервал длины  $2\delta$  с центром в точке  $a$ , т. е. множество

$$U_\delta(a) = \{x: |x - a| < \delta\} = \{x: a - \delta < x < a + \delta\}.$$

Если из этого интервала удалить точку  $a$ , то получим множество, которое называют *проколотой  $\delta$ -окрестностью точки  $a$*  и обозначают



ют  $\dot{U}_\delta(a)$ , т. е.

$$\dot{U}_\delta(a) = \{x: |x - a| < \delta, x \neq a\} = \{x: 0 < |x - a| < \delta\}.$$

Предваряя определение предела функции, рассмотрим два примера.

**Пример 1.** Исследуем функцию  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  в окрестности точки  $x = 1$ .

$\Delta$  Функция  $f$  определена при всех  $x \in \mathbb{R}$ , кроме  $x = 1$ , причем  $f(x) = x + 1$  при  $x \neq 1$ . График этой функции изображен на рис. 10.1.

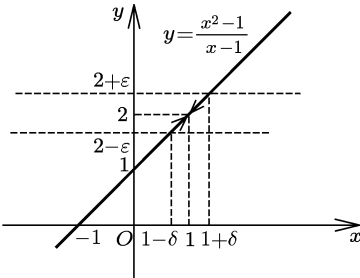


Рис. 10.1

$\in \dot{U}_\delta(a)$  соответствующие точки графика функции  $y = f(x)$  лежали в горизонтальной полосе, ограниченной прямыми  $y = 2 - \varepsilon$  и  $y = 2 + \varepsilon$  (см. рис. 10.1), т. е. чтобы выполнялось условие  $f(x) \in U_\varepsilon(2)$ . В данном примере можно взять  $\delta = \varepsilon$ .

В этом случае говорят, что функция  $f(x)$  стремится к двум при  $x$ , стремящемся к единице, а число 2 называют пределом функции  $f(x)$

при  $x \rightarrow 1$  и пишут  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$  или  $f(x) \rightarrow 2$  при  $x \rightarrow 1$ .  $\blacktriangle$

**Пример 2.** Исследуем функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{если } x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ 1 - x^2, & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

в окрестности точки  $x = 0$ .

$\Delta$  Из графика этой функции (рис. 10.2) видно, что для любого  $\varepsilon > 0$  можно найти  $\delta > 0$  такое, что для всех  $x \in \dot{U}_\delta(0)$  выполняется условие  $f(x) \in U_\varepsilon(1)$ . В самом деле, прямые  $y = 1 + \varepsilon$  и  $y = 1 - \varepsilon$  пересекают график функции  $y = f(x)$  в точках, абс-

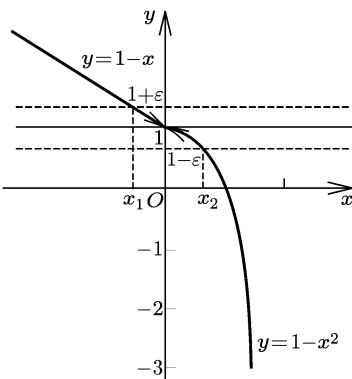


Рис. 10.2

циссы которых равны  $x_1 = -\varepsilon$ ,  $x_2 = \sqrt{\varepsilon}$ . Пусть  $\delta$  — наименьшее из чисел  $|x_1|$  и  $x_2$ , т. е.  $\delta = \min(\varepsilon, \sqrt{\varepsilon})$ . Тогда если  $|x| < \delta$  и  $x \neq 0$ , то

$|f(x) - 1| < \varepsilon$ , т. е. для всех  $x \in \dot{U}_\delta(0)$  выполняется условие  $f(x) \in U_\varepsilon(1)$ . В этом случае говорят, что функция  $f(x)$  стремится к единице при  $x$ , стремящемся к нулю, и пишут

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1. \quad \blacktriangle$$

В первом примере функция не определена в точке  $x = 1$ , а во втором функция определена в точке  $x = 0$ , но значение функции в точке  $x = 0$  не совпадает с ее пределом при  $x \rightarrow 0$ .

## 2. Два определения предела функции и их эквивалентность.

а) *Определение предела по Коши.* Число  $A$  называется *пределом функции  $f(x)$  в точке  $a$* , если эта функция определена в некоторой окрестности точки  $a$ , за исключением, быть может, самой точки  $a$ , и для каждого  $\varepsilon > 0$  найдется число  $\delta > 0$  такое, что для всех  $x$ , удовлетворяющих условию  $|x - a| < \delta$ ,  $x \neq a$ , выполняется неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ . В этом случае пишут  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  или  $f(x) \rightarrow A$  при  $x \rightarrow a$ .

С помощью логических символов это определение можно записать так:

$$\left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \right\} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x: 0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$

или, используя понятие окрестности, в виде

$$\left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \right\} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Таким образом, число  $A$  есть предел функции  $f(x)$  в точке  $a$ , если для любой  $\varepsilon$ -окрестности числа  $A$  можно найти такую проколотую  $\delta$ -окрестность точки  $a$ , что для всех  $x$ , принадлежащих этой  $\delta$ -окрестности, соответствующие значения функции содержатся в  $\varepsilon$ -окрестности числа  $A$ .

**Замечание 1.** В определении предела функции в точке  $a$  предполагается, что  $x \neq a$ . Это требование связано с тем, что точка  $a$  может не принадлежать области определения функции. Отсутствие этого требования сделало бы невозможным использование предела для определения производной, так как производная функции  $f(x)$  в точке  $a$  — это предел функции

$$F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

которая не определена в точке  $a$ .

Отметим еще, что число  $\delta$ , фигурирующее в определении предела, зависит, вообще говоря, от  $\varepsilon$ , т. е.  $\delta = \delta(\varepsilon)$ .

б) *Определение предела по Гейне.* Число  $A$  называется *пределом функции  $f(x)$  в точке  $a$* , если эта функция определена в некоторой проколотой окрестности точки  $a$ , т. е.  $\exists \delta_0 > 0: \dot{U}_{\delta_0}(a) \subset D(f)$ , и для любой последовательности  $\{x_n\}$ , сходящейся к  $a$  и такой, что  $x_n \in \dot{U}_{\delta_0}(a)$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ , соответствующая последовательность значений функции  $\{f(x_n)\}$  сходится к числу  $A$ .

Пример 3. Пользуясь определением предела по Гейне, доказать, что функция

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

не имеет предела в точке  $x = 0$ .

$\Delta$  Достаточно показать, что существуют последовательности  $\{x_n\}$  и  $\{\tilde{x}_n\}$  с отличными от нуля членами, сходящиеся к нулю и такие, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_n)$ . Возьмем  $x_n = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)^{-1}$ ,  $\tilde{x}_n = (\pi n)^{-1}$ , тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}_n = 0$ ,  $f(x_n) = 1$  и  $f(\tilde{x}_n) = 0$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ , и поэтому  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1$ , а  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_n) = 0$ . Следовательно, функция  $\sin \frac{1}{x}$  не имеет предела в точке  $x = 0$ .  $\blacktriangle$

Замечание 2. Если функция  $f$  определена в проколотой  $\delta_0$ -окрестности точки  $a$  и существуют число  $A$  и последовательность  $\{x_n\}$  такие, что  $x_n \in \dot{U}_{\delta_0}(a)$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ , то число  $A$  называют *частичным пределом функции  $f$  в точке  $a$* .

Так, например, для функции  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  каждое число  $A \in [-1, 1]$  является ее частичным пределом. В самом деле, последовательность  $\{x_n\}$ , где  $x_n = (\arcsin A + 2\pi n)^{-1}$ , образованная из корней уравнения  $\sin \frac{1}{x} = A$  (рис. 10.3), такова, что  $x_n \neq 0$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ .

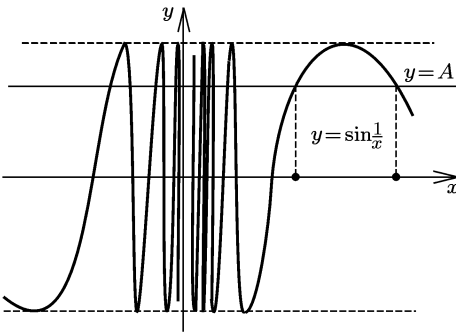


Рис. 10.3

в) *Эквивалентность двух определений предела.*

Теорема 1. *Определения предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.*

$\circ$  В определениях предела функции  $f(x)$  по Коши и по Гейне предполагается, что

функция  $f$  определена в некоторой проколотой окрестности точки  $a$ , т. е. существует число  $\delta_0 > 0$  такое, что  $\dot{U}_{\delta_0} \in D(f)$ .

а) Пусть число  $A$  есть предел функции  $f$  в точке  $a$  по Коши; тогда  $\exists \delta_0 > 0$ :  $\dot{U}_{\delta_0} \subset D(f)$  и

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \in (0, \delta_0]: \quad \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A). \quad (1)$$

Рассмотрим произвольную последовательность  $\{x_n\}$ , сходящуюся к числу  $a$  и такую, что  $x_n \in \dot{U}_{\delta_0}(a)$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Согласно определению предела последовательности для найденного в (1) числа  $\delta =$

$= \delta(\varepsilon) > 0$  можно указать номер  $n_\delta$  такой, что  $\forall n \geq n_\delta \rightarrow x_n \in \dot{U}_\delta(a)$ , откуда в силу условия (1) следует, что  $f(x_n) \in U_\varepsilon(A)$ . Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon: \forall n \geq N_\varepsilon \rightarrow f(x_n) \in U_\varepsilon(A), \quad (2)$$

где  $N_\varepsilon = n_{\delta(\varepsilon)}$ , причем условие (2) выполняется для любой последовательности  $\{x_n\}$  такой, что  $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = a$  и  $x_n \in \dot{U}_{\delta_0}(a) \subset D(f)$ . Следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ , т. е. число  $A$  — предел функции  $f(x)$  в точке  $a$  по Гейне.

б) Докажем, что если число  $A$  есть предел функции  $f(x)$  в точке  $a$  по Гейне, то это же число является пределом функции  $f$  по Коши, т. е. выполняется условие (1). Допустим, что это неверно. Тогда

$$\exists \varepsilon_0 > 0: \forall \delta \in (0, \delta_0] \quad \exists x(\delta) \in \dot{U}_\delta(a): |f(x(\delta)) - A| \geq \varepsilon_0. \quad (3)$$

Согласно (3) в качестве  $\delta$  можно взять любое число из полуинтервала  $(0, \delta_0]$ . Возьмем  $\delta = \delta_0/n$ , где  $n \in \mathbb{N}$ , и обозначим  $x_n = x(\delta_0/n)$ . Тогда в силу (3) для любого  $n \in \mathbb{N}$  выполняются неравенства

$$0 < |x_n - a| < \delta_0/n, \quad (4)$$

$$|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0. \quad (5)$$

Из (4) следует, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  и  $x_n \in \dot{U}_{\delta_0}(a)$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ , а из (5) заключаем, что число  $A$  не может быть пределом последовательности  $\{f(x_n)\}$ . Следовательно, число  $A$  не является пределом функции  $f$  в точке  $a$  по Гейне. Полученное противоречие доказывает, что должно выполняться утверждение (1). ●

Упражнение 1. Доказать, что если функция  $f(x)$  имеет предел в точке  $a$ , то этот предел единственный.

Замечание 3. Пусть  $a$  — предельная точка числового множества  $E$ , т. е. такая точка, в любой окрестности которой содержится по крайней мере одна точка множества  $E$ , отличная от  $a$ . Тогда число  $A$  называют пределом по Коши функции  $f(x)$  в точке  $a$  по множеству  $E$  и обозначают

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in E} f(x) = A, \text{ если}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \cap E \rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Предполагается, что  $\dot{U}_{\delta_0}(a) \cap E \subset D(f)$  для некоторого  $\delta_0 > 0$ . Аналогично формулируется определение предела по Гейне по множеству  $E$ . Например, функция Дирихле  $f$ , равная единице для любого  $x \in \mathbb{Q}$  и равная нулю для любого  $x \in \mathbb{J}$ , имеет предел по множеству  $\mathbb{Q}$  и по множеству  $\mathbb{J}$ , причем  $\lim_{x \rightarrow a, x \in \mathbb{Q}} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow a, x \in \mathbb{J}} f(x) = 0$  для любой точки  $a \in \mathbb{R}$ .

### 3. Различные типы пределов.

а) *Односторонние конечные пределы.* Число  $A$  называют пределом слева функции  $f(x)$  в точке  $a$  и обозначают  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$  или  $f(a-0)$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x \in (a - \delta, a) \rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Аналогично число  $A_2$  называют *пределом справа функции  $f(x)$*  в точке  $a$  и обозначают  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$  или  $f(a+0)$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x \in (a, a + \delta) \rightarrow |f(x) - A_2| < \varepsilon.$$

Числа  $A_1$  и  $A_2$  характеризуют поведение функции  $f$  соответственно в левой и правой полукрестности точки  $a$ , поэтому пределы слева и справа называют *односторонними пределами*. Если  $a = 0$ , то предел слева функции  $f(x)$  обозначают  $\lim_{x \rightarrow -0} f(x)$  или  $f(-0)$ , а предел справа обозначают  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$  или  $f(+0)$ .

Например, для функции  $f(x) = \text{sign } x$ , где

$$\text{sign } x = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

график которой изображен на рис. 10.4,  $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = f(-0) = -1$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = f(+0) = 1.$$

Отметим еще, что если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \rightarrow f(x) \in [A, A + \varepsilon),$$

т. е. значения функции лежат в правой  $\varepsilon$ -полукрестности числа  $A$ , то

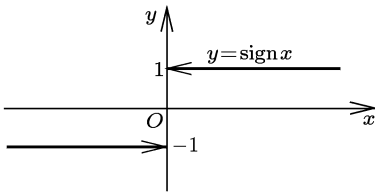


Рис. 10.4

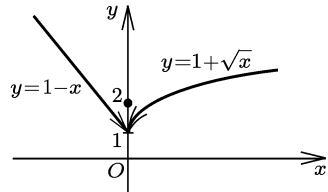


Рис. 10.5

пишут  $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = A + 0$ . В частности, если  $A = 0$ , то пишут  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +0$ .

Аналогично

$$\{\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A - 0\} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \rightarrow f(x) \in (A - \varepsilon, A].$$

Например, для функции

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{если } x < 0, \\ 2, & \text{если } x = 0, \\ 1 + \sqrt{x}, & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

график которой изображен на рис. 10.5,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 + 0$ .

Аналогичный смысл имеют записи вида

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A + 0, \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A - 0.$$

Например,

$$\begin{aligned} \{ \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A + 0 \} &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x \in (a - \delta, a) \rightarrow f(x) \in [A, A + \varepsilon). \end{aligned}$$

Упражнение 2. Записать с помощью логических символов утверждение  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A - 0$ .

Упражнение 3. Доказать, что функция  $f(x)$  имеет предел в точке  $a$  тогда и только тогда, когда в этой точке существуют односторонние пределы функции  $f$  и выполняется равенство  $f(a - 0) = f(a + 0)$ .

б) *Бесконечные пределы в конечной точке.* Говорят, что функция  $f(x)$ , определенная в некоторой проколотой окрестности точки  $a$ , имеет в этой точке *бесконечный предел*, и пишут  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \rightarrow |f(x)| > \varepsilon. \quad (6)$$

В этом случае функцию  $f(x)$  называют *бесконечно большой при  $x \rightarrow a$* .

Согласно условию (6) график функции  $y = f(x)$  для всех  $x \in \dot{U}_\delta(a)$  лежит вне горизонтальной полосы  $|y| < \varepsilon$ . Обозначим

$$U_\varepsilon(\infty) = \{y: |y| > \varepsilon\} = (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, +\infty)$$

и назовем это множество  $\varepsilon$ -*окрестностью бесконечности*. Тогда запись  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  означает, что для любой  $\varepsilon$ -окрестности бесконечности  $U_\varepsilon(\infty)$  найдется такая проколотая  $\delta$ -окрестность точки  $a$ , что для всех  $x \in \dot{U}_\delta(a)$  выполняется условие  $f(x) \in U_\varepsilon(\infty)$ .

Например, если  $f(x) = 1/x$ , то  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$ , так как условие (6) выполняется при  $\delta = 1/\varepsilon$  (рис. 10.6).

Аналогично говорят, что функция  $f(x)$ , определенная в некоторой проколотой окрестности точки  $a$ , имеет в этой точке *предел, равный  $+\infty$* , и пишут  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \rightarrow f(x) > \varepsilon,$$

т. е.  $f(x) \in U_\varepsilon(+\infty)$ , где множество  $U_\varepsilon(+\infty)$  называют  $\varepsilon$ -*окрестностью символа  $+\infty$* .

Если  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \rightarrow f(x) < -\varepsilon,$

т. е.  $f(x) \in U_\varepsilon(-\infty)$ , где  $U_\varepsilon(-\infty) = (-\infty, -\varepsilon)$ , то говорят, что функ-

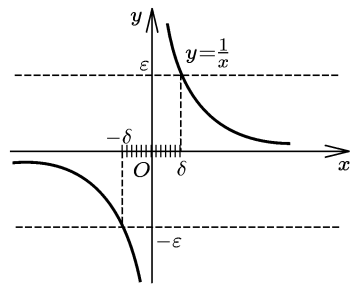


Рис. 10.6

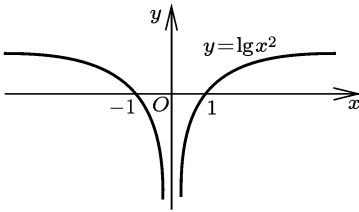


Рис. 10.7

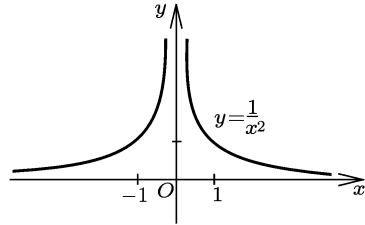


Рис. 10.8

ция  $f$  имеет в точке  $a$  *предел, равный*  $-\infty$ , и пишут  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ , а множество  $U_\varepsilon(-\infty)$  называют  $\varepsilon$ -*окрестностью символа*  $-\infty$ .

Например, если  $f(x) = \lg x^2$  (рис. 10.7), то  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ , а если  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  (рис. 10.8), то  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ .

Упражнение 4. Сформулировать с помощью логических символов утверждения:

а)  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$ .

в) *Предел в бесконечности*. Если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x \in U_\delta(+\infty) \rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A),$$

то говорят, что число  $A$  есть *предел функции  $f(x)$  при  $x$ , стремящемся к плюс бесконечности*, и пишут  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ .

Например, если  $f(x) = \frac{3-2x}{x+1}$  (см. рис. 9.4), то  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$ . В самом деле,  $f(x) = -2 + \frac{5}{x+1}$ , и если  $x > 0$ , то  $x+1 > x > 0$ . Поэтому  $\frac{5}{x+1} < \frac{5}{x}$ , откуда следует, что неравенство  $|f(x) + 2| < \frac{5}{x} < \varepsilon$  для любого  $\varepsilon > 0$  выполняется при любом  $x > \delta$ , где  $\delta = \frac{5}{\varepsilon}$ , т. е. при любом  $x \in U_\delta(+\infty)$ .

Если  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x \in U_\delta(-\infty) \rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$ , т. е. неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$  выполняется для всех  $x \in (-\infty, -\delta)$ , то говорят, что число  $A$  есть *предел функции  $f(x)$  при  $x$ , стремящемся к минус бесконечности*, и пишут  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ . Например,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-2x}{x+1} = -2$  (см. рис. 9.4).

Аналогично, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x \in U_\delta(\infty) \rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A),$$

то говорят, что число  $A$  есть *предел функции  $f(x)$  при  $x$ , стремящемся к бесконечности*, и пишут  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ . Например, если  $f(x) = \frac{3-2x}{x+1}$ , то  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -2$ .

Точно так же вводится понятие бесконечного предела в бесконечности. Например, запись  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  означает, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in U_\delta(+\infty) \rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(-\infty)$ . Аналогично определяются бесконечные пределы при  $x \rightarrow \infty$  и  $x \rightarrow -\infty$ .

Упражнение 5. Сформулировать с помощью логических символов и окрестностей (или неравенств) следующие утверждения:

а)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ .

**4. Свойства пределов функций.** В рассматриваемых ниже свойствах речь идет о конечном пределе функции в заданной точке. Под точкой понимается либо число  $a$ , либо один из символов  $a - 0$ ,  $a + 0$ ,  $-\infty$ ,  $+\infty$ ,  $\infty$ . Предполагается, что функция определена в некоторой окрестности или полукрестности точки  $a$ , не содержащей саму точку  $a$ . Для определенности будем формулировать и доказывать свойства пределов, предполагая, что  $a$  — число, а функция определена в проколоте окрестности точки  $a$ .

а) *Локальные свойства функции, имеющей предел.* Покажем, что функция, имеющая конечный предел в заданной точке, обладает некоторыми *локальными* свойствами, т. е. свойствами, которые справедливы в окрестности этой точки.

Свойство 1. *Если функция  $f(x)$  имеет предел в точке  $a$ , то существует такая проколота окрестность точки  $a$ , в которой эта функция ограничена.*

○ Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ . В силу определения предела по заданному числу  $\varepsilon = 1$  можно найти число  $\delta > 0$  такое, что для всех  $x \in \dot{U}_\delta(a)$  выполняется неравенство  $|f(x) - A| < 1$  или  $A - 1 < f(x) < A + 1$ . Это означает (см. § 9, п. 6), что функция  $f$  ограничена на множестве  $\dot{U}_\delta(a)$ . ●

Свойство 2. *Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , причем  $A \neq 0$ , то найдется такая проколота окрестность точки  $a$ , в которой значения функции  $f$  имеют тот же знак, что и число  $A$ .*

○ Согласно определению предела по заданному числу  $\varepsilon = \frac{|A|}{2} > 0$  можно найти такое число  $\delta > 0$ , что для всех  $x \in \dot{U}_\delta(a)$  выполняется неравенство  $|f(x) - A| < \frac{|A|}{2}$ , или

$$A - \frac{|A|}{2} < f(x) < A + \frac{|A|}{2}. \quad (7)$$

Если  $A > 0$ , то из левого неравенства (7) следует, что

$$f(x) > \frac{A}{2} > 0 \quad \text{для } x \in \dot{U}_\delta(a).$$

Если  $A < 0$ , то из правого неравенства (7) следует, что

$$f(x) < \frac{A}{2} < 0 \quad \text{для } x \in \dot{U}_\delta(a). \quad \bullet$$



Доказанное свойство называют *свойством сохранения знака предела*.

Свойство 3. Если  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ , причем  $B \neq 0$ , то существует число  $\delta > 0$  такое, что функция  $\frac{1}{g(x)}$  ограничена на множестве  $\dot{U}_\delta(a)$ .

○ В силу определения предела по заданному числу  $\varepsilon = \frac{|B|}{2}$  можно найти число  $\delta > 0$  такое, что для всех  $x \in \dot{U}_\delta(a)$  выполняется неравенство

$$|g(x) - B| < \frac{|B|}{2}. \quad (8)$$

Из неравенства (8) и известного неравенства

$$|B| - |g(x)| \leq |g(x) - B|$$

следует, что  $|B| - |g(x)| < \frac{|B|}{2}$ , откуда  $|g(x)| > \frac{|B|}{2}$ , и поэтому  $\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|B|}$  для  $x \in \dot{U}_\delta(a)$ , т. е. функция  $\frac{1}{g(x)}$  ограничена на множестве  $\dot{U}_\delta(a)$ . ●

б) *Свойства пределов, связанные с неравенствами.*

Свойство 1. Если существует число  $\delta > 0$  такое, что для всех  $x \in \dot{U}_\delta(a)$  выполняются неравенства

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x), \quad (9)$$

и если

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A, \quad (10)$$

то существует  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ .

○ Воспользуемся определением предела функции по Гейне. Пусть  $\{x_n\}$  — произвольная последовательность такая, что  $x_n \in \dot{U}_\delta(a)$  для  $n \in \mathbb{N}$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Тогда в силу условия (10)  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(x_n) = A$ .

Так как, согласно условию (9), для всех  $n \in \mathbb{N}$  выполняется неравенство

$$g(x_n) \leq f(x_n) \leq h(x_n),$$

то в силу свойств пределов последовательностей (§ 4, теорема 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ . Следовательно, существует  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ . ●

Свойство 2. Если существует число  $\delta > 0$  такое, что для всех  $x \in \dot{U}_\delta(a)$  справедливо неравенство  $f(x) \leq g(x)$ , и если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ , то  $A \leq B$ .

○ Для доказательства этого свойства достаточно воспользоваться определением предела функции по Гейне и соответствующими свойствами пределов последовательностей (§ 4, теорема 4, следствие 2). ●

**Замечание 4.** Если исходное неравенство является строгим, т. е.  $f(x) < g(x)$ , то в случае существования пределов функций  $f$  и  $g$  в точке  $a$  можно утверждать только, что  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ , т. е. знак строгого неравенства между функциями при переходе к пределу, вообще говоря, не сохраняется.

**Упражнение 6.** Доказать, что если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B,$$

причем  $A < B$ , то существует число  $\delta > 0$  такое, что для всех  $x \in \dot{U}_\delta(a)$  выполняется неравенство  $f(x) < g(x)$ .

в) *Бесконечно малые функции.* Если  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ , то функцию  $\alpha(x)$  называют *бесконечно малой* при  $x \rightarrow a$ .

Бесконечно малые функции обладают следующими свойствами:

1) сумма конечного числа бесконечно малых при  $x \rightarrow a$  функций есть бесконечно малая функция при  $x \rightarrow a$ ;

2) произведение бесконечно малой при  $x \rightarrow a$  функции на ограниченную в некоторой проколотой окрестности точки  $a$  функцию есть бесконечно малая при  $x \rightarrow a$  функция.

Эти свойства легко доказать, используя определения бесконечно малой и ограниченной функции, либо с помощью определения предела функции по Гейне и свойств бесконечно малых последовательностей. Из свойства 2) следует, что произведение конечного числа бесконечно малых при  $x \rightarrow a$  функций есть бесконечно малая при  $x \rightarrow a$  функция.

**Замечание 5.** Из определения предела функции и определения бесконечно малой функции следует, что число  $A$  является пределом функции  $f(x)$  в точке  $a$  тогда и только тогда, когда эта функция представляется в виде

$$f(x) = A + a(x),$$

где  $a(x)$  — бесконечно малая при  $x \rightarrow a$  функция.

**Упражнение 7.** Показать, что функция  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$  является бесконечно малой при  $x \rightarrow 0$ .

**Упражнение 8.** Пусть существует число  $\delta > 0$  такое, что  $\alpha(x) \neq 0$  для всех  $x \in \dot{U}_\delta(a)$ . Доказать, что функция  $a(x)$  является бесконечно малой при  $x \rightarrow a$  тогда и только тогда, когда функция  $\frac{1}{\alpha(x)}$  является бесконечно большой при  $x \rightarrow a$ , т. е.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\alpha(x)} = \infty.$$

г) *Свойства пределов, связанные с арифметическими операциями.*

Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют конечные пределы в точке  $a$ , причем  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ , то:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B$ ;
- 2)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = AB$ ;
- 3)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$  при условии, что  $B \neq 0$ .

○ Для доказательства этих свойств достаточно воспользоваться определением предела функции по Гейне и свойствами пределов последовательностей (§ 5, п. 3). Другой способ доказательства — использование замечания 5 и свойств бесконечно малых функций. ●

Отметим частный случай утверждения (11):

$$\lim_{x \rightarrow a} (Cf(x)) = C \lim_{x \rightarrow a} f(x),$$

т. е. постоянный множитель можно вынести за знак предела.

**5. Пределы монотонных функций.** Понятие монотонной функции было введено в § 9 (п. 7). Докажем теорему о существовании односторонних пределов у монотонной функции.

**Теорема 2.** Если функция  $f$  определена и является монотонной на отрезке  $[a, b]$ , то в каждой точке  $x_0 \in (a, b)$  эта функция имеет конечные пределы слева и справа, а в точках  $a$  и  $b$  — соответственно правый и левый пределы.

○ Пусть, например, функция  $f$  является возрастающей на отрезке  $[a, b]$ . Зафиксируем точку  $x_0 \in (a, b)$ . Тогда

$$\forall x \in [a, x_0) \rightarrow f(x) \leq f(x_0). \quad (12)$$

В силу условия (12) множество значений, которые функция  $f$  принимает на промежутке  $[a, x_0)$ , ограничено сверху, и по теореме о точной верхней грани существует

$$\sup_{a \leq x < x_0} f(x) = M, \quad \text{где } M \leq f(x_0).$$

Согласно определению точной верхней грани (§ 2) выполняются условия:

$$\text{а) } \forall x \in [a, x_0) \rightarrow f(x) \leq M; \quad (13)$$

$$\text{б) } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in [a, x_0): M - \varepsilon < f(x_\varepsilon). \quad (14)$$

Обозначим  $\delta = x_0 - x_\varepsilon$ , тогда  $\delta > 0$ , так как  $x_\varepsilon < x_0$ . Если  $x \in (x_\varepsilon, x_0)$ , т. е.  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ , то

$$f(x_\varepsilon) \leq f(x), \quad (15)$$

так как  $f$  — возрастающая функция. Из условий (13)–(15) следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \rightarrow f(x) \in (M - \varepsilon, M].$$

Согласно определению предела слева это означает, что существует

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = M.$$

Итак,

$$f(x_0 - 0) = \sup_{a \leq x < x_0} f(x).$$

Аналогично можно доказать, что функция  $f$  имеет в точке  $x_0 \in [a, b)$  предел справа, причем

$$f(x_0 + 0) = \inf_{x_0 < x \leq b} f(x). \quad \bullet$$

Следствие. Если функция  $f$  определена и возрастает на отрезке  $[a, b]$ ,  $x_0 \in (a, b)$ , то

$$f(x_0 - 0) < f(x_0) \leq f(x_0 + 0). \quad (16)$$

Замечание 6. Теорема о пределе монотонной функции справедлива для любого конечного или бесконечного промежутка. При этом, если  $f$  — возрастающая функция, не ограниченная сверху на  $(a, b)$ , то  $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = +\infty$  (в случае, когда  $b = +\infty$ , пишут  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ), а если  $f$  — возрастающая и не ограниченная снизу на промежутке  $(a, b)$  функция, то  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty$  ( $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ).

**6. Критерий Коши существования предела функции.** Будем говорить, что функция  $f(x)$  удовлетворяет в точке  $x = a$  условию Коши, если она определена в некоторой проколотой окрестности точки  $a$  и

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \forall x', x'' \in \dot{U}_\delta(a) \rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \quad (17)$$

Лемма. Пусть существует число  $\delta > 0$  такое, что функция  $f(x)$  определена в проколотой  $\delta$ -окрестности точки  $a$ , и пусть для каждой последовательности  $\{x_n\}$ , удовлетворяющей условию  $x_n \in \dot{U}_\delta(a)$  при всех  $n \in \mathbb{N}$  и сходящейся к  $a$ , соответствующая последовательность значений функции  $\{f(x_n)\}$  имеет конечный предел. Тогда этот предел не зависит от выбора последовательности  $\{x_n\}$ , т. е. если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_n) = \tilde{A},$$

где  $\tilde{x}_n \in \dot{U}_\delta(a)$  при всех  $n \in \mathbb{N}$  и  $\tilde{x}_n \rightarrow a$  при  $n \rightarrow \infty$ , то  $\tilde{A} = A$ .

○ Образум последовательность

$$x_1, \tilde{x}_1, x_2, \tilde{x}_2, \dots, x_n, \tilde{x}_n, \dots$$

и обозначим  $k$ -й член этой последовательности через  $y_k$ . Так как  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = a$  (см. § 4, пример 3) и  $y_k \in \dot{U}_\delta(a)$  при любом  $k \in \mathbb{N}$ , то по условию леммы существует конечный  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(y_k) = A'$ . Заметим, что  $\{f(x_n)\}$  и  $\{f(\tilde{x}_n)\}$  являются подпоследовательностями сходящейся последовательности  $\{f(y_k)\}$ . Поэтому  $A = A'$ ,  $\tilde{A} = A'$ , откуда получаем, что  $A = \tilde{A}$ .  $\bullet$

**Теорема 3.** Для того чтобы существовал конечный предел функции  $f(x)$  в точке  $x = a$ , необходимо и достаточно, чтобы эта функция удовлетворяла в точке  $a$  условию Коши (17).

○ Необходимость. Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ; тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \rightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (18)$$

Если  $x', x''$  — любые точки из множества  $\dot{U}_\delta(a)$ , то из (18) следует, что

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x'')| &= |(f(x') - A) - (f(x'') - A)| \leq \\ &\leq |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

т. е. выполняется условие Коши (17).

**Достаточность.** Докажем, что если  $\exists \delta_0: \dot{U}_{\delta_0}(a) \subset D(f)$  и выполняется условие (17), то существует предел функции  $f$  в точке  $a$ . Воспользуемся определением предела функции по Гейне. Пусть  $\{x_n\}$  — произвольная последовательность такая, что  $x_n \in \dot{U}_{\delta_0}(a)$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Докажем, что соответствующая последовательность значений функции  $\{f(x_n)\}$  имеет конечный предел, не зависящий от выбора последовательности  $\{x_n\}$ .

Если выполняется условие (17), то для каждого  $\varepsilon > 0$  можно найти число  $\delta = \delta_\varepsilon > 0$  такое, что

$$\forall x', x'' \in \dot{U}_\delta(a) \rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \quad (19)$$

Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , то, задав число  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , указанное в условии (19), найдем в силу определения предела последовательности номер  $n_\delta = N_\varepsilon$  такой, что

$$\forall n > N_\varepsilon \rightarrow 0 < |x_n - a| < \delta.$$

Это означает, что для любого  $n \geq N_\varepsilon$  и для любого  $m \geq N_\varepsilon$  выполняются условия  $x_n \in \dot{U}_\delta(a)$ ,  $x_m \in \dot{U}_\delta(a)$  и в силу (19)  $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ . Таким образом, последовательность  $\{f(x_n)\}$  является фундаментальной и согласно критерию Коши для последовательности (§ 8) имеет конечный предел. В силу леммы этот предел не зависит от выбора последовательности  $\{x_n\}$ , сходящейся к точке  $a$ . Следовательно, функция  $f(x)$  имеет конечный предел в точке  $a$ . ●

**Замечание 7.** Теорема 3 остается в силе, если точку  $a$  заменить одним из символов  $a - 0$ ,  $a + 0$ ,  $-\infty$ ,  $+\infty$ ; при этом условие (17) должно выполняться в окрестности этого символа.

## § 11. Непрерывность функции

### 1. Понятие непрерывности функции.

**Определение.** Функция  $f(x)$ , определенная в некоторой окрестности точки  $a$ , называется *непрерывной в точке  $a$* , если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad (1)$$

Таким образом, функция  $f$  непрерывна в точке  $a$ , если выполнены следующие условия:

а) функция  $f$  определена в некоторой окрестности точки  $a$ , т. е. существует число  $\delta_0 > 0$  такое, что  $U_{\delta_0}(a) \subset D(f)$ ;

б) существует  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ;

в)  $A = f(a)$ .

Определение непрерывности функции  $f(x)$  в точке  $a$ , выраженное условием (1), можно сформулировать с помощью неравенств (на языке  $\varepsilon$ - $\delta$ ), с помощью окрестностей и в терминах последовательностей соответственно в виде

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x: |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x \in U_\delta(a) \rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(f(a)),$$

$$\forall \{x_n\}: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a).$$

Подчеркнем, что в определении непрерывности, в отличие от определения предела, рассматривается полная, а не проколотая окрестность точки  $a$ , и пределом функции является значение этой функции в точке  $a$ .

Назовем разность  $x - a$  *приращением аргумента* и обозначим  $\Delta x$ , а разность  $f(x) - f(a)$  — *приращением функции*, соответствующим данному приращению аргумента  $\Delta x$ , и обозначим  $\Delta y$ . Таким образом,

$$\Delta x = x - a, \quad \Delta y = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a).$$

При этих обозначениях равенство (1) примет вид

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

Таким образом, непрерывность функции в точке означает, что бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

**Пример 1.** Доказать, что функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $a$ , если:

а)  $f(x) = x^3$ ,  $a = 1$ ;   б)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ,  $a \neq 0$ ;   в)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $a > 0$ ;

г)  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad a = 0.$

$\Delta$  а) Если  $x \rightarrow 1$ , то по свойствам пределов (§ 10, (11)) получаем  $x^3 \rightarrow 1$ , т. е. для функции  $f(x) = x^3$  в точке  $x = 1$  выполняется условие (1). Поэтому функция  $x^3$  непрерывна в точке  $x = 1$ .

б) Если  $x \rightarrow a$ , где  $a \neq 0$ , то, используя свойства пределов (§ 10), получаем  $\frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{a}$ ,  $\frac{1}{x^2} \rightarrow \frac{1}{a^2}$ , т. е. функция  $\frac{1}{x^2}$  непрерывна в точке  $x = a$  ( $a \neq 0$ ).

в) Так как  $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$ , то отсюда получаем  $0 \leq |\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \frac{|x-a|}{\sqrt{a}}$ . Следовательно,  $\sqrt{x} - \sqrt{a} \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow a$ . Это означает, что функция  $\sqrt{x}$  непрерывна в точке  $a$ , где  $a > 0$ .

г) Функция  $f$  определена на  $R$ , и при любом  $x \in R$  выполняется неравенство  $0 \leq |f(x) - f(0)| = |f(x)| \leq |x|$ , так как  $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$  при  $x \neq 0$ . Следовательно,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ , т. е. функция  $f$  непрерывна в точке  $x = 0$ . ▲

По аналогии с понятием предела слева (справа) вводится понятие непрерывности слева (справа). Если функция  $f$  определена на полуинтервале  $(a - \delta, a]$  и  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a)$ , т. е.  $f(a-0) = f(a)$ , то эту функцию называют *непрерывной слева в точке  $a$* .

Аналогично, если функция  $f$  определена на полуинтервале  $[a, a + \delta)$  и  $f(a+0) = f(a)$ , то эту функцию называют *непрерывной справа в точке  $a$* .

Например, функция  $f(x) = [x]$  непрерывна справа в точке  $x = 1$  и не является непрерывной слева в этой точке (§ 9, пример 1), так как  $f(1-0) = 0$ ,  $f(1+0) = f(1) = 1$ .

Очевидно, функция непрерывна в данной точке тогда и только тогда, когда она непрерывна как справа, так и слева в этой точке.

**2. Точки разрыва.** В п. 2 будем предполагать, что функция  $f$  определена в некоторой проколотой окрестности точки  $a$ .

Точку  $a$  назовем *точкой разрыва функции  $f$* , если эта функция либо не определена в точке  $a$ , либо определена, но не является непрерывной в точке  $a$ .

Следовательно,  $a$  — точка разрыва функции  $f$ , если не выполняется по крайней мере одно из следующих условий:

- а)  $a \in D(f)$ ;
- б) существует конечный  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ;
- в)  $A = f(a)$ .

Если  $a$  — точка разрыва функции  $f$ , причем в этой точке существуют конечные пределы слева и справа, т. е.  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0)$  и  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0)$ , то точку  $a$  называют *точкой разрыва первого рода*.

**Замечание 1.** Если  $x = a$  — точка разрыва первого рода функции  $f(x)$ , то разность  $f(a+0) - f(a-0)$  называют *скачком функции в точке  $a$* . В случае когда  $f(a+0) = f(a-0)$ , точку  $a$  называют *точкой устранимого разрыва*. Полагая  $f(a) = f(a+0) = f(a-0) = A$ , получим функцию

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \neq a, \\ A, & \text{если } x = a, \end{cases}$$

непрерывную в точке  $a$  и совпадающую с  $f(x)$  при  $x \neq a$ . В этом случае говорят, что функция *доопределена по непрерывности в точке  $a$* .

Пусть  $x = a$  — точка разрыва функции  $f$ , не являющаяся точкой разрыва первого рода. Тогда ее называют *точкой разрыва второго рода функции  $f$* . В такой точке хотя бы один из односторонних пределов либо не существует, либо бесконечен.

Например, для функции  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$  точка  $x = 0$  — точка разрыва первого рода. Доопределив эту функцию по непрерывности, получим функцию

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

непрерывную в точке  $x = 0$ , так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Для функций  $\sin \frac{1}{x}$  и  $\frac{1}{x^2}$  точка  $x = 0$  — точка разрыва второго рода (см. рис. 10.3 и 10.8).

**Теорема 1.** *Если функция  $f$  определена на отрезке  $[a, b]$  и монотонна, то она может иметь внутри этого отрезка точки разрыва только первого рода.*

○ Пусть  $x_0$  — произвольная точка интервала  $(a, b)$ . По теореме 2, § 10 функция  $f$  имеет в точке  $x_0$  конечные пределы слева и справа. Если, например,  $f$  — возрастающая функция, то

$$f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0),$$

где  $f(x_0 - 0)$  и  $f(x_0 + 0)$  — соответственно пределы функции  $f$  слева и справа в точке  $x_0$ .

В том случае, когда  $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ , точка  $x_0$  является точкой разрыва первого рода функции  $f$ ; если же  $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ , то точка  $x_0$  есть точка непрерывности функции  $f$ . Аналогичное утверждение справедливо и для убывающей функции. ●

### 3. Свойства функций, непрерывных в точке.

а) *Локальные свойства непрерывной функции.*

**Свойство 1.** *Если функция  $f$  непрерывна в точке  $a$ , то она ограничена в некоторой окрестности этой точки, т. е.*

$$\exists \delta > 0 \quad \exists C > 0: \forall x \in U_\delta(a) \rightarrow |f(x)| \leq C.$$

**Свойство 2.** *Если функция  $f$  непрерывна в точке  $a$ , причем  $f(a) \neq 0$ , то в некоторой окрестности точки  $a$  знак функции совпадает со знаком числа  $f(a)$ , т. е.*

$$\exists \delta > 0: \forall x \in U_\delta(a) \rightarrow \text{sign } f(x) = \text{sign } f(a).$$

○ Эти утверждения следуют из свойств пределов (§ 10, п. 4). ●



б) *Непрерывность суммы, произведения и частного.*

Если функции  $f$  и  $g$  непрерывны в точке  $a$ , то функции  $f + g$ ,  $fg$  и  $f/g$  (при условии  $g(a) \neq 0$ ) непрерывны в точке  $a$ .

○ Это утверждение следует из определения непрерывности и свойств пределов (§ 10, п. 4). ●

в) *Непрерывность сложной функции.* Понятие сложной функции было введено в § 9 (п. 2).

**Теорема 2.** Если функция  $z = f(y)$  непрерывна в точке  $y_0$ , а функция  $y = \varphi(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , причем  $y_0 = \varphi(x_0)$ , то в некоторой окрестности точки  $x_0$  определена сложная функция  $f(\varphi(x))$ , и эта функция непрерывна в точке  $x_0$ .

○ Пусть задано произвольное число  $\varepsilon > 0$ . В силу непрерывности функции  $f$  в точке  $y_0$  существует число  $\rho = \rho(\varepsilon) > 0$  такое, что  $U_\rho(y_0) \subset D(f)$  и

$$\forall y \in U_\rho(y_0) \rightarrow f(y) \in U_\varepsilon(z_0), \quad (2)$$

где  $z_0 = f(y_0)$ .

В силу непрерывности функции  $\varphi$  в точке  $x_0$  для найденного в (2) числа  $\rho > 0$  можно указать число  $\delta = \delta_\rho = \delta(\varepsilon) > 0$  такое, что

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \rightarrow \varphi(x) \in U_\rho(y_0). \quad (2')$$

Из условий (2) и (2') следует, что на множестве  $U_\delta(x_0)$  определена сложная функция  $f(\varphi(x))$ , причем

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \rightarrow f(\varphi(x)) \in U_\varepsilon(z_0),$$

где  $z_0 = f(\varphi(x_0)) = f(y_0)$ , т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x \in U_\delta(x_0) \rightarrow f(\varphi(x)) \in U_\varepsilon(z_0).$$

Это означает, в силу определения непрерывности, что функция  $f(\varphi(x))$  непрерывна в точке  $x_0$ . ●

**Замечание 2.** Соответствие между окрестностями точек  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$

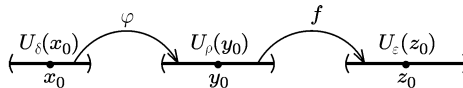


Рис. 11.1

представлено на рис. 11.1. По заданному числу  $\varepsilon > 0$  сначала находим  $\rho > 0$ , а затем для чисел  $\rho > 0$  находим  $\delta > 0$ .

**Упражнение 1.** Сформулировать определение непрерывности с помощью последовательностей (по Гейне) и доказать, исходя из этого определения, теорему 2.

**4. Свойства функций, непрерывных на отрезке.** Функцию  $f(x)$  называют *непрерывной на отрезке*  $[a, b]$ , если она непрерывна в каждой точке интервала  $(a, b)$  и, кроме того, непрерывна справа в точке  $a$  и непрерывна слева в точке  $b$ .

а) *Ограниченность непрерывной на отрезке функции.*

Теорема 3 (Вейерштрасса). *Если функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то она ограничена, т. е.*

$$\exists C > 0: \forall x \in [a, b] \rightarrow |f(x)| \leq C. \quad (3)$$

○ Предположим противное, тогда

$$\forall C > 0 \quad \exists x_C \in [a, b]: |f(x_C)| > C. \quad (4)$$

Полагая в (4)  $C = 1, 2, \dots, n, \dots$ , получим, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in [a, b]: |f(x_n)| > n. \quad (5)$$

Последовательность  $\{x_n\}$  ограничена, так как  $a \leq x_n \leq b$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . По теореме Больцано–Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность, т. е. существуют подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$  и точка  $\xi$  такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \xi, \quad (6)$$

где в силу условия (5) для любого  $k \in \mathbb{N}$  выполняется неравенство

$$a \leq x_{n_k} \leq b. \quad (7)$$

Из условий (6) и (7) следует (см. § 4, п. 5, замечание 5), что  $\xi \in [a, b]$ , а из условия (6) в силу непрерывности функции  $f$  в точке  $\xi$  получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(\xi). \quad (8)$$

С другой стороны, утверждение (5) выполняется при всех  $n \in \mathbb{N}$  и, в частности, при  $n = n_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), т. е.

$$|f(x_{n_k})| > n_k,$$

откуда следует, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \infty$ , так как  $n_k \rightarrow +\infty$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Это противоречит равенству (8), согласно которому последовательность  $\{f(x_{n_k})\}$  имеет конечный предел. Поэтому условие (4) не может выполняться, т. е. справедливо утверждение (3). ●

Замечание 3. Теорема 3 неверна для промежутков, не являющихся отрезками. Например, функция  $f(x) = \frac{1}{x}$  непрерывна на интервале  $(0, 1)$ , но не ограничена на этом интервале. Функция  $f(x) = x^2$  непрерывна на  $\mathbb{R}$ , но не ограничена на  $\mathbb{R}$ .

б) *Достижимость точных граней.*

Теорема 4 (Вейерштрасса). *Если функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то она достигает своей точной верхней и нижней грани, т. е.*

$$\exists \xi \in [a, b]: f(\xi) = \sup_{x \in [a, b]} f(x), \quad (9)$$

$$\exists \tilde{\xi} \in [a, b]: f(\tilde{\xi}) = \inf_{x \in [a, b]} f(x). \quad (10)$$

○ Так как непрерывная на отрезке функция  $f(x)$  ограничена (теорема 3), т. е. множество значений, принимаемых функцией  $f$  на отрезке  $[a, b]$ , ограничено, то существуют  $\sup_{x \in [a, b]} f(x)$  и  $\inf_{x \in [a, b]} f(x)$  (см. § 2).

Докажем утверждение (9). Обозначим  $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ . В силу определения точной верхней грани выполняются условия

$$\forall x \in [a, b] \rightarrow f(x) \leq M, \quad (11)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x(\varepsilon) \in [a, b]: f(x(\varepsilon)) > M - \varepsilon. \quad (12)$$

Полагая  $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ , получим в силу условия (12) последовательность  $\{x_n\}$ , где  $x_n = x\left(\frac{1}{n}\right)$ , такую, что для всех  $n \in \mathbb{N}$  выполняются условия

$$x_n \in [a, b], \quad (13)$$

$$f(x_n) > M - \frac{1}{n}. \quad (14)$$

Из соотношений (11), (13) и (14) следует, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M,$$

откуда получаем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x_n) = M. \quad (15)$$

Как и в теореме 3, из условия (13) следует, что существуют подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$  последовательности  $\{x_n\}$  и точка  $\xi$  такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \xi, \quad \text{где } \xi \in [a, b].$$

В силу непрерывности функции  $f$  в точке  $\xi$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(\xi). \quad (16)$$

С другой стороны,  $\{f(x_{n_k})\}$  — подпоследовательность последовательности  $\{f(x_n)\}$ , сходящейся, согласно условию (15), к числу  $M$ . Поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = M. \quad (17)$$

В силу единственности предела последовательности из (16) и (17) заключаем, что  $f(\xi) = M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ . Утверждение (9) доказано.

Аналогично доказывается утверждение (10). ●

**Замечание 4.** Теорема 4 неверна для интервалов: функция, непрерывная на интервале, может не достигать своих точных граней. Например, функция  $f(x) = x^2$  не достигает на интервале  $(0, 1)$  своей точной нижней грани, равной нулю, и точной верхней грани, равной единице.

в) *Промежуточные значения.*

Теорема 5 (теорема Коши о нулях непрерывной функции). *Если функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и принимает в его концах значения разных знаков, т. е.  $f(a)f(b) < 0$ , то на отрезке  $[a, b]$  имеется хотя бы один нуль функции  $f$ , т. е.*

$$\exists c \in [a, b]: f(c) = 0. \quad (18)$$

○ Разделим отрезок  $[a, b]$  пополам. Пусть  $d$  — середина этого отрезка. Если  $f(d) = 0$ , то теорема доказана, а если  $f(d) \neq 0$ , то в концах одного из отрезков  $[a, d]$ ,  $[d, b]$  функция  $f$  принимает значения разных знаков. Обозначим этот отрезок  $\Delta_1 = [a_1, b_1]$ . Пусть  $d_1$  — середина отрезка  $\Delta_1$ . Возможны два случая: 1)  $f(d_1) = 0$ , тогда теорема доказана; 2)  $f(d_1) \neq 0$ , тогда в концах одного из отрезков  $[a_1, d_1]$ ,  $[d_1, b_1]$  функция  $f$  принимает значения разных знаков; такой отрезок обозначим  $\Delta_2 = [a_2, b_2]$ .

Продолжая эти рассуждения, получим:

1) либо через конечное число шагов найдется точка  $c \in [a, b]$  такая, что  $f(c) = 0$ ; тогда справедливо утверждение (18);

2) либо существует последовательность отрезков  $\{\Delta_n\}$  такая, что  $f(a_n)f(b_n) < 0$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ , где  $\Delta_n = [a_n, b_n]$ ; эта последовательность отрезков является стягивающейся (§ 6, п. 4), так как  $\Delta_n \subset \Delta_{n-1}$  для любого  $n \in \mathbb{N}$  и

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}. \quad (19)$$

По теореме Кантора (§ 6) существует точка  $c$ , принадлежащая всем отрезкам последовательности  $\{\Delta_n\}$ , т. е.

$$\exists c: \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow c \in [a_n, b_n] \subset [a, b]. \quad (20)$$

Докажем, что

$$f(c) = 0. \quad (21)$$

Предположим, что равенство (21) не выполняется. Тогда либо  $f(c) > 0$ , либо  $f(c) < 0$ . Пусть, например,  $f(c) > 0$ . По свойству сохранения непрерывной функцией знака (п. 3, а))

$$\exists \delta > 0: \forall x \in U_\delta(c) \rightarrow f(x) > 0. \quad (22)$$

С другой стороны, из неравенства (19) следует, что  $b_n - a_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , и поэтому

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}: b_{n_0} - a_{n_0} < \delta. \quad (23)$$

Так как  $c \in \Delta_{n_0}$  в силу условия (20), то из (23) следует, что  $\Delta_{n_0} \subset U_\delta(c)$  и согласно условию (22) во всех точках отрезка  $\Delta_{n_0}$  функция  $f$  принимает положительные значения. Это противоречит тому, что в концах каждого из отрезков  $\Delta_n$  функция  $f$  принимает значения разных знаков.

Полученное противоречие доказывает, что должно выполняться условие (21). ●

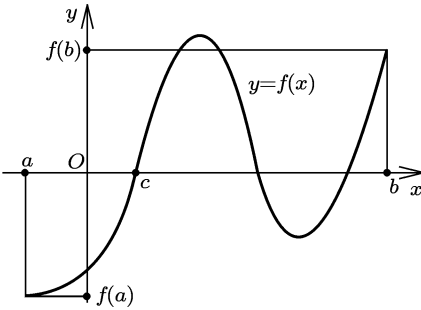


Рис. 11.2

найдется точка  $\xi \in [a, b]$  такая, что  $f(\xi) = C$ .

○ Обозначим  $f(a) = A$ ,  $f(b) = B$ . По условию  $A \neq B$ . Пусть, например,  $A < B$ . Нужно доказать, что

$$\forall C \in [A, B] \quad \exists \xi \in [a, b]: f(\xi) = C. \quad (24)$$

Если  $C = A$ , то утверждение (24) выполняется при  $\xi = a$ , а если  $C = B$ , то (24) имеет место при  $\xi = b$ . Поэтому достаточно рассмотреть случай  $A < C < B$ .

Пусть  $\varphi(x) = f(x) - C$ , тогда  $\varphi(a) = A - C < 0$ ,  $\varphi(b) = B - C > 0$ , и по теореме 5 найдется точка  $\xi \in [a, b]$  такая, что  $\varphi(\xi) = 0$ , т. е.  $f(\xi) = C$ . Утверждение (24) доказано. ●

Следствие. Если функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ ,  $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ ,  $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ , то множество значений, принимаемых

функцией  $f$  на отрезке  $[a, b]$ , есть отрезок  $[m, M]$ .

○ Для всех  $x \in [a, b]$  выполняется неравенство  $m \leq f(x) \leq M$ , причем согласно теореме 4 функция  $f$  принимает на отрезке  $[a, b]$  значения, равные  $m$  и  $M$ . Все значения из отрезка  $[m, M]$  функция принимает по теореме 6. Отрезок  $[m, M]$  вырождается в точку, если  $f(x) = \text{const}$  на отрезке  $[a, b]$ . ●

г) *Существование и непрерывность функции, обратной для непрерывной и строго монотонной функции.* Понятие обратной функции было введено в § 9 (п. 9). Докажем теорему о существовании и непрерывности обратной функции.

Теорема 7. Если функция  $y = f(x)$  непрерывна и строго возрастает на отрезке  $[a, b]$ , то на отрезке  $[f(a), f(b)]$  определена функция  $x = g(y)$ , обратная к  $f$ , непрерывная и строго возрастающая.

○ Существование обратной функции. Обозначим  $A = f(a)$ ,  $B = f(b)$ . Так как  $f$  — возрастающая функция, то для всех  $x \in [a, b]$  выполняется неравенство  $A \leq f(x) \leq B$ , где  $A = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ ,  $B = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ , и в силу непрерывности  $f$  (следствие из теоремы 6)

множество значений функции  $E(f) = [A, B]$ .

Согласно определению обратной функции (§ 9, п. 9) нужно доказать, что для каждого  $y_0 \in [A, B]$  уравнение

$$f(x) = y_0 \quad (25)$$

имеет единственный корень  $x = x_0$ , причем  $x_0 \in [a, b]$ .

Существование хотя бы одного корня уравнения (25) следует из теоремы 6. Докажем, что уравнение (25) имеет на отрезке  $[a, b]$  единственный корень.

Предположим, что наряду с корнем  $x = x_0$  уравнение (25) имеет еще один корень  $x = \tilde{x}_0$ , где  $\tilde{x}_0 \neq x_0$ ; тогда  $f(\tilde{x}_0) = y_0$ ,  $\tilde{x}_0 \in [a, b]$ .

Пусть, например,  $\tilde{x}_0 > x_0$ . Тогда в силу строгого возрастания функции  $f$  на отрезке  $[a, b]$  выполняется неравенство  $f(\tilde{x}_0) > f(x_0)$ . С другой стороны,  $f(\tilde{x}_0) = f(x_0) = y_0$ . Отсюда следует, что неравенство  $\tilde{x}_0 > x_0$  не может выполняться. Следовательно,  $\tilde{x}_0 = x_0$ . Существование обратной функции доказано, т. е. на отрезке  $[A, B]$  определена функция  $x = f^{-1}(y) = g(y)$ , обратная к  $f$ , причем  $E(g) = [a, b]$  и

$$g(f(x)) = x, \quad x \in [a, b], \quad f(g(y)) = y, \quad y \in [A, B]. \quad (26)$$

Монотонность обратной функции. Докажем, что  $g(y)$  — строго возрастающая на отрезке  $[A, B]$  функция, т. е.

$$\forall y_1, y_2 \in [A, B]: y_1 < y_2 \rightarrow g(y_1) < g(y_2). \quad (27)$$

Предположим противное; тогда условие (27) не выполняется, т. е.

$$\exists \tilde{y}_1, \tilde{y}_2 \in [A, B]: \tilde{y}_1 < \tilde{y}_2 \rightarrow g(\tilde{y}_1) \geq g(\tilde{y}_2). \quad (28)$$

Обозначим  $\tilde{x}_1 = g(\tilde{y}_1)$ ,  $\tilde{x}_2 = g(\tilde{y}_2)$ , тогда  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in [a, b]$ ,  $\tilde{x}_1 \geq \tilde{x}_2$  в силу (28) и  $f(\tilde{x}_1) = \tilde{y}_1$ ,  $f(\tilde{x}_2) = \tilde{y}_2$  согласно равенству (26).

Так как  $f$  — строго возрастающая функция, то из неравенства  $\tilde{x}_1 \geq \tilde{x}_2$  следует неравенство  $f(\tilde{x}_1) \geq f(\tilde{x}_2)$ , т. е.  $\tilde{y}_1 \geq \tilde{y}_2$ , что невозможно, так как  $\tilde{y}_1 < \tilde{y}_2$  в силу (28). Таким образом, утверждение (28) не может выполняться, и поэтому  $g(y)$  — строго возрастающая функция.

Непрерывность обратной функции. Пусть  $y_0$  — произвольная точка интервала  $(A, B)$ . Докажем, что функция  $g$  непрерывна в точке  $y_0$ . Для этого достаточно показать, что справедливы равенства

$$g(y_0 - 0) = g(y_0), \quad g(y_0 + 0) = g(y_0), \quad (29)$$

где  $g(y_0 - 0)$  и  $g(y_0 + 0)$  — пределы функции  $g$  соответственно слева и справа в точке  $y_0$ .

По теореме о пределах монотонной функции (§ 10) пределы функции  $g$  слева и справа в точке  $y_0$  существуют и выполняются неравенства

$$g(y_0 - 0) \leq g(y_0) \leq g(y_0 + 0). \quad (30)$$

Пусть хотя бы одно из равенств (29) не выполняется, например,  $g(y_0 - 0) \neq g(y_0)$ , тогда

$$g(y_0 - 0) < g(y_0). \quad (31)$$

Так как для всех  $y \in [A, y_0)$  выполняется неравенство  $a \leq g(y) \leq g(y_0 - 0)$ , где  $g(y_0 - 0) = \sup_{A \leq y < y_0} g(y)$ , а при всех  $y \in [y_0, B]$  справедливо неравенство  $g(y_0) \leq g(y) \leq b$ , то из условия (31) следует, что интервал  $\Delta = (g(y_0 - 0), g(y_0))$  не принадлежит множеству значений функции  $g$ . Это противоречит тому, что все точки отрезка  $[a, b]$ , в том числе и точки интервала  $\Delta$ , принадлежат множеству  $E(g)$ . Итак, первое из равенств (29) доказано. Аналогично доказывается справедливость второго из равенств (29).

Тем же способом устанавливается, что функция  $g$  непрерывна справа в точке  $A$  и непрерывна слева в точке  $B$ . ●

**Замечание 6.** Если функция  $f$  непрерывна и строго убывает на отрезке  $[a, b]$ , то обратная к ней функция  $g$  непрерывна и строго убывает на отрезке  $[f(b), f(a)]$ .

**Замечание 7.** Аналогично формулируется и доказывается теорема о функции  $g$ , обратной к функции  $f$ , для случаев, когда функция  $f$  задана на интервале (конечном либо бесконечном) и полуинтервале.

Если функция  $f$  определена, строго возрастает и непрерывна на интервале  $(a, b)$ , то обратная функция  $g$  определена, строго возрастает и непрерывна на интервале  $(A, B)$ , где

$$A = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x), \quad B = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x).$$

## § 12. Непрерывность элементарных функций

**1. Многочлены и рациональные функции.** Рассмотрим многочлен степени  $n$ , т. е. функцию вида

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Эта функция непрерывна на  $R$ .

○ Действительно, функция  $y = C$ , где  $C$  — постоянная, непрерывна на  $R$ , так как  $\Delta y = 0$  при любом  $x$ . Функция  $y = x$  непрерывна на  $R$ , так как  $\Delta y = \Delta x \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Поэтому функция  $y = a_k x^k$ , где  $k \in \mathbb{N}$ , непрерывна на  $R$  как произведение непрерывных функций. Так как многочлен  $P_n(x)$  есть сумма непрерывных функций вида  $a_k x^k$  ( $k = \overline{0, n}$ ), то он непрерывен на  $R$ . ●

Рациональная функция, т. е. функция вида  $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ , где  $P_n, Q_m$  — многочлены степени  $n$  и  $m$  соответственно, непрерывна во всех точках, которые не являются нулями многочлена  $Q_m(x)$ .

○ В самом деле, если  $Q_m(x_0) \neq 0$ , то из непрерывности многочленов  $P_n$  и  $Q_m$  следует непрерывность функции  $f$  в точке  $x_0$ . ●

## 2. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

а) Неравенства для тригонометрических функций.

Утверждение 1. Если  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  и  $x \neq 0$ , то

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \quad (1)$$

○ Рассмотрим в координатной плоскости круг единичного радиуса с центром в точке  $O$  (рис. 12.1). Пусть  $\angle AOB = x$ , где  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ . Пусть  $C$  — проекция точки  $B$  на ось  $Ox$ ,  $D$  — точка пересечения луча  $OB$  и прямой, проведенной через точку  $A$  перпендикулярно оси  $Ox$ . Тогда

$$BC = \sin x, \quad DA = \operatorname{tg} x.$$

Пусть  $S_1, S_2, S_3$  — площади треугольника  $AOB$ , сектора  $AOB$  и треугольника  $AOD$  соответственно. Тогда  $S_1 = \frac{1}{2} (OA)^2 \sin x = \frac{1}{2} \sin x$ ,  $S_2 = \frac{1}{2} (OA)^2 x = \frac{1}{2} x$ ,  $S_3 = \frac{1}{2} OA \cdot DA = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$ . Так как  $S_1 < S_2 < S_3$ , то

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x. \quad (2)$$

Если  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , то  $\sin x > 0$ , и поэтому неравенство (2) равносильно неравенству

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

откуда следует, что при  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  выполняется неравенство (1). Так как  $\frac{x}{\sin x}$  и  $\cos x$  — четные функции, то неравенство (1) справедливо и при  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ . ●

Замечание 1. Из неравенства (2) следует, что

$$\operatorname{tg} x > x \quad \text{при} \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \quad (3)$$

Утверждение 2. Для всех  $x \in \mathbb{R}$  справедливо неравенство

$$|\sin x| \leq |x|. \quad (4)$$

○ Неравенство (4) выполняется при  $x = 0$ . Пусть  $x \neq 0$ . Тогда если  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , то из (1) следует неравенство  $\frac{\sin x}{x} < 1$ , равносильное неравенству (4). Так как  $\frac{\sin x}{x}$  — четная функция, то неравенство (4) справедливо и при  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ . Итак, неравенство (4) выполняется,

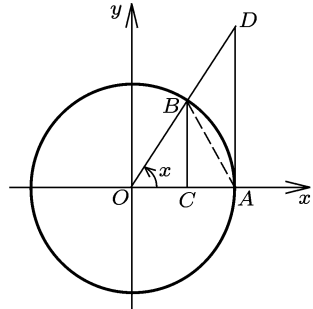


Рис. 12.1



если  $|x| < \frac{\pi}{2}$ . Пусть  $|x| \geq \frac{\pi}{2}$ ; тогда неравенство (4) справедливо, так как  $|\sin x| \leq 1$ , а  $\frac{\pi}{2} > 1$ . ●

Упражнение 1. Доказать, что для всех  $x \in \mathcal{R}$  справедливо неравенство

$$0 \leq 1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}.$$

б) *Непрерывность тригонометрических функций.*

Утверждение 3. *Функции  $y = \sin x$  и  $y = \cos x$  непрерывны на  $\mathcal{R}$ .*

○ Пусть  $x_0$  — произвольная точка множества  $\mathcal{R}$ . Тогда  $\sin x - \sin x_0 = 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}$ . Так как  $\left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \leq \left| \frac{x - x_0}{2} \right|$  в силу неравенства (4), а  $\left| \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq 1$ , то  $|\sin x - \sin x_0| \leq |x - x_0|$ , откуда следует, что функция  $y = \sin x$  непрерывна в точке  $x_0$ .

Аналогично имеем  $\cos x - \cos x_0 = 2 \sin \frac{x + x_0}{2} \sin \frac{x_0 - x}{2}$ , откуда  $|\cos x - \cos x_0| < |x - x_0|$ , и поэтому функция  $\cos x$  непрерывна в точке  $x_0$ . ●

Из непрерывности синуса и косинуса следует, что функция  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$  непрерывна, если  $\cos x \neq 0$ , т. е.  $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$  ( $n \in \mathcal{Z}$ ), а функция  $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$  непрерывна, если  $x \neq \pi n$  ( $n \in \mathcal{Z}$ ).

в) *Первый замечательный предел.*

Утверждение 4. *Если  $x \rightarrow 0$ , то  $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ , т. е.*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (5)$$

○ Воспользуемся неравенством (1). В силу непрерывности косинуса  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$ . Переходя в соотношении (1) к пределу при  $x \rightarrow 0$ , получаем равенство (5). ●

г) *Обратные тригонометрические функции.* Рассмотрим функцию

$$y = \sin x, \quad x \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] = \Delta. \quad (6)$$

Эта функция, график которой изображен на рис. 12.2, непрерывна и строго возрастает на отрезке  $\Delta$  (§ 9, пример 9), множество ее значений — отрезок  $[-1, 1]$ . По теореме об обратной функции на отрезке  $[-1, 1]$  определена функция, обратная к функции (6), непрерывная и строго возрастающая. Ее обозначают

$$y = \arcsin x, \quad x \in [-1, 1].$$

Подчеркнем, что функция  $\arcsin x$  не является обратной к периодической функции  $\sin x$ , которая необратима;  $\arcsin x$  — функция, обратная по отношению к функции  $\sin x$ , заданной на отрезке  $\Delta = \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ , т. е. обратная к сужению  $\sin x$  на отрезок  $\Delta$ . График

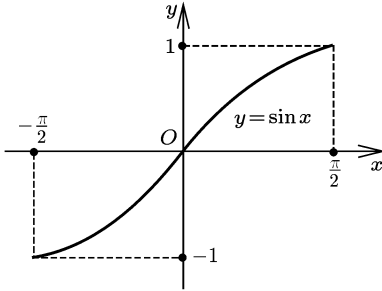


Рис. 12.2

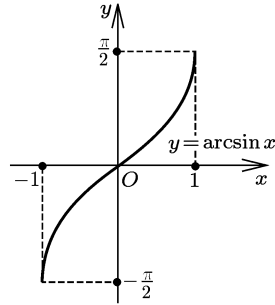


Рис. 12.3

функции  $y = \arcsin x$ , изображенный на рис 12.3, симметричен графику функции (6) относительно прямой  $y = x$ . В силу свойств взаимно обратных функций (§ 9, п. 9)

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad x \in [-1, 1],$$

$$\arcsin(\sin x) = x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad (7)$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x, \quad x \in [-1, 1], \quad (8)$$

т. е.  $\arcsin x$  — нечетная функция.

Пример 1. Построить график функции  $y = \arcsin(\sin x)$ .

△ Функция определена на  $\mathbb{R}$  и является периодической с периодом  $2\pi$ . Поэтому достаточно построить ее график на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ .

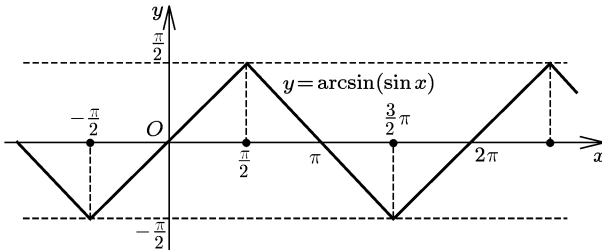


Рис. 12.4

Если  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ , то  $y = x$  в силу равенства (7). Если  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ , то  $-\frac{\pi}{2} \leq x - \pi \leq \frac{\pi}{2}$ , и согласно формуле (7) получаем  $\arcsin(\sin(x - \pi)) = x - \pi$ . С другой стороны,  $\sin(x - \pi) = -\sin x$ , и поэтому

$$\arcsin(\sin(x - \pi)) = \arcsin(-\sin x) = -\arcsin(\sin x)$$

в силу равенства (8). Таким образом,  $x - \pi = -\arcsin(\sin x)$ , если  $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ . Следовательно,

$$y = \arcsin(\sin x) = \begin{cases} x, & \text{если } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \text{если } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

График функции  $y = \arcsin(\sin x)$  изображен на рис. 12.4. ▲

Функция

$$y = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

непрерывна и строго убывает. Обратная к ней функция, которую обозначают

$$y = \arccos x, \quad x \in [-1, 1],$$

непрерывна и строго убывает. График этой функции изображен на рис. 12.5. По свойствам взаимно обратных функций

$$\cos(\arccos x) = x, \quad x \in [-1, 1],$$

$$\arccos(\cos x) = x, \quad x \in [0, \pi].$$

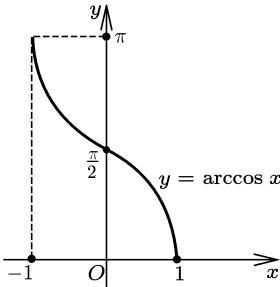


Рис. 12.5

Пример 2. Доказать, что для всех  $x \in [-1, 1]$  справедливы равенства

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \quad (9)$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}. \quad (10)$$

Δ а) Обозначим  $\arccos x = \alpha$ . Тогда согласно определению  $\arccos x$

$$0 \leq \alpha \leq \pi, \quad \cos \alpha = x.$$

Из этих соотношений следует, что  $0 \leq \pi - \alpha \leq \pi$  и  $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha = -x$ , откуда по определению  $\arccos x$  находим  $\pi - \alpha = \arccos(-x)$ . Формула (9) доказана.

б) Обозначим  $\alpha = \arcsin x$ . Тогда  $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$  и  $\sin \alpha = x$ , откуда  $0 \leq \frac{\pi}{2} - \alpha \leq \pi$  и  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha = x$ . Отсюда согласно определению арккосинуса следует, что  $\frac{\pi}{2} - \alpha = \arccos x$ . Равенство (10) доказано. ▲

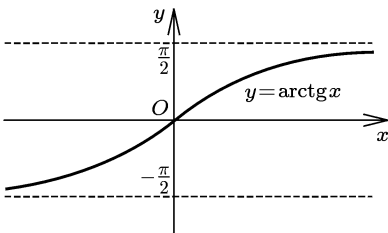


Рис. 12.6

Упражнение 2. Построить график функции:

а)  $y = \arccos(\cos x)$ ;

б)  $y = \arcsin(\cos x)$ .

Функция

$$y = \operatorname{tg} x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},$$

непрерывна и строго возрастает. Обратная к ней функция, которую обозначают

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbb{R},$$

непрерывна и строго возрастает. График этой функции изображен на рис. 12.6.

Отметим, что в силу свойств взаимно обратных функций имеем

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x, \quad x \in R.$$

Функцию, обратную к функции

$$y = \operatorname{ctg} x, \quad 0 < x < \pi,$$

обозначают  $y = \operatorname{arcctg} x$ . Эта функция определена на  $R$ , непрерывна и строго убывает. Ее график изображен на рис. 12.7.

Упражнение 3. Доказать, что для всех  $x \in R$  справедливо равенство

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

**3. Степенная функция с рациональным показателем.** Степенная функция с натуральным показателем, т. е.

$$y = x^n, \quad x \in R,$$

где  $n \in N$ , непрерывна на  $R$ . Если  $n = 2k + 1$ , то эта функция строго возрастает на  $R$  (§ 9, пример 9) и поэтому обратима. На рис. 12.8

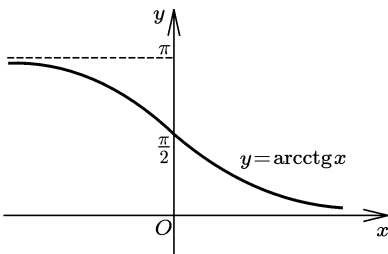


Рис. 12.7

изображены графики функций  $y = x^3$  и  $y = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ .

Степенная функция с четным натуральным показателем, т. е. функция  $y = x^{2k}$ ,  $k \in N$ ,  $x \in R$ ,

необратима. Однако ее сужение на множество  $[0, +\infty)$ , т. е. функция  $y = x^{2k}$ ,  $k \in N$ ,  $x \in [0, +\infty)$ , обратима и обратной к ней является функция  $y = \sqrt[2k]{x}$ . На рис. 9.10 изображены графики взаимно обратных функций  $y = x^2$ ,  $x \in [0, +\infty)$ , и  $y = \sqrt{x}$ .

Очевидно, функция  $y = x^{2k}$ ,  $k \in N$ ,  $x \in (-\infty, 0)$ , т. е. сужение функции  $x^{2k}$  на множество  $(-\infty, 0)$ , также обратима, и обратной для нее является функция  $y = -\sqrt[2k]{x}$ . На рис. 9.11 изображены графики функций  $y = x^2$ ,  $x \leq 0$ , и  $y = -\sqrt{x}$ .

Если  $x > 0$ , то при любом  $n \in N$  функция  $x^n$  обратима, а обратная к ней функция обозначается  $x^{1/n}$  или  $\sqrt[n]{x}$ . Функция  $y = x^{-n}$ ,  $n \in N$ ,

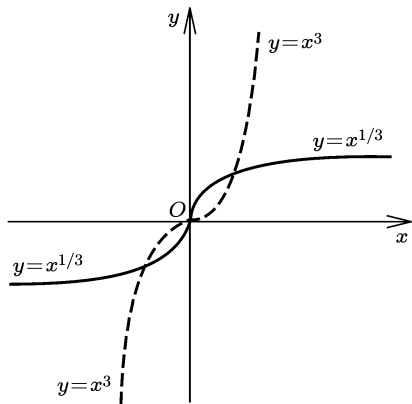


Рис. 12.8

определена и непрерывна при  $x \neq 0$  и записывается в виде  $y = 1/x^n$ . При  $n = 2k + 1$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) эта функция обратима на множестве  $E = \{x: x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$ , а при  $n = 2k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) обратима на множествах  $(-\infty, 0)$  и  $(0, +\infty)$ .

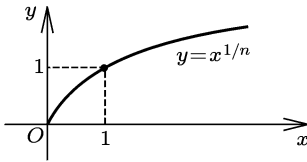


Рис. 12.9

Дадим определение степенной функции  $x^r$  с рациональным показателем  $r$ . Если  $r = m/n$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , то положим

$$x^r = (x^{1/n})^m, \quad x > 0. \quad (11)$$

Функция  $x^{1/n}$  непрерывна и строго возрастает (рис. 12.9).

Функция  $t^m$  непрерывна при  $t > 0$ , строго возрастает, если  $m > 0$ , и строго убывает, если  $m < 0$ . Поэтому функция  $x^r$  непрерывна при  $x > 0$ , строго возрастает, если  $r > 0$ , и строго убывает, если  $r < 0$ .

Перечислим некоторые свойства рациональных степеней вещественных чисел:

$$(a^{1/n})^m = (a^m)^{1/n}, \quad a > 0, \quad (12)$$

$$a^r > 1 \quad \text{при} \quad r \in \mathbb{Q}, \quad a > 1, \quad r > 0, \quad (13)$$

$$a^{r_1} a^{r_2} = a^{r_1+r_2} \quad \text{при} \quad a > 0, \quad r_1 \in \mathbb{Q}, \quad r_2 \in \mathbb{Q}, \quad (14)$$

$$(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2} \quad \text{при} \quad a > 0, \quad r_1 \in \mathbb{Q}, \quad r_2 \in \mathbb{Q}, \quad (15)$$

$$a^{r_1} > a^{r_2} \quad \text{при} \quad a > 1, \quad r_1 \in \mathbb{Q}, \quad r_2 \in \mathbb{Q}, \quad r_1 > r_2. \quad (16)$$

Свойства (12)–(16) легко проверяются, если воспользоваться свойствами целых степеней и тем, что при  $a > 0$ ,  $b > 0$  из  $a^n = b^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , следует  $a = b$ . Проверим, например, равенство (12).

Так как

$$((a^m)^{1/n})^n = a^m, \quad ((a^{1/n})^m)^n = ((a^{1/n})^n)^m = a^m, \quad (17)$$

то из равенств (17) следует равенство (12).

#### 4. Показательная функция.

а) *Свойства функции  $a^r$ , где  $a > 1$ ,  $r \in \mathbb{Q}$ .*

Утверждение 5. *Если  $a > 1$ , то*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall r \in \mathbb{Q}: |r| < \delta \rightarrow |a^r - 1| < \varepsilon. \quad (18)$$

○ В § 4 (пример 8) было показано, что если  $a > 1$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = 1. \quad (19)$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{-1/n} = 1. \quad (20)$$

Заметим, что соотношения (19) и (20) справедливы и в случае, когда  $0 < a \leq 1$ .

Из (19) и (20) следует, что если  $a > 1$ , то

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists p \in \mathbf{N}: 0 < a^{1/p} - 1 < \varepsilon, \quad 0 < 1 - a^{-1/p} < \varepsilon,$  где  $p = p(\varepsilon)$ , откуда получаем

$$1 - \varepsilon < a^{-1/p} < a^{1/p} < 1 + \varepsilon.$$

Пусть  $r$  — любое рациональное число такое, что  $|r| < 1/p$ , т. е.  $-1/p < r < 1/p$ . Тогда в силу монотонности функции  $a^r$  при  $a > 1$  (неравенство (16)) получаем

$$a^{-1/p} < a^r < a^{1/p}.$$

Таким образом, для любого  $\varepsilon > 0$  существует число  $\delta = 1/p > 0$  такое, что для всех рациональных чисел  $r$ , удовлетворяющих условию  $|r| < \delta$ , выполняются неравенства

$$1 - \varepsilon < a^{-1/p} < a^r < a^{1/p} < 1 + \varepsilon,$$

откуда находим  $-\varepsilon < a^r - 1 < \varepsilon$ , т. е. справедливо утверждение 5. ●

Утверждение 6. Если последовательность рациональных чисел  $\{r_n\}$  сходится, то последовательность  $\{a^{r_n}\}$ , где  $a > 1$ , также сходится.

○ Из сходимости последовательности  $\{r_n\}$  следует ее ограниченность, т. е.

$$\exists \alpha, \beta: \forall n \in \mathbf{N} \rightarrow \alpha \leq r_n \leq \beta, \quad \alpha \in \mathbf{Q}, \quad \beta \in \mathbf{Q},$$

откуда в силу (16) получаем

$$a^\alpha \leq a^{r_n} \leq a^\beta.$$

Учитывая, что  $a^\alpha > 0$ , и обозначая  $C = a^\beta$ , находим, что

$$\exists C > 0: \forall n \in \mathbf{N} \rightarrow 0 < a^{r_n} \leq C. \quad (21)$$

В силу (18)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall r \in \mathbf{Q}: |r| < \delta \rightarrow |a^r - 1| < \frac{\varepsilon}{C}. \quad (22)$$

Так как сходящаяся последовательность удовлетворяет условию Коши (§ 8), то по найденному в соотношении (22) числу  $\delta > 0$  можно подобрать номер

$$N_\varepsilon: \forall n \geq N_\varepsilon, \quad \forall m \geq N_\varepsilon \rightarrow |r_n - r_m| < \delta. \quad (23)$$

Из неравенств (22) и (23) следует, что

$$|a^{r_n - r_m} - 1| < \frac{\varepsilon}{C}. \quad (24)$$

Из неравенств (21) и (24) получаем

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| = |a^{r_m}(a^{r_n - r_m} - 1)| < C \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon: \forall n \geq N_\varepsilon, \quad \forall m \geq N_\varepsilon \rightarrow |a^{r_n} - a^{r_m}| < \varepsilon,$$

т. е.  $\{a^{r_n}\}$  — фундаментальная последовательность. В силу критерия Коши она сходится. ●

б) *Определение показательной функции.* Пусть  $x$  — произвольная точка числовой прямой, и пусть  $\{r_n\}$  — последовательность рациональных чисел, сходящихся к  $x$ , т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$ . Предполагая, что  $a > 0$ , положим по определению

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}. \quad (25)$$

Если  $a > 1$ , то предел (25) существует в силу утверждения 6. Если  $0 < a < 1$ , то  $a^{r_n} = \frac{1}{b^{r_n}}$ , где  $b = \frac{1}{a} > 1$ , откуда следует, что существует предел (25) и при  $a \in (0, 1)$ , так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} b^{r_n} = b^x > 0$  (см. доказанное ниже неравенство (29)). При  $a = 1$  предел (25) существует и равен 1, так как  $1^r = 1$  для любого  $r \in \mathbb{Q}$ . Заметим, что определение *показательной функции* является корректным, т. е. предел (25) не зависит от выбора последовательности рациональных чисел, сходящейся к  $x$ , в силу леммы из § 10 (п. 6).

в) *Свойства функции*  $y = a^x$ ,  $a > 1$ .

Свойство 1. Для любых вещественных чисел  $x_1$  и  $x_2$  выполняется равенство

$$a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}. \quad (26)$$

○ Пусть  $\{r_n\}$  и  $\{\rho_n\}$  — последовательности рациональных чисел такие, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x_1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = x_2$ . Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} (r_n + \rho_n) = x_1 + x_2$  и по доказанному выше существуют следующие пределы:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = a^{x_1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\rho_n} = a^{x_2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n + \rho_n} = a^{x_1 + x_2}.$$

Так как в силу равенства (14)  $a^{r_n + \rho_n} = a^{r_n} a^{\rho_n}$ , то, переходя в последнем равенстве к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получаем равенство (26). ●

Из этой формулы, в частности, следует, что для любого  $x \in \mathbb{R}$  выполняется равенство

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}. \quad (27)$$

Свойство 2. Функция  $y = a^x$ , где  $a > 1$ , строго возрастает на  $\mathbb{R}$ .

○ Нужно доказать, что

$$\forall x_1 \in \mathbb{R}, \quad \forall x_2 \in \mathbb{R}: x_1 < x_2 \rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}. \quad (28)$$

Заметим сначала, что для любого  $x \in \mathbb{R}$  выполняется неравенство

$$a^x > 0. \quad (29)$$

В самом деле, пусть  $r \in \mathbb{Q}$  и  $r < x$ . Рассмотрим последовательность рациональных чисел  $\{r_n\}$  такую, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$  и  $r_n > r$  при  $n \in \mathbb{N}$ .

Тогда  $a^{r_n} > a^r$  в силу (16), откуда, переходя к пределу, получаем  $a^x \geq a^r$ , где  $a^r > 0$ . Итак,  $a^x \geq a^r > 0$ , т. е. выполняется неравенство (29).

Чтобы доказать неравенство (28), умножим обе части его на  $a^{-x_1} > 0$  и, пользуясь свойством 1, получим неравенство

$$a^{x_2 - x_1} > 1, \quad x_2 > x_1,$$

равносильное неравенству (28). Полагая  $x_2 - x_1 = x$ , получим неравенство

$$a^x > 1, \quad \text{если } x > 0. \quad (30)$$

Итак, для доказательства утверждения (28) достаточно доказать равносильное ему утверждение (30).

Пусть  $r \in \mathbb{Q}$  таково, что  $0 < r < x$ , и пусть  $\{r_n\}$  — последовательность рациональных чисел, удовлетворяющая условиям  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$  и  $r_n > r$  для  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда, используя неравенства (16) и (13), имеем  $a^{r_n} > a^r > 1$ , откуда, переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получаем  $a^x \geq a^r > 1$ . Свойство 2 доказано. ●

Свойство 3. Функция  $y = a^x$ , где  $a > 1$ , непрерывна на  $\mathbb{R}$ .

○ Пусть  $x_0$  — произвольная точка множества  $\mathbb{R}$ ,  $\Delta y = a^{x_0 + \Delta x} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{\Delta x} - 1)$ . Нужно доказать, что  $a^{\Delta x} \rightarrow 1$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  или

$$\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1. \quad (31)$$

Пусть  $\{x_n\}$  — произвольная последовательность вещественных чисел такая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ . В силу свойств вещественных чисел найдутся последовательности рациональных чисел  $\{r_n\}$  и  $\{r'_n\}$ , удовлетворяющие при  $n \in \mathbb{N}$  условию

$$x_n - \frac{1}{n} < r_n < x_n < r'_n < x_n + \frac{1}{n},$$

откуда, используя свойство 2, получаем

$$a^{r_n} < a^{x_n} < a^{r'_n}. \quad (32)$$

Так как  $r'_n \rightarrow 0$  и  $r_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то из (18) следует, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} =$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r'_n} = 1$ . Отсюда, используя неравенство (32), получаем

$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} = 1$ . Утверждение (31) доказано, откуда следует, что существует

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} a^{x_0 + \Delta x}$ , равный  $a^{x_0}$ , т. е. функция  $a^x$  непрерывна в точке  $x_0$ .

Так как  $x_0$  — произвольная точка множества  $\mathbb{R}$ , то функция  $a^x$  непрерывна на  $\mathbb{R}$ . ●

Свойство 4. Для любого  $x_1 \in \mathbb{R}$  и любого  $x_2 \in \mathbb{R}$  справедливо равенство

$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}. \quad (33)$$

○ а) Пусть  $x_2 = r \in \mathbb{Q}$ ,  $x_1 \in \mathbb{R}$ , и пусть  $\{r_n\}$  — последовательность рациональных чисел такая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x_1$ . Тогда, используя равенство (14), получаем

$$(a^{r_n})^r = a^{r r_n}. \quad (34)$$

Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} r r_n = r x_1$ , то по определению показательной функции существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r r_n} = a^{r x_1}$ .



Обозначим  $a^{r_n} = t_n$ ,  $a^{x_1} = t_0$ . Тогда по определению показательной функции существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0$ , и в силу непрерывности степенной функции с рациональным показателем в левой части равенства (34) существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^{r_n})^r = (a^{x_1})^r$ . Отсюда следует, что справедливо равенство

$$(a^{x_1})^r = a^{x_1 r} \quad (35)$$

для любого  $x_1 \in R$  и любого  $r \in Q$ .

б) Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — произвольные вещественные числа, и пусть  $\{\rho_n\}$  — любая последовательность рациональных чисел такая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = x_2$ . Из равенства (35) при  $r = \rho_n$  получаем

$$(a^{x_1})^{\rho_n} = a^{x_1 \rho_n}. \quad (36)$$

Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_1 \rho_n = x_1 x_2$ , то в силу свойства 3 правая часть равенства (36) имеет при  $n \rightarrow \infty$  предел, равный  $a^{x_1 x_2}$ . Покажем, что левая часть (36) имеет предел, равный  $(a^{x_1})^{x_2}$ . Обозначим  $a^{x_1} = b$ . Тогда по определению показательной функции существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^{x_1})^{\rho_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} b^{\rho_n} = b^{x_2} = (a^{x_1})^{x_2}$ . Равенство (33) доказано. ●

Свойство 5. Если  $a > 1$ , то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \quad (37)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0. \quad (38)$$

○ Из неравенства  $x \geq [x]$  в силу свойства 2 получаем  $a^x \geq a^{[x]}$ . Так как  $a > 1$ , то  $a = 1 + \alpha$ , где  $\alpha > 0$ . Применяя неравенство Бернулли, имеем

$$a^{[x]} = (1 + \alpha)^{[x]} > \alpha^{[x]} > \alpha(x - 1).$$

Итак,  $a^x > \alpha(x - 1)$ , где  $\alpha > 0$ , откуда следует соотношение (37).

Если  $x < 0$ , то, используя равенство  $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$  и соотношение (37), получаем утверждение (38). ●

Итак, показательная функция  $y = a^x$ , где  $a > 1$ , непрерывна на всей числовой оси и строго возрастает; множество ее значений — интервал  $(0, +\infty)$ .

Замечание 2. Свойства 1, 3, 4 остаются в силе и для показательной функции  $y = a^x$ , где  $0 < a < 1$ .

Однако в отличие от функции  $y = a^x$ ,  $a > 1$ , которая является строго возрастающей, функция  $y = a^x$ ,  $0 < a < 1$ , строго убывает, так как  $a^x = \frac{1}{b^x}$ , где  $b = \frac{1}{a} > 1$ . Из (37) и (38) следует, что если  $0 < a < 1$ , то

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0.$$

На рис. 12.10 и 12.11 изображены графики показательной функции  $y = a^x$  для случаев  $a > 1$  и  $0 < a < 1$ .

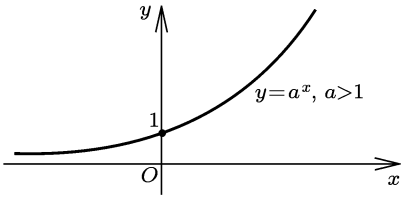


Рис. 12.10

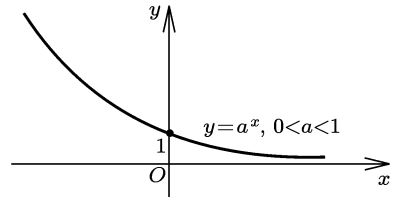


Рис. 12.11

**Замечание 3.** В качестве основания показательной функции часто используют число  $e$ , а функцию  $y = e^x$  называют *экспоненциальной* и обозначают  $\exp x$ .

**Пример 3.** Построить график функции  $y = e^{1/x}$ .

$\Delta$  Функция  $e^{1/x}$  определена при  $x \neq 0$ , принимает положительные значения при всех  $x \neq 0$ , является строго убывающей на интервалах  $E_1 = (-\infty, 0)$  и  $E_2 = (0, +\infty)$ , причем  $e^{1/x} < 1$  при  $x \in E_1$  и  $e^{1/x} > 1$  при  $x \in E_2$ . Учитывая, что

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1/x} = 1 - 0, \quad \lim_{x \rightarrow -0} e^{1/x} = +0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} e^{1/x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1/x} = 1 + 0,$$

строим график функции  $y = e^{1/x}$  (рис. 12.12).  $\blacktriangle$

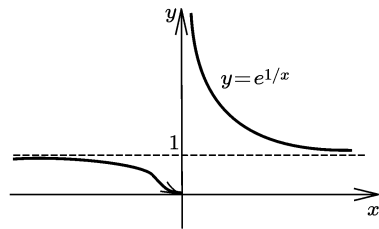


Рис. 12.12

**5. Логарифмическая функция.** По теореме об обратной функции на промежутке  $(0, +\infty)$  определена функция, обратная к функции  $y = a^x$ ,  $a > 1$ . Эта функция называется *логарифмической* и обозначается  $y = \log_a x$ . В силу свойств обратных функций логарифмическая функция с основанием  $a > 1$  является непрерывной и строго возрастающей.

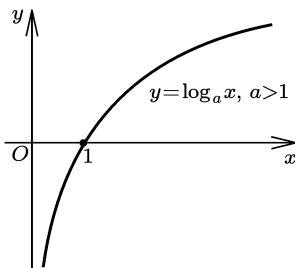


Рис. 12.13

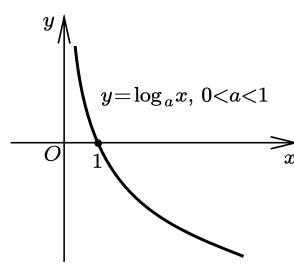


Рис. 12.14

Множество ее значений — вся числовая прямая. График функции  $y = \log_a x$ , где  $a > 1$ , изображен на рис. 12.13.

Аналогично определяется функция  $y = \log_a x$ , где  $0 < a < 1$ . Эта функция, график которой изображен на рис. 12.14, является непрерывной и строго убывающей на промежутке  $(0, +\infty)$ .

Пусть  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ . Тогда по свойствам взаимно обратных функций справедливы равенства

$$\begin{aligned} a^{\log_a x} &= x, & x > 0, \\ \log_a a^x &= x, & x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (39)$$

Если  $x > 0$ ,  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$ , то из свойства 1 показательной функции и формулы (39) следует, что

$$\begin{aligned} \log_a (x_1 x_2) &= \log_a x_1 + \log_a x_2, \\ \log_a \frac{x_1}{x_2} &= \log_a x_1 - \log_a x_2, \\ \log_a x^\alpha &= \alpha \log_a x, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Логарифмируя равенство (39) по основанию  $b$ , где  $b > 0$ ,  $b \neq 1$ , получаем следующую формулу перехода от одного основания к другому:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a},$$

откуда при  $x = b$  находим формулу

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Отметим, что в качестве основания логарифмов часто используется число  $e$ . Логарифм числа  $x$  с основанием  $e$  называют *натуральным* и обозначают  $\ln x$ .

**6. Гиперболические функции и обратные к ним.** Функции, заданные формулами

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

называют соответственно *гиперболическим косинусом* и *гиперболическим синусом*.

Эти функции определены и непрерывны на  $\mathbb{R}$ , причем  $\operatorname{ch} x$  — четная функция, а  $\operatorname{sh} x$  — нечетная функция. Графики функций  $y = \operatorname{ch} x$  и  $y = \operatorname{sh} x$  изображены на рис. 12.15.

Из определения гиперболических функций  $\operatorname{sh} x$  и  $\operatorname{ch} x$  следует, что

$$\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x = e^x, \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad (40)$$

$$\operatorname{ch} 2x = 1 + 2 \operatorname{sh}^2 x, \quad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x. \quad (41)$$

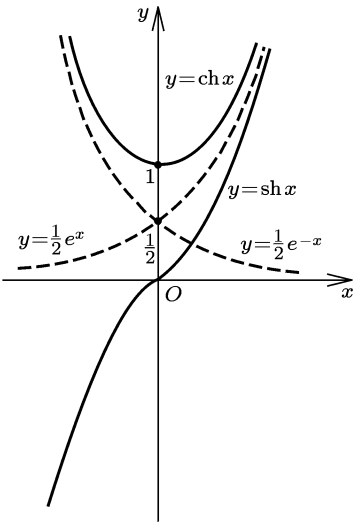


Рис. 12.15

По аналогии с тригонометрическими функциями *гиперболические тангенс* и *котангенс* определяются соответственно формулами

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

Функция  $\operatorname{th} x$  определена и непре-

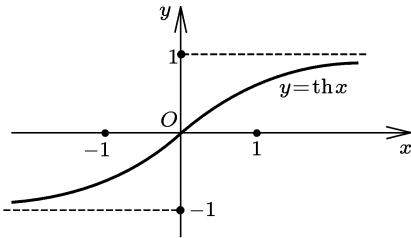


Рис. 12.16

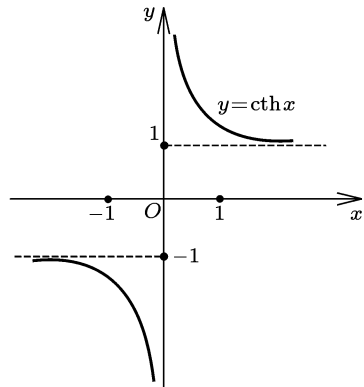


Рис. 12.17

рывна на  $\mathbb{R}$ , а функция  $\operatorname{cth} x$  определена и непрерывна на множестве  $\mathbb{R}$  с выколотой точкой  $x = 0$ ; обе функции нечетные, их графики представлены на рис. 12.16 и рис. 12.17.

Можно показать (см. § 20, пример 1), что функции  $y = \operatorname{sh} x$ ,  $y = \operatorname{th} x$  и  $y = \operatorname{ch} x$ ,  $x > 0$ , строго возрастающие, а функция  $\operatorname{ch} x$ ,  $x \leq 0$ , строго убывающая. Поэтому указанные функции обратимы. Обозначим обратные к ним функции соответственно через  $\operatorname{arsh} x$ ,  $\operatorname{arth} x$ ,  $\operatorname{arch}_+ x$ ,  $\operatorname{arch}_- x$ .

Рассмотрим функцию, обратную к функции  $\operatorname{sh} x$ , т. е. функцию  $\operatorname{arsh} x$  (читается *арча-синус* от  $x$ ). Выразим ее через элементарные.

Решая уравнение  $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$  относительно  $x$ , получаем  $e^x = y \pm \sqrt{1 + y^2}$ . Так как  $e^x > 0$ , то  $e^x = y + \sqrt{1 + y^2}$ , откуда  $x = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$ . Заменяя  $x$  на  $y$ , а  $y$  на  $x$ , находим формулу для функции, обратной для гиперболического синуса:

$$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Замечание 4.** Название “гиперболические функции” объясняется тем, что уравнения  $x = \operatorname{ch} t$ ,  $y = \operatorname{sh} t$  можно рассматривать как параметрические уравнения гиперболы  $x^2 - y^2 = 1$  (см. формулу (40)). Параметр  $t$  в уравнениях гиперболы равен удвоенной площади гиперболического сектора (см. [3, т. 2, п. 330]). Это отражено в обозначениях и названиях обратных гиперболических функций, где частица *ар* есть сокращение латинского (и английского) слова *area* — площадь.

**Упражнение 4.** Доказать формулы

$$\operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}, \quad |x| < 1,$$

$$\begin{aligned}\operatorname{arch}_+ x &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1, \\ \operatorname{arch}_- x &= \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1.\end{aligned}$$

**7. Степенная функция с любым вещественным показателем.** В п. 3 была рассмотрена степенная функция вида  $x^r$ , где  $r \in \mathbb{Q}$ . Степенная функция с любым вещественным показателем  $\alpha$  при  $x > 0$  выражается формулой

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}. \quad (42)$$

Функция  $x^\alpha$  непрерывна при  $x > 0$  как суперпозиция показательной функции  $e^t$  и функции  $t = \alpha \ln x$ , которые являются непрерывными. Из равенства (42) и свойств показательной и логарифмической функций следует, что функция  $x^\alpha$  строго возрастает при  $\alpha > 0$  и строго убывает при  $\alpha < 0$  на промежутке  $(0, +\infty)$ . Из формулы (42) и равенства  $\ln e^t = t$  следует, что

$$\ln x^\alpha = \alpha \ln x, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad x > 0.$$

**Замечание 5.** Если  $\alpha \in \mathbb{Q}$ , то функция  $x^\alpha$  может иметь смысл и при  $x < 0$ . Например, функции  $x^2$ ,  $\sqrt[3]{x}$  определены на  $\mathbb{R}$ , а функции  $1/x^5$ ,  $1/\sqrt[7]{x}$  определены при всех  $x \in \mathbb{R}$ , кроме  $x = 0$ .

**8. Показательно-степенная функция.** Пусть функции  $u(x)$  и  $v(x)$  определены на промежутке  $\Delta = (a, b)$ , причем для всех  $x \in \Delta$  выполняется условие  $u(x) > 0$ . Тогда функцию  $y$ , определяемую формулой

$$y = e^{v(x) \ln u(x)},$$

будем называть *показательно-степенной* и обозначать

$$u(x)^{v(x)}.$$

Таким образом, по определению

$$u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}.$$

Если  $u, v$  — функции, непрерывные на  $\Delta$ , то функция  $u^v$  непрерывна на  $\Delta$  как суперпозиция непрерывных функций  $e^t$  и  $t = v(x) \ln u(x)$ .

### § 13. Вычисление пределов функций

**1. Раскрытие неопределенностей.** При вычислении пределов часто встречается случай, когда требуется найти  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ , где  $f$  и  $g$  — бесконечно малые функции при  $x \rightarrow a$ , т. е.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ . В этом случае вычисление предела называют *раскрытием*

неопределенности вида  $\frac{0}{0}$ . Чтобы найти такой предел, обычно преобразуют дробь  $\frac{f(x)}{g(x)}$ , выделяя в числителе и знаменателе множитель вида  $(x - a)^k$ . Например, если в некоторой окрестности точки  $x = a$  функции  $f$  и  $g$  представляются в виде  $f(x) = (x - a)^k f_1(x)$ ,  $g(x) = (x - a)^k g_1(x)$ , где  $k \in \mathbb{N}$ , а функции  $f_1$  и  $g_1$  непрерывны в точке  $a$ , то  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$  при  $x \neq a$ , откуда следует, что  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_1(a)}{g_1(a)}$ , если  $g_1(a) \neq 0$ .

Аналогично, если  $f$  и  $g$  — бесконечно большие функции при  $x \rightarrow a$ , т. е.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ , то говорят, что их частное  $\frac{f(x)}{g(x)}$  и разность  $f(x) - g(x)$  представляют собой при  $x \rightarrow a$  неопределенности вида  $\frac{\infty}{\infty}$  и  $\infty - \infty$  соответственно. Для раскрытия неопределенностей таких типов обычно преобразуют частное или разность так, чтобы к полученной функции были применимы свойства пределов. Например, если  $f$  и  $g$  — многочлены степени  $n$ , т. е.  $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ ,  $g(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$ , где  $a_n \neq 0$ ,  $b_n \neq 0$ , то, разделив числитель и знаменатель дроби  $\frac{f(x)}{g(x)}$  на  $x^n$ , найдем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n + a_{n-1} \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n}}{b_n + b_{n-1} \frac{1}{x} + \dots + \frac{b_0}{x^n}} = \frac{a_n}{b_n}.$$

Пример 1. Найти  $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$ , если:

а)  $F(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x^3 - 2x + 1}$ ,  $a = 1$ ;

б)  $F(x) = \frac{\sqrt{x+21} - 5\sqrt{x-3}}{x^3 - 64}$ ,  $a = 4$ ;

в)  $F(x) = \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$ ,  $a = 0$ ;

г)  $F(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$ ,  $a = +\infty$ .

Δ а) Разложив числитель и знаменатель на множители, получим  $F(x) = \frac{(2x+3)(x-1)}{(x-1)(x^2+x-1)}$ , откуда  $\lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+3}{x^2+x-1} = 5$ .

б) Умножив числитель и знаменатель на функцию  $\varphi(x) = \sqrt{x+21} + 5\sqrt{x-3}$  и используя формулу  $x^3 - 64 = (x-4)\psi(x)$ , где  $\psi(x) = x^2 + 4x + 16$ , получим

$$\lim_{x \rightarrow 4} F(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+21-25(x-3)}{(x-4)\psi(x)\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-24}{\varphi(x)\psi(x)} = -\frac{24}{\varphi(4)\psi(4)} = -\frac{1}{20}.$$

в) Так как  $F(x) = \frac{\sin x}{x} \frac{1 - \cos x}{x^2} \frac{1}{\cos x}$ , где  $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ , то, используя первый замечательный предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  и непрерывность косинуса, получаем

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \frac{1}{2 \cos x} = \frac{1}{2}.$$

г) Преобразуем  $F(x)$ , умножив и разделив эту функцию на  $\varphi(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}$ . Получим  $F(x) = \frac{2x}{\varphi(x)}$ , откуда, разделив числитель и знаменатель на  $x$ , находим

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}.$$

Используя непрерывность функции  $\sqrt{t}$  при  $t = 1$ , получаем

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{2}{1 + 1} = 1. \quad \blacktriangle$$

## 2. Замена переменного при вычислении предела.

Теорема 1. Если существуют

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = b, \quad \lim_{y \rightarrow b} f(y) = A,$$

причем для всех  $x$  из некоторой проколотой окрестности точки  $a$  выполняется условие  $\varphi(x) \neq b$ , то в точке  $a$  существует предел сложной функции  $f(\varphi(x))$  и справедливо равенство

$$\lim_{x \rightarrow a} f(\varphi(x)) = \lim_{y \rightarrow b} f(y). \quad (1)$$

○ Согласно определению предела функции  $\varphi$  и  $f$  определены соответственно в  $\dot{U}_\delta(a)$  и  $\dot{U}_\varepsilon(b)$ , где  $\delta > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ , причем для  $x \in \dot{U}_\delta(a)$  выполняется условие  $\varphi(x) \in \dot{U}_\varepsilon(b)$ . Поэтому на множестве  $\dot{U}_\delta(a)$  определена сложная функция  $f(\varphi(x))$ . Пусть  $\{x_n\}$  — произвольная последовательность такая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  и  $x_n \in \dot{U}_\delta(a)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Обозначим  $y_n = \varphi(x_n)$ , тогда по определению предела функции  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ , где  $y_n \in \dot{U}_\varepsilon(b)$ . Так как существует  $\lim_{y \rightarrow b} f(y) = A$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\varphi(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = A.$$

Это означает, что  $\lim_{x \rightarrow a} f(\varphi(x)) = A$ , т. е. справедливо равенство (1). ●

Пример 2. Доказать, что:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1; \quad (2)$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{arctg } x}{x} = 1. \quad (3)$$

△ а) Пусть  $y = \arcsin x$ ; тогда  $x = \sin y$ , и поэтому

$$\frac{\arcsin x}{x} = \frac{y}{\sin y},$$

причем  $\{x \rightarrow 0\} \Leftrightarrow \{y \rightarrow 0\}$ . Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y}.$$

Используя первый замечательный предел  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$ , получаем отношение (2).

б) Если  $y = \arctg x$ , то  $x = \operatorname{tg} y$ , причем  $\{x \rightarrow 0\} \Leftrightarrow \{y \rightarrow 0\}$ . Так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\operatorname{tg} y},$$

где

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\operatorname{tg} y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} \cos y = 1,$$

то справедливо утверждение (3). ▲

### 3. Второй замечательный предел.

Теорема 2. Функция  $\varphi(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  имеет при  $x \rightarrow \infty$  предел, равный  $e$ , т. е.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (4)$$

○ Докажем сначала теорему 2 для случая, когда  $x \rightarrow +\infty$ . В § 6 было доказано, что

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Обозначим

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad z_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n. \quad (6)$$

Так как

$$y_n = a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad z_n = a_{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1}, \quad (7)$$

то из (5) и (7) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = e, \quad (8)$$

а из (8), пользуясь определением предела, получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon: \forall n \geq N_\varepsilon \rightarrow y_n \in U_\varepsilon(e), \quad z_n \in U_\varepsilon(e). \quad (9)$$

Пусть  $x$  — произвольное вещественное число такое, что  $x \geq N_\varepsilon$ , и пусть  $n = [x]$ . Тогда

$$N_\varepsilon \leq n \leq x < n + 1. \quad (10)$$

Из (10) следует, что

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n},$$



$$1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{n}. \quad (11)$$

Из (10) и (11) в силу монотонности показательной и степенной функций получаем

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad (12)$$

а из (12), (6) и (9) следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \forall x \geq N_\varepsilon \rightarrow e - \varepsilon < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e + \varepsilon.$$

По определению предела это означает, что теорема справедлива в случае, когда  $x \rightarrow +\infty$ .

Докажем, что

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (13)$$

Положим  $x = -1 - t$ , тогда  $t \rightarrow +\infty$  при  $x \rightarrow -\infty$  и

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)^{-1-t} = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \left(1 + \frac{1}{t}\right),$$

откуда следует, что справедливо равенство (13), так как  $\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \rightarrow e$  при  $t \rightarrow +\infty$  и  $1 + \frac{1}{t} \rightarrow 1$ . Теорема 2 доказана. ●

*Следствие.* Если  $\alpha(x) \neq 0$  для всех  $x$  из некоторой проколотой окрестности точки  $x_0$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ , то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (1 + \alpha(x))^{1/\alpha(x)} = e. \quad (14)$$

*В частности,*

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e. \quad (15)$$

○ Для доказательства утверждения (14) достаточно воспользоваться соотношением (4) и теоремой 1. ●

*Замечание 1.* Если  $\alpha(x) \neq 0$ ,  $\beta(x) \neq 0$  в некоторой проколотой окрестности точки  $x_0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$  и существует  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lambda$ , то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (1 + \alpha(x))^{1/\beta(x)} = e^\lambda. \quad (16)$$

*В частности,*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (1 + \mu\alpha(x))^{1/\alpha(x)} = e^\mu, \quad (17)$$

если  $\mu = \text{const}$ ,  $\alpha(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow x_0$  и  $\alpha(x) \neq 0$  для  $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$ .

○ Для доказательства утверждения (16) следует воспользоваться равенством  $(1 + \alpha(x))^{1/\beta(x)} = [(1 + \alpha(x))^{1/\alpha(x)}]^{\alpha(x)/\beta(x)}$  и соотношением (14). ●

Пример 3. Найти  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2 + 4}{3x^2 - 5} \right)^{x^2}$ .

△ Так как  $\left( \frac{3x^2 + 4}{3x^2 - 5} \right)^{x^2} = \frac{\left( 1 + \frac{4}{3x^2} \right)^{x^2}}{\left( 1 - \frac{5}{3x^2} \right)^{x^2}}$ , то, используя соотношение (17),

находим, что искомый предел равен  $e^{4/3 - (-5/3)} = e^3$ . ▲

Пример 4. Найти

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/\operatorname{tg}^2 x}.$$

△ Используя равенство  $\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ , по формуле (16) находим, что искомый предел равен  $e^\lambda$ , где

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \left( \frac{x}{\operatorname{tg} x} \right)^2 \left( -\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2},$$

т. е. равен  $e^{-1/2}$ . ▲

#### 4. Некоторые важные пределы.

Пример 5. Доказать, что если  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}. \quad (18)$$

△ Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^{1/x}, & x \neq 0, \\ e, & x = 0. \end{cases}$$

Эта функция определена в некоторой окрестности точки  $x = 0$  и непрерывна в точке  $x = 0$  в силу теоремы 2. Поэтому функция  $\log_a f(x)$  непрерывна в точке  $x = 0$  как суперпозиция непрерывных функций  $\log_a t$  и  $t = f(x)$ . Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_a f(x) = \log_a \left( \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} \right) = \log_a e.$$

Так как  $\log_a f(x) = \frac{\log_a(1+x)}{x}$  при  $x \neq 0$ , то искомый предел равен  $\log_a e$ . Из равенства (18) при  $a = e$  получаем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \quad \blacktriangle \quad (19)$$

Пример 6. Доказать, что если  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a. \quad (20)$$

△ Функция  $y = a^x - 1$  непрерывна и строго монотонна на  $R$  (возрастает при  $a > 1$  и убывает при  $0 < a < 1$ ). На промежутке  $(-1, +\infty)$  существует обратная к ней функция  $x = \log_a(1+y)$ , непрерывная и

строго монотонная. Учитывая, что  $y \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$  и используя формулу (18), получаем  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log_a(1+y)} = \ln a$ . Отметим важный частный случай формулы (20):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \quad \blacktriangle \quad (21)$$

Пример 7. Доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1. \quad (22)$$

$\Delta$  Так как  $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}$ , то, применяя формулу (21), получаем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \frac{1}{e^x} = 1. \quad \blacktriangle$$

Пример 8. Доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \quad (23)$$

для любого  $\alpha \in R$ ,  $\alpha \neq 0$ .

$\Delta$  Рассмотрим функцию  $y = (1+x)^\alpha - 1 = e^{\alpha \ln(1+x)} - 1$ . На множестве  $(-1, +\infty)$  существует обратная к ней функция  $x = x(y)$ , причём  $y \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$ . Из равенства  $(1+x)^\alpha = 1+y$  следует, что  $\alpha \ln(1+x) = \ln(1+y)$ . Поэтому  $\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \frac{y}{x} = \frac{y}{\ln(1+y)} \frac{\ln(1+y)}{x}$ , откуда, используя равенство (19), получаем соотношение (23).  $\blacktriangle$

### 5. Сравнение функций.

а) *Эквивалентные функции.* Если в некоторой проколотой окрестности точки  $x_0$  определены функции  $f, g, h$  такие, что

$$f(x) = g(x)h(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 1, \quad (24)$$

то функции  $f$  и  $g$  называют *эквивалентными (асимптотически равными)* при  $x \rightarrow x_0$  и пишут

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{при} \quad x \rightarrow x_0,$$

или, короче,  $f \sim g$  при  $x \rightarrow x_0$ .

Например,  $\sin x \sim x$  при  $x \rightarrow 0$ , так как  $\sin x = x \frac{\sin x}{x}$ , а  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ;  
 $\frac{x^4}{x^2+1} \sim x^2$  при  $x \rightarrow \infty$ , так как  $\frac{x^4}{x^2+1} = x^2 \frac{x^2}{x^2+1}$ , а  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$ ;  
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$ .

Упражнение 1. Показать, что отношение эквивалентности функций обладает свойствами:

- симметричности, т. е. если  $f \sim g$  при  $x \rightarrow x_0$ , то  $g \sim f$  при  $x \rightarrow x_0$ ;
- транзитивности, т. е. если  $f \sim g$  и  $g \sim \varphi$  при  $x \rightarrow x_0$ , то  $f \sim \varphi$  при  $x \rightarrow x_0$ .

Упражнение 2. Показать, что если  $f \sim g$  и  $f_1 \sim g_1$  при  $x \rightarrow x_0$ , то  $f f_1 \sim g g_1$  при  $x \rightarrow x_0$ .

Отметим, что функции  $f$  и  $g$ , не имеющие нулей в проколотой окрестности точки  $x_0$ , эквивалентны при  $x \rightarrow x_0$  тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 1.$$

Понятие эквивалентности обычно используют в тех случаях, когда обе функции  $f$  и  $g$  являются либо бесконечно малыми, либо бесконечно большими при  $x \rightarrow x_0$ .

Пределы, найденные в примерах 2, 5–8, позволяют составить следующую таблицу функций, эквивалентных при  $x \rightarrow 0$ :

$$\begin{array}{l|l} \sin x \sim x & e^x - 1 \sim x \\ \operatorname{tg} x \sim x & \operatorname{sh} x \sim x \\ \operatorname{arcsin} x \sim x & \ln(1+x) \sim x \\ \operatorname{arctg} x \sim x & (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \end{array}$$

Эти соотношения остаются в силе при  $x \rightarrow x_0$ , если заменить в них  $x$  на функцию  $\alpha(x)$  такую, что  $\alpha(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow x_0$ . Например,

$$\begin{aligned} \sin x^2 &\sim x^2 \quad \text{при } x \rightarrow 0, \\ \operatorname{sh}(x-1)^3 &\sim (x-1)^3 \quad \text{при } x \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Пример 9. Доказать, что

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad \operatorname{ch} x - 1 \sim \frac{x^2}{2} \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

Δ а) Пользуясь тем, что  $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$  и  $\sin \frac{x}{2} \sim \frac{x}{2}$  при  $x \rightarrow 0$ , получаем  $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$  при  $x \rightarrow 0$ .

б) Так как  $\operatorname{ch} x - 1 = 2 \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}$  и  $\operatorname{sh} \frac{x}{2} \sim \frac{x}{2}$  при  $x \rightarrow 0$ , то  $\operatorname{ch} x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$  при  $x \rightarrow 0$ . ▲

б) Замена функций эквивалентными при вычислении пределов.

Теорема 3. Если  $f \sim f_1$  и  $g \sim g_1$  при  $x \rightarrow x_0$ , то из существования предела функции  $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$  при  $x \rightarrow x_0$  следует существование предела

функции  $\frac{f(x)}{g(x)}$  при  $x \rightarrow x_0$  и справедливость равенства

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}. \quad (25)$$

○ По условию  $f \sim f_1$  и  $g \sim g_1$  при  $x \rightarrow x_0$ . Это означает, что  $f(x) = f_1(x)h(x)$  и  $g(x) = g_1(x)h_1(x)$ , где  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 1$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} h_1(x) = 1$ .

Так как существует  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$  и  $h_1(x) \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow x_0$ , то найдется такая проколотая окрестность точки  $x_0$ , в которой определены

функции  $f_1, g_1, h_1$ , причем  $g_1(x) \neq 0$  и  $h_1(x) \neq 0$ , откуда следует, что в этой окрестности определена функция  $g(x) = g_1(x)h_1(x)$  такая, что  $g(x) \neq 0$ .

Следовательно, в некоторой проколотой окрестности точки  $x_0$  определена функция  $\frac{f(x)}{g(x)}$  и

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{h(x) f_1(x)}{h_1(x) g_1(x)}.$$

Так как существует  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ , а  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} h_1(x) = 1$ , то существует  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  и справедливо равенство (25). ●

Пример 10. Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x (e^x - 1)}{\cos x - \cos 3x}$ .

△ Так как  $\arcsin x \sim x$ ,  $e^x - 1 \sim x$ ,  $\cos x - \cos 3x = 2 \sin x \sin 2x$ ,  $\sin x \sim x$ ,  $\sin 2x \sim 2x$ , то  $\arcsin x (e^x - 1) \sim x^2$ ,  $\cos x - \cos 3x \sim 4x^2$  при  $x \rightarrow 0$ . Отсюда по теореме 3 следует, что искомый предел равен  $1/4$ . ▲

в) *Понятие бесконечно малой функции по сравнению с другой.* Если в некоторой проколотой окрестности точки  $x_0$  определены функции  $f, g, \alpha$  такие, что

$$f(x) = g(x)\alpha(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0, \quad (26)$$

то функцию  $f$  называют *бесконечно малой по сравнению с функцией  $g$  при  $x \rightarrow x_0$*  и пишут

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \rightarrow x_0, \quad (27)$$

или, короче,  $f = o(g)$ ,  $x \rightarrow x_0$ .

Эта запись читается так: “ $f$  есть  $o$  малое от  $g$  при  $x$ , стремящемся к  $x_0$ ”. В частности, запись  $f(x) = o(1)$ ,  $x \rightarrow x_0$ , означает, что  $f(x)$  является бесконечно малой функцией при  $x \rightarrow x_0$ . Если  $g(x) \neq 0$  в некоторой проколотой окрестности точки  $x_0$ , то соотношение (27) можно записать в виде

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

или в виде

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(g)}{g} = 0.$$

Следует иметь в виду, что функции  $f$  и  $g$ , о которых идет речь в записи (27), не обязательно являются бесконечно малыми при  $x \rightarrow x_0$ . Например, если  $x \rightarrow \infty$ , то  $x^2 = o(x^4)$ , а функции  $x^2$  и  $x^4$  являются бесконечно большими при  $x \rightarrow \infty$ .

В случае когда функция  $g$  в записи (26) является бесконечно малой, говорят, что при  $x \rightarrow x_0$  функция  $f$  — *бесконечно малая более высокого порядка*, чем  $g$ . Например, при  $x \rightarrow 0$  функции  $x^2, \cos x \operatorname{sh}^2 x$ ,

$\operatorname{tg}^3 x \sin \frac{1}{x}$  — бесконечно малые более высокого порядка, чем  $x$ . Поэтому справедливы равенства

$$x^2 = o(x), \quad \cos x \operatorname{sh}^2 x = o(x), \quad \operatorname{tg}^3 x \sin \frac{1}{x} = o(x), \quad x \rightarrow 0.$$

Символ  $o(x)$  в этих равенствах служит для обозначения множества или, как принято говорить, класса функций, бесконечно малых более высокого порядка, чем  $x$  при  $x \rightarrow 0$ . Поэтому правильнее было бы вместо, например, равенства  $x^2 = o(x)$ ,  $x \rightarrow 0$ , писать  $x^2 \in o(x)$ ,  $x \rightarrow 0$ . Однако вторая запись неудобна для применения при выполнении операций над функциями.

Из сказанного следует, что равенство вида (27) не является равенством в обычном смысле. Такое равенство в соответствии с определением записи (27) следует читать только слева направо, поскольку правая часть обозначает класс функций, бесконечно малых по сравнению с  $g(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , а  $f(x)$  — какая-либо функция этого класса.

Отметим некоторые важные для дальнейшего изложения (см. § 18) свойства символа  $o(g)$ , считая, что  $x \rightarrow x_0$ , а равенства, содержащие этот символ, читаются слева направо (здесь  $C$  — постоянная):

$$\left. \begin{array}{l} o(Cg) = o(g) \\ Co(g) = o(g) \\ o(g) + o(g) = o(g) \\ o(o(g)) = o(g) \\ o(g + o(g)) = o(g) \end{array} \right\} \begin{array}{l} o(g^n)o(g^m) = o(g^{n+m}), \quad n \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{N} \\ g^{n-1}o(g) = o(g^n), \quad n \in \mathbb{N} \\ (o(g))^n = o(g^n), \quad n \in \mathbb{N} \\ \frac{o(g^n)}{g} = o(g^{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}, \quad g \neq 0 \text{ в } \dot{U}_\delta(x_0) \end{array}$$

Докажем первое из этих свойств.

○ Надо показать, что любая функция, принадлежащая классу функций  $o(Cg)$ , принадлежит и классу функций  $o(g)$ , т. е. если  $f = o(Cg)$ , то  $f = o(g)$ ,  $x \rightarrow x_0$ .

По определению запись  $f = o(Cg)$  означает, что  $f(x) = Cg(x)\alpha(x)$ , где  $\alpha(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow x_0$ . Но тогда

$$f(x) = g(x)C\alpha(x) = g(x)\alpha_1(x),$$

где  $\alpha_1(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow x_0$ , т. е.  $f = o(g)$ ,  $x \rightarrow x_0$ . ●

Упражнение 3. Доказать, что если  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , а  $g(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow x_0$ , то:

а)  $o(g^m) = o(g^n)$  при  $m \leq n$ ;

б)  $o\left(\sum_{k=1}^n C_k g^k\right) = o(g)$ ,  $C_1, \dots, C_n$  — постоянные.

Наряду с символом  $o(g)$  в математике употребляют символ  $O(g)$ . Запись

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \rightarrow x_0, \quad (28)$$

означает, что в некоторой проколотой окрестности  $\dot{U}_\delta(x_0)$  точки  $x_0$  определены функции  $f$ ,  $g$ ,  $\varphi$  такие, что

$$f(x) = g(x)\varphi(x), \quad (29)$$

где  $\varphi(x)$  — функция, ограниченная на  $\dot{U}_\delta(x_0)$ , т. е.

$$\exists C > 0: \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \rightarrow |\varphi(x)| \leq C.$$

Соотношение (28) читается так: “ $f(x)$  есть  $O$  большое от  $g(x)$  при  $x$ , стремящемся к  $x_0$ ”.

Например,

$$\begin{aligned} x^2 + 2x^3 &= O(x^2), & x \rightarrow 0; \\ x^2 + 2x^3 &= O(x^3), & x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Аналогично запись

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \in E,$$

означает, что на множестве  $E$  справедливо равенство (29), где  $\varphi$  — функция, ограниченная на этом множестве. Отсюда следует, что

$$|f(x)| \leq C|g(x)|, \quad x \in E.$$

В частности, если  $f(x) = O(1)$ ,  $x \in E$ , то функция  $f$  ограничена на множестве  $E$ . Например, можно записать, что  $\cos x^2 = O(1)$ ,  $x \in R$ .

г) *Критерий эквивалентности функций.*

**Теорема 4.** *Для того чтобы функции  $f(x)$  и  $g(x)$  были эквивалентными при  $x \rightarrow x_0$ , необходимо и достаточно, чтобы*

$$f(x) = g(x) + o(g(x)), \quad x \rightarrow x_0. \quad (30)$$

○ Пусть  $f \sim g$  при  $x \rightarrow x_0$ ; тогда выполняются условия (24), и поэтому  $f(x) - g(x) = g(x)(h(x) - 1) = g(x)\alpha(x)$ , где  $\alpha(x) = h(x) - 1 \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow x_0$ . Отсюда по определению символа  $o(g)$  следует, что  $f - g = o(g)$ ,  $x \rightarrow x_0$ , т. е. справедливо равенство (30)

Обратно: из равенства (30) следует, что  $f \sim g$  при  $x \rightarrow x_0$ . Действительно, если выполняется равенство (30), то  $f(x) = g(x) + g(x)\alpha(x)$ , где  $\alpha(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow x_0$ , откуда  $f(x) = g(x)h(x)$ , где  $h(x) = 1 + \alpha(x) \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow x_0$ , т. е.  $f(x) \sim g(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ . ●

**Упражнение 4.** Доказать, что

$$\{f \sim g \text{ при } x \rightarrow x_0\} \Leftrightarrow \{g(x) = f(x) + o(f(x)), \quad x \rightarrow x_0\}.$$

Теорема 4 позволяет приведенную в п. 5, а) таблицу эквивалентных функций записать в виде

$$\begin{array}{l|l} \sin x = x + o(x), & x \rightarrow 0 \\ \operatorname{tg} x = x + o(x), & x \rightarrow 0 \\ \operatorname{arcsin} x = x + o(x), & x \rightarrow 0 \\ \operatorname{arctg} x = x + o(x), & x \rightarrow 0 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} e^x - 1 = x + o(x), \quad x \rightarrow 0 \\ \operatorname{sh} x = x + o(x), \quad x \rightarrow 0 \\ \ln(1+x) = x + o(x), \quad x \rightarrow 0 \\ (1+x)^\alpha - 1 = \alpha x + o(x), \quad x \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

С помощью этой таблицы можно вычислять пределы функций.

Пример 11. Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt[3]{1+x}}{2 \operatorname{arctg} x - \arcsin x}$ .

△ Так как  $e^x - 1 = x + o(x)$ ,  $\sqrt[3]{1+x} - 1 = \frac{1}{3}x + o(x)$ ,  $\operatorname{arctg} x = x + o(x)$ ,  $\arcsin x = x + o(x)$ , то

$$e^x - \sqrt[3]{1+x} = \frac{2}{3}x + o(x),$$

$$2 \operatorname{arctg} x - \arcsin x = x + o(x) \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

Поэтому

$$\frac{e^x - \sqrt[3]{1+x}}{2 \operatorname{arctg} x - \arcsin x} = \frac{\frac{2}{3}x + o(x)}{x + o(x)} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{o(x)}{x}}{1 + \frac{o(x)}{x}},$$

где  $\frac{o(x)}{x} = o(1) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$ . Следовательно, искомый предел равен  $\frac{2}{3}$ . ▲

Пример 12. Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{\operatorname{ch} x} \right)^{1/(x \ln(1+x))}$ .

△ Используя результат примера 9 и асимптотическую формулу  $\ln(1+x) \sim x$  при  $x \rightarrow 0$ , получаем

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \operatorname{ch} x - 1 = \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

$$x \ln(1+x) = x(x + o(x)) = x^2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0.$$

Применяя формулу (16), находим

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/(x \ln(1+x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)^{1/(x^2 + o(x^2))} = e^{-1/2},$$

так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2} + o(1)}{1 + o(1)} = -\frac{1}{2}.$$

Аналогично получаем, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ch} x)^{1/(x \ln(1+x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)^{1/(x^2 + o(x^2))} = e^{1/2}.$$

Следовательно, искомый предел равен  $\frac{e^{-1/2}}{e^{1/2}} = e^{-1}$ . ▲

В заключение отметим, что в дальнейшем будут рассмотрены более эффективные методы вычисления пределов, основанные на использовании понятия производной (§ 18, 19).



## УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ III

1. Пусть функции  $f$  и  $g$  не имеют предела в точке  $x_0$ . Следует ли отсюда, что функции  $f + g$  и  $fg$  также не имеют предела в этой точке?

2. Доказать, что если функция  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ , а функция  $g$  разрывна в точке  $x_0$ , то функция  $f + g$  разрывна в этой точке.

3. Пусть функция  $f$  непрерывна в точке  $a$  и для каждого  $\delta > 0$  существуют точки  $x'_\delta \in U_\delta(a)$  и  $x''_\delta \in U_\delta(a)$  такие, что  $f(x'_\delta)f(x''_\delta) < 0$ . Доказать, что  $f(a) = 0$ .

4. Доказать, что если функция  $f$  непрерывна на промежутке  $[a, +\infty)$  и существует конечный  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , то эта функция ограничена на промежутке  $[a, +\infty)$ .

5. Доказать, что если функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и  $f(x) > 0$  для всех  $x \in [a, b]$ , то существует число  $M > 0$  такое, что  $f(x) > M$  для всех  $x \in [a, b]$ .

6. Доказать, что если функция  $f$  непрерывна на  $R$ , то функции  $|f(x)|$  и  $f(|x|)$  также непрерывны на  $R$ .

7. Доказать, что если функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то функции  $m(x) = \inf_{a \leq \xi \leq x} f(\xi)$  и  $M(x) = \sup_{a \leq \xi \leq x} f(\xi)$  также непрерывны на этом отрезке.

8. Доказать, что если функция  $f$  определена на отрезке  $[a, b]$ , является возрастающей и множество ее значений — отрезок  $[f(a), f(b)]$ , то эта функция непрерывна на  $[a, b]$ .

9. Доказать, что если функция непрерывна на отрезке и обратима, то она строго монотонна на этом отрезке.

10. Доказать, что если  $f$  и  $g$  — непрерывные на  $R$  и периодические функции, удовлетворяющие условию  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$ , то  $f(x) \equiv g(x)$ .

11. Доказать, что если  $a > 0$ , то  $a^{1/n} = 1 + \frac{1}{n} \ln a + o\left(\frac{1}{n}\right)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

12. Доказать, что если  $a > 0, b > 0$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = \sqrt{ab}$ .

13. Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a}) = \ln a, a > 0$ .

14. Доказать, что если  $a_k > 0$  ( $k = \overline{1, m}$ ), то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \sqrt[n]{a_k}\right)^n = \sqrt[m]{a_1 \dots a_m}$ .

15. Показать, что  $\sqrt{x + \sqrt{x}} \sim \sqrt[3]{x}$  при  $x \rightarrow +0$  и  $\sqrt{x + \sqrt{x}} \sim \sqrt{x}$  при  $x \rightarrow +\infty$ .

16. Найти функцию  $g(x)$  вида  $g(x) = Cx^\alpha$ , эквивалентную функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$ , если:

а)  $f(x) = \frac{x^4}{2x^2 + x + 3}, a = 0, a = \infty;$

б)  $f(x) = \sqrt[3]{x^6 + 3\sqrt[5]{x}}, a = 0, a = \infty;$

в)  $f(x) = \frac{\ln(1 + x + x^2)}{x^2}, a = 0;$

г)  $f(x) = \frac{\cos^2 3x - \cos^2 5x}{x}, a = 0.$

ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 14. Производная и дифференциал

1. Задачи, приводящие к понятию производной.

а) *Задача о скорости.* Пусть материальная точка движется по прямой, и пусть  $S = S(t)$  — путь, пройденный точкой за время  $t$  от начала движения. За промежуток времени от  $t$  до  $t + \Delta t$  точка пройдет путь  $S(t + \Delta t) - S(t)$ , поэтому средняя скорость за этот промежуток времени равна  $v_{\text{ср}} = \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$ . Если рассматриваемое движение не является равномерным, то  $v_{\text{ср}}$  при фиксированном  $t$  будет меняться при изменении  $\Delta t$ , и чем меньше  $\Delta t$ , тем лучше  $v_{\text{ср}}$  будет характеризовать движение точки в момент  $t$ .

*Скоростью точки в момент  $t$  (мгновенной скоростью)* называют предел, к которому стремится средняя скорость, когда  $\Delta t \rightarrow 0$ , т. е. скорость  $v$  в момент  $t$  определяется равенством

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}.$$

Таким образом, скорость движения в момент  $t$  — предел отношения приращения пути  $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$  за промежуток времени от  $t$  до  $t + \Delta t$  к приращению времени  $\Delta t$ , когда  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Например, если материальная точка движется по закону  $S = gt^2/2$  (закон свободного падения), то

$$v_{\text{ср}} = \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \frac{g}{2\Delta t} ((t + \Delta t)^2 - t^2),$$

или

$$v_{\text{ср}} = gt + \frac{g}{2} \Delta t,$$

откуда  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{ср}} = gt$ , т. е.  $v = gt$ .

б) *Задача о касательной.*

Пусть функция  $f$  определена в  $\delta$ -окрестности точки  $x_0$  и непрерывна при  $x = x_0$ . Рассмотрим вопрос о касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $M_0(x_0, y_0)$ , где  $y_0 = f(x_0)$ . Если  $\Delta x$  — приращение аргумента такое, что  $0 < |\Delta x| < \delta$ , то уравнение прямой  $l$  (рис. 14.1),

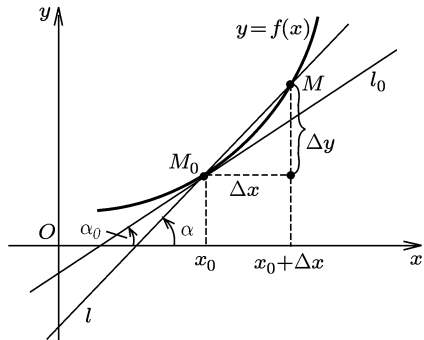


Рис. 14.1

проходящей через точки  $M_0$  и  $M(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ , можно записать в виде

$$y - y_0 = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0), \quad (1)$$

где

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Эту прямую называют *секущей*, а число  $k = \operatorname{tg} \alpha$  — *угловым коэффициентом прямой  $l$* ; здесь  $\alpha = \alpha(\Delta x)$  — угол, образуемый прямой  $l$  и осью  $Ox$  (этот угол отсчитывается от положительного направления оси  $Ox$  против часовой стрелки).

Пусть  $\Delta x \rightarrow 0$ , тогда  $\Delta y \rightarrow 0$  в силу непрерывности функции  $f$  при  $x = x_0$ , и поэтому

$$MM_0 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0.$$

*Касательной к кривой*, заданной уравнением  $y = f(x)$  в точке  $M_0$ , естественно назвать предельное положение секущей  $l$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Если существует

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k_0, \quad (2)$$

то существует предельное положение секущей. Таким образом, если предел (2) существует, то прямая, проходящая через точку  $M_0$  с угловым коэффициентом  $k_0$ , является касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $M_0$ .

Рассмотренные задачи, в которых речь идет о пределе отношения приращения функции к приращению аргумента, исторически привели к появлению понятия производной — одного из важнейших понятий математического анализа.

## 2. Определение производной.

**Определение 1.** Пусть функция  $y = f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$ , и пусть существует конечный предел отношения  $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Тогда этот предел называется *производной функции  $f$  в точке  $x_0$*  и обозначается  $f'(x_0)$ ,  $f'_x(x_0)$  или  $y'(x_0)$ , т. е.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (3)$$

Согласно определению производная функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  есть предел отношения приращения функции  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  к приращению аргумента  $\Delta x$  при условии, что  $\Delta x \rightarrow 0$ , т. е.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (4)$$

Из равенства (4) следует, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = \varepsilon(\Delta x),$$

где  $\varepsilon(\Delta x) \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , откуда получаем

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \Delta x \varepsilon(\Delta x). \quad (5)$$

Если  $\Delta x \rightarrow 0$ , то  $\Delta y \rightarrow 0$ , и поэтому из существования  $f'(x_0)$  следует непрерывность функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .

Операция вычисления производной называется *дифференцированием*.

**Пример 1.** Доказать, что функции  $y = C$ ,  $y = x^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = a^x$  имеют производные в каждой точке  $x \in \mathbb{R}$ , и найти эти производные.

$\Delta$  а) Если  $y = C$ , где  $C$  — постоянная, то  $\Delta y = C - C = 0$ , и поэтому

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0, \text{ т. е.}$$

$$C' = 0.$$

б) Если  $y = x^n$ , где  $n \in \mathbb{N}$ , то

$$\begin{aligned} \Delta y &= (x + \Delta x)^n - x^n = \\ &= x^n + C_n^1 x^{n-1} \Delta x + C_n^2 x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n - x^n, \\ \Delta y &= nx^{n-1} \Delta x + o(\Delta x), \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + o(1), \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1},$$

т. е.

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

в) Если  $y = \sin x$ , то

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2},$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Так как  $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \rightarrow \cos x$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  в силу непрерывности функции  $\cos x$ , а  $\frac{\sin t}{t} \rightarrow 1$  при  $t \rightarrow 0$ , то  $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \cos x$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , т. е.

$$(\sin x)' = \cos x.$$

г) Если  $y = \cos x$ , то

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2},$$

откуда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin x,$$

т. е.

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

д) Если  $y = a^x$ , то

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1), \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x},$$

откуда  $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow a^x \ln a$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , так как  $\frac{a^t - 1}{t} \rightarrow \ln a$  при  $t \rightarrow 0$  (§ 13, (20)).

Таким образом, если  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , то

$$(a^x)' = a^x \ln a. \quad (7)$$

Из формулы (7) при  $a = e$  получаем

$$(e^x)' = e^x. \quad \blacktriangle (8)$$

Замечание 1. Согласно формуле (8) производная показательной функции с основанием  $e$  совпадает с самой функцией. Этим и объясняется тот факт, что в математическом анализе и его приложениях в качестве основания степени и основания логарифмов обычно используется число  $e$ .

Пример 2. Найти производные функций  $y = \log_a x$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $x > 0$ ) и  $y = x^\alpha$  ( $\alpha \in \mathbf{R}$ ,  $x > 0$ ).

$\Delta$  а) Если  $y = \log_a x$ , то

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right), \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} \cdot \frac{1}{x},$$

откуда  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x \ln a}$ , так как  $\frac{\log_a(1+t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\ln a}$  при  $t \rightarrow 0$  (§ 13, (18)). Итак, если  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $x > 0$ , то

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}. \quad (9)$$

Из формулы (9) при  $a = e$  получаем

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \quad (10)$$

б) При  $\alpha = n$ , где  $n \in \mathbf{N}$ , производная функции  $x^\alpha$  вычисляется по формуле (6). Покажем, что для любого  $\alpha \in \mathbf{R}$  и при  $x > 0$  справедлива формула

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}. \quad (11)$$

Действительно, если  $y = x^\alpha$ , то

$$\Delta y = (x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha = x^\alpha \left( \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1 \right),$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = x^{\alpha-1} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Так как  $\frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} \rightarrow \alpha$  при  $t \rightarrow 0$  (§ 13, (23)), то  $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \alpha x^{\alpha-1}$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , т. е. имеет место равенство (11).  $\blacktriangle$

Теорема 1. Функция  $f(x)$  имеет производную в точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда в некоторой окрестности точки  $x_0$  эта функция представима в виде

$$f(x) = f(x_0) + f_1(x)(x - x_0), \quad (12)$$

где  $f_1(x)$  — функция, непрерывная в точке  $x_0$  и такая, что

$$f_1(x_0) = f'(x_0). \quad (13)$$

○ Рассмотрим функцию

$$f_1(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (14)$$

Она определена в некоторой проколотой окрестности точки  $x_0$ . Если существует  $f'(x)$ , то существует  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = f'(x_0)$ . Полагая  $f_1(x_0) = f'(x_0)$ , доопределим функцию  $f_1(x)$  по непрерывности в точке  $x_0$ . Функция  $f_1(x)$ , определяемая формулой (14) и условием (13), непрерывна в точке  $x_0$ , а из равенства (14) следует формула (12).

Обратно: из (12) следует (14), а из непрерывности функции  $f_1(x)$  в точке  $x_0$  следует, что существует  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = f_1(x_0)$ , т. е. существует

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \text{ и справедливо равенство (13). } \bullet$$

**3. Геометрический смысл производной.** Если функция  $y = f(x)$  имеет производную в точке  $x_0$ , т. е. существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0),$$

то существует предельное положение секущей  $l$  (см. рис. 14.1), заданной уравнением (1). Это означает, что в точке  $M_0(x_0, f(x_0))$  существует касательная  $l_0$  (см. рис. 14.1) к графику функции  $y = f(x)$ , причем согласно формуле (2)  $k_0 = f'(x_0)$ , где  $k_0$  — угловой коэффициент прямой  $l_0$ . Так как  $k_0 = \operatorname{tg} \alpha_0$ , где  $\alpha_0$  — угол, образуемый касательной с положительным направлением оси абсцисс, то

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha_0. \quad (15)$$

Таким образом, геометрический смысл производной состоит в том, что производная функции в данной точке равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке  $M_0(x_0, f(x_0))$ .

Уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $M_0(x_0, f(x_0))$ , получаемое из уравнения (1) заменой  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  на  $f'(x_0)$ , имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (16)$$

**Пример 3.** Записать уравнение касательной к графику функции  $y = e^x$ , параллельной прямой  $y = x - 1$ .

△ Так как угловой коэффициент касательной по условию равен угловому коэффициенту прямой  $y = x - 1$ , т. е. равен единице, то из уравнения  $f'(x) = e^x = 1$  получаем  $x_0 = 0$ , а по формуле (16) при  $x_0 = 0, y_0 = 1, f'(x_0) = 1$  находим уравнение касательной

$$y = x + 1. \quad \blacktriangle$$

**Пример 4.** Под каким углом график функции  $y = \sin x$  пересекает ось  $Ox$ ?

△ Синусоида пересекает ось абсцисс в точке  $x_k = k\pi$  ( $k \in Z$ ). Пусть  $\alpha_k$  — угол между осью  $Ox$  и графиком функции в точке с абсциссой  $x_k$ . По формуле (15), где  $f(x) = \sin x$ , находим

$$f'(x_k) = \cos k\pi = (-1)^k = \operatorname{tg} \alpha_k.$$

Следовательно, в точках  $x'_k = 2k\pi$  ( $k \in Z$ ) синусоида пересекает ось  $Ox$  под углом  $\frac{\pi}{4}$ , а в точках  $\tilde{x}_k = (2k + 1)\pi$  — под углом  $\frac{3\pi}{4}$  (рис. 14.2).

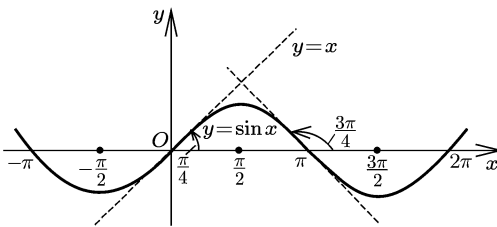


Рис. 14.2

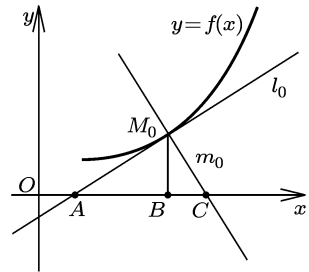


Рис. 14.3

Заметим, что касательная к графику функции  $y = \sin x$  в точке  $O$  лежит при  $x > 0$  выше графика функции  $y = \sin x$ , а при  $x < 0$  — ниже этого графика, так как  $|\sin x| < |x|$  при  $x \neq 0$ . ▲

Пусть существует  $f'(x_0)$ . Проведем через точку  $M_0(x_0, f(x_0))$  прямую  $m_0$ , перпендикулярную касательной  $l_0$  (рис. 14.3). Эту прямую называют *нормалью к графику функции*  $y = f(x)$  в точке  $M_0$ .

Если  $A, C, B$  — точки пересечения с осью  $Ox$  соответственно касательной  $l_0$ , нормали  $m_0$  и прямой, проходящей через  $M_0$  параллельно оси  $Oy$ , то отрезок  $AB$  называют *подкасательной*, а отрезок  $BC$  — *поднормалью*.

**Упражнение 1.** Показать, что если  $f'(x_0) \neq 0$ , то:

а) уравнение нормали  $m_0$  можно записать в виде

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0);$$

б)  $|AB| = \left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right|, \quad |BC| = |f(x_0)f'(x_0)|.$

**4. Односторонние и бесконечные производные.** По аналогии с односторонними пределами вводятся понятия левой и правой производных. Если функция  $y = f(x)$  непрерывна слева в точке  $x_0$  и существует предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \text{где } \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

то этот предел называют *левой производной функции  $f$  в точке  $x_0$*  и обозначают  $f'_-(x_0)$ . Аналогично, если функция  $y = f(x)$  непрерывна справа в точке  $x_0$ , то предел  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  называют *правой производной функции  $f$  в точке  $x_0$*  и обозначают  $f'_+(x_0)$ .

Прямые, проходящие через точку  $M_0(x_0, f(x_0))$  с угловыми коэффициентами  $f'_-(x_0)$  и  $f'_+(x_0)$ , называют соответственно *левой и правой касательными к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $M_0$* .

Из существования производной  $f'(x_0)$  следует существование  $f'_-(x_0)$  и  $f'_+(x_0)$  и равенство

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0). \quad (17)$$

В этом случае левая и правая касательные к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $M_0$  совпадают с касательной в точке  $M_0$ .

Обратно: если существуют левая и правая производные функции  $f$  в точке  $x_0$  и выполняется условие  $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ , то существует  $f'(x_0)$  и справедливо равенство (17).

**Пример 5.** Найти левую и правую производные функции  $f(x) = |x|$  в точке  $x_0 = 0$ .

$\Delta$  Здесь  $\Delta y = |\Delta x|$ , и поэтому

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1, \quad f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

Прямые  $y = -x$  и  $y = x$  являются соответственно левой и правой касательными к графику функции  $y = |x|$  в точке  $O$  (рис 14.4).  $\blacktriangle$

**Замечание 2.** Так как  $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$  для функции  $f(x) = |x|$ , то непрерывная в точке  $x_0 = 0$  функция  $|x|$  не имеет производной в этой точке. Этот пример показывает, что из непрерывности функции  $f$  в точке  $x_0$  не следует существование ее производной в данной точке.

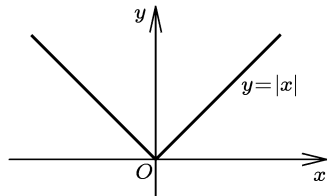


Рис. 14.4

Обратимся теперь к понятию бесконечной производной. Пусть функция  $y = f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , и пусть

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \infty. \quad (18)$$



Тогда прямую  $x = x_0$  называют *касательной к графику функции*  $y = f(x)$  в точке  $M_0(x_0, f(x_0))$ . Эту прямую можно рассматривать как предельное положение (при  $\Delta x \rightarrow 0$ ) секущей  $l$ , если уравнение (1) записать в виде

$$x - x_0 = \frac{\Delta x}{\Delta y}(y - y_0)$$

и воспользоваться тем, что  $\frac{\Delta x}{\Delta y} \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  в силу условия (18).

Если  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$ , то говорят, что *функция имеет в точке  $x_0$  производную, равную  $+\infty$* , и пишут  $f'(x_0) = +\infty$ . В этом случае односторонние пределы  $\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  и  $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  называют соответственно *левой и правой производной* функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  и обозначают  $f'_-(x_0)$  и  $f'_+(x_0)$ . Таким образом, если  $f'(x_0) = +\infty$ , то  $f'_-(x_0) = +\infty$  и  $f'_+(x_0) = +\infty$ .

Например, если  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ , то  $f'(0) = +\infty$ , так как  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} =$

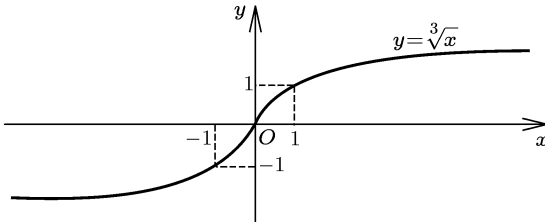


Рис. 14.5

$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = +\infty$ . В точке  $(0, 0)$  касательной к графику функции  $y = \sqrt[3]{x}$  является прямая  $x = 0$  (рис. 14.5).

Аналогично, если  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$ , то говорят, что *функция  $y = f(x)$  имеет в точке  $x_0$  производную, равную  $-\infty$* , и пишут  $f'(x_0) = -\infty$ .

В случае когда  $f'(x_0) = +\infty$  или  $f'(x_0) = -\infty$ , говорят, что *функция  $y = f(x)$  имеет в точке  $x_0$  бесконечную производную* (иногда добавляют: *определенного знака*).

Обратимся теперь к случаю, когда  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$ , но не выполняется ни одно из условий  $f'(x_0) = +\infty$  или  $f'(x_0) = -\infty$ . В этом случае говорят, что  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  не является бесконечностью определенного знака. Например, эта ситуация имеет место, если  $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$ , а  $\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$ . Этим свойством обладает функция  $y = \sqrt{|x|}$

(рис 14.6) в точке  $x_0 = 0$ , так как  $f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{|\Delta x|}}{\Delta x} = +\infty$ ,  
а  $f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\sqrt{|\Delta x|}}{\Delta x} = -\infty$ .

Упражнение 2. Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

не имеет односторонних производных при  $x = 0$ .

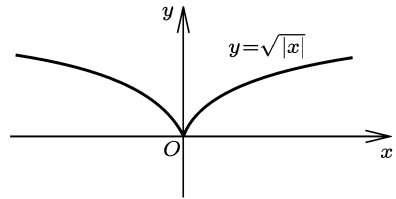


Рис. 14.6

## 5. Дифференциал функции.

Определение 2. Если функция  $y = f(x)$  определена в  $\delta$ -окрестности точки  $x_0$ , а приращение  $\Delta y$  функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  представимо в виде

$$\Delta y = A \Delta x + \Delta x \varepsilon(\Delta x), \quad (19)$$

где  $A = A(x_0)$  не зависит от  $\Delta x$ , а  $\varepsilon(\Delta x) \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , то функция  $f$  называется *дифференцируемой в точке  $x_0$* , а произведение  $A \Delta x$  называется ее *дифференциалом в точке  $x_0$*  и обозначается  $df(x_0)$  или  $dy$ .

Таким образом,

$$\Delta y = dy + o(\Delta x) \quad \text{при } \Delta x \rightarrow 0, \quad (20)$$

где

$$dy = A \Delta x. \quad (21)$$

Отметим, что приращение  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  можно рассматривать только для таких  $\Delta x$ , при которых точка  $x_0 + \Delta x$  принадлежит области определения функции  $f$ , в то время как дифференциал  $dy$  определен при любых  $\Delta x$ .

**Теорема 2.** Для того чтобы функция  $y = f(x)$  была дифференцируемой в точке  $x_0$ , необходимо и достаточно, чтобы эта функция имела производную в точке  $x_0$ . При этом дифференциал и производная связаны равенством

$$dy = f'(x_0) \Delta x. \quad (22)$$

○ Если функция  $y = f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то выполняется условие (19), и поэтому  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \varepsilon(\Delta x)$ , где  $\varepsilon(\Delta x) \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  ( $\Delta x \neq 0$ ), откуда следует, что существует  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A$ , т. е. существует  $f'(x_0) = A$ .

Обратно: если существует  $f'(x_0)$ , то справедливо равенство (5), и поэтому выполняется условие (19). Это означает, что функция  $f$  дифференцируема в точке  $x = x_0$ , причем коэффициент  $A$  в формулах (19) и (21) равен  $f'(x_0)$ , и поэтому дифференциал записывается в виде (22). ●

Таким образом, существование производной функции в данной точке равносильно дифференцируемости функции в этой точке. Функцию, имеющую производную в каждой точке интервала  $(a, b)$ , называют *дифференцируемой на интервале  $(a, b)$* .

Если функция  $f$  дифференцируема на интервале  $(a, b)$  и, кроме того, существуют  $f'_+(a)$  и  $f'_-(b)$ , то функцию  $f$  называют *дифференцируемой на отрезке  $[a, b]$* .

Замечание 3. Если  $f'(x_0) \neq 0$ , то из равенств (20) и (22) следует, что  $dy \neq 0$  при  $\Delta x \neq 0$  и

$$\Delta y \sim dy \text{ при } \Delta x \rightarrow 0.$$

В этом случае говорят, что дифференциал есть *главная линейная часть приращения функции*, так как дифференциал есть линейная функция от  $\Delta x$  и отличается от  $\Delta y$  на бесконечно малую более высокого порядка, чем  $\Delta x$ .

Замечание 4. Приращение  $\Delta x$  часто обозначают символом  $dx$  и называют *дифференциалом независимого переменного*. Поэтому формулу (22) записывают в виде

$$dy = f'(x_0) dx. \quad (23)$$

По формуле (23) можно найти дифференциал функции, зная ее производную. Например,  $d \sin x = \cos x dx$ ,  $de^x = e^x dx$ . Из формулы (23) получаем

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}. \quad (24)$$

Согласно формуле (24) производную можно рассматривать как отношение дифференциала функции к дифференциалу независимого переменного.

Замечание 5. Отбрасывая в формуле (20) член  $o(\Delta x)$ , т. е. заменяя приращение функции ее дифференциалом, получаем приближенное равенство  $\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$ , или

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \quad (25)$$

Формулу (25) можно использовать для вычисления приближенного значения  $f(x_0 + \Delta x)$  при малых  $\Delta x$ , если известны значения  $f(x_0)$  и  $f'(x_0)$ .

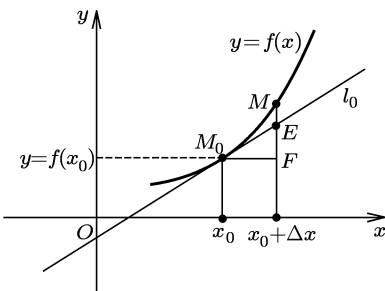


Рис. 14.7

**Пример 6.** Найти с помощью формулы (25) приближенное значение функции  $y = \sqrt[4]{x}$  при  $x = 90$ .  $\Delta$  Полагая в формуле (25)  $f(x) = \sqrt[4]{x}$ ,  $x_0 = 81$ ,  $\Delta x = 9$  и учитывая, что  $f(x_0) = \sqrt[4]{81} = 3$ ,  $f'(x) = \frac{1}{4}x^{-3/4}$ ,  $f'(x_0) = \frac{1}{4 \cdot 3^3}$ , получаем  $\sqrt[4]{90} \approx 3 + \frac{1}{12}$ , т. е.  $\sqrt[4]{90} \approx 3,083$ .  $\blacktriangle$

## 6. Геометрический и физический смысл дифференциала.

Выясним геометрический и физический смысл дифференциала. Если функция  $y = f(x)$  дифференцируема при  $x = x_0$ , то существует касательная  $l_0$  (рис 14.7) к графику этой функции в  $M_0(x_0, f(x_0))$ , задаваемая уравнением (16). Пусть

$M(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$  — точка графика функции  $f$  с абсциссой  $x_0 + \Delta x$ ,  $E$  и  $F$  — точки пересечения прямой  $x = x_0 + \Delta x$  с касательной  $l_0$  и прямой  $y = y_0 = f(x_0)$  соответственно. Тогда  $F(x_0 + \Delta x, y_0)$ ,  $E(x_0 + \Delta x, y_0 + f'(x_0)\Delta x)$ , так как ордината точки  $E$  равна значению  $y$  в уравнении (16) при  $x = x_0 + \Delta x$ . Разность ординат точек  $E$  и  $F$  равна  $f'(x_0)\Delta x$ , т. е. равна дифференциалу  $dy$  функции  $f$  при  $x = x_0$ . Таким образом, дифференциал функции  $y = f(x)$  при  $x = x_0$  равен приращению ординаты касательной к графику этой функции в точке с абсциссой  $x_0$  при изменении аргумента от  $x_0$  до  $x_0 + \Delta x$ . Так как  $MF = \Delta y$ ,  $EF = dy$ , то согласно формуле (20)  $ME = o(\Delta x)$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Обратимся теперь к п. 1. Пусть  $S(t)$  — путь, пройденный материальной точкой за время  $t$  от начала движения. Тогда  $S'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$  — мгновенная скорость  $v$  точки в момент времени  $t$ , т. е.  $v = S'(t)$ . По определению дифференциала  $dS = v\Delta t$ . Поэтому дифференциал функции  $S(t)$  равен расстоянию, которое прошла бы точка за промежуток времени от  $t$  до  $t + \Delta t$ , если бы она двигалась со скоростью, равной мгновенной скорости точки в момент времени  $t$ .

## § 15. Правила дифференцирования

### 1. Дифференцирование суммы, произведения, частного и обратной функции.

**Теорема 1.** Если функции  $f$  и  $g$  дифференцируемы в точке  $x$ , то в этой точке дифференцируемы функции  $f + g$ ,  $fg$ ,  $\frac{f}{g}$  (при условии, что  $g(x) \neq 0$ ), и при этом

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x), \quad (1)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \quad (2)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}, \quad g(x) \neq 0. \quad (3)$$

○ Обозначим  $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$  и  $\Delta g = g(x + \Delta x) - g(x)$ . Тогда  $\frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow f'(x)$ ,  $\frac{\Delta g}{\Delta x} \rightarrow g'(x)$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , так как существуют  $f'(x)$  и  $g'(x)$ . Кроме того,  $f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f$ ,  $g(x + \Delta x) = g(x) + \Delta g$ , где  $\Delta f \rightarrow 0$ ,  $\Delta g \rightarrow 0$ , так как функции  $f$  и  $g$  непрерывны в точке  $x$ .

а) Если  $y = f(x) + g(x)$ , то

$$\Delta y = f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - f(x) - g(x) = \Delta f + \Delta g,$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x}.$$

Правая часть этой формулы имеет при  $\Delta x \rightarrow 0$  предел, равный  $f'(x) + g'(x)$ . Поэтому существует предел левой части, который по определению равен  $(f(x) + g(x))'$ . Формула (1) доказана.

б) Если  $y = f(x)g(x)$ , то

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) = \\ &= (f(x) + \Delta f)(g(x) + \Delta g) - f(x)g(x) = f(x)\Delta g + g(x)\Delta f + \Delta f\Delta g, \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= f(x)\frac{\Delta g}{\Delta x} + g(x)\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta f}{\Delta x}\Delta g.\end{aligned}$$

Отсюда следует формула (2), так как  $\frac{\Delta g}{\Delta x} \rightarrow g'(x)$ ,  $\frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow f'(x)$ ,  $\Delta g \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

в) Если  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ , то  $\Delta y = \frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) + \Delta f}{g(x) + \Delta g} - \frac{f(x)}{g(x)}$ , или  $\Delta y = \frac{\Delta f g(x) - \Delta g f(x)}{g(x)g(x + \Delta x)}$ , откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left( \frac{\Delta f}{\Delta x} g(x) - \frac{\Delta g}{\Delta x} f(x) \right) \frac{1}{g(x + \Delta x)g(x)}.$$

Переходя к пределу в этом равенстве и учитывая, что  $g(x + \Delta x) \rightarrow g(x)$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , где  $g(x) \neq 0$ , получаем формулу (3). ●

Следствие 1. Если функция  $f$  дифференцируема в точке  $x$  и  $C$  — постоянная, то

$$(Cf(x))' = Cf'(x),$$

т. е. постоянный множитель можно выносить из-под знака дифференцирования.

Следствие 2. Если функции  $f_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) дифференцируемы в точке  $x$  и  $C_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) — постоянные, то

$$\left( \sum_{k=1}^n C_k f_k(x) \right)' = \sum_{k=1}^n C_k f_k'(x),$$

т. е. производная линейной комбинации дифференцируемых функций равна такой же линейной комбинации производных данных функций.

Например, если  $y = 2e^x - 3x^2 + 4 \cos x$ , то  $y' = 2e^x - 6x - 4 \sin x$ .

Пример 1. Доказать, что

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z, \quad (4)$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in Z. \quad (5)$$

Δ а) Так как  $(\sin x)' = \cos x$ ,  $(\cos x)' = -\sin x$ , то, применяя правило (3) дифференцирования частного, получаем

$$(\operatorname{tg} x)' = \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x},$$

откуда следует формула (4).

б) Аналогично,

$$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{(\cos x)' \sin x - (\sin x)' \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x},$$

откуда получаем формулу (5). ▲

**Замечание 1.** Из формул (1)–(3) и определения дифференциала следует, что

$$d(f + g) = df + dg, \quad d(fg) = g df + f dg,$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g df - f dg}{g^2}, \quad g \neq 0,$$

в предположении, что в данной точке  $x$  функции  $f$  и  $g$  дифференцируемы. ○ Ограничимся доказательством формулы для дифференциала произведения. Так как  $d(fg) = (fg)'dx$ , где  $(fg)' = f'g + fg'$ , то  $d(fg) = gf'dx + fg'dx = g df + f dg$ . ●

**Теорема 2.** Если функция  $y = f(x)$  непрерывна и строго возрастает (убывает) на отрезке  $\Delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ,  $\delta > 0$ , и если существует  $f'(x_0) \neq 0$ , то функция  $x = \varphi(y)$ , обратная к функции  $y = f(x)$ , дифференцируема в точке  $y_0 = f(x_0)$ , причем

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad (6)$$

○ Пусть функция  $f$  строго возрастает на отрезке  $\Delta$ . Обозначим  $\alpha = f(x_0 - \delta)$ ,  $\beta = f(x_0 + \delta)$ . По теореме об обратной функции на отрезке  $[\alpha, \beta]$  определена функция  $x = \varphi(y)$ , обратная к  $f$ , непрерывная и строго возрастающая, причем  $y_0 = f(x_0) \in (\alpha, \beta)$ , так как  $\alpha = f(x_0 - \delta) < f(x_0) < f(x_0 + \delta) = \beta$ .

Пусть  $\Delta y$  — приращение независимой переменной  $y$  такое, что  $y_0 + \Delta y \in (\alpha, \beta)$ . Обозначим  $\Delta x = \varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0)$ . Нужно доказать, что существует предел отношения  $\frac{\Delta x}{\Delta y}$  при  $\Delta y \rightarrow 0$ , равный  $\frac{1}{f'(x_0)}$ .

Заметим, что если  $\Delta y \neq 0$ , то  $\Delta x \neq 0$ , так как в противном случае  $\varphi(y_0 + \Delta y) = \varphi(y_0)$  при  $\Delta y \neq 0$ , т. е. функция  $\varphi$  принимает одинаковые значения в двух различных точках, что противоречит свойству строгого возрастания функции  $\varphi$ . Поэтому при  $\Delta y \neq 0$  справедливо равенство

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y / \Delta x}. \quad (7)$$

Пусть  $\Delta y \rightarrow 0$ , тогда  $\Delta x \rightarrow 0$ , так как функция  $x = \varphi(y)$  непрерывна в точке  $y_0$ . Но если  $\Delta x \rightarrow 0$ , то существует  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ .

Итак, правая часть (7) имеет предел, равный  $\frac{1}{f'(x_0)}$ . Поэтому и в левой части этого равенства существует предел, который согласно определению равен  $\varphi'(y_0)$ . Формула (6) доказана. ●

Замечание 2. Заменяв в формуле (6)  $x_0$  на  $y$ , а  $y_0$  на  $x$ , запишем эту формулу в виде

$$\varphi'(x) = \frac{1}{f'(\varphi(x))}. \quad (8)$$

Пример 2. Доказать формулы

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1, \quad (9)$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1, \quad (10)$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in R, \quad (11)$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in R. \quad (12)$$

$\Delta$  а) Если  $y = \varphi(x) = \arcsin x$ , где  $|x| < 1$ , то обратная функция  $x = f(y) = \sin y$ , где  $|y| < \frac{\pi}{2}$ . По формуле (8) находим

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}.$$

Так как  $\sin y = x$  и  $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , то  $\cos y = \sqrt{1-x^2}$ . Следовательно, справедлива формула (9).

б) Если  $y = \operatorname{arctg} x$ , где  $x \in R$ , то  $x = \operatorname{tg} y$ , где  $|y| < \frac{\pi}{2}$ . Применяя формулы (8) и (4), получаем

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y,$$

где

$$\cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Формула (11) доказана.

в) Аналогично доказываются формулы (10) и (12). Впрочем, эти формулы легко получить, используя равенства

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$$

и формулы (9) и (11).  $\blacktriangle$

Замечание 3. Теорема 2 допускает наглядную геометрическую и очевидную физическую интерпретацию. Если существует  $f'(x_0)$ , то в точке  $M_0(x_0, f(x_0))$  существует касательная  $l_0$  к графику функции  $y = f(x)$ , угловой коэффициент которой равен  $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$ , где  $\alpha$  — угол, образуемый касательной с положительным направлением оси  $Ox$ . Касательная не параллельна координатным осям, так как производная  $f'(x_0)$  конечна и отлична

от нуля. Пусть для определенности  $f'(x_0) > 0$ , тогда  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  (рис 15.1).

Если рассматривать  $y$  как независимое переменное, а  $x$  как функцию, то кривая, заданная уравнением  $y = f(x)$ , будет графиком функции  $x = \varphi(y)$ . Пусть  $\beta$  — угол, образованный касательной  $l_0$  с положительным направлением оси  $Oy$  (рис 15.1), тогда  $\operatorname{tg} \beta = \varphi'(y_0)$ . Так как  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ , то  $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ , т. е.  $\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ .

Дадим физическую интерпретацию формулы (6). Так как  $\varphi'(y_0)$  есть скорость изменения переменного  $x$  по отношению к изменению переменного  $y$ , а  $f'(x_0)$  — скорость изменения  $y$  по отношению к  $x$ , то формула (6) выражает тот факт, что указанные скорости являются взаимно обратными.

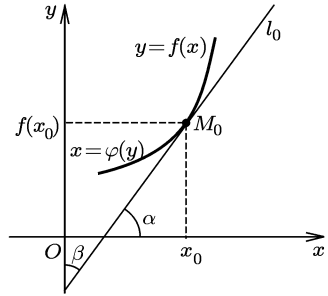


Рис. 15.1

## 2. Дифференцирование сложной функции.

**Теорема 3.** Если функции  $y = \varphi(x)$  и  $z = f(y)$  дифференцируемы соответственно в точках  $x_0$  и  $y_0$ , где  $y_0 = \varphi(x_0)$ , то сложная функция  $z = f(\varphi(x))$  дифференцируема в точке  $x_0$ , причем

$$z'(x_0) = f'(y_0)\varphi'(x_0) = f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0). \quad (13)$$

○ Сложная функция  $z(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , так как из дифференцируемости функций  $f$  и  $\varphi$  следует непрерывность этих функций соответственно в точках  $y_0$  и  $x_0$ . Поэтому функция  $z(x)$  определена в  $U_\delta(x_0)$  при некотором  $\delta > 0$ .

Из дифференцируемости функции  $f$  в точке  $y_0$  по теореме 1 следует, что существует  $\delta > 0$  такое, что для всех  $y \in U_\delta(y_0)$

$$f(y) = f(y_0) + f_1(y)(y - y_0), \quad (14)$$

где  $f_1(y)$  — непрерывная в точке  $y_0$  функция такая, что

$$f_1(y_0) = f'(y_0). \quad (15)$$

Так как функция  $\varphi$  непрерывна в точке  $x_0$ , то

$$\exists \delta_1 = \delta_1(\delta) > 0: \quad \forall x \in U_{\delta_1}(x_0) \rightarrow \varphi(x) \in U_\delta(y_0).$$

Поэтому, подставляя в равенство (14)  $\varphi(x)$  вместо  $y$ , получим равенство

$$z = f(\varphi(x)) = f(y_0) + f_1(\varphi(x))(\varphi(x) - \varphi(x_0)), \quad (16)$$

справедливое для всех  $x \in U_{\delta_1}(x_0)$ . Но

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi_1(x)(x - x_0), \quad (17)$$

где  $\varphi_1$  — непрерывная в точке  $x_0$  функция такая, что

$$\varphi_1(x_0) = \varphi'(x_0). \quad (18)$$



Из (16) и (17) следует, что

$$z(x) = z(x_0) + f_1(\varphi(x))\varphi_1(x)(x - x_0), \quad (19)$$

где  $z_1 = f_1(\varphi(x))\varphi_1(x)$  — непрерывная в точке  $x_0$  и такая, что

$$z_1(x_0) = f_1(\varphi(x_0))\varphi_1(x_0) = f_1(y_0)\varphi'(x_0) = f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0) \quad (20)$$

в силу (15) и (18).

По теореме 1 из (19) и (20) следует, что существует  $z'(x_0)$  и справедливо равенство (13). ●

Следствие. Дифференциал функции  $y = f(x)$  имеет один и тот же вид

$$dy = f'(x)dx \quad (21)$$

как в случае, когда  $x$  — независимое переменное, так и в случае, когда  $x$  — дифференцируемая функция какого-либо другого переменного.

○ Пусть  $x = \varphi(t)$  — дифференцируемая функция переменного  $t$ , тогда  $y = f(\varphi(t)) = z(t)$ . По правилу дифференцирования сложной функции

$$z'(t) = f'(\varphi(t))\varphi'(t),$$

откуда по определению дифференциала

$$dy = z'(t)dt = f'(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Так как  $\varphi'(t)dt = dx$ , то  $dy = f'(\varphi(t))d\varphi(t) = f'(x)dx$ , т. е. формула (21) остается справедливой при замене  $x$  на  $\varphi(t)$ . Это свойство называется *инвариантностью формы первого дифференциала*. ●

З а м е ч а н и е 4. Правило дифференцирования сложной функции  $f(\varphi(x))$  обычно записывается в виде

$$(f(\varphi(x)))' = f'(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Опуская аргумент и используя обозначение производной, указанное в § 14, правило дифференцирования сложной функции  $z = f(y) = f(\varphi(x))$  можно записать так:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} \quad \text{или} \quad z'_x = z'_y y'_x.$$

Правило вычисления производной сложной функции распространяется на композицию любого конечного числа функций. Например, если функции  $x(t)$ ,  $y(x)$ ,  $z(y)$  дифференцируемы соответственно в точках  $t_0$ ,  $x_0 = x(t_0)$ ,  $y_0 = y(x_0)$ , то в точке  $t_0$  сложная функция  $z = z(y) = z(y(x)) = z(y(x(t)))$  дифференцируема и имеет место равенство

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}.$$

Пример 3. Доказать формулы

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x,$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad (22)$$

$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}. \quad (23)$$

△ Гиперболические функции были определены в § 12. Они задаются следующими формулами:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

а) Применяя теоремы 1 и 3, получаем

$$(\operatorname{sh} x)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}(-1)) = \operatorname{ch} x.$$

Аналогично доказывается, что  $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$ .

б) Используя правило дифференцирования частного, получаем

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x (\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x},$$

откуда следует равенство (22), так как  $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ . Аналогично доказывается формула (23). ▲

Пример 4. Доказать, что если  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , то

$$(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad x \neq 0. \quad (24)$$

△ Пусть  $x > 0$ , тогда  $|x| = x$  и  $\log_a |x| = \log_a x$ . В § 14 (формула (9)) было доказано, что

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad x > 0, \quad (25)$$

т. е. формула (24) верна при  $x > 0$ .

Пусть  $x < 0$ , тогда  $-x > 0$  и  $\log_a |x| = \log_a(-x)$ .

Применяя формулу (25) и правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$(\log_a(-x))' = \frac{1}{(-x) \ln a}(-1) = \frac{1}{x \ln a},$$

т. е. формула (24) верна и при  $x < 0$ .

Из формулы (24) при  $a = e$  получаем

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0. \quad \blacktriangle \quad (26)$$

Дадим теперь сводку формул для производных элементарных функций (см. § 14 и § 15).

1)  $(C)' = 0$ ,  $C = \text{const}$ .

2)  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $x > 0$ ;

$(x^n)' = nx^{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

3)  $(a^x)' = a^x \ln a$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;

$(e^x)' = e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

4)  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $x > 0$ ;

$(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $x \neq 0$ ;

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$ ;  $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$ .

5)  $(\sin x)' = \cos x, x \in R.$

6)  $(\cos x)' = -\sin x, x \in R.$

7)  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$

8)  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, x \neq \pi n, n \in Z.$

9)  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1.$

10)  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1.$

11)  $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, x \in R.$

12)  $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, x \in R.$

13)  $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, x \in R.$

14)  $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, x \in R.$

15)  $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, x \in R.$

16)  $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, x \neq 0.$

Пример 5. Доказать, что если  $\varphi$  — дифференцируемая в точке  $x$  функция и  $\varphi(x) \neq 0$ , то

$$(\ln |\varphi(x)|)' = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}. \quad (27)$$

$\Delta$  Применяя формулу для производной логарифмической функции и теорему 3, получаем формулу (27). Выражение в правой части этой формулы называют *логарифмической производной* функции  $\varphi$ .  $\blacktriangle$

Пример 6. Найти  $f'(x)$ , если функция  $f(x)$  задана следующей формулой:

а)  $f(x) = 2 \sin 2x;$

б)  $f(x) = e^{-x^2} \ln(1+x^3);$

в)  $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\arcsin(\cos x)}, 0 \leq x < 1;$

г)  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} 2 \operatorname{tg}^3(\operatorname{sh} 4x).$

$\Delta$  а)  $f'(x) = (\sin 2x)' = 2 \cos 2x;$

б)  $f'(x) = -2xe^{-x^2} \ln(1+x^3) + e^{-x^2} \frac{3x^2}{1+x^3};$

$$\begin{aligned} \text{в) } f'(x) &= \frac{-\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} \arcsin(\cos x) - \sqrt{1-x^2} \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} (-\sin x)}{(\arcsin(\cos x))^2} = \\ &= \frac{1-x^2 - x \arcsin(\cos x)}{\sqrt{1-x^2} (\arcsin(\cos x))^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma) \quad f'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \frac{2}{(x+1)^2} 2^{\operatorname{tg}^3(\operatorname{sh} 4x)} + \\
 &+ \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} 2^{\operatorname{tg}^3(\operatorname{sh} 4x)} 3 \ln 2 \operatorname{tg}^2(\operatorname{sh} 4x) \frac{4 \operatorname{ch} 4x}{\cos^2(\operatorname{sh} 4x)} = \\
 &= 2^{\operatorname{tg}^3(\operatorname{sh} 4x)} \left( \frac{1}{1+x^2} + \frac{12 \ln 2 \operatorname{tg}^2(\operatorname{sh} 4x) \operatorname{ch} 4x}{\cos^2(\operatorname{sh} 4x)} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} \right). \quad \blacktriangle
 \end{aligned}$$

Пример 7. Найти производную показательно-степенной функции  $z = u(x)^{v(x)}$ , где  $u, v$  — функции, дифференцируемые в точке  $x$ , причем  $u(x) > 0$ .

△ Так как  $z = e^{v(x) \ln u(x)}$ , то функция  $z$  дифференцируема как суперпозиция дифференцируемых функций. Дифференцируя тождество  $\ln z = v(x) \ln u(x)$ , получаем  $\frac{z'}{z} = v' \ln u + v \frac{u'}{u}$ , откуда  $z' = z \left( v' \ln u + \frac{vu'}{u} \right)$  или

$$(u^v)' = u^v \ln u \cdot v' + v u^{v-1} u'. \quad \blacktriangle \quad (28)$$

Согласно формуле (28) производная функции  $u^v$  равна сумме двух слагаемых таких, что первое равно производной показательной функции  $u^{v(x)}$  (основание  $u$  рассматривается как постоянная), а второе равно производной степенной функции  $(u(x))^v$  (показатель  $v$  рассматривается как постоянная).

Пример 8. Найти  $f'(x), g'(x)$ , если:

а)  $f(x) = x^x$ ;    б)  $g(x) = x^{x^x}$ .

△ а) По формуле (28) получаем  $f'(x) = x^x \ln x + x x^{x-1}$ , т. е.

$$f'(x) = (x^x)' = x^x (\ln x + 1).$$

б) Так как  $g(x) = x^{f(x)}$ , то, снова применяя формулу (28), находим

$$g'(x) = g(x) \ln x f'(x) + f(x) x^{f(x)-1}$$

или

$$(x^{x^x})' = x^{x^x+x-1} (x \ln x (\ln x + 1) + 1). \quad \blacktriangle$$

Пример 9. Пусть функция  $f$  дифференцируема на интервале  $(-a, a)$ . Доказать, что если  $f(x)$  — четная функция, то ее производная  $f'(x)$  — нечетная функция, а если  $f(x)$  — нечетная функция, то  $f'(x)$  — четная.

△ Пусть  $f$  — четная функция; тогда

$$f(-x) \equiv f(x), \quad x \in (-a, a).$$

Дифференцируя это тождество, получаем

$$-f'(-x) \equiv f'(x), \quad x \in (-a, a).$$

Это означает, что  $f'(x)$  — нечетная функция. Аналогично рассматривается случай, когда  $f(x)$  — нечетная функция.  $\blacktriangle$

### 3. Дифференцирование параметрически заданных и неявных функций.

а) *Функции, заданные параметрически.* Пусть функции  $x(t)$  и  $y(t)$  определены на отрезке  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ , причем функция  $x(t)$  непрерывна и строго монотонна (например, строго возрастает). Тогда на отрезке  $[\alpha, \beta]$ , где  $\alpha = x(t_0 - \delta)$ ,  $\beta = x(t_0 + \delta)$ , определена функция  $t = t(x)$ , обратная к функции  $x = x(t)$ , непрерывная и строго возрастающая.

Предположим дополнительно, что существуют  $x'(t_0)$  и  $y'(t_0)$ , причем  $x'(t_0) \neq 0$  (для сокращения записи вместо  $x'(t_0)$  и  $y'(t_0)$  будем писать соответственно  $x'_t$ ,  $y'_t$ ).

Тогда сложная функция  $y = y(t) = y(t(x))$  дифференцируема по  $x$  в точке  $x_0 = x(t_0)$ , причем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}. \quad (29)$$

○ Действительно, по правилу дифференцирования сложной функции  $y = y(t(x))$  получаем

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = y'_t t'_x,$$

где  $t'_x = \frac{1}{x'_t}$  согласно правилу дифференцирования обратной функции.

Итак, справедлива формула (29). ●

Пример 10. Найти  $\frac{dy}{dx}$ , если

$$x = \ln(1 + e^{2t}), \quad y = \arctg e^t.$$

△ Так как  $x'_t = \frac{2e^{2t}}{1 + e^{2t}}$ ,  $y'_t = \frac{e^t}{1 + e^{2t}}$ , то по формуле (29) находим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{e^t}{1 + e^{2t}} \frac{1 + e^{2t}}{2e^{2t}}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{e^{-t}}{2}. \quad \blacktriangle$$

б) *Функции, заданные неявно.* Если дифференцируемая функция  $y = f(x)$  задана неявно уравнением  $F(x, y) = 0$  (§ 9), то, дифференцируя тождество  $F(x, f(x)) \equiv 0$  как сложную функцию, можно найти  $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ . Подробно вопрос о существовании неявной функции и о ее дифференцируемости будет рассмотрен в § 28.

Пример 11. Написать уравнение касательной к эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (30)$$

в некоторой его точке  $M_0(x_0, y_0)$ , где  $|x_0| < a$ .

△ Точка  $M_0$  однозначно определяет на интервале  $(-a, a)$  одну из двух неявных дифференцируемых функций, которые задаются уравнением (30). Обозначим эту функцию  $f(x)$ . Ее можно записать в явном виде, разрешив уравнение (30) относительно  $y$ .

Дифференцируя тождество (30), в котором  $y = f(x)$ , получаем

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0. \quad (31)$$

Подставляя в уравнение (31) вместо  $x$  и  $y$  соответственно  $x_0$  и  $y_0$ , находим угловой коэффициент касательной к эллипсу в точке  $M_0$ :

$$k = y'(x_0) = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}.$$

Следовательно, уравнение касательной имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0), \quad \text{или} \quad y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0).$$

Это уравнение можно записать так:  $\frac{yy_0}{b^2} + \frac{xx_0}{a^2} = \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{x_0^2}{a^2}$ , или в виде

$$\frac{yy_0}{b^2} + \frac{xx_0}{a^2} = 1, \quad \text{так как} \quad \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1. \quad \blacktriangle$$

## § 16. Производные и дифференциалы высших порядков

### 1. Производная $n$ -го порядка.

а) *Вторая производная.* Пусть функция  $f(x)$  имеет производную во всех точках интервала  $(a, b)$ . Если функция  $f'(x)$  дифференцируема в точке  $x_0 \in (a, b)$ , то ее производную называют *второй производной* или *производной второго порядка функции  $f(x)$  в точке  $x_0$*  и обозначают  $f''(x_0)$ ,  $f^{(2)}(x_0)$ ,  $\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$ ,  $f''_{xx}(x_0)$ . Таким образом, по определению

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}.$$

Заметим, что функцию  $f'(x)$  часто называют первой производной или производной первого порядка функции  $f(x)$ , а под производной нулевого порядка  $f^{(0)}(x)$  подразумевается функция  $f(x)$ , т. е.  $f^{(0)}(x) \equiv f(x)$ .

Пример 1. Найти  $f''(x)$ , если:

а)  $f(x) = \sin^2 x$ ;   б)  $f(x) = e^{-x^2}$ ;

в)  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ;   г)  $f(x) = |x|^3$ .

Δ а) Так как  $f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$ , то  $f''(x) = 2 \cos 2x$ .

б)  $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ ,  $f''(x) = -2e^{-x^2} + (-2x)^2 e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$ .

в) Так как  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ , то  $f''(x) = -x(x^2 + 1)^{-3/2}$ .

г) Если  $x \neq 0$ , то

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{при } x > 0, \\ -3x^2 & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad (1)$$

а если  $x = 0$ , то по определению производной

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^3}{x} = 0. \quad (2)$$

Следовательно,

$$f'(x) = 3x^2 \operatorname{sign} x. \quad (3)$$

Из равенства (1) следует, что

$$f''(x) = \begin{cases} 6x & \text{при } x > 0, \\ -6x & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Покажем, пользуясь определением производной, что  $f''(0)$  существует и  $f''(0) = 0$ . Из (2) и (3) находим

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 \operatorname{sign} x}{x} = 0.$$

Таким образом,  $f''(x) = 6|x|$ , т. е.

$$(|x|^3)'' = 6|x|. \quad \blacktriangle$$

Дадим физическое истолкование второй производной. Пусть материальная точка движется прямолинейно, и пусть  $S = S(t)$  — путь, пройденный ею за время  $t$  от начала движения. Тогда  $v = S'(t)$  — скорость точки в момент времени  $t$ .

Отношение  $\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{S'(t + \Delta t) - S'(t)}{\Delta t}$  представляет собой среднее ускорение точки на промежутке времени от  $t$  до  $t + \Delta t$ , а предел этого отношения (если он существует), равный  $S''(t)$ , называют *ускорением точки в момент  $t$* .

Таким образом, вторая производная пути по времени есть ускорение точки в момент времени  $t$ .

Выведем, далее, формулу для второй производной функции в случае когда эта функция задана параметрически. Пусть функции  $x = x(t)$  и  $y = y(t)$  удовлетворяют условиям, указанным в § 15, п. 3, и пусть, кроме того, существуют производные  $x''(t_0)$  и  $y''(t_0)$ , которые будем обозначать соответственно  $y''_{tt}$ ,  $y''_{tt}$ . Тогда функция  $y = y(x)$  имеет в точке  $x_0$ , где  $x_0 = x(t_0)$ , вторую производную  $y''_{xx} = y''_{xx}(x_0)$ , причем

$$y''_{xx} = \left( \frac{y'_t}{x'_t} \right)'_t \frac{1}{x'_t}, \quad (4)$$

или

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt} x'_t - y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^3}. \quad (5)$$

○ Действительно, по правилу дифференцирования сложной функции

$$y''_{xx} = (y'_x)'_t t'_x,$$

где  $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$  (§ 15, (29)),  $t'_x = \frac{1}{x'_t}$ , откуда следует формула (4), которую можно представить в виде (5). ●

Пример 2. Найти  $y''_{xx}$ , если  $x = \frac{1}{\cos t}$ ,  $y = \operatorname{tg} t - t$ ,  $0 < t < \frac{\pi}{2}$ .

△ Так как  $x'_t = \frac{\sin t}{\cos^2 t}$ ,  $y'_t = \frac{1}{\cos^2 t} - 1 = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}$ , то  $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \sin t$ , и по формуле (4) получаем

$$y''_{xx} = \cos t \frac{1}{x'_t} = \frac{\cos^3 t}{\sin t}. \quad \blacktriangle$$

Обратимся к вопросу о вычислении второй производной сложной и неявной функции.

Если функция  $y = y(x)$  имеет вторую производную в точке  $x_0$ , а функция  $z = z(y)$  — вторую производную в точке  $y_0$ , где  $y_0 = y(x_0)$ , то существует вторая производная в точке  $x_0$  сложной функции  $w = z(y(x))$ , причем

$$w''(x_0) = z''_{yy}(y'_x)^2 + z'_y y''_{xx}, \quad (6)$$

где в правой части формулы (6) опущены обозначения аргументов. ○ Заметим сначала, что в некоторой окрестности точки  $x_0$  определена сложная функция  $w = z(y(x))$ , так как функции  $y(x)$  и  $z(y)$  непрерывны соответственно в точках  $x_0$  и  $y_0$ , причем  $y_0 = y(x_0)$ . По правилу дифференцирования сложной функции  $w'_x = z'_y y'_x$ , откуда  $w''_{xx} = (z'_y)'_x y'_x + z''_{yy} y''_{xx}$ , где  $(z'_y)'_x = z''_{yy} y'_x$ . Формула (6) доказана. ●

Вторую производную неявной функции в простейших случаях часто удается найти с помощью дифференцирования тождества, которое получается при вычислении первой производной (подробнее об этом — в § 28). Поясним это на примере.

Пример 3. Найти  $y''_{xx}$ , где  $y = y(x)$  — неявная функция, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

△ В § 15 (пример 11) было показано, что

$$y'_x = -\frac{b^2 x}{a^2 y}. \quad (7)$$

Дифференцируя тождество (7) по  $x$ , получаем  $y''_{xx} = -\frac{b^2}{a^2 y} + \frac{b^2 x}{a^2 y^2} y'_x$ , откуда, используя формулу (7) и равенство  $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$ , находим

$$y''_{xx} = -\frac{b^4}{a^2 y^3}. \quad \blacktriangle$$

б) *Производная  $n$ -го порядка.* Производную от второй производной функции  $f(x)$  называют третьей производной или производной третьего порядка этой функции и обозначают  $f'''(x)$  или  $f^{(3)}(x)$ . Аналогично определяются производные любого порядка.



Пусть функция  $f(x)$  имеет на интервале  $(a, b)$  производные  $f'(x)$ , ...,  $f^{(n-1)}(x)$ . Если в точке  $x \in (a, b)$  существует производная функции  $f^{(n-1)}(x)$ , то эту производную называют *производной  $n$ -го порядка* или  *$n$ -й производной функции  $f(x)$*  и обозначают  $f^{(n)}(x)$ .

Таким образом, если функция  $f(x)$  имеет в точке  $x$  производные до  $n$ -го порядка включительно, то

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))',$$

т. е.

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x + \Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}.$$

Функцию, имеющую в каждой точке множества  $E$  производные до  $n$ -го порядка включительно, называют  *$n$  раз дифференцируемой на множестве  $E$* .

Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют в точке  $x$  производные  $n$ -го порядка. Тогда функция  $Af(x) + Bg(x)$ , где  $A$  и  $B$  — постоянные, также имеет производную  $n$ -го порядка в точке  $x$ , причем

$$(Af(x) + Bg(x))^{(n)} = Af^{(n)}(x) + Bg^{(n)}(x). \quad (8)$$

При вычислении производных любого порядка часто используют следующие основные формулы.

$$1) \quad (x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - (n - 1))x^{\alpha - n}. \quad (9)$$

В частности, если  $\alpha = m$ , где  $m \in \mathbb{N}$ , то

$$(x^m)^{(n)} = \begin{cases} m! & \text{при } n = m, \\ 0 & \text{при } n > m. \end{cases} \quad (10)$$

$$2) \quad (a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a, \quad a > 0, \quad a \neq 1. \quad (11)$$

В частности,

$$(e^x)^{(n)} = e^x. \quad (12)$$

$$3) \quad \left(\frac{1}{x + \alpha}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x + \alpha)^{n+1}}. \quad (13)$$

$$4) \quad (\ln |x + \alpha|)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(x + \alpha)^n}. \quad (14)$$

$$5) \quad (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad (15)$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right). \quad (16)$$

Формулы (9)–(14) легко проверяются с помощью индукции. Докажем формулу (15). Так как  $(\sin x)' = \cos x$ , то из равенства  $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$  следует справедливость формулы (15) при  $n = 1$ . Применяя метод индукции, докажем, что формула (15) верна при лю-

бом  $n \in \mathbb{N}$ . Аналогично проверяется формула (16). Из равенств (15) и (16) следует, что если  $\alpha = \text{const}$ , то

$$\begin{aligned} (\sin \alpha x)^{(n)} &= \alpha^n \sin \left( \alpha x + n \cdot \frac{\pi}{2} \right), \\ (\cos \alpha x)^{(n)} &= \alpha^n \cos \left( \alpha x + n \cdot \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Пример 4. Найти  $f^{(n)}(x)$ , если:

а)  $f(x) = \sin^3 x$ ; б)  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ .

Δ а) Из равенства  $\sin^3 x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$  следует, что  $\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$ . Применяя формулы (8) и (17), получаем

$$(\sin^3 x)^{(n)} = \frac{3}{4} \sin \left( x + n \cdot \frac{\pi}{2} \right) - \frac{3^n}{4} \sin \left( 3x + n \cdot \frac{\pi}{2} \right).$$

б) Так как  $\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x - 1}$ , то, применяя формулу (13), получаем

$$\left( \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right)^{(n)} = (-1)^n n! \left( \frac{1}{(x - 2)^{n+1}} - \frac{1}{(x - 1)^{n+1}} \right). \quad \blacktriangle$$

в) *Формула Лейбница.*

*Теорема. Если функции  $u$  и  $v$  имеют в точке  $x$  производные  $n$ -го порядка, то функция  $uv$  также имеет в точке  $x$  производную  $n$ -го порядка, причем*

$$\begin{aligned} (uv)^{(n)} &= uv^{(n)} + C_n^1 u^{(1)} v^{(n-1)} + C_n^2 u^{(2)} v^{(n-2)} + \dots \\ &\dots + C_n^{n-1} u^{(n-1)} v^{(1)} + u^{(n)} v, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{k!}$ ,  $1 \leq k \leq n$ .

Формулу (18) называют *формулой Лейбница* и записывают в виде

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}, \quad (19)$$

где  $u^{(0)} = u$ ,  $v^{(0)} = v$ ,  $C_n^0 = 1$ .

○ Докажем формулу (18) методом индукции. При  $n = 1$  эта формула верна, так как

$$(uv)' = uv' + vu'.$$

Пусть формула Лейбница верна для производной  $n$ -го порядка. Докажем справедливость этой формулы для производной  $(n+1)$ -го порядка, предполагая, что существуют  $u^{(n+1)}$  и  $v^{(n+1)}$ . Так как функции  $u$  и  $v$  имеют производные  $n$ -го порядка включительно в некоторой окрестности точки  $x$ , то в силу индуктивного предположения равенство (19) справедливо в окрестности точки  $x$ . Дифференцируя

это равенство и учитывая, что

$$(u^{(k)}v^{(n-k)})' = u^{(k+1)}v^{(n-k)} + u^{(k)}v^{(n+1-k)},$$

получаем

$$(uv)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k+1)}v^{(n-k)} + \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)}v^{(n+1-k)}. \quad (20)$$

Преобразуем суммы в правой части равенства (20), выделяя в первой сумме последнее слагаемое, а во второй — первое и сдвигая индекс суммирования в первой сумме на единицу. Получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k+1)}v^{(n-k)} &= u^{(n+1)}v + \sum_{k=1}^n C_n^{k-1} u^{(k)}v^{(n+1-k)}, \\ \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)}v^{(n+1-k)} &= u^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n C_n^k u^{(k)}v^{(n+1-k)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(uv)^{(n+1)} = uv^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n (C_n^{k-1} + C_n^k) u^{(k)}v^{(n+1-k)} + u^{(n+1)}v.$$

Используя равенство  $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$  (§ 3, (48)), получаем

$$(uv)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{(k)}v^{(n+1-k)},$$

т. е. формула Лейбница справедлива для производных  $(n+1)$ -го порядка. ●

Пример 5. Найти  $f^{(n)}(x)$  при  $n > 2$ , если:

а)  $f(x) = (x-1)^2 \sin x \sin(x-1)$ ;

б)  $f(x) = (1-2x^2) \ln(1-3x)^3$ .

Δ а) Так как  $\sin x \sin(x-1) = \frac{1}{2}(\cos 1 - \cos(2x-1))$ , то, применяя формулу Лейбница (18), вторую из формул (17) и учитывая, что  $((x-1)^2)^{(k)} = 0$  при  $k > 2$ , получаем (при  $n > 2$ )

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= -(x-1)^2 2^{n-1} \cos\left(2x-1 + \frac{n\pi}{2}\right) - n(x-1)2^{n-1} \times \\ &\times \cos\left(2x-1 + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) - n(n-1)2^{n-3} \cos\left(2x-1 + \frac{(n-2)\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

б) Применяя формулы (18) и (14), получаем ( $n > 2$ )

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= (2x^2-1) \frac{3^{n+1}(n-1)!}{(1-3x)^n} + \\ &+ 4xn \frac{3^n(n-2)!}{(1-3x)^{n-1}} + 2n(n-1) \frac{3^{n-1}(n-3)!}{(1-3x)^{n-2}}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

**2. Дифференциал  $n$ -го порядка.** Пусть функция  $y = f(x)$  дифференцируема на интервале  $(a, b)$ . Тогда ее дифференциал

$$dy = f'(x) dx$$

в точке  $x \in (a, b)$ , который называют также *первым дифференциалом функции  $f$* , зависит от двух переменных, а именно от  $x$  и  $dx$ .

Если дифференциал  $dx$ , совпадающий с приращением  $\Delta x$  независимого переменного  $x$ , не меняется (фиксирован), то дифференциал  $dy$  является функцией только от  $x$ . Дифференциал этой функции, т. е. дифференциал от  $f'(x) dx$ , где  $dx$  — постоянная величина, называют *вторым дифференциалом* или *дифференциалом второго порядка функции  $y = f(x)$  в точке  $x$*  и обозначают  $d^2y$  или  $d^2f$ . При этом предполагается, что при вычислении дифференциала  $d(dy)$  (если он существует) приращение  $dx$  независимого переменного выбрано таким же, как и при вычислении первого дифференциала.

Пусть функция  $f$  имеет вторую производную в точке  $x$ . Тогда, пользуясь тем, что  $dg = g'(x) dx$  и  $d(Cg) = C dg$ , где  $C = \text{const}$ , получаем

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x) dx) = dx d(f'(x)) = dx f''(x) dx = f''(x) dx^2.$$

Таким образом, при указанных выше условиях второй дифференциал функции  $y = f(x)$  в точке  $x$  существует, причем

$$d^2y = f''(x) dx^2 = y'' dx^2, \quad (21)$$

где

$$dx^2 = (dx)^2.$$

Аналогично, предполагая, что функция  $y = f(x)$  имеет в точке  $x$  производную  $n$ -го порядка, определим  $n$ -й *дифференциал  $d^n y$*  как дифференциал от  $d^{n-1}y$ , т. е.

$$d^n y = d(d^{n-1}y).$$

Предполагая, что приращение независимого переменного при вычислении первого и всех последующих дифференциалов выбирается одним и тем же, легко доказать методом индукции формулу

$$d^n y = f^{(n)}(x) dx^n. \quad (22)$$

Из формулы (22) следует, что

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n},$$

т. е. производная  $n$ -го порядка функции  $y = f(x)$  равна отношению дифференциала  $n$ -го порядка этой функции к  $n$ -й степени дифференциала независимого переменного.

Из формулы (22) следует, что

$$d^n x = 0 \quad \text{при} \quad n > 1,$$

т. е. дифференциал  $n$ -го порядка независимого переменного при  $n \geq 2$  равен нулю.

Отметим еще следующие свойства дифференциалов  $n$ -го порядка в предположении существования  $u^{(n)}$  и  $v^{(n)}$ .

$$1) d^n(Au + Bv) = A d^n u + B d^n v, \quad A, B — \text{ постоянные;}$$

$$2) d^n(uv) = \sum_{k=0}^n C_n^k d^k u d^{n-k} v.$$

Первое из этих свойств следует из равенств (22) и (8), а второе — из равенства (22) и формулы (19).

**Замечание.** Дифференциал второго порядка, в отличие от первого дифференциала, не обладает свойством инвариантности формы, т. е. формула (21) не сохраняется при замене  $x$  на функцию  $\varphi(t)$ .

○ Действительно, пусть  $x = \varphi(t)$ , тогда  $y = f(x) = f(\varphi(t))$ . Если существуют  $f''(x)$  и  $\varphi''(t)$ , то, используя определение дифференциала и правила дифференцирования произведения и сложной функции, получаем

$$dy = f'(x) dx = f'(\varphi(t))\varphi'(t) dt,$$

откуда

$$d^2 y = (f'(\varphi(t))\varphi'(t))' dt^2 = f''(\varphi(t))(\varphi'(t) dt)^2 + f'(\varphi(t))\varphi''(t) dt^2.$$

Так как  $\varphi'(t) dt = dx$ ,  $\varphi''(t) dt^2 = d^2 x$ , то

$$d^2 y = f''(x) dx^2 + f'(x) d^2 x,$$

или

$$d^2 y = y'' dx^2 + y' d^2 x. \quad (23)$$

Из равенств (21) и (23) следует, что при замене  $x$  на функцию  $\varphi(t)$  изменяется вид второго дифференциала — в нем появляется слагаемое  $y' d^2 x$ . Если  $x = \varphi(t) = at + b$ , где  $a, b$  — постоянные, то  $d^2 x = 0$ , и в этом случае вид второго дифференциала не меняется. ●

## § 17. Основные теоремы для дифференцируемых функций

**1. Локальный экстремум и теорема Ферма.** Пусть существует число  $\delta > 0$  такое, что функция  $f(x)$  определена в  $\delta$ -окрестности точки  $x_0$ , т. е. на множестве  $U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , и пусть для всех  $x \in U_\delta(x_0)$  выполняется неравенство

$$f(x) \geq f(x_0). \quad (1)$$

Тогда говорят, что функция  $f(x)$  имеет в точке  $x_0$  *локальный минимум*.

Аналогично, если существует число  $\delta > 0$  такое, что для всех  $x \in U_\delta(x_0)$  выполняется неравенство

$$f(x) \leq f(x_0), \quad (2)$$

то говорят, что функция  $f(x)$  имеет в точке  $x_0$  *локальный максимум*.

Локальный минимум и локальный максимум объединяются общим термином *локальный экстремум*. Функция  $y = f(x)$ , график ко-

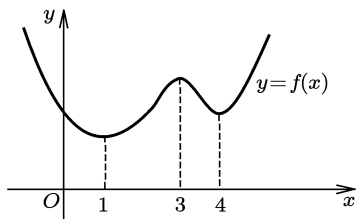


Рис. 17.1

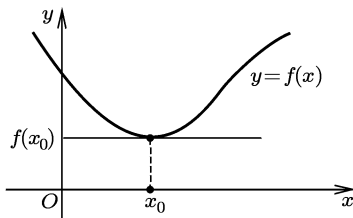


Рис. 17.2

торой изображен на рис. 17.1, имеет локальные экстремумы в точках  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 3$ ,  $x_3 = 4$ , а именно минимумы при  $x = 1$  и  $x = 4$  и максимум при  $x = 3$ .

**Теорема 1 (Ферма).** Если функция  $f(x)$  имеет локальный экстремум в точке  $x_0$  и дифференцируема в этой точке, то

$$f'(x_0) = 0. \quad (3)$$

○ Пусть, например, функция  $f(x)$  имеет локальный минимум в точке  $x_0$ . Тогда в силу (1) для всех  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  выполняется неравенство

$$f(x) - f(x_0) \geq 0. \quad (4)$$

Если  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ , то  $x - x_0 < 0$ , и из условия (4) следует, что

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \quad (5)$$

а если  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ , то выполняется неравенство

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0. \quad (6)$$

Так как функция  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то существует предел при  $x \rightarrow x_0$  в левой части неравенства (5), равный  $f'_-(x_0) = f'(x_0)$ . По свойствам пределов из (5) следует, что

$$f'(x_0) \leq 0. \quad (7)$$

Аналогично, переходя к пределу в неравенстве (6), получаем

$$f'(x_0) \geq 0. \quad (8)$$

Из неравенств (7) и (8) следует, что  $f'(x_0) = 0$ . ●

**Замечание 1.** Теорема Ферма имеет простой геометрический смысл: касательная к графику функции  $y = f(x)$  в точке локального экстремума  $(x_0, f(x_0))$  параллельна оси абсцисс (рис. 17.2).

## 2. Теорема Ролля о нулях производной.

**Теорема 2 (Ролля).** Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , принимает в концах этого отрезка равные значения, т. е.

$$f(a) = f(b), \quad (9)$$

и дифференцируема на интервале  $(a, b)$ , то существует точка

$\xi \in (a, b)$  такая, что

$$f'(\xi) = 0. \quad (10)$$

○ Обозначим  $M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$ ,  $m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$ . По теореме Вейерштрасса (§ 11, теорема 4) на отрезке  $[a, b]$  существуют такие точки  $c_1$  и  $c_2$ , что  $f(c_1) = m$ ,  $f(c_2) = M$ .

Если  $m = M$ , то  $f(x) = \text{const}$ , и в качестве  $\xi$  можно взять любую точку интервала  $(a, b)$ .

Если  $m \neq M$ , то  $m < M$ , и поэтому  $f(c_1) < f(c_2)$ . В силу условия (9) по крайней мере одна из точек  $c_1, c_2$  является внутренней точкой отрезка  $[a, b]$ . Пусть, например,  $c_1 \in (a, b)$ . Тогда существует число  $\delta > 0$  такое, что  $U_\delta(c_1) \subset (a, b)$ . Так как для всех  $x \in U_\delta(c_1)$  выполняется условие  $f(x) \geq f(c_1) = m$ , то по теореме Ферма  $f'(c_1) = 0$ , т. е. условие (10) выполняется при  $\xi = c_1$ . Аналогично рассматривается случай, когда  $c_2 \in (a, b)$ . ●

Теорему Ролля можно кратко сформулировать так: между двумя точками, в которых дифференцируемая функция принимает равные значения, найдется хотя бы один нуль производной этой функции. Для случая  $f(a) = f(b) = 0$  теорема формулируется еще короче: между двумя нулями дифференцируемой функции лежит хотя бы один нуль ее производной.

Замечание 2. Геометрический смысл теоремы Ролля: при условиях теоремы 2 существует значение  $\xi \in (a, b)$  такое, что касательная к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $(\xi, f(\xi))$  параллельна оси  $Ox$  (рис. 17.3).

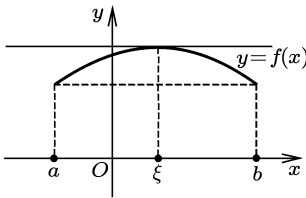


Рис. 17.3

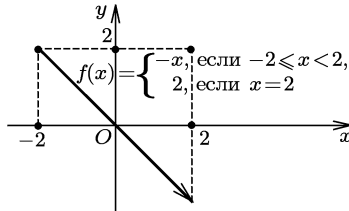


Рис. 17.4

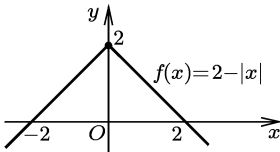


Рис. 17.5

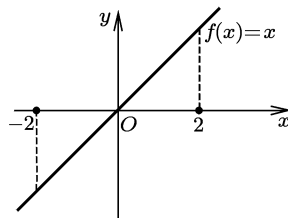


Рис. 17.6

Замечание 3. Все условия теоремы Ролля существенны. На рис. 17.4–17.6 изображены графики функций, каждая из которых удовлетворяет всем

условиям теоремы Ролля, кроме одного. Для всех этих функций не существует точки на интервале  $(-2, 2)$ , в которой производная была бы равна нулю.

### 3. Формула конечных приращений Лагранжа.

Теорема 3 (Лагранжа). Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и дифференцируема на интервале  $(a, b)$ , то в этом интервале найдется хотя бы одна точка  $\xi$  такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \quad (11)$$

○ Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda x,$$

где число  $\lambda$  выберем таким, чтобы выполнялось условие  $\varphi(a) = \varphi(b)$ , т. е.  $f(a) + \lambda a = f(b) + \lambda b$ . Отсюда находим

$$\lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (12)$$

Так как функция  $\varphi(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , дифференцируема на интервале  $(a, b)$  и принимает равные значения в концах этого интервала, то по теореме Ролля существует точка  $\xi \in (a, b)$  такая, что  $\varphi'(\xi) = f'(\xi) + \lambda = 0$ . Отсюда в силу условия (12) получаем равенство

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad (13)$$

равносильное равенству (11). ●

Замечание 4. Правая часть формулы (13) равна угловому коэффициенту секущей, которая проходит через точки  $A(a, f(a))$  и  $B(b, f(b))$  графика функции  $y = f(x)$ , а левая часть этой формулы равна угловому коэффициенту касательной к графику в точке  $(\xi, f(\xi))$ . Поэтому теорема Лагранжа имеет следующую геометрическую интерпретацию: существует значение  $\xi \in (a, b)$  такое, что касательная к графику функции  $y = f(x)$

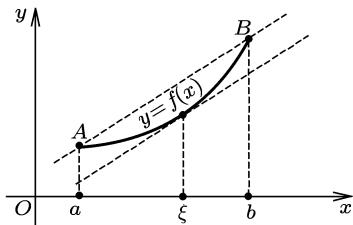


Рис. 17.7

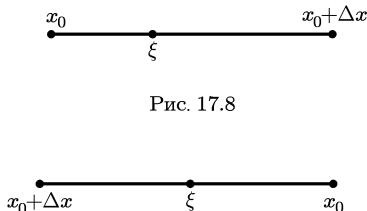


Рис. 17.9

в точке  $(\xi, f(\xi))$  параллельна секущей (рис. 17.7), соединяющей точки  $A(a, f(a))$  и  $B(b, f(b))$ .

Замечание 5. Пусть функция  $f$  удовлетворяет условиям теоремы 3. Если  $x_0 \in [a, b]$ , а приращение  $\Delta x \neq 0$  таково, что точка  $x_0 + \Delta x$  также принадлежит отрезку  $[a, b]$ , то, применив теорему Лагранжа к функции  $f(x)$



на отрезке  $l$  с концами  $x_0$  и  $x_0 + \Delta x$  ( $\Delta x$  может быть и отрицательным), получим

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta x f'(\xi), \quad (14)$$

где  $\xi$  — некоторая внутренняя точка отрезка  $l$ .

Пусть  $\Delta x > 0$ ; тогда  $0 < \xi - x_0 < \Delta x$  (рис. 17.8), и поэтому  $0 < \frac{\xi - x_0}{\Delta x} < 1$ .

Полагая  $\theta = \frac{\xi - x_0}{\Delta x}$ , получаем

$$\xi = x_0 + \theta \Delta x, \quad \text{где } 0 < \theta < 1. \quad (15)$$

Аналогично, если  $\Delta x < 0$ , то  $0 < x_0 - \xi < |\Delta x|$  (рис. 17.9), и поэтому  $0 < \frac{x_0 - \xi}{-\Delta x} < 1$ . Полагая  $\theta = \frac{x_0 - \xi}{-\Delta x} = \frac{\xi - x_0}{\Delta x}$ , снова получаем равенство (15), где  $0 < \theta < 1$ .

Следовательно, равенство (14) можно записать в виде

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta x f'(x_0 + \theta \Delta x), \quad (16)$$

где  $0 < \theta < 1$ .

Формулу (16) называют *формулой конечных приращений Лагранжа*. Она дает точное выражение для приращения функции, в отличие от приближенного равенства

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx \Delta x f'(x_0),$$

которое иногда называют *формулой бесконечно малых приращений*.

**Пример 1.** Доказать, что

$$\ln(1+x) < x \quad \text{при } x > 0, \quad (17)$$

$$|\arctg x_2 - \arctg x_1| \leq |x_2 - x_1|, \quad x_1 \in R, \quad x_2 \in R. \quad (18)$$

$\Delta$  а) Применяя теорему Лагранжа к функции  $f(x) = \ln(1+x)$  на отрезке  $[0, x]$ , где  $x > 0$ , получаем  $\ln(1+x) = \frac{1}{1+\xi} x$ , откуда следует неравенство (17), так как  $0 < \xi < x$ .

б) По теореме Лагранжа для функции  $\arctg x$  на отрезке с концами  $x_1$  и  $x_2$  находим

$$\arctg x_2 - \arctg x_1 = \frac{1}{1+\xi^2}(x_2 - x_1),$$

откуда получаем  $|\arctg x_2 - \arctg x_1| = \frac{|x_2 - x_1|}{1+\xi^2} \leq |x_2 - x_1|$ , так как  $0 < \frac{1}{1+\xi^2} \leq 1$ .  $\blacktriangle$

Полагая в соотношении (18)  $x_2 = x$ ,  $x_1 = 0$ , получаем

$$|\arctg x| \leq |x|, \quad x \in R, \quad (19)$$

и, в частности,

$$0 \leq \arctg x \leq x, \quad x \geq 0. \quad (20)$$

#### 4. Некоторые следствия из теоремы Лагранжа.

Следствие 1. Если функция  $f(x)$  дифференцируема на интервале  $(a, b)$  и  $f'(x) = 0$  для всех  $x \in (a, b)$ , то

$$f(x) = C = \text{const}, \quad x \in (a, b).$$

○ Пусть  $x_0$  — фиксированная точка интервала  $(a, b)$ ,  $x$  — любая точка этого интервала. Применяя теорему Лагранжа к функции  $f(x)$  на отрезке с концами  $x_0$  и  $x$ , получаем

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(\xi),$$

где  $\xi \in (a, b)$ ,  $f'(\xi) = 0$ , откуда  $f(x) = f(x_0) = C$ . ●

Следствие 2. Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , дифференцируема на интервале  $(a, b)$  и для всех  $x \in (a, b)$  выполняется равенство  $f'(x) = k$ , где  $k$  — постоянная, то

$$f(x) = kx + B, \quad x \in [a, b],$$

т. е.  $f$  — линейная функция.

○ Применяя теорему Лагранжа к функции  $f$  на отрезке  $[a, x]$ , где  $a \leq x \leq b$ , получаем  $f(x) - f(a) = k(x - a)$ , откуда следует, что  $f(x) = kx + B$ , где  $B = f(a) - ka$ . ●

Следствие 3. Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема на интервале  $(a, b)$ , за исключением, быть может, точки  $x_0 \in (a, b)$ , и непрерывна в точке  $x_0$ . Тогда если существует конечный или бесконечный

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f'(x) = A, \quad (21)$$

то в точке  $x_0$  существует левая производная, причем

$$f'_-(x_0) = A. \quad (22)$$

Аналогично, если существует

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f'(x) = B, \quad (23)$$

то

$$f'_+(x_0) = B. \quad (24)$$

○ Пусть приращение  $\Delta x$  таково, что  $\Delta x \neq 0$  и точка  $x_0 + \Delta x$  принадлежит интервалу  $(a, b)$ . Запишем равенство (16) в виде

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0 + \theta \Delta x), \quad 0 < \theta < 1. \quad (25)$$

Если существует предел (21), т. е.  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} f'(x_0 + \Delta x) = A$ , то правая часть (25) имеет предел, равный  $A$ , а поэтому существует предел в левой части (25) и справедливо равенство (22).

Аналогично, из соотношения (23) следует равенство (24). ●

Предположим, что функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ , тогда

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0). \quad (26)$$

Если пределы (21) и (23) существуют и конечны, то из соотношений (22), (24) и (26) следует, что

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x) = f'(x_0).$$

Это означает, что если функция  $f(x)$  дифференцируема на интервале  $(a, b)$ , то ее производная  $f'(x)$  не может иметь точек разрыва первого рода. Иначе говоря, каждая точка  $x_0 \in (a, b)$  является либо точкой непрерывности функции  $f'(x)$ , либо точкой разрыва второго рода.

**Пример 2.** Найти  $f'_-(1)$  и  $f'_+(1)$ , если  $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ .

$\Delta$  Функция  $f$  определена на  $R$ , так как  $1+x^2 \geq 2|x|$ . Вычислив производную, получим

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)}, \quad |x| \neq 1,$$

откуда

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2}, & \text{если } |x| < 1, \\ -\frac{2}{1+x^2}, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

Применяя следствие 3, получаем

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{2}{1+x^2} = 1.$$

Аналогично находим

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \left(-\frac{2}{1+x^2}\right) = -1. \quad \blacktriangle$$

**Пример 3.** Найти точки разрыва функции  $f'(x)$ , если

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

$\Delta$  Если  $x \neq 0$ , то  $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ , а если  $x = 0$ , то по опреде-

лению производной  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = 0$ . Следовательно, функция  $f'(x)$  определена на  $R$  и непрерывна при  $x \neq 0$ . В точке  $x = 0$  эта функция имеет разрыв второго рода, так как не существует предела функции

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \quad \text{при } x \rightarrow 0. \quad \blacktriangle$$

Следствие 4. Если функции  $\varphi$  и  $\psi$  дифференцируемы при  $x \geq x_0$  и удовлетворяют условиям  $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$ ,  $\varphi'(x) > \psi'(x)$  при  $x > x_0$ , то  $\varphi(x) > \psi(x)$  при  $x > x_0$ .

○ Применяя теорему Лагранжа к функции  $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$  на отрезке  $[x_0, x]$ , где  $x > x_0$ , получаем  $f(x) = f'(\xi)(x - x_0)$ , так как  $f(x_0) = 0$ . Отсюда, учитывая, что

$$\xi > x_0, \quad f'(\xi) = \varphi'(\xi) - \psi'(\xi) > 0,$$

получаем  $f(x) > 0$ , т. е.  $\varphi(x) > \psi(x)$  при  $x > x_0$ . ●

Пример 4. Доказать, что

$$\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2} \quad \text{при } x > 0. \quad (27)$$

△ Пусть  $\varphi(x) = \ln(1+x)$ ,  $\psi(x) = x - \frac{x^2}{2}$ , тогда  $\varphi(0) = \psi(0)$ ,  $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x}$ ,  $\psi'(x) = 1 - x$ , и при  $x > 0$  справедливо неравенство  $\frac{1}{1+x} > 1 - x$ , так как при  $x > 0$  это неравенство равносильно очевидному неравенству  $1 > 1 - x^2$ . Применяя следствие 4 к функциям  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$ , получаем неравенство (27). ▲

### 5. Обобщенная формула конечных приращений (формула Коши).

Теорема 4. Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны на отрезке  $[a, b]$ , дифференцируемы на интервале  $(a, b)$ , причем  $g'(x) \neq 0$  во всех точках этого интервала, то найдется хотя бы одна точка  $\xi \in (a, b)$  такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \quad (28)$$

○ Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda g(x),$$

где число  $\lambda$  выберем таким, чтобы выполнялось равенство  $\varphi(a) = \varphi(b)$ , которое равносильно следующему:

$$f(b) - f(a) + \lambda(g(b) - g(a)) = 0. \quad (29)$$

Заметим, что  $g(b) \neq g(a)$ , так как в противном случае согласно теореме Ролля существовала бы точка  $c \in (a, b)$  такая, что  $g'(c) = 0$  вопреки условиям теоремы 4. Итак,  $g(b) - g(a) \neq 0$ , и из равенства (29) следует, что

$$\lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \quad (30)$$

Так как функция  $\varphi$  при любом  $\lambda$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и дифференцируема на интервале  $(a, b)$ , а при значении  $\lambda$ , определяемом формулой (30), принимает равные значения в точках  $a$  и  $b$ , то по

теореме Ролля существует точка  $\xi \in (a, b)$  такая, что  $\varphi'(\xi) = 0$ , т. е.  $f'(\xi) + \lambda g'(\xi) = 0$ , откуда  $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = -\lambda$ . Из этого равенства и формулы (30) следует утверждение (28). ●

Замечание 6. Теорема Лагранжа — частный случай теоремы Коши ( $g(x) = x$ ).

Замечание 7. Теорему 4 нельзя получить применением теоремы 3 к числителю и знаменателю дроби, стоящей в левой части равенства (28).

Действительно, эту дробь по теореме 3 можно записать в виде  $\frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)}$ , где  $\xi_1 \in (a, b)$ ,  $\xi_2 \in (a, b)$ , но, вообще говоря,  $\xi_1 \neq \xi_2$ .

Уп ра ж н е н и е. Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема на отрезке  $[a, b]$  и  $f'(a) < f'(b)$ . Доказать, что для любого  $\lambda$ , удовлетворяющего условию  $f'(a) < \lambda < f'(b)$ , существует хотя бы одна точка  $\xi \in (a, b)$  такая, что  $f'(\xi) = \lambda$  (теорема Дарбу).

## § 18. Формула Тейлора

### 1. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Л е м м а 1. Если функция  $f(x)$  имеет в точке  $x_0$  производную  $n$ -го порядка, то существует многочлен  $P_n(x)$  степени не выше  $n$  такой, что

$$P_n(x_0) = f(x_0), \quad P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad k = \overline{1, n}. \quad (1)$$

Этот многочлен представляется в виде

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (2)$$

○ Пусть  $\varphi(x) = (x - x_0)^m$ , где  $m \in \mathbb{N}$ . Тогда  $\varphi(x_0) = 0$ ,

$$\varphi^{(k)}(x_0) = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq m, \\ k!, & \text{если } k = m. \end{cases} \quad (3)$$

Из (3) следует, что многочлен  $P_n(x)$ , заданный формулой (2), удовлетворяет условиям (1). Этот многочлен называют *многочленом Тейлора  $n$ -го порядка для функции  $f(x)$  в точке  $x_0$* . ●

Уп ра ж н е н и е. Доказать, что если  $Q_n(x)$  — произвольный многочлен степени не выше  $n$ , то этот многочлен можно записать в виде

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{Q^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Лемма 2. Пусть функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  определены в  $\delta$ -окрестности точки  $x_0$  и удовлетворяют следующим условиям:

- 1) для каждого  $x \in U_\delta(x_0)$  существуют  $\varphi^{(n+1)}(x)$  и  $\psi^{(n+1)}(x)$ ;
- 2)  $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \dots = \varphi^{(n)}(x_0) = 0$ ,  
 $\psi(x_0) = \psi'(x_0) = \dots = \psi^{(n)}(x_0) = 0$ ;
- 3)  $\psi(x) \neq 0$ ,  $\psi^{(k)}(x) \neq 0$  для  $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$  и для  $k = \overline{1, n+1}$ .

Тогда для каждого  $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$  существует точка  $\xi$ , принадлежащая интервалу с концами  $x_0$  и  $x$  такая, что

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{\psi^{(n+1)}(\xi)}. \quad (5)$$

○ Пусть, например,  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ . Тогда, применяя к функциям  $\varphi$  и  $\psi$  на отрезке  $[x_0, x]$  теорему Коши (§ 17) и учитывая, что  $\varphi(x_0) = \psi(x_0) = 0$  в силу условий (4), получаем

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)}, \quad x_0 < \xi_1 < x. \quad (6)$$

Аналогично, применяя к функциям  $\varphi'$  и  $\psi'$  на отрезке  $[x_0, \xi_1]$  теорему Коши, находим

$$\frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)} = \frac{\varphi'(\xi_1) - \varphi'(x_0)}{\psi'(\xi_1) - \psi'(x_0)} = \frac{\varphi''(\xi_2)}{\psi''(\xi_2)}, \quad x_0 < \xi_2 < \xi_1. \quad (7)$$

Из равенств (6) и (7) следует, что

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)} = \frac{\varphi''(\xi_2)}{\psi''(\xi_2)}, \quad x_0 < \xi_2 < \xi_1 < x < x_0 + \delta.$$

Применяя теорему Коши последовательно к функциям  $\varphi''$  и  $\psi''$ ,  $\varphi^{(3)}$  и  $\psi^{(3)}$ , ...,  $\varphi^{(n)}$  и  $\psi^{(n)}$  на соответствующих отрезках, получаем

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)} = \dots = \frac{\varphi^{(n)}(\xi_n)}{\psi^{(n)}(\xi_n)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{\psi^{(n+1)}(\xi)},$$

где  $x_0 < \xi < \xi_n < \dots < \xi_1 < x < x_0 + \delta$ .

Равенство (5) доказано для случая, когда  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ . Аналогично рассматривается случай, когда  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ . ●

Теорема 1. Пусть существует  $\delta > 0$  такое, что функция  $f(x)$  имеет в  $\delta$ -окрестности точки  $x_0$  производные до  $(n+1)$ -го порядка включительно.

Тогда для любого  $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$  найдется точка  $\xi$ , принадлежащая интервалу  $\Delta$  с концами  $x_0$  и  $x$ , такая, что

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \quad (8)$$

○ Пусть  $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$ ,  $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$  — многочлен Тейлора для функции  $f(x)$ . Обозначим

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x). \quad (9)$$

Так как многочлен  $P_n(x)$  удовлетворяет в силу леммы 1 условиям (1), то из равенства (9) следует, что

$$r_n(x_0) = r'_n(x_0) = \dots = r_n^{(n)}(x_0) = 0. \quad (10)$$

Рассмотрим функции  $\varphi(x) = r_n(x)$ ,  $\psi(x) = (x - x_0)^{n+1}$ . Эти функции удовлетворяют условиям леммы 2, и поэтому для них выполняется равенство (5), т. е.

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{r_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \xi \in \Delta, \quad (11)$$

так как  $P_n^{(n+1)}(x) \equiv 0$ ,  $\psi^{(n+1)}(x) = (n+1)!$ . Из равенств (11) и (9) следует формула (8). ●

**Замечание 2.** Функцию  $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$  называют *остаточным членом формулы Тейлора в форме Лагранжа*. Формула (8) справедлива и при  $x = x_0$ .

**Следствие.** Если функции  $\varphi$  и  $\psi$  дифференцируемы  $n$  раз при  $x \geq x_0$  и удовлетворяют условиям  $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0)$ ,  $k = 0, n-1$ ,  $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$  при  $x > x_0$ , то  $\varphi(x) > \psi(x)$  при  $x > x_0$ .

○ Для  $n = 1$  утверждение доказано в § 17 (следствие 4 из теоремы Лагранжа). Обозначим  $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ . Тогда  $f^{(k)}(x_0) = 0$  при  $k = 0, n-1$ , и по формуле (8) получаем

$$f(x) = \frac{1}{n!} (x - x_0)^n f^{(n)}(\xi).$$

Если  $x > x_0$ , то  $\xi > x_0$ ,  $f^{(n)}(\xi) = \varphi^{(n)}(\xi) - \psi^{(n)}(\xi) > 0$ , и поэтому  $f(x) > 0$ , т. е.  $\varphi(x) > \psi(x)$  при  $x > x_0$ . ●

**Пример 1.** Доказать, что:

$$\text{а) } |\sin t - t| \leq \frac{t^2}{2} \quad \text{для } t \in \mathbb{R};$$

$$\text{б) } x - \frac{x^3}{3!} < \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \quad \text{при } x > 0. \quad (12)$$

$\Delta$  а) Применяя формулу (8) при  $n = 2$  и  $x_0 = 0$  к функции  $f(t) = \sin t$ , получаем  $\sin t = t - \frac{\sin \xi}{2!} t^2$ , откуда следует, что  $|\sin t - t| \leq \frac{t^2}{2}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

б) Если  $f(x) = \sin x$ , то  $f(0) = f^{(2)}(0) = f^{(4)}(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$ ,  $f^{(3)}(0) = -1$ ,  $f^{(n)}(x) = (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ . Применяя форму-

лу (8) при  $n = 5$ ,  $x_0 = 0$ , получаем

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \sin \left( \xi + 5 \cdot \frac{\pi}{2} \right),$$

откуда следует правое неравенство (12), так как, очевидно,  $\left| \frac{x^5}{5!} \sin \left( \xi + 5 \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right| \leq \frac{x^5}{5!}$  при  $x > 0$ . Используя формулу (8) для  $f(x) = \sin x$  при  $n = 3$ ,  $x_0 = 0$ , докажем левое неравенство (12).  $\blacktriangle$

## 2. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Теорема 2. Если существует  $f^{(n)}(x_0)$ , то

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0. \quad (13)$$

О Из существования  $f^{(n)}(x_0)$  следует, что функция  $f(x)$  определена и имеет производные до  $(n - 1)$ -го порядка включительно в  $\delta$ -окрестности точки  $x_0$ . Обозначим  $\varphi(x) = r_n(x)$ ,  $\psi(x) = (x - x_0)^n$ , где функция  $r_n(x)$  определяется формулой (9). Функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  удовлетворяют условиям леммы 2, если заменить номер  $n + 1$  на номер  $n - 1$  (см. равенства (10)). Используя лемму 2 и учитывая, что  $r_n^{(n-1)}(x_0) = 0$ , получаем

$$\frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{r_n^{(n-1)}(\xi) - r_n^{(n-1)}(x_0)}{n!(\xi - x_0)}, \quad (14)$$

где  $\xi = \xi(x)$  и

$$x_0 < \xi < x < x_0 + \delta \quad \text{или} \quad x_0 - \delta < x < \xi < x_0. \quad (15)$$

Пусть  $x \rightarrow x_0$ , тогда из неравенств (15) следует, что  $\xi \rightarrow x_0$ , и в силу существования  $f^{(n)}(x_0)$  существует  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n^{(n-1)}(x) - r_n^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n^{(n-1)}(\xi) - r_n^{(n-1)}(x_0)}{\xi - x_0} = r_n^{(n)}(x_0) = 0$ , так как выполняются равенства (10). Таким образом, правая часть формулы (14) имеет при  $x \rightarrow x_0$  предел, равный нулю, а поэтому существует предел левой части этой формулы, также равный нулю. Это означает, что  $r_n(x) = o((x - x_0)^n)$ ,  $x \rightarrow x_0$ , или  $f(x) - P_n(x) = o((x - x_0)^n)$ , откуда следует равенство (13).  $\bullet$

Замечание 3. Формулу (13) часто называют *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано* или локальной формулой Тейлора.

Разложить функцию  $f(x)$  по формуле Тейлора в окрестности точки  $x_0$  до  $o((x - x_0)^n)$  — значит представить ее в виде (13).

Теорема 3. Если существует  $f^{(n)}(x_0)$  и если при  $x \rightarrow x_0$

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \quad (16)$$

то

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = \overline{0, n}. \quad (17)$$



○ По теореме 2 справедлива формула (13), и так как по условию выполняется равенство (16), то

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) = \\ & = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!} + o((x - x_0)^n). \end{aligned} \quad (18)$$

Переходя к пределу при  $x \rightarrow x_0$  в равенстве (18), получаем  $a_0 = f(x_0)$ . Отбросив в левой и правой частях этого равенства одинаковые слагаемые  $a_0$  и  $f(x_0)$  и разделив обе части полученного равенства на  $x - x_0$ , имеем

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^{n-1} + o((x - x_0)^{n-1}) = \\ & = f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^{n-1} + o((x - x_0)^{n-1}). \end{aligned}$$

Переходя в этом равенстве к пределу при  $x \rightarrow x_0$ , находим  $f'(x_0) = a_1$ . Продолжая эти рассуждения, получаем равенства (17). ●

Замечание 4. Теорема 3 означает, что представление в виде (16) функции, имеющей в точке  $x_0$  производную  $n$ -го порядка, единственно: коэффициенты разложения (16) выражаются по формулам (17).

Пример 2. Разложить функцию  $\frac{1}{1-x}$  по формуле Тейлора в окрестности точки  $x_0 = 0$  до  $o(x^n)$ .

△ Воспользуемся равенством  $(1 + x + \dots + x^n)(1 - x) = 1 - x^{n+1}$ , откуда  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n + r_n(x)$ , где  $r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x} = o(x^n)$  при  $x \rightarrow 0$ . Таким образом,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n + o(x^n). \quad (19)$$

Так как функция  $\frac{1}{1-x}$  бесконечно дифференцируема при  $x \neq 1$  (имеет производные любого порядка), то по теореме 3 формула (19) дает искомое разложение. ▲

**3. Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора.** Если  $x_0 = 0$  и существует  $f^{(n)}(0)$ , то равенство (13) принимает вид

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0. \quad (20)$$

Формулу (20) называют *формулой Маклорена*.

Замечание 5. Пусть функция  $f(x)$  бесконечно дифференцируема на интервале  $(-l, l)$ . Если эта функция является четной, то ее производная — нечетная функция, и, наоборот, производная нечетной функции — четная функция (§ 15, пример 9)). Отсюда следует, что для нечетной функции  $f$

выполняются условия  $f^{(2k)}(0) = 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , а для четной функции  $f$  — условия  $f^{(2k-1)}(0) = 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , так как любая непрерывная нечетная функция принимает при  $x = 0$  значение нуль.

Поэтому формулу (20) для бесконечно дифференцируемой четной функции можно записать в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0, \quad (21)$$

а для нечетной функции — в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}), \quad x \rightarrow 0. \quad (22)$$

В формуле (21) остаточный член записан в виде  $o(x^{2n+1})$ , а не в виде  $o(x^{2n})$ , так как для четной функции  $f$  выполняется условие  $f^{(2n+1)}(0) = 0$ , и поэтому член многочлена Тейлора, который следует за слагаемым  $\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} x^{2n}$ , равен нулю. Аналогично рассматривается вопрос о записи остаточного члена формулы (22).

а) *Показательная функция.* Если  $f(x) = e^x$ , то  $f(0) = 1$  и  $f^{(n)}(0) = 1$  при любом  $n$ . Поэтому формула (20) для функции  $e^x$  записывается в виде

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0, \quad (23)$$

или

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0.$$

б) *Гиперболические функции.* Так как  $f(x) = \operatorname{sh} x$  — нечетная функция,  $f^{(2k+1)}(x) = \operatorname{ch} x$ ,  $f^{(2k+1)}(0) = 1$  при  $k = 0, 1, 2, \dots$ , то по формуле (22) получаем

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}), \quad x \rightarrow 0, \quad (24)$$

или

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}), \quad x \rightarrow 0.$$

Аналогично по формуле (21) находим

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0, \quad (25)$$

или

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0.$$

Замечание 6. Так как  $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ,  $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ , то формулы (24) и (25) можно получить, используя равенство (23) и равенство  $e^{-x} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^k}{k!} + o(x^n)$ ,  $x \rightarrow 0$ .

в) *Тригонометрические функции.* Функция  $f(x) = \sin x$  является нечетной,

$$f^{(2n+1)}(x) = \sin \left( x + \frac{\pi}{2}(2n+1) \right),$$

откуда

$$f^{(2n+1)}(0) = \sin \left( \frac{\pi}{2} + \pi n \right) = \cos \pi n = (-1)^n.$$

Поэтому по формуле (22) находим

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}), \quad x \rightarrow 0, \quad (26)$$

или

$$\sin x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}), \quad x \rightarrow 0.$$

Аналогично,  $f(x) = \cos x$  — четная функция,  $f^{(2n)}(0) = \cos \left( \frac{\pi}{2} 2n \right) = (-1)^n$ , и по формуле (21) получаем

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0, \quad (27)$$

или

$$\cos x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0.$$

г) *Степенная функция.* Пусть  $f(x) = (1+x)^\alpha$ , где  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Тогда  $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))(1+x)^{\alpha-k}$ , откуда получаем  $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))$ . Обозначим

$$C_\alpha^0 = 1, \quad C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (28)$$

Тогда по формуле (20) получим

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n C_\alpha^k x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0. \quad (29)$$

Отметим важные частные случаи формулы (29).

$$1) \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n), \quad x \rightarrow 0, \quad (30)$$

или

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0.$$

Формула (30) была получена другим способом в п. 2 (пример 2).

$$2) \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o(x^n), \quad x \rightarrow 0, \quad (31)$$

или

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0.$$

д) *Логарифмическая функция.* Если  $f(x) = \ln(1+x)$ , то  $f(0) = 0$ ,

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(1+x)^k}, \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} (k-1)!,$$

и по формуле (20) находим

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + o(x^n), \quad x \rightarrow 0, \quad (32)$$

или

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0.$$

Заменяя в формуле (32)  $x$  на  $-x$ , получаем

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0, \quad (33)$$

или

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0.$$

Пример 3. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки  $x_0 = 0$  до  $o(x^n)$  функцию  $f(x)$ , если:

$$а) f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}; \quad б) f(x) = \frac{1}{3x+2};$$

$$в) f(x) = \ln \frac{x-5}{x-4}; \quad г) f(x) = (x+3)e^{-2x}.$$

Δ а) Применяя формулу (29) при  $\alpha = -\frac{1}{2}$ , получаем

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^n C_{-1/2}^k x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0,$$

где

$$C_{-1/2}^k = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-(k-1)\right)}{k!} = \frac{(-1)^k 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2^k k!}.$$

Обозначим  $(2k - 1)!! = 1 \cdot 3 \dots (2k - 1)$ , тогда

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{2^k k!} x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0. \quad (34)$$

Из формулы (34) при  $n = 3$  находим

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3), \quad x \rightarrow 0. \quad (35)$$

б) Так как  $\frac{1}{3x+2} = \frac{1}{2\left(1+\frac{3}{2}x\right)}$ , то, применяя формулу (31), получаем

$$\frac{1}{3x+2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{3^k}{2^{k+1}} x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0.$$

в) Используя равенство  $\ln \frac{x-5}{x-4} = \ln \frac{5}{4} + \ln \frac{1-\frac{x}{5}}{1-\frac{x}{4}}$  и формулу (33), находим

$$\ln \frac{x-5}{x-4} = \ln \frac{5}{4} + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} \left( \frac{1}{4^k} - \frac{1}{5^k} \right) + o(x^n), \quad x \rightarrow 0.$$

г) Так как  $f(x) = xe^{-2x} + 3e^{-2x}$ , то, применяя формулу (23), получаем

$$f(x) = x \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k 2^k}{k!} x^k + o(x^{n-1}) \right) + 3 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2^k}{k!} x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0,$$

или

$$f(x) = 3 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} 2^{k-1}}{(k-1)!} x^k + \sum_{k=1}^n \frac{3(-1)^k 2^k}{k!} x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0,$$

т. е.

$$f(x) = 3 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} 2^{k-1}}{k!} (k-6) x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0. \quad \blacktriangle$$

Пример 4. Разложить по формуле Маклорена до  $o(x^{2n+1})$  функцию

$$f(x) = \cos^4 x.$$

$\Delta$  Используя равенство  $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ , получаем

$$\cos^4 x = \frac{1}{4} \left( 1 + 2 \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x,$$

откуда по формуле (27) находим

$$\cos^4 x = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k 2^{2k-1}}{(2k)!} (1 + 2^{2k-2}) x^{2k} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0. \quad \blacktriangle$$

З а м е ч а н и е 7. Если существует  $f^{(n+1)}(0)$  и известно разложение функции

$$f'(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k + o(x^n),$$

где  $b_k = \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!}$ , то

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^{n+1}) = \\ &= f(0) + \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)k!} x^{k+1} + o(x^{n+1}), \quad x \rightarrow 0, \end{aligned}$$

т. е.

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1}), \quad x \rightarrow 0.$$

П р и м е р 5. Разложить по формуле Маклорена до  $o(x^{2n+1})$  функции:

а)  $\operatorname{arctg} x$ ; б)  $\arcsin x$ ; в)  $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$ .

Δ а) Так как

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

то, используя формулу (31) и замечание 7, получаем

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0,$$

откуда

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}), \quad x \rightarrow 0. \quad (36)$$

Из формулы (36) при  $n = 2$  находим

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6), \quad x \rightarrow 0. \quad (37)$$

б) Используя замечание 7, равенство (34) и формулу  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , получаем

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} x^{2k} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0,$$

откуда

$$\arcsin x = x + \sum_{k=1}^n \frac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k+1)} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}), \quad x \rightarrow 0. \quad (38)$$

Из формулы (38) при  $n = 2$  находим

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6} x^3 + \frac{3}{40} x^5 + o(x^6), \quad x \rightarrow 0. \quad (39)$$

в) Так как

$$(\ln(x + \sqrt{1+x^2}))' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

то, используя замечание 7 и разложение (34), получаем

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{2^k k!} x^{2k} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0,$$

откуда

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = x + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{2^k k! (2k+1)} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}), \quad x \rightarrow 0. \quad (40)$$

Из формулы (40) при  $n = 2$  находим

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40} x^5 + o(x^6), \quad x \rightarrow 0. \quad \blacktriangle \quad (41)$$

Пример 6. Разложить по формуле Маклорена до  $o(x^6)$  функции:

а)  $\operatorname{tg} x$ ; б)  $\operatorname{th} x$ .

$\Delta$  а) Функция  $\operatorname{tg} x$  является нечетной, и поэтому  $\operatorname{tg} x = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^6)$ ,  $x \rightarrow 0$ , где  $a_1 = 1$ , так как  $\operatorname{tg} x \sim x$  при  $x \rightarrow 0$ . Используя равенство  $\sin x = \cos x \operatorname{tg} x$  и разложения (26), (27), получаем

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) = (x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^6)) \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right).$$

Приравнивая коэффициенты при  $x^3$  и  $x^5$ , находим  $-\frac{1}{6} = -\frac{1}{2} + a_3$ ,

$\frac{1}{5!} = \frac{1}{4!} - \frac{a_3}{2!} + a_5$ , откуда  $a_3 = \frac{1}{3}$ ,  $a_5 = \frac{2}{15}$ , и поэтому

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^6), \quad x \rightarrow 0. \quad (42)$$

б) Так как  $\operatorname{th} x$  — нечетная функция, то  $\operatorname{th} x = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^6)$ , где  $a_1 = 1$  ( $\operatorname{th} x \sim x$  при  $x \rightarrow 0$ ). Применяя формулу  $\operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x \operatorname{th} x$  и используя разложения (24), (25), получаем

$$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) = (x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^6)) \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right),$$

откуда, сравнивая коэффициенты при  $x^3$  и  $x^5$ , находим  $a_3 = -\frac{1}{3}$ ,  $a_5 =$

$= \frac{2}{15}$ . Следовательно,

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^6). \quad \blacktriangle \quad (43)$$

Замечание 8. Прием, использованный для нахождения разложений (42) и (43), называют *методом неопределенных коэффициентов* (см. [11, с. 389, 390]).

Замечание 9. Разложение функции  $f(x)$  по формуле Тейлора (16) заменой  $x - x_0 = t$  обычно сводится к разложению функции  $g(t) = f(x_0 + t)$  по формуле Маклорена (20).

Пример 7. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки  $x_0 = -2$  до  $o((x+2)^n)$  функцию  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x}$ .

△ Так как  $f(x) = \frac{1}{5} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+5} \right)$ , то, полагая  $x = t - 2$ , получаем

$$f(x) = g(t) = \frac{1}{5} \left( \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+3} \right) = \frac{1}{5} \left( -\frac{1}{2\left(1-\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{3\left(1+\frac{t}{3}\right)} \right).$$

Применяя формулы (30) и (31), находим

$$g(t) = \sum_{k=0}^n \left( \frac{(-1)^{k+1}}{5 \cdot 3^{k+1}} - \frac{1}{5 \cdot 2^{k+1}} \right) t^k + o(t^n), \quad t \rightarrow 0,$$

откуда

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \left( \frac{(-1)^{k+1}}{5 \cdot 3^{k+1}} - \frac{1}{5 \cdot 2^{k+1}} \right) (x+2)^k + o((x+2)^n), \quad x \rightarrow -2. \quad \blacktriangle$$

#### 4. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора.

Рассмотрим предел при  $x \rightarrow 0$  отношения  $\frac{f(x)}{g(x)}$ , где  $f(0) = g(0) = 0$ ,

т. е. предел типа  $\frac{0}{0}$ .

Будем предполагать, что

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0, \quad f^{(n)}(0) \neq 0.$$

Тогда разложение функции  $f$  по формуле Маклорена (20) имеет вид

$$f(x) = ax^n + o(x^n), \quad x \rightarrow 0, \quad \text{где } a \neq 0. \quad (44)$$

Аналогично, предполагая, что

$$g(0) = g'(0) = \dots = g^{(m-1)}(0) = 0, \quad g^{(m)}(0) \neq 0,$$

по формуле (20) находим

$$g(x) = bx^m + o(x^m), \quad x \rightarrow 0, \quad \text{где } b \neq 0.$$

Из равенств (44) и (45) следует, что

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{ax^n + o(x^n)}{bx^m + o(x^m)}, \quad x \rightarrow 0.$$

Если  $m = n$ , то  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$ . Если  $n > m$ , то  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ; если же

$n < m$ , то  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ .



Пример 8. Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \frac{x}{1+x^2}}{\sin x - \operatorname{sh} x}$ .

△ Используя формулы (24), (26), (31) и (42), получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x - \frac{x}{1+x^2} &= x + \frac{x^3}{3} - x(1-x^2) + o(x^3) = \frac{4}{3}x^3 + o(x^3), \\ \sin x - \operatorname{sh} x &= x - \frac{x^3}{6} - \left(x + \frac{x^3}{6}\right) + o(x^3) = -\frac{x^3}{3} + o(x^3). \end{aligned}$$

Следовательно, искомый предел равен  $-4$ . ▲

Пример 9. Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e(1+x)^{-1/x} - 1}{x}$ .

△ Воспользуемся равенством  $(1+x)^{-1/x} = e^{-(1/x)\ln(1+x)}$ . По формуле (32) получаем  $-\frac{1}{x}\ln(1+x) = -1 + \frac{x}{2} + o(x)$ . Используя формулу (23), находим

$$e(1+x)^{-1/x} - 1 = e \cdot e^{-1+x/2+o(x)} - 1 = e^{x/2+o(x)} - 1 = \frac{x}{2} + o(x).$$

Поэтому искомый предел равен  $\frac{1}{2}$ . ▲

Пример 10. Найти

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \frac{1}{\sqrt{1+2x}} - \operatorname{ch}(\sqrt{3}x)}{\operatorname{th} x - x \cos x}.$$

△ Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  — соответственно числитель и знаменатель дроби. Тогда, используя формулы (43) и (27), получаем

$$g(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4) - x \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$

Поэтому числитель  $f(x)$  следует разложить до  $o(x^3)$ . Применяя формулы (41), (35) и (25), находим

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + \left(1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x^3 + o(x^3)\right) - \\ &\quad - \left(1 + \frac{3}{2}x^2 + o(x^3)\right) = -\frac{16}{6}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Следовательно, искомый предел равен  $-16$ . ▲

Локальная формула Тейлора часто используется при вычислении предела при  $x \rightarrow x_0$  функции  $(1+f(x))^{g(x)}$ , где  $f(x) \rightarrow 0$  и  $g(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow x_0$ . Если  $x_0 = 0$  и разложение функции  $f$  по формуле Маклорена имеет вид (44), а функция  $g(x)$  представляется при  $x \rightarrow 0$  в виде

$$g(x) = \frac{1}{bx^n + o(x^n)}, \quad \text{где } b \neq 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

то, используя формулу (16) § 13, получаем

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + f(x))^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + ax^n + o(x^n)\right)^{1/(bx^n + o(x^n))} = e^{a/b}. \quad (46)$$

Пример 11. Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{\operatorname{tg} x} + \ln(1-x))^{1/(\operatorname{arcsin} \operatorname{sh} x - x)}$ .

△ Используя формулы (39) и (24), получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{arcsin} \operatorname{sh} x - x &= \operatorname{arcsin} \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) - x = \\ &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x = \frac{x^3}{3} + o(x^3). \end{aligned}$$

Аналогично, разложив функции  $e^x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\ln(1-x)$  по формуле Маклорена до  $o(x^3)$ , находим

$$\begin{aligned} e^{\operatorname{tg} x} + \ln(1-x) &= e^{x+x^3/3+o(x^4)} - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) = \\ &= 1 + x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) = 1 + \frac{x^3}{6} + o(x^3). \end{aligned}$$

По формуле (46) находим, что искомый предел равен  $e^{1/2}$ . ▲

При вычислении предела с помощью формулы Тейлора в конечной точке  $x_0 \neq 0$  можем положить  $t = x - x_0$  и свести задачу к вычислению предела при  $t = 0$ .

Неопределенности видов  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$  обычно приводят к пределу типа  $\frac{0}{0}$ .

Пример 12. Найти  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x)$ .

△ Обозначим  $f(x) = x(\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x)$ , тогда  $f(x) = x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} - 2\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1\right)$ . Полагая  $\frac{1}{x} = t$ , получаем  $f(x) = g(t) = \frac{1}{t^2}(\sqrt{1+2t} - 2\sqrt{1+t} + 1)$ . Используя формулу (29) при  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $n = 2$ , получаем

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2), \quad t \rightarrow 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{t^2} \left(1 + t - \frac{1}{2}t^2 - 2\left(1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2\right) + o(t^2) + 1\right) = \\ &= \frac{1}{t^2} \left(-\frac{1}{4}t^2 + o(t^2)\right), \quad t \rightarrow 0, \end{aligned}$$

откуда находим, что искомый предел равен  $-\frac{1}{4}$ . ▲

### § 19. Правило Лопиталя

При вычислении предела отношения  $\frac{f(x)}{g(x)}$  при  $x \rightarrow a$  в случае, когда функции  $f$  и  $g$  одновременно являются либо бесконечно малыми, либо бесконечно большими, иногда удобно применить так называемое *правило Лопиталя*, позволяющее заменять предел отношения функций пределом отношения их производных.

**1. Неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ .** Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  дифференцируемы в точке  $a$ ,  $f(a) = g(a) = 0$ , но  $g'(a) \neq 0$ , то, применяя к функциям  $f$  и  $g$  локальную формулу Тейлора при  $n = 1$  (§ 18, формула (13)), получаем

$$\begin{aligned} f(x) &= f'(a)(x - a) + o((x - a)), \\ g(x) &= g'(a)(x - a) + o((x - a)), \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}. \quad (1)$$

Аналогично, если существуют  $f^{(n)}(a)$  и  $g^{(n)}(a)$  и выполняются условия

$$\begin{aligned} f(a) &= f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0, \\ g(a) &= g'(a) = \dots = g^{(n-1)}(a) = 0, \end{aligned}$$

но  $g^{(n)}(a) \neq 0$ , то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + o((x - a)^n)}{\frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + o((x - a)^n)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

**Пример 1.** Найти

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^{10} - 2x^5 - 1}{x^3 - 4x^2 + 3}.$$

$\Delta$  Обозначим  $f(x) = 3x^{10} - 2x^5 - 1$ ,  $g(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ . Тогда  $f'(x) = 30x^9 - 10x^4$ ,  $g'(x) = 3x^2 - 8x$ ,  $f(1) = g(1) = 0$ ,  $f'(1) = 20$ ,  $g'(1) = -5$ , и по формуле (1) находим, что искомый предел равен  $-4$ .  $\blacktriangle$

**Теорема 1.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  дифференцируемы на интервале  $(a, b)$ ,

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0, \quad (2)$$

$$g'(x) \neq 0 \quad \text{для всех } x \in (a, b), \quad (3)$$

существует (конечный или бесконечный)

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A. \quad (4)$$

Тогда  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$  также существует и равен  $A$ , т. е.

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (5)$$

○ Пусть  $x \in (a, b)$ . Доопределим функции  $f(x)$  и  $g(x)$  в точке  $a$ , полагая

$$f(a) = g(a) = 0. \quad (6)$$

Тогда из условий (2) и (6) следует, что функции  $f$  и  $g$  непрерывны на отрезке  $[a, x]$ . По теореме Коши (§ 17, теорема 4) существует точка  $\xi \in (a, x)$  такая, что

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \quad (7)$$

Если  $x \rightarrow a+0$ , то  $\xi \rightarrow a+0$ , и в силу условия (4) существует  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = A$ . Поэтому из равенства (7) следует, что справедливо утверждение (5). ●

**Замечание 1.** Доказанная теорема (с соответствующими изменениями ее условий) остается справедливой при  $x \rightarrow a-0$  и  $x \rightarrow a$ , где  $a$  — конечная точка.

Эта теорема остается в силе и для случая, когда  $a = +\infty$  (или  $a = -\infty$ ), если  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ ,  $g'(x) \neq 0$  при  $x > x_0$  и существует

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A; \text{ и в этом случае } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A. \text{ Доказательство этого}$$

утверждения, основанное на использовании замены переменного  $x = \frac{1}{t}$  и теоремы 1, содержится, например, в [2, т. 1, § 12, теорема 3].

## 2. Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ .

**Теорема 2.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  дифференцируемы при  $x > \alpha$ , причем  $g'(x) \neq 0$  при  $x > \alpha$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \infty \quad (8)$$

и существует конечный

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A. \quad (9)$$

Тогда существует  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ , равный  $A$ , т. е.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (10)$$

○ Из условий (8) следует, что

$$\exists \alpha_1 > \alpha: \forall x > \alpha_1 \rightarrow |f(x)| > 1, |g(x)| > 1, \quad (11)$$

и поэтому  $f(x) \neq 0$ ,  $g(x) \neq 0$  при  $x > \alpha_1$ . По определению предела (9) для заданного числа  $\varepsilon > 0$  можно найти  $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) \geq \alpha_1$  такое, что для всех  $t > \delta_1$  выполняется неравенство

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f'(t)}{g'(t)} < A + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (12)$$

Фиксируя  $x_0 > \delta_1$  (рис. 19.1), выберем, пользуясь условиями (8), чис-

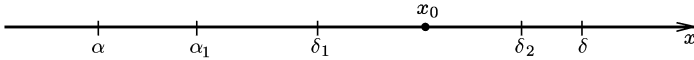


Рис. 19.1

ло  $\delta_2 > x_0$  такое, чтобы при всех  $x > \delta_2$  выполнялись неравенства

$$\left| \frac{f(x_0)}{f(x)} \right| < \frac{1}{2}, \quad \left| \frac{g(x_0)}{g(x)} \right| < \frac{1}{2}. \quad (13)$$

Для доказательства утверждения (10) нужно показать, что существует  $\delta$  такое, что при всех  $x > \delta$  выполняется неравенство

$$A - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < A + \varepsilon. \quad (14)$$

Число  $\delta$  будет выбрано ниже. Считая, что  $x > \delta$ , применим к функциям  $f$  и  $g$  на отрезке  $[x_0, x]$  теорему Коши о среднем. В силу этой теоремы существует точка  $\xi \in [x_0, x]$  такая, что

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \quad (15)$$

Преобразуем левую часть равенства (15), используя условия (11) и (13):

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)} (\varphi(x))^{-1}, \quad (16)$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1 - g(x_0)/g(x)}{1 - f(x_0)/f(x)} = 1 + \beta(x). \quad (17)$$

Заметим, что  $\beta(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$  в силу условий (8). Поэтому

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \geq \delta_2 : \forall x > \delta \rightarrow |\beta(x)| < \frac{\varepsilon/2}{|A| + \varepsilon/2}. \quad (18)$$

Так как  $\xi > x_0 > \delta_1$ , то из равенств (16), (17) и условия (12) следует, что для всех  $x > \delta_2$  выполняется неравенство

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} (\varphi(x))^{-1} < A + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (19)$$

Если  $x > \delta$ , то  $\varphi(x) > 0$  в силу условий (17) и (18), и поэтому неравенство (19) равносильно следующему:

$$\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)(1 + \beta(x)) < \frac{f(x)}{g(x)} < \left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right)(1 + \beta(x)). \quad (20)$$

Используя неравенство (18), получаем

$$\begin{aligned} \left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)(1 + \beta(x)) &= A - \frac{\varepsilon}{2} + \left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)\beta(x) \geq \\ &\geq A - \frac{\varepsilon}{2} - \left(|A| + \frac{\varepsilon}{2}\right)|\beta(x)| > A - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = A - \varepsilon. \end{aligned}$$

Аналогично находим

$$\left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right)(1 + \beta(x)) \leq A + \frac{\varepsilon}{2} + \left(|A| + \frac{\varepsilon}{2}\right)|\beta(x)| < A + \varepsilon.$$

Таким образом, для всех  $x > \delta$  выполняется неравенство (14). Это означает, что справедливо утверждение (10). ●

**З а м е ч а н и е 2.** Теорема 2 остается в силе и в случае, когда  $A = +\infty$  или  $A = -\infty$ . Теорема справедлива и для случая  $x \rightarrow a$  ( $x \rightarrow a - 0$ ,  $x \rightarrow a + 0$ ), где  $a$  — конечная точка.

**З а м е ч а н и е 3.** Согласно теоремам 1 и 2 правило Лопиталья служит для раскрытия неопределенностей вида  $\frac{0}{0}$  или  $\frac{\infty}{\infty}$ . Неопределенности видов  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $0^0$ ,  $\infty^0$ ,  $1^\infty$  часто удается свести и к неопределенностям типа  $\frac{0}{0}$  или  $\frac{\infty}{\infty}$  с помощью различных преобразований.

**П р и м е р 2.** Доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \quad \text{если } \alpha > 0.$$

△ Применяя правило Лопиталья (теорема 2), получаем

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0. \quad \blacktriangle$$

**П р и м е р 3.** Найти  $\lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha \ln x$ , где  $\alpha > 0$ .

△ Преобразуя неопределенность вида  $0 \cdot \infty$  к виду  $\frac{\infty}{\infty}$  и применяя правило Лопиталья, получаем

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha \ln x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1/x}{-\alpha x^{-(\alpha+1)}} = \frac{-1}{\alpha} \lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha = 0. \quad \blacktriangle$$

**П р и м е р 4.** Доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0, \quad \text{если } \alpha > 0, a > 1.$$

$\Delta$  Пусть  $m = [\alpha] + 1$ , тогда  $\alpha - m < 0$ . Применяя правило Лопиталю  $m$  раз, получаем

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^x \ln a} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m+1)x^{\alpha-m}}{a^x \ln^m a} = 0, \blacktriangle$$

Замечание 4. Примеры 2 и 4 показывают, что при  $x \rightarrow +\infty$  логарифмическая функция растет медленнее степенной функции  $x^\alpha$ , а степенная функция растет медленнее показательной  $a^x$ ,  $a > 1$ .

Пример 5. Доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = 0, \quad \text{если } \alpha > 0, \beta > 0.$$

$\Delta$  Полагая  $\ln x = \frac{t}{\beta}$  и используя пример 4, получаем

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^\alpha}{\beta^\alpha e^t} = 0. \quad \blacktriangle$$

Пример 6. Доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^x = 1. \quad (21)$$

$\Delta$  Используя равенство  $x^x = e^{x \ln x}$  и пример 3, получаем утверждение (21).  $\blacktriangle$

Пример 7. Доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{|x|^k} = 0, \quad \text{если } k > 0.$$

$\Delta$  Полагая  $1/x^2 = t$  и используя пример 4, получаем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{|x|^k} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{k/2}}{e^t} = 0. \quad \blacktriangle$$

## § 20. Исследование функций с помощью производных

### 1. Возрастание и убывание функции.

а) *Критерий возрастания (убывания) дифференцируемой функции на интервале.*

Теорема 1. Для того чтобы дифференцируемая на интервале  $(a, b)$  функция  $f(x)$  была возрастающей на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$f'(x) \geq 0 \quad \text{при всех } x \in (a, b). \quad (1)$$

Аналогично, условие

$$f'(x) \leq 0 \quad \text{при всех } x \in (a, b) \quad (2)$$

является необходимым и достаточным для убывания дифференцируемой функции  $f(x)$  на интервале  $(a, b)$ .

○ Ограничимся доказательством теоремы для случая возрастающей функции.

Необходимость. Пусть  $x_0$  — произвольная точка интервала  $(a, b)$ . Из определения возрастающей функции (§ 9, п. 7) следует, что

$$\forall x \in (a, b): x > x_0 \rightarrow f(x) \geq f(x_0),$$

$$\forall x \in (a, b): x < x_0 \rightarrow f(x) \leq f(x_0).$$

Следовательно, если  $x \in (a, b)$  и  $x \neq x_0$ , то выполняется неравенство

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0. \quad (3)$$

Так как левая часть (3) имеет при  $x \rightarrow x_0$  предел, равный  $f'(x_0)$ , то из неравенства (3) по свойству сохранения знака нестрогого неравенства при предельном переходе получаем

$$f'(x_0) \geq 0 \quad \text{для любого } x_0 \in (a, b).$$

Достаточность. Пусть выполняется условие (1) и пусть  $x_1, x_2$  — произвольные точки интервала  $(a, b)$ , причем  $x_1 < x_2$ . Применяя к функции  $f(x)$  на отрезке  $[x_1, x_2]$  теорему Лагранжа, получаем

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1),$$

где  $f'(\xi) \geq 0$ , так как  $\xi \in (a, b)$ . Отсюда следует, что

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b): x_2 > x_1 \rightarrow f(x_2) \geq f(x_1). \quad (4)$$

Это означает, что функция  $f(x)$  является возрастающей на интервале  $(a, b)$ . ●

б) *Достаточное условие строгого возрастания (убывания) функции.*

Теорема 2. Если для всех  $x \in (a, b)$  выполняется условие

$$f'(x) > 0, \quad (5)$$

то функция  $f(x)$  строго возрастает на интервале  $(a, b)$ , а если для всех  $x \in (a, b)$  справедливо неравенство

$$f'(x) < 0, \quad (6)$$

то функция  $f(x)$  строго убывает на интервале  $(a, b)$ .

○ Ограничимся доказательством теоремы для случая, когда выполняется условие (5). Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — произвольные точки интервала  $(a, b)$  такие, что  $x_1 < x_2$ . По теореме Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad \text{где } \xi \in (a, b).$$

Отсюда и из условия (5) следует, что  $f(x_2) > f(x_1)$ . Это означает, что функция  $f(x)$  строго возрастает на интервале  $(a, b)$ . ●

Пример 1. Доказать, что функции  $\operatorname{sh} x$  и  $\operatorname{th} x$  строго возрастают на  $R$ .

△ Так как  $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x > 0$  и  $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} > 0$  для всех  $x \in R$ , то по теореме 2 функции  $\operatorname{sh} x$  и  $\operatorname{th} x$  являются строго возрастающими на  $R$ . ▲



Замечание 1. Условие (5) не является необходимым для строгого возрастания функции. Например, функция  $f(x) = x^3$  строго возрастает на  $R$  (§ 9, пример 9), но условие (5) не выполняется, так как  $f'(0) = 0$ .

**Теорема 3.** Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , дифференцируема на интервале  $(a, b)$  и удовлетворяет условию (6), то эта функция строго убывает на отрезке  $[a, b]$ .

○ Теорема 3, как и теорема 2, доказывается с помощью формулы конечных приращений Лагранжа. ●

Пример 2. Доказать, что если  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , то

$$\sin x > \frac{2}{\pi} x. \quad (7)$$

△ Рассмотрим функцию  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ,  $f(0) = 1$ . Эта функция непрерывна на отрезке  $[0, \frac{\pi}{2}]$  и дифференцируема на интервале  $(0, \frac{\pi}{2})$ , причем  $f'(x) = \frac{\cos x}{x^2}(x - \operatorname{tg} x) < 0$ , так как на интервале  $(0, \frac{\pi}{2})$  выполняются неравенства  $\cos x > 0$ ,  $\operatorname{tg} x > x$  (§ 12, (3)). По теореме 3 функция  $f(x)$  строго убывает на отрезке  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , и поэтому  $f(x) > f(\frac{\pi}{2})$  для  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ , т. е. выполняется неравенство  $\frac{\sin x}{x} > \frac{2}{\pi}$ , равносиль-

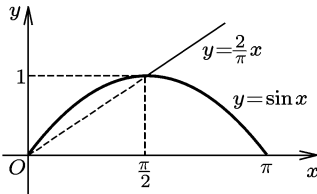


Рис. 20.1

ное на интервале  $(0, \frac{\pi}{2})$  неравенству (7).

Геометрическая интерпретация неравенства (7): на интервале  $(0, \frac{\pi}{2})$  график функции  $y = \sin x$  лежит выше графика функции  $y = \frac{2}{\pi}x$  (рис. 20.1). Отметим, что  $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$  при  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,

причем при  $x = 0$  и  $x = \frac{\pi}{2}$  неравенство (8) обращается в равенство. ▲

в) *Возрастание (убывание) функции в точке.* Будем говорить, что функция  $f(x)$  строго возрастает в точке  $x_0$ , если существует  $\delta > 0$  такое, что

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \rightarrow f(x) < f(x_0), \quad (9)$$

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \rightarrow f(x) > f(x_0).$$

Заметим, что условие (9) равносильно условию

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0, \quad x \in \dot{U}_\delta(x_0). \quad (10)$$

Аналогично вводится понятие строгого убывания функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ . В этом случае

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0, \quad x \in \dot{U}_\delta(x_0).$$

**Теорема 4.** Если  $f'(x_0) > 0$ , то функция  $f(x)$  строго возрастает в точке  $x_0$ , а если  $f'(x_0) < 0$ , то функция  $f(x)$  строго убывает в точке  $x_0$ .

○ Пусть, например,  $f'(x_0) > 0$ . Из определения производной следует, что по заданному числу  $\varepsilon = f'(x_0) > 0$  можно найти  $\delta > 0$  такое, что для всех  $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$  выполняется неравенство  $\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < f'(x_0)$ , откуда следует утверждение (10).

Аналогично рассматривается случай  $f'(x_0) < 0$ . ●

## 2. Экстремумы функции.

а) *Необходимые условия экстремума.* Понятие локального экстремума было рассмотрено в § 17. Необходимые условия экстремума легко получить из теоремы Ферма. Согласно этой теореме точки локального экстремума функции  $f(x)$  следует искать среди тех точек области ее определения, в которых производная этой функции либо равна нулю, либо не существует.

В дальнейшем будем часто опускать слово “локальный” при формулировке утверждений, связанных с понятием локального экстремума.

Точки, в которых производная данной функции равна нулю, называют *стационарными точками* этой функции, а точки, в которых функция непрерывна, а ее производная либо равна нулю либо не существует, — ее *критическими точками*. Поэтому все точки экстремума функции содержатся среди ее критических точек.

Точка  $x = 0$  является критической точкой для каждой из функций  $y = x^2$ ,  $y = x^3$  (рис. 9.8),  $y = |x|$  (рис. 14.4),  $y = |x|^{1/2}$  (рис. 14.6),  $y = \sqrt[3]{x}$  (рис. 14.5), причем для функций  $y = x^2$ ,  $y = |x|$ ,  $y = |x|^{1/2}$  точка  $x = 0$  — точка экстремума, а для функций  $y = x^3$ ,  $y = x^{1/3}$  эта точка не является точкой экстремума.

Таким образом, не всякая критическая точка является точкой экстремума функции.

б) *Достаточные условия экстремума.* Введем понятие строгого экстремума. Назовем  $x_0$  *точкой строгого максимума функции  $f(x)$* , если

$$\exists \delta > 0: \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \rightarrow f(x) < f(x_0). \quad (11)$$

Аналогично,  $x_0$  называют *точкой строгого минимума функции  $f(x)$* , если

$$\exists \delta > 0: \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \rightarrow f(x) > f(x_0). \quad (12)$$

Отметим, что если функция  $f(x)$ , определенная в  $\delta$ -окрестности точки  $x_0$ , строго возрастает на промежутке  $(x_0 - \delta, x_0]$  и строго убывает на промежутке  $[x_0, x_0 + \delta)$ , то выполняется условие (11), и поэтому  $x_0$  является точкой строгого максимума функции  $f(x)$ .

Аналогично формулируется достаточное условие строгого минимума.

Обратимся к достаточным условиям экстремума дифференцируемых функций. Для формулировки первого достаточного условия и в дальнейшем (п. 5) нам потребуется понятие смены знака функции.

Если функция  $g(x)$  определена в проколотой  $\delta$ -окрестности точки  $x_0$  и для всех  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  выполняется неравенство  $g(x) < 0$ , а для всех  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  — неравенство  $g(x) > 0$ , то говорят, что *функция  $g(x)$  меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку  $x_0$* .

Аналогично вводится понятие смены знака с плюса на минус при переходе через точку  $x_0$ .

**Замечание 2.** Если  $x_0$  — точка строгого экстремума функции  $f(x)$ , т. е. выполняется одно из условий (11), (12), то разность  $f(x) - f(x_0)$  сохраняет знак в  $\dot{U}_\delta(x_0)$ .

Обратно: если разность  $f(x) - f(x_0)$  сохраняет знак в  $\dot{U}_\delta(x_0)$ , то  $x_0$  — точка строгого экстремума функции  $f(x)$ .

Если же эта разность меняет знак при переходе через точку  $x_0$ , то функция  $f(x)$  не имеет экстремума в точке  $x_0$ .

**Теорема 5** (первое достаточное условие строгого экстремума). *Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема в некоторой окрестности точки  $x_0$ , кроме, быть может, самой точки  $x_0$ , и непрерывна в точке  $x_0$ .*

*Тогда:*

а) *если  $f'(x)$  меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку  $x_0$ , т. е. существует  $\delta > 0$  такое, что*

$$\begin{aligned} \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) &\rightarrow f'(x) < 0, \\ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) &\rightarrow f'(x) > 0, \end{aligned} \quad (13)$$

то  $x_0$  — точка строгого минимума функции  $f$  (рис. 20.2);

б) *если  $f'(x)$  меняет знак с плюса на минус при переходе через точку  $x_0$ , то  $x_0$  — точка строгого максимума функции  $f$  (рис. 20.3).*

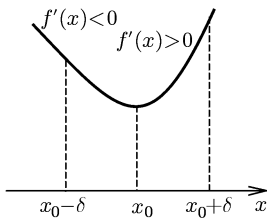


Рис. 20.2

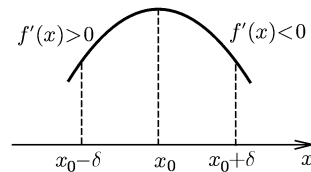


Рис. 20.3

○ Пусть функция  $f'(x)$  меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку  $x_0$ , тогда выполняется условие (13).

Если  $x$  — произвольная точка интервала  $(x_0 - \delta, x_0)$ , то функция  $f$  дифференцируема на интервале  $(x, x_0)$  и непрерывна на отрезке  $[x, x_0]$ . По теореме Лагранжа

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0),$$

где  $f'(\xi) < 0$ , так как  $x_0 - \delta < x < \xi < x_0$  и  $x - x_0 < 0$ . Отсюда следует, что

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \rightarrow f(x) > f(x_0). \quad (14)$$

Аналогично, применяя теорему Лагранжа к функции  $f(x)$  на отрезке  $[x_0, x]$ , где  $x_0 < x < x_0 + \delta$ , получаем, что

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \rightarrow f(x) > f(x_0). \quad (15)$$

Из условий (14) и (15) следует утверждение (12). Это означает, что  $x_0$  — точка строгого минимума функции  $f(x)$ .

Аналогично рассматривается случай строгого максимума. ●

**Замечание 3.** Если  $x_0$  — точка строгого экстремума функции  $f(x)$ , то из этого не следует, что функция  $f'(x)$  меняет знак при переходе через точку  $x_0$  (см. упр. 9 к гл. IV).

**Теорема 6** (второе достаточное условие строгого экстремума). Пусть  $x_0$  — стационарная точка функции  $f(x)$ , т. е.

$$f'(x_0) = 0, \quad (16)$$

и пусть существует  $f''(x_0)$ .

Тогда:

а) если  $f''(x) > 0$ , то  $x_0$  — точка строгого минимума функции  $f(x)$ ;

б) если  $f''(x_0) < 0$ , то  $x_0$  — точка строгого максимума функции  $f(x)$ .

○ Если  $f''(x_0) > 0$ , то по теореме 4 функция  $f'(x)$  является возрастающей в точке  $x_0$ , т. е. существует  $\delta > 0$  такое, что

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \rightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0,$$

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \rightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0,$$

откуда следует, что  $f'(x)$  меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку  $x_0$ . Согласно теореме 5 точка  $x_0$  — точка строгого минимума функции  $f(x)$ . Аналогично рассматривается случай  $f''(x_0) < 0$ . ●

Например, если  $f(x) = x^2$ , то  $f'(0) = 0$ ,  $f''(0) = 2$ , и поэтому  $x_0 = 0$  — точка строгого минимума функции  $f(x) = x^2$ .

**Замечание 4.** Если  $f'(x_0) = 0$  и  $f''(x_0) = 0$ , то в точке  $x_0$  функция  $f$  может иметь экстремум ( $f(x) = x^4$ ,  $x_0 = 0$ ), а может и не иметь ( $f(x) = x^3$ ,  $x_0 = 0$ ). Следующая теорема дает достаточные условия экстремума для случая  $f''(x_0) = 0$ .

**Теорема 7** (третье достаточное условие строгого экстремума). Пусть существует  $f^{(n)}(x_0)$ , где  $n > 2$ , и выполняются условия

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad (17)$$

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0. \quad (18)$$

Тогда:

а) если  $n$  — четное число, то  $x_0$  — точка экстремума функции  $f(x)$ , а именно точка строгого максимума в случае  $f^{(n)}(x_0) < 0$  и точка строгого минимума в случае  $f^{(n)}(x_0) > 0$ ;

б) если  $n$  — нечетное число, то  $x_0$  не является точкой экстремума функции  $f(x)$ .

○ Используя локальную формулу Тейлора для функции  $f(x)$  в окрестности точки  $x_0$  и условия (17), получаем

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n). \quad (19)$$

Из условия (18) следует, что равенство (19) можно записать в виде

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n (1 + \alpha(x)), \quad (20)$$

где  $\alpha(x) = o(1) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow x_0$ , так как  $Co((x - x_0)^n) = o((x - x_0)^n)$  при  $C \neq 0$  ( $C = \text{const}$ ). Поэтому  $\exists \delta > 0: \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \rightarrow |\alpha(x)| < \frac{1}{2}$ , откуда следует, что

$$1 + \alpha(x) > 0 \quad \text{для} \quad x \in \dot{U}_\delta(x_0). \quad (21)$$

Из равенства (20) в силу условия (21) получаем

$$\text{sign}(f(x) - f(x_0)) = \text{sign}(f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n) \quad \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0). \quad (22)$$

а) Пусть  $n$  — четное число ( $n = 2k$ ), тогда

$$\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \rightarrow (x - x_0)^n = (x - x_0)^{2k} > 0,$$

и из равенства (22) получаем

$$\text{sign}(f(x) - f(x_0)) = \text{sign} f^{(n)}(x_0).$$

Если  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , то для  $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$  выполняется неравенство

$$f(x) - f(x_0) > 0.$$

Это означает, что  $x_0$  — точка строгого минимума функции  $f(x)$ .

Аналогично, если  $f^{(n)}(x_0) < 0$ , то

$$f(x) - f(x_0) < 0 \quad \text{для} \quad x \in \dot{U}_\delta(x_0),$$

т. е.  $x_0$  — точка строгого максимума функции  $f(x)$ .

б) Пусть  $n = 2k + 1$ , тогда из формулы (22) следует, что разность  $f(x) - f(x_0)$  меняет знак при переходе через точку  $x_0$ , так как функция  $(x - x_0)^{2k+1}$  меняет знак при переходе через точку  $x_0$ . Это означает, что  $x_0$  не является точкой экстремума функции  $f(x)$ . ●

Пример 3. Найти точки экстремума функции  $f(x)$ , если:

а)  $f(x) = (x - 2)^2(x + 1)^3$ ;    б)  $f(x) = |x^2 - 4|e^{-|x|}$ .

Δ а) Функция дифференцируема на  $\mathcal{R}$ , поэтому все ее точки экстремума содержатся среди стационарных точек функции, являющихся корнями уравнения  $f'(x) = 0$ , т. е. уравнения

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x - 2)(x + 1)^3 + 3(x + 1)^2(x - 2)^2 = \\ &= (x - 2)(x + 1)^2(5x - 4) = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение имеет корни  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = \frac{4}{5}$ ,  $x_3 = 2$ , причем при переходе через точку  $x_1$  функция  $f'(x)$  не меняет знака, при переходе через точку  $x_2$  она меняет знак с плюса на минус, а при переходе через точку  $x_3$  — с минуса на плюс.

Следовательно,  $x_2$  и  $x_3$  являются соответственно точками строгого максимума и строгого минимума функции  $f(x)$ , а  $x_1$  не является точкой экстремума этой функции.

б) Функция непрерывна на  $\mathcal{R}$ , дифференцируема на  $\mathcal{R}$ , кроме точек  $-2, 0, 2$ , и является четной. Если  $x \geq 0$ , то

$$f(x) = \begin{cases} -g(x) & \text{при } x \in [0, 2], \\ g(x) & \text{при } x > 2, \end{cases}$$

где  $g(x) = (x^2 - 4)e^{-x}$ . Уравнение  $g'(x) = (-x^2 + 2x + 4)e^{-x} = 0$  имеет на промежутке  $(0, +\infty)$  единственный корень  $x_1 = 1 + \sqrt{5}$ , причем  $g'(x) = f'(x)$  при  $x > 2$  и  $g'(x)$  меняет знак с плюса на минус при переходе через точку  $x_1$ . Поэтому  $x_1$  — точка строгого максимума функции  $f(x)$ .

При переходе через точку  $x_2 = 2$  функция  $f'(x)$  меняет знак с минуса на плюс, так как  $f'(x) = -g'(x)$  при  $x \in (0, 2)$  и  $f'(x) = g'(x)$  при  $x > 2$ . Поэтому  $x_2$  — точка строгого минимума функции  $f(x)$ .

Учитывая, что функция  $f(x)$  строго убывает на интервале  $(0, 2)$  и четная, заключаем отсюда, что  $x = 0$  — точка строгого максимума функции  $f(x)$ .

Используя полученные результаты и четность функции  $f(x)$ , получаем:  $x = -2$  и  $x = 2$  — точки строгого минимума функции  $f(x)$ ;  $x = -(1 + \sqrt{5})$ ,  $x = 0$  и  $x = 1 + \sqrt{5}$  — точки строгого максимума этой функции. ▲

**3. Наибольшее и наименьшее значения функции.** Понятие наибольшего (наименьшего) значения функции было введено в § 9, п. 6.

Для функции, непрерывной на отрезке, существует согласно теореме Вейерштрасса точка, в которой эта функция принимает наибольшее значение, и точка, в которой функция принимает наименьшее значение.

В случае когда непрерывная на отрезке  $[a, b]$  функция  $f(x)$  имеет локальные максимумы в точках  $x_1, \dots, x_k$  и локальные минимумы

в точках  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m$  и не имеет других точек локального экстремума, наибольшее значение функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  равно наибольшему из чисел  $f(a), f(x_1), \dots, f(x_k), f(b)$ , а наименьшее значение этой функции на отрезке  $[a, b]$  равно наименьшему из чисел  $f(a), f(\tilde{x}_1), \dots, f(\tilde{x}_m), f(b)$ .

В прикладных задачах при нахождении наибольшего (наименьшего) значения функции на отрезке  $[a, b]$  или на интервале  $(a, b)$  часто встречается случай, когда функция  $f$  дифференцируема на интервале  $(a, b)$  и непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , а уравнение  $f'(x) = 0$  имеет единственный корень  $x_0 \in (a, b)$  такой, что  $f'(x) > 0$  при  $x \in (a, x_0)$  и  $f'(x) < 0$  при  $x \in (x_0, b)$  или  $f'(x) < 0$  при  $x \in (a, x_0)$  и  $f'(x) > 0$  при  $x \in (x_0, b)$ .

В этом случае число  $f(x_0)$  является не только локальным экстремумом функции  $f(x)$ , но и наибольшим (наименьшим) значением этой функции на отрезке  $[a, b]$  или на интервале  $(a, b)$ .

**Пример 4.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x)$  на множестве  $E$ , если:

а)  $f(x) = (x - 2)^2(x + 1)^3$ ,  $E = [0, 3]$ ;

б)  $f(x) = |x^2 - 4|e^{-|x|}$ ,  $E = \mathbb{R}$ .

$\Delta$  Пусть  $M$  и  $m$  — соответственно наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x)$  на множестве  $E$ .

а) Для данной функции  $x = \frac{5}{4}$  — точка максимума,  $x = 2$  — точка минимума (пример 3, а)), причем  $f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{3^8}{4^5}$ ,  $f(2) = 0$ , а значения функции в концах отрезка  $[0, 3]$  равны  $f(0) = 4$ ,  $f(3) = 4^3$ . Так как  $M$  — наибольшее, а  $m$  — наименьшее из чисел  $f(0), f\left(\frac{5}{4}\right), f(2), f(3)$ , то  $M = f(3) = 64$ ,  $m = f(2) = 0$ .

б) Для данной функции  $x = -2$  и  $x = 2$  — точки минимума;  $x = -(1 + \sqrt{5})$ ,  $x = 0$  и  $x = 1 + \sqrt{5}$  — точки максимума (пример 3, б)). Функция убывает при  $x > 1 + \sqrt{5}$  и является четной,  $f(0) = 4$ ,  $f(2) = 2$ ,  $f(1 + \sqrt{5}) = 2(1 + \sqrt{5})e^{-(1 + \sqrt{5})} < 2$ , так как  $e^t > t$  при  $t > 0$ . Следовательно, выбирая из чисел  $f(0), f(2), f(1 + \sqrt{5})$  наибольшее и наименьшее, получаем  $M = f(0) = 4$ ,  $m = f(2) = 0$ .  $\blacktriangle$

**Пример 5.** Определить отношение радиуса основания к высоте цилиндра, если при данном объеме цилиндра площадь его полной поверхности является наименьшей.

$\Delta$  Пусть  $x, h, v, S$  — соответственно радиус основания, высота, объем и площадь полной поверхности цилиндра. Тогда  $S = 2\pi xh + 2\pi x^2$ ,  $v = \pi x^2 h$ , откуда  $h = \frac{v}{\pi x^2}$  при  $x > 0$ , и поэтому

$$S = S(x) = 2\left(\frac{v}{x} + \pi x^2\right), \quad S'(x) = 2\left(2\pi x - \frac{v}{x^2}\right).$$

Уравнение  $S' = 0$  имеет единственный корень  $x_0 = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$ , причем

$S'(x) < 0$  при  $x \in (0, x_0)$  и  $S'(x) > 0$  при  $x > x_0$ . Следовательно,  $x_0$  — точка минимума функции  $S(x)$ , и наименьшее значение этой функции равно  $S(x_0)$ , т. е. площадь полной поверхности цилиндра является наименьшей, если его радиус равен  $x_0$ . Но тогда  $h = \frac{v}{\pi x_0^2} = 2x_0$ , т. е. цилиндр при заданном объеме имеет наименьшую площадь полной поверхности, если его высота в 2 раза больше радиуса, т. е. в случае, когда осевое сечение цилиндра — квадрат. ▲

Пример 6. Доказать, что при  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  справедливо неравенство

$$0 \leq \sin^3 x \cos x \leq \frac{3\sqrt{3}}{16}. \quad (23)$$

Δ Обозначим  $\varphi(x) = \sin^3 x \cos x$ ; тогда  $\varphi(x) = \frac{1}{4} \sin 2x(1 - \cos 2x) = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 4x$ , откуда  $\varphi'(x) = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) = \sin x \sin 3x$ . Уравнение  $\varphi'(x) = 0$  имеет единственный корень  $x = x_0 = \frac{\pi}{3}$  на интервале  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , причем  $\varphi'(x) > 0$  при  $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$  и  $\varphi'(x) < 0$  при  $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ . Следовательно,  $x_0$  — точка максимума функции  $\varphi(x)$  и

$\max_{x \in [0, \pi/2]} \varphi(x) = \varphi(x_0) = \frac{3\sqrt{3}}{16}$ . Правое неравенство (23) доказано. Левое неравенство, очевидно, выполняется, так как  $\sin x \geq 0$  и  $\cos x \geq 0$  при  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . ▲

#### 4. Выпуклость функции.

а) *Понятие выпуклости.* Непрерывная функция  $y = f(x)$  называется *выпуклой вверх на отрезке*  $[a, b]$ , если для любых точек  $x_1$  и  $x_2$  отрезка  $[a, b]$  выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}. \quad (23)$$

Дадим геометрическую интерпретацию понятия выпуклости (рис. 20.4). Пусть  $M_1, M_2, M_0$  — точки графика функции  $y = f(x)$ , абсциссы которых соответственно равны  $x_1, x_2, x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ . Тогда  $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$  есть ордината точки  $K$  — середины отрезка  $M_1M_2$ , а  $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = f(x_0)$  — ордината точки  $M_0$  графика с абсциссой, равной абсциссе точки  $K$ .

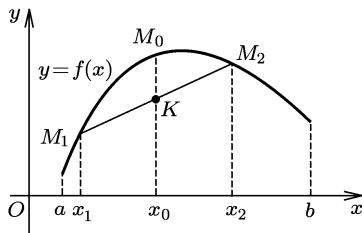


Рис. 20.4

Условие (23) означает, что для любых точек  $M_1$  и  $M_2$  графика



функции  $y = f(x)$  середина  $K$  хорды  $M_1M_2$  или лежит ниже соответствующей точки  $M_0$  графика, или совпадает с точкой  $M_0$ .

Если неравенство (23) является строгим при любых  $x_1, x_2 \in [a, b]$  таких, что  $x_1 \neq x_2$ , то непрерывную функцию  $y = f(x)$  называют *строго выпуклой вверх на отрезке*  $[a, b]$ .

Аналогично, непрерывная функция  $y = f(x)$  называется *выпуклой вниз на отрезке*  $[a, b]$ , если для любых точек  $x_1$  и  $x_2$  отрезка  $[a, b]$  выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}. \quad (24)$$

Если неравенство (24) является строгим при любых  $x_1, x_2 \in [a, b]$  таких, что  $x_1 \neq x_2$ , то непрерывную функцию  $y = f(x)$  называют *строго выпуклой вниз на отрезке*  $[a, b]$ .

Пример 7. Функция  $f(x) = x^2$  строго выпукла вниз на любом отрезке.

$\Delta$  В самом деле, при  $x_1 \neq x_2$  неравенство  $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$  равносильно очевидному неравенству  $(x_1 - x_2)^2 > 0$ .  $\blacktriangle$

Понятие выпуклости и строгой выпуклости вверх (вниз) можно ввести и на интервале. Например, если неравенство (23) выполняется для любых точек интервала  $(a, b)$ , то непрерывная функция  $y = f(x)$  называется *выпуклой вверх на этом интервале*.

б) *Достаточные условия выпуклости.*

Теорема 8. Пусть  $f'(x)$  существует на отрезке  $[a, b]$ , а  $f''(x)$  — на интервале  $(a, b)$ .

Тогда:

а) если

$$f''(x) \geq 0 \quad \text{при всех } x \in (a, b), \quad (25)$$

то функция  $y = f(x)$  выпукла вниз на отрезке  $[a, b]$ ;

б) если

$$f''(x) > 0 \quad \text{при всех } x \in (a, b), \quad (26)$$

то функция  $y = f(x)$  строго выпукла вниз на отрезке  $[a, b]$ .

Аналогично, при выполнении на интервале  $(a, b)$  условия  $f''(x) \leq 0$  ( $f''(x) < 0$ ) функция  $y = f(x)$  выпукла вверх (строго выпукла вверх) на отрезке  $[a, b]$ .

Ограничимся доказательством для случая, когда выполняется условие (25). Нужно доказать, что для любых точек  $x_1, x_2$  отрезка  $[a, b]$  выполняется условие (24). Пусть, например,  $x_1 < x_2$  (при  $x_1 = x_2$  условие (24) выполняется).

Обозначим  $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ,  $x_2 - x_1 = 2h$ , тогда  $x_2 - x_0 = x_0 - x_1 = h$ , откуда  $x_1 = x_0 - h$ ,  $x_2 = x_0 + h$ . Применяя к функции  $f(x)$  на отрезках  $[x_1, x_0]$  и  $[x_0, x_2]$  формулу Тейлора с остаточным членом в форме

Лагранжа при  $n = 2$  (§ 18, формула (8)), получаем

$$f(x_1) = f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(\xi_1)}{2!} h^2, \quad x_0 - h < \xi_1 < x_0,$$

$$f(x_2) = f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(\xi_2)}{2!} h^2, \quad x_0 < \xi_2 < x_0 + h.$$

Складывая эти равенства, находим

$$f(x_1) + f(x_2) = 2f(x_0) + \frac{h^2}{2}(f''(\xi_1) + f''(\xi_2)). \quad (27)$$

Так как  $\xi_1 \in (a, b)$ ,  $\xi_2 \in (a, b)$ , то в силу условия (25)  $f''(\xi_1) \geq 0$ ,  $f''(\xi_2) \geq 0$ , и из равенства (27) следует неравенство  $f(x_1) + f(x_2) \geq 2f(x_0)$ , равносильное неравенству (24). ●

**Замечание 5.** Условие  $f''(x) > 0$  не является необходимым условием строгой выпуклости вниз функции  $y = f(x)$ . Например, для функции  $f(x) = x^4$  условие  $f''(x) > 0$  нарушается при  $x = 0$ , так как  $f''(0) = 0$ , однако эта функция строго выпукла вниз.

### 5. Точки перегиба.

а) *Понятие точки перегиба.* Пусть функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$  и имеет в этой точке либо конечную, либо бесконечную производную ( $f'(x_0) = +\infty$  или  $f'(x_0) = -\infty$ ). Тогда если эта функция при переходе через точку  $x_0$  меняет направление выпуклости, т. е. существует  $\delta > 0$  такое, что на одном из интервалов  $(x_0 - \delta, x_0)$ ,  $(x_0, x_0 + \delta)$  она выпукла вверх, а на другом выпукла вниз, то  $x_0$  называют *точкой перегиба функции  $f(x)$* , а точку  $(x_0, f(x_0))$  — *точкой перегиба графика функции  $y = f(x)$* .

Например, для функций  $y = x^3$  (рис. 9.8) и  $y = x^{1/3}$  (рис. 14.5)  $x = 0$  — точка перегиба.

б) *Необходимое условие наличия точки перегиба.*

**Теорема 9.** Если  $x_0$  — точка перегиба функции  $f(x)$  и если функция  $f(x)$  имеет в некоторой окрестности точки  $x_0$  вторую производную, непрерывную в точке  $x_0$ , то

$$f''(x_0) = 0. \quad (28)$$

○ Пусть  $f''(x_0) \neq 0$ . Тогда в силу непрерывности функции  $f''(x)$  в точке  $x_0$

$$\exists \delta > 0: \forall x \in U_\delta(x_0) \rightarrow \text{sign } f''(x) = \text{sign } f''(x_0),$$

т. е.  $f''(x) > 0$  или  $f''(x) < 0$  для любого  $x \in U_\delta(x_0)$ .

По теореме 8 функция  $f(x)$  либо строго выпукла вниз на интервале  $U_\delta(x_0)$  (если  $f''(x) > 0$ ), либо строго выпукла вверх на интервале  $U_\delta(x_0)$ . Но тогда  $x_0$  не является точкой перегиба. Следовательно, должно выполняться условие (28). ●

в) *Достаточные условия наличия точки перегиба.*

Теорема 10 (первое достаточное условие). *Если функция  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ , имеет в этой точке конечную или бесконечную производную и если функция  $f''(x)$  меняет знак при переходе через точку  $x_0$ , то  $x_0$  — точка перегиба функции  $f(x)$ .*

○ Пусть, например, функция  $f''(x)$  меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку  $x_0$  (в точке  $x_0$  вторая производная может и не существовать). Это означает, что существует  $\delta > 0$  такое, что на интервале  $\Delta_1 = (x_0 - \delta, x_0)$  выполняется неравенство  $f''(x) < 0$ , а на интервале  $\Delta_2 = (x_0, x_0 + \delta)$  — неравенство  $f''(x) > 0$ .

Тогда по теореме 8 функция  $f(x)$  выпукла вверх на интервале  $\Delta_1$  и выпукла вниз на интервале  $\Delta_2$ . Следовательно, точка  $x_0$  удовлетворяет всем условиям, указанным в определении точки перегиба. ●

Например, для функции  $f(x) = \arctg x$  точка  $x = 0$  — точка перегиба, так как  $f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$  меняет знак при переходе через точку  $x = 0$  (рис. 12.6).

Теорема 11 (второе достаточное условие). *Если  $f^{(2)}(x_0) = 0$ ,  $f^{(3)}(x_0) \neq 0$ , то  $x_0$  — точка перегиба функции  $f(x)$ .*

○ Так как  $f^{(3)}(x_0) \neq 0$ , то по теореме 4 функция  $f^{(2)}(x)$  либо строго возрастает, либо строго убывает в точке  $x_0$ . По условию  $f^{(2)}(x_0) = 0$ , и поэтому  $f^{(2)}(x)$  имеет разные знаки на интервалах  $(x_0 - \delta, x_0)$  и  $(x_0, x_0 + \delta)$  при некотором  $\delta > 0$ , откуда, используя теорему 10, заключаем, что  $x_0$  — точка перегиба функции  $f(x)$ . ●

Например, для функции  $f(x) = \sin x$  (рис. 14.2) точка  $x = 0$  — точка перегиба, так как  $f^{(2)}(0) = 0$ ,  $f^{(3)}(0) = -1$ .

## 6. Асимптоты.

а) *Вертикальная асимптота.* Если выполнено хотя бы одно из условий

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \infty,$$

то прямую  $x = x_0$  называют *вертикальной асимптотой графика функции  $y = f(x)$ .*

Например, прямая  $x = 0$  — вертикальная асимптота графиков функций  $y = \frac{1}{x}$  (рис. 10.6),  $y = \lg x^2$  (рис. 10.7),  $y = \frac{1}{x^2}$  (рис. 10.8),  $y = \operatorname{cth} x$  (рис. 12.17), прямая  $x = -1$  — вертикальная асимптота графика функции  $y = \frac{3-2x}{x+1}$  (рис. 9.4), прямые  $y = \frac{\pi}{2} + \pi k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) — вертикальные асимптоты графика функции  $y = \operatorname{tg} x$ .

б) *Асимптота (невертикальная асимптота).* Прямую

$$y = kx + b$$

называют *асимптотой (невертикальной асимптотой) графика функ-*

ции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ , если

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0. \quad (29)$$

Если  $k \neq 0$ , то асимптоту называют *наклонной*, а если  $k = 0$ , то асимптоту  $y = b$  называют *горизонтальной*.

Аналогично вводится понятие асимптоты при  $x \rightarrow -\infty$ .

Например, прямая  $y = 0$  — горизонтальная асимптота графиков функций  $y = \frac{1}{x}$ ,  $y = \frac{1}{x^2}$  при  $x \rightarrow +\infty$  и  $x \rightarrow -\infty$ , графика функции  $y = a^x$ ,  $a > 1$ , при  $x \rightarrow -\infty$ . Прямая  $y = 1$  — асимптота графиков функций  $y = e^{1/x}$  (рис. 12.12),  $y = \operatorname{th} x$  (рис. 12.16) и  $y = \operatorname{cth} x$  (рис. 12.17) при  $x \rightarrow +\infty$ ; прямая  $y = \frac{\pi}{2}$  — асимптота графика функции  $y = \operatorname{arctg} x$  при  $x \rightarrow +\infty$  (рис. 12.6), а прямая  $y = \pi$  — асимптота графика функции  $\operatorname{arcsctg} x$  при  $x \rightarrow -\infty$  (рис. 12.7).

**Пример 8.** Найти асимптоту при  $x \rightarrow +\infty$  и  $x \rightarrow -\infty$  графика функции:

а)  $y = \frac{3 - 2x}{x + 1}$ ;    б)  $y = \frac{x^3}{(x + 1)^2}$ ;

в)  $y = \sqrt[3]{x^3 + x^2}$ ;    г)  $y = \frac{x^2 - 4}{x} e^{-5/(3x)}$ .

$\Delta$  а) Так как  $y = -2 + \frac{5}{x + 1}$ , то прямая  $y = -2$  — асимптота графика функции  $y = \frac{3 - 2x}{x + 1}$  (рис. 9.4) при  $x \rightarrow +\infty$  и  $x \rightarrow -\infty$ .

б) Разделив числитель  $x^3$  на знаменатель  $(x + 1)^2$  по правилу деления многочленов (можно воспользоваться равенством  $x^3 = ((x + 1) - 1)^3 = (x + 1)^3 - 3(x + 1)^2 + 3(x + 1) - 1$ ), получим

$$\frac{x^3}{(x + 1)^2} = x - 2 + \frac{3x + 2}{(x + 1)^2}. \quad (30)$$

Отсюда следует, что асимптотой графика функции  $y = \frac{x^3}{(x + 1)^2}$  при  $x \rightarrow +\infty$  и  $x \rightarrow -\infty$  является прямая  $y = x - 2$ .

в) Используя равенство  $y = \sqrt[3]{x^3 + x^2} = x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1/3}$  и локальную формулу Тейлора, получаем  $y = x \left(1 + \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x + \frac{1}{3} + o(1)$  при  $x \rightarrow \infty$ , откуда следует, что прямая  $y = x + \frac{1}{3}$  — асимптота графика функции  $y = \sqrt[3]{x^3 + x^2}$  при  $x \rightarrow +\infty$  и  $x \rightarrow -\infty$ .

г) Применяя формулу Тейлора для экспоненты, получаем  $y = \left(x - \frac{4}{x}\right) \left(1 - \frac{5}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x - \frac{5}{3} + o(1)$  при  $x \rightarrow \infty$ , откуда следует, что прямая  $y = x - \frac{5}{3}$  — асимптота графика данной функции при  $x \rightarrow +\infty$  и  $x \rightarrow -\infty$ .  $\blacktriangle$

**Теорема 12.** Для того чтобы прямая  $y = kx + b$  была асимптотой графика функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ , необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad (31)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b. \quad (32)$$

○ **Необходимость.** Если прямая  $y = kx + b$  — асимптота графика функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ , то выполняется условие (29) или равносильное ему условие

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \quad \alpha(x) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow +\infty. \quad (33)$$

Разделив обе части равенства (33) на  $x$ , получим

$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x},$$

откуда следует, что существует предел (31).

Из равенства (33) получаем

$$f(x) - kx = b + \alpha(x), \quad \text{где} \quad \alpha(x) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow +\infty,$$

откуда следует, что существует предел (32).

**Достаточность.** Если существуют конечные пределы (31) и (32), то  $f(x) - (kx + b) = \alpha(x)$ , где  $\alpha(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$ , т. е. выполняется условие (29). Это означает, что прямая  $y = kx + b$  — асимптота графика функции  $y = f(x)$ . ●

**Замечание 6.** Для случая горизонтальной асимптоты теорема 12 формулируется в следующем виде: для того чтобы прямая  $y = b$  была асимптотой графика функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ .

**7. Построение графиков функций.** При построении графика функции  $y = f(x)$  можно придерживаться следующего плана.

1) Найти область определения функции. Выяснить, является ли функция четной (нечетной), периодической.

2) Найти точки пересечения графика с осями координат и промежутки, на которых  $f(x) > 0$  и  $f(x) < 0$ .

3) Найти асимптоты графика.

4) Сделать эскиз графика.

5) Вычислить  $f'(x)$ , найти экстремумы и промежутки возрастания (убывания) функции.

6) Вычислить  $f''(x)$ , найти точки перегиба и промежутки выпуклости вверх (вниз) функции.

7) Нарисовать график функции.

Пример 9. Построить график функции  $y = \frac{x^3}{(x+1)^2}$ .

△ Функция определена при  $x \neq -1$ , принимает положительные значения при  $x > 0$  и отрицательные при  $x < 0$ ,  $y(0) = 0$ . Прямые  $x = -1$  и  $y = x - 2$  (пример 8, б)) — асимптоты графика этой функции. Из равенства (30) следует, что при  $x > -\frac{2}{3}$  график лежит выше прямой  $y = x - 2$ , а при  $x < -\frac{2}{3}$  — ниже этой прямой.

Вычисляем производные:

$$y' = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \quad (34)$$

$$y'' = \frac{6x}{(x+1)^4}. \quad (35)$$

Согласно формуле (34) функция  $y(x)$  имеет две стационарные точки  $x = 0$  и  $x = -3$ . Точка  $x = 0$  не является точкой экстремума этой функции, так как  $y'$  не меняет знак при переходе через точку  $x = 0$ . Точка  $x = -3$  является точкой максимума функции  $y(x)$ , так как  $y'$  меняет знак с плюса на минус при переходе через точку  $x = -3$ . Находим  $y(-3) = -\frac{27}{4}$ .

Из формулы (35) следует, что  $y'' < 0$  при  $x < 0$  ( $x \neq -1$ ) и  $y'' > 0$  при  $x > 0$ . Поэтому функция  $y(x)$  является выпуклой вверх на интервалах  $(-\infty, -1)$  и  $(-1, 0)$  и выпуклой вниз на интервале  $(0, +\infty)$ . Точка  $x = 0$ , в которой функция  $y(x)$  меняет направление выпуклости, есть точка перегиба этой функции. График функции изображен на рис. 20.5. ▲

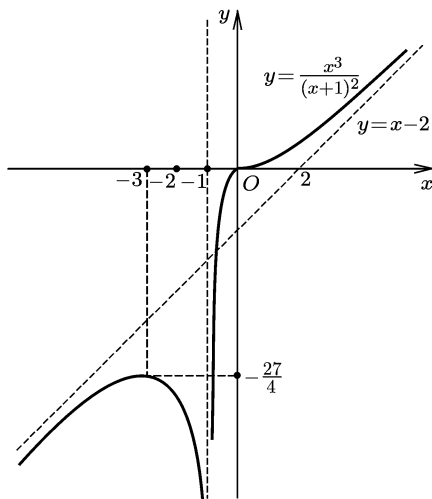


Рис. 20.5

Пример 10. Построить график функции  $y = \sqrt[3]{x^3 + x^2}$ .

△ Функция  $y(x)$  определена на  $R$ , причем  $y < 0$  при  $x < -1$ ,  $y > 0$  при  $x > -1$  ( $x \neq 0$ ),  $y(-1) = y(0) = 0$ . Прямая  $y = x + \frac{1}{3}$  — асимптота графика этой функции при  $x \rightarrow -\infty$  и  $x \rightarrow +\infty$  (пример 8, в)). Вычисляем производные:

$$y' = \frac{1}{3}(x+1)^{-2/3}x^{-1/3}(3x+2), \quad (36)$$

$$y'' = -\frac{2}{9}(x+1)^{-5/3}x^{-4/3}. \quad (37)$$

Формулы (36) и (37) справедливы при  $x \neq -1$  и  $x \neq 0$ . Из формулы (36) согласно следствию 2 из теоремы Лагранжа (§ 17) находим  $f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} y'(x) = +\infty$ ,  $f'_+(0) = +\infty$ ,  $f'_-(0) = -\infty$ .

Так как при переходе через точку  $x = -\frac{2}{3}$  производная меняет знак с плюса на минус, то  $x = -\frac{2}{3}$  — точка максимума функции  $y(x)$ , причем  $y\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$ . Аналогично, точка  $x = 0$  — точка минимума функции и  $y(0) = 0$ .

Из формулы (37) следует, что  $y'' > 0$  при  $x < -1$  и  $y'' < 0$  при  $x > -1$  ( $x \neq 0$ ). Поэтому функция  $y(x)$  является выпуклой вниз на интервале  $(-\infty, -1)$  и выпуклой вверх на интервалах  $(-1, 0)$  и  $(0, +\infty)$ . График функции изображен на рис. 20.6. ▲

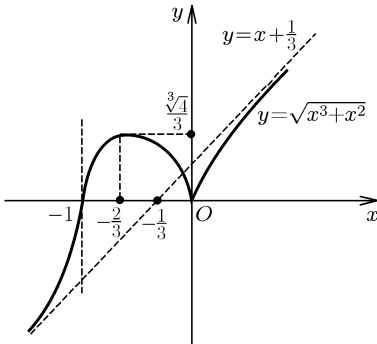


Рис. 20.6

При построении кривой, заданной параметрически уравнениями  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , обычно разбивают ось  $t$  на интервалы, на каждом из которых функции  $x(t)$  и  $y(t)$  монотонны. Иногда предварительно строят графики функций  $x = x(t)$  и  $y = y(t)$ .

Пример 11. Построить кривую  $x = \frac{t^2+1}{t}$ ,  $y = \frac{(t+5)^2}{t+2}$ .

△ Найдем  $y'_x$  и  $y''_{xx}$ , применяя формулы  $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ ,  $y''_{xx} = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)' \frac{1}{x'_t}$

(§ 15, формула (29); § 16, формула (4)). Получим (при  $t \neq 0$ ,  $t \neq -1$ ,  $t \neq -2$ )

$$x'_t = \frac{t^2-1}{t^2}, \quad y'_t = \frac{(t+5)(t-1)}{(t+2)^2}, \quad (38)$$

$$y'_x = \frac{t^2(t+5)}{(t+1)(t+2)^2}, \quad (39)$$

$$y''_{xx} = \frac{4t^3(4t+5)}{(t+1)^3(t+2)^3(t-1)}. \quad (40)$$

Разобьем ось  $t$  точками  $t = -5$ ,  $t = -2$ ,  $t = -\frac{5}{4}$ ,  $t = -1$ ,  $t = 0$ ,  $t = 1$  на семь интервалов. На каждом из этих интервалов функции  $x(t)$ ,  $y(t)$  монотонны,  $y'_x$  и  $y''_{xx}$  сохраняют знак. Составим таблицу значений  $x$ ,  $y$  и знаков  $y'$ ,  $y''$  на соответствующих интервалах, используя

формулы (38), (39), (40).

$t$	$x$	$y$	$y'_x$	$y''_{xx}$
$(-\infty, -5)$	$(-\infty, -\frac{26}{5})$	$(-\infty, 0)$	+	-
$(-5, -2)$	$(-\frac{26}{5}, -\frac{5}{2})$	от 0 до $-\infty$	-	-
$(-2, -\frac{5}{4})$	$(-\frac{5}{2}, -\frac{41}{20})$	от $+\infty$ до $\frac{75}{4}$	-	+
$(-\frac{5}{4}, -1)$	$(-\frac{41}{20}, -2)$	$(\frac{75}{4}, 16)$	-	-
$(-1, 0)$	от $-2$ до $-\infty$	от 16 до $\frac{25}{2}$	+	+
$(0, 1)$	от $+\infty$ до 2	от $\frac{25}{2}$ до 12	+	-
$(1, +\infty)$	$(2, +\infty)$	$(12, +\infty)$	+	+

Найдем асимптоты. Так как  $y \rightarrow \infty$  и  $x \rightarrow -\frac{5}{2}$  при  $t \rightarrow -2$ , то  $x = -\frac{5}{2}$  — асимптота кривой. Если  $t \rightarrow 0$ , то  $x \rightarrow \infty$  и  $y \rightarrow \frac{25}{2}$ , поэтому прямая  $y = \frac{25}{2}$  — горизонтальная асимптота кривой.

Пусть  $t \rightarrow \infty$ , тогда  $x \rightarrow \infty$ ,  $y \rightarrow \infty$ . Выясним, имеет ли кривая наклонную асимптоту, пользуясь теоремой 12. Так как  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 1$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - x(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{(t+5)^2}{t+2} - \frac{t^2+1}{t} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{8t^2 + 24t + 2}{t(t+2)} = 8$ , то прямая  $y = x + 8$  — наклонная асимптота.

Из таблицы и формул (38) следует, что интервалу  $(-\infty, -2)$  переменного  $t$  соответствует часть (ветвь) кривой, которая является графиком функции  $y = y_1(x)$ , выпуклой вверх, причем значению  $t = -5$  соответствует точка максимума  $x_0 = -\frac{26}{5}$  этой функции и  $y_1(x_0) = 0$ .

Интервалу  $(-2, -1)$  соответствует ветвь кривой, являющаяся графиком функции  $y = y_2(x)$ , выпуклой вниз при  $t \in (-2, -\frac{5}{4})$  и выпуклой вверх при  $t \in (-\frac{5}{4}, -1)$ ; точка этого графика  $(-\frac{41}{20}, \frac{75}{4})$ , соответствующая значению  $t = -\frac{5}{4}$ , есть точка перегиба; при  $t = -1$  функция  $x = x(t)$  имеет максимум, причем  $x(-1) = -2$ .

Интервалу  $(-1, 0)$  соответствует график функции  $y = y_3(x)$ , выпуклой вниз, а интервалу  $(0, 1)$  — график функции  $y = y_4(x)$ , выпуклой вверх.

Наконец, интервалу  $(1, +\infty)$  соответствует график функции  $y = y_5(x)$ , выпуклой вниз.

Отметим еще, что  $x(1) = 2$ ,  $y(1) = 12$  и, кроме того, правые про-



изводные функций  $y_3(x)$  и  $y_4(x)$  в точке  $x = 2$  равны  $\frac{1}{3}$ .

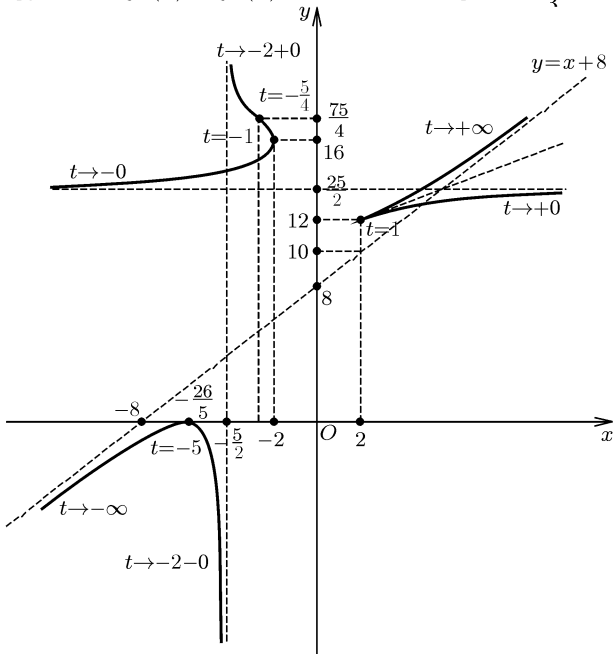


Рис. 20.7

Используя таблицу и проведенное исследование, строим кривую (рис. 20.7). ▲

## § 21. Вектор-функции

### 1. Предел и непрерывность вектор-функции.

а) *Понятие вектор-функции.* Если каждому значению  $t \in E$ , где  $E \subset \mathbb{R}$ , поставлен в соответствие вектор  $\mathbf{r}(t)$  трехмерного пространства, то говорят, что на множестве  $E$  задана *векторная функция  $\mathbf{r}(t)$  скалярного аргумента  $t$* .

Пусть в пространстве фиксирована прямоугольная система координат  $Oxyz$ . Тогда задание вектор-функции  $\mathbf{r}(t)$ ,  $t \in E$ , означает задание координат  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  вектора  $\mathbf{r}(t)$ ,  $t \in E$ . Если  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  — единичные векторы координатных осей, то

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad t \in E,$$

или

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Если  $z(t) = 0$  при всех  $t \in E$ , то вектор-функцию  $\mathbf{r}(t)$  называют

двумерной.

В случае когда начало каждого из векторов  $\mathbf{r}(t)$  совпадает с началом координат (рис. 21.1), эти векторы называют *радиус-векторами*, а множество их концов — *годографом вектор-функции*  $\mathbf{r}(t)$ ,  $t \in E$ , который можно рассматривать как траекторию точки  $M(t)$  конца вектора  $\mathbf{r}(t)$ , если считать, что  $t$  — время.

б) *Предел вектор-функции.* Вектор  $\mathbf{a}$  называют *пределом вектор-функции*  $\mathbf{r}(t)$  в точке  $t_0$  и пишут  $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}$  или  $\mathbf{r}(t) \rightarrow \mathbf{a}$  при  $t \rightarrow t_0$ , если

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| = 0, \quad (1)$$

т. е. длина вектора  $\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}$  стремится к нулю при  $t \rightarrow t_0$ .

Утверждение 1. Если заданы  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  и  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ , то

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a} \quad (2)$$

тогда и только тогда, когда

$$x(t) \rightarrow a_1, \quad y(t) \rightarrow a_2, \quad z(t) \rightarrow a_3 \quad \text{при } t \rightarrow t_0. \quad (3)$$

○ В самом деле, из равенства

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| = \sqrt{(x(t) - a_1)^2 + (y(t) - a_2)^2 + (z(t) - a_3)^2} \quad (4)$$

следует, что

$$|x(t) - a_1| \leq |\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}|, \quad |y(t) - a_2| \leq |\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}|, \quad |z(t) - a_3| \leq |\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}|.$$

Поэтому если  $\mathbf{r}(t) \rightarrow \mathbf{a}$  при  $t \rightarrow t_0$ , т. е. выполняется условие (1), то выполняются условия (3).

Обратно: если выполняются условия (3), то из равенства (4) следует, что выполнено условие (1). ●

При доказательстве свойств предела вектор-функции удобно использовать следующее очевидное утверждение: *условие (2) выполняется в том и только том случае, когда*

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + \boldsymbol{\alpha}(t),$$

где  $\boldsymbol{\alpha}(t)$  — бесконечно малая вектор-функция, т. е.

$$\boldsymbol{\alpha}(t) \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{при } t \rightarrow t_0.$$

в) *Свойства пределов вектор-функций.*

Свойство 1. Если  $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}$ , то  $\lim_{t \rightarrow t_0} |\mathbf{r}(t)| = |\mathbf{a}|$ .

○ Это свойство следует из неравенства

$$||\mathbf{r}(t)| - |\mathbf{a}|| \leq |\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}|. \quad \bullet$$

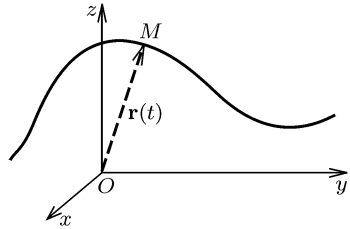


Рис. 21.1

Свойство 2. Если  $\mathbf{r}(t) \rightarrow \mathbf{a}$  при  $t \rightarrow t_0$ , а скалярная функция  $f(t)$  такова, что  $f(t) \rightarrow A$  при  $t \rightarrow t_0$ , то  $f(t)\mathbf{r}(t) \rightarrow A\mathbf{a}$  при  $t \rightarrow t_0$ , т. е.

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t)\mathbf{r}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t). \quad (5)$$

○ Из определений пределов скалярной функции и вектор-функции следует, что  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + \boldsymbol{\alpha}(t)$ ,  $f(t) = A + \beta(t)$ , где  $\boldsymbol{\alpha}(t)$  — бесконечно малая вектор-функция,  $\beta(t)$  — бесконечно малая функция при  $t \rightarrow t_0$ . Поэтому  $f(t)\mathbf{r}(t) = A\mathbf{a} + \boldsymbol{\gamma}(t)$ , где  $\boldsymbol{\gamma}(t) = A\boldsymbol{\alpha}(t) + \beta(t)\mathbf{a} + \beta(t)\boldsymbol{\alpha}(t)$  — бесконечно малая вектор-функция при  $t \rightarrow t_0$ , откуда получаем равенство (5). ●

Свойство 3. Если  $\mathbf{r}_1(t) \rightarrow \mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{r}_2(t) \rightarrow \mathbf{a}_2$  при  $t \rightarrow t_0$ , то  $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ ,  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rightarrow (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ ,  $[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2] \rightarrow [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$  при  $t \rightarrow t_0$ , т. е.

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}_1(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}_2(t), \quad (6)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t)) = \left( \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}_1(t), \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}_2(t) \right), \quad (7)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t)] = \left[ \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}_1(t), \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}_2(t) \right]. \quad (8)$$

○ По условию  $\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{a}_i + \boldsymbol{\alpha}_i(t)$ , где  $\boldsymbol{\alpha}_i(t) \rightarrow \mathbf{0}$  при  $t \rightarrow t_0$  ( $i = 1, 2$ ). Поэтому  $\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \boldsymbol{\beta}(t)$ , где  $\boldsymbol{\beta}(t) = \boldsymbol{\alpha}_1(t) + \boldsymbol{\alpha}_2(t) \rightarrow \mathbf{0}$  при  $t \rightarrow t_0$ , откуда следует (6). Докажем формулу (7). В силу свойств скалярного произведения

$$(\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t)) - (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = (\boldsymbol{\alpha}_1(t), \mathbf{a}_2) + (\boldsymbol{\alpha}_2(t), \mathbf{a}_1) + (\boldsymbol{\alpha}_1(t), \boldsymbol{\alpha}_2(t)),$$

причем в правой части этого равенства — бесконечно малая функция, так как  $\boldsymbol{\alpha}_1(t)$ ,  $\boldsymbol{\alpha}_2(t)$  — бесконечно малые вектор-функции и  $|(\mathbf{p}, \mathbf{q})| \leq |\mathbf{p}| \cdot |\mathbf{q}|$  для любых векторов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$ .

Аналогично доказывается формула (8), в этом случае следует воспользоваться неравенством  $|[\mathbf{p}, \mathbf{q}]| \leq |\mathbf{p}| \cdot |\mathbf{q}|$ . ●

г) *Непрерывность вектор-функции.* Вектор-функцию  $\mathbf{r}(t)$  называют непрерывной при  $t = t_0$ , если

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0). \quad (9)$$

Непрерывность вектор-функции  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  при  $t = t_0$  в силу эквивалентности условий (2) и (3) означает, что ее координаты  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  непрерывны в точке  $t_0$ .

Назовем вектор-функцию  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)$  приращением вектор-функции  $\mathbf{r}(t)$  в точке  $t_0$ . Тогда условие (9) означает, что

$$\Delta \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{при} \quad \Delta t \rightarrow 0. \quad (10)$$

Из определения непрерывности вектор-функции и свойств пределов векторных функций следует, что сумма, векторное и скалярное произведения вектор-функций  $\mathbf{r}_1(t)$  и  $\mathbf{r}_2(t)$  являются непрерывными функциями при  $t = t_0$ , если вектор-функции  $\mathbf{r}_1(t)$  и  $\mathbf{r}_2(t)$  непрерывны в точке  $t_0$ .

## 2. Производная и дифференциал вектор-функции.

а) *Производная вектор-функции.* Если существует  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ , где  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)$ , то этот предел называют *производной вектор-функции*  $\mathbf{r}(t)$  в точке  $t_0$  и обозначают  $\mathbf{r}'(t_0)$  или  $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ .

Таким образом,

$$\mathbf{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t}. \quad (11)$$

Аналогично вводится понятие *второй производной*

$$\mathbf{r}''(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}'(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}'(t_0)}{\Delta t}$$

и производной порядка  $n > 2$  вектор-функции. Заметим, что если  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , то

$$\mathbf{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)). \quad (12)$$

Утверждение (12) следует из определения (11) и свойств пределов вектор-функций.

Аналогично, если существует  $\mathbf{r}''(t_0)$ , то

$$\mathbf{r}''(t_0) = (x''(t_0), y''(t_0), z''(t_0)).$$

Из определения производной следует, что  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}'(t_0)\Delta t + \alpha(\Delta t)\Delta t$ , где  $\alpha(\Delta t) \rightarrow \mathbf{0}$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ , и потому  $\Delta \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ . Таким образом, выполняется условие (10), т. е. вектор-функция  $\mathbf{r}(t)$ , имеющая производную в точке  $t_0$ , непрерывна при  $t = t_0$ .

**Утверждение 2.** *Справедливы следующие правила дифференцирования вектор-функций:*

$$(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)' = \mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}'_2, \quad (13)$$

$$(f\mathbf{r})' = f'\mathbf{r} + f\mathbf{r}', \quad (14)$$

$$(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)' = (\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_2) + (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_2), \quad (15)$$

$$[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]' = [\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_2] + [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_2]. \quad (16)$$

○ Формулы (13)–(16) справедливы в точке  $t$ , если в этой точке соответствующие функции имеют производные. Ограничимся доказательством формулы (15). Пусть  $\Delta \mathbf{r}_k$  — приращение вектор-функции  $\mathbf{r}_k(t)$ , соответствующее приращению аргумента  $\Delta t$ , т. е.  $\Delta \mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(t + \Delta t) - \mathbf{r}_k(t)$ ,  $k = 1, 2$ . Тогда, используя свойства скалярного произведения и свойства пределов вектор-функций, получаем

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)' &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{r}_1(t + \Delta t), \mathbf{r}_2(t + \Delta t)) - (\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t))}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \left( \mathbf{r}_1(t), \frac{\Delta \mathbf{r}_2(t)}{\Delta t} \right) + \left( \frac{\Delta \mathbf{r}_1(t)}{\Delta t}, \mathbf{r}_2(t) \right) + \left( \frac{\Delta \mathbf{r}_1(t)}{\Delta t}, \Delta \mathbf{r}_2(t) \right) \right] = \\ &= (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_2) + (\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_2), \end{aligned}$$

так как  $\frac{\Delta \mathbf{r}_i}{\Delta t} \rightarrow \mathbf{r}'_i(t)$  при  $\Delta t \rightarrow 0$  ( $i = 1, 2$ ) и  $\Delta \mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{0}$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ . ●

Пример 1. Пусть существует  $\mathbf{r}'(t)$  для всех  $t \in (\alpha, \beta)$  и пусть  $|\mathbf{r}(t)| = C = \text{const}$  для всех  $t \in (\alpha, \beta)$ .

Доказать, что  $(\mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t)) = 0$ , т. е. векторы  $\mathbf{r}(t)$  и  $\mathbf{r}'(t)$  ортогональны.

$\Delta$  Используя формулу  $|\mathbf{r}(t)|^2 = (\mathbf{r}(t), \mathbf{r}(t))$ , правило дифференцирования скалярного произведения (формула (15)) и условие  $|\mathbf{r}(t)| = C$ , получаем  $(\mathbf{r}(t), \mathbf{r}(t))' = 2(\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}(t)) = 0$ , так как  $(|\mathbf{r}(t)|^2)' = (C^2)' = 0$ . Итак,

$$|\mathbf{r}(t)| = C \Rightarrow (\mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t)) = 0. \quad \blacktriangle$$

б) *Дифференциал вектор-функции.* Вектор-функцию  $\mathbf{r}(t)$ , определенную в некоторой окрестности точки  $t_0$ , называют *дифференцируемой при  $t = t_0$* , если ее приращение  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)$  в точке  $t_0$  представляется в виде

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{a} \Delta t + \Delta t \boldsymbol{\alpha}(\Delta t), \quad (17)$$

где вектор  $\mathbf{a}$  не зависит от  $\Delta t$ ,  $\boldsymbol{\alpha}(\Delta t) \rightarrow \mathbf{0}$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ .

В этом случае вектор  $\mathbf{a} \Delta t$  называют *дифференциалом вектор-функции  $\mathbf{r}(t)$  в точке  $t_0$*  и обозначают  $d\mathbf{r}$ . Таким образом,

$$d\mathbf{r} = \mathbf{a} \Delta t.$$

Как и в случае скалярной функции, дифференцируемость вектор-функции  $\mathbf{r}(t)$  в точке  $t_0$  равносильна существованию ее производной в точке  $t_0$ , причем

$$\mathbf{r}'(t_0) = \mathbf{a}. \quad (18)$$

Следовательно,

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t_0) \Delta t. \quad (19)$$

Если функция  $\mathbf{r}(t)$  дифференцируема при  $t = t_0$ , то, используя равенства (17) и (18), получаем

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}'(t_0) \Delta t + \Delta t \boldsymbol{\alpha}(\Delta t), \quad (20)$$

где  $\boldsymbol{\alpha}(\Delta t) \rightarrow \mathbf{0}$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Полагая  $dt = \Delta t$ , запишем равенство (19) в виде

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}' dt,$$

где опущено обозначение аргумента функции  $\mathbf{r}'$ . Отсюда получаем

$$\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (21)$$

в) *Замена переменного.*

Утверждение 3. Если функция  $t = t(s)$  дифференцируема при  $s = s_0$ ,  $t(s_0) = t_0$ , а вектор-функция  $\mathbf{r}(t)$  дифференцируема в точке  $t_0$ , то вектор-функция  $\boldsymbol{\rho}(s) = \mathbf{r}(t(s))$  дифференцируема в точке  $s_0$ , а производная этой функции выражается формулой

$$\boldsymbol{\rho}'(s_0) = \mathbf{r}'_s(t(s_0)) = \mathbf{r}'_t(t_0) t'_s(s_0), \quad (22)$$

где индекс указывает, по какому переменному производится дифференцирование.

○ Функция  $\alpha(\Delta t)$  в формуле (20) не определена при  $\Delta t = 0$ . Доопределим ее при  $\Delta t = 0$ , полагая  $\alpha(0) = 0$ .

Так как  $t = t(s)$  — функция, дифференцируемая при  $s = s_0$ , то  $\Delta t = t(s_0 + \Delta s) - t(s_0) \rightarrow 0$  при  $\Delta s \rightarrow 0$ . Разделив обе части равенства (20) на  $\Delta s \neq 0$ , получим

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \mathbf{r}'(t_0) \frac{\Delta t}{\Delta s} + \alpha(\Delta t) \frac{\Delta t}{\Delta s}. \quad (23)$$

Правая часть (23) имеет при  $\Delta s \rightarrow 0$  предел, равный  $\mathbf{r}'(t_0)t'(s_0)$ , так как  $\Delta t \rightarrow 0$  при  $\Delta s \rightarrow 0$  и  $\alpha(\Delta t) \rightarrow 0$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ . Следовательно, существует предел в левой части (23), и справедливо равенство (22).

Формулу (22) запишем кратко в виде равенства

$$\mathbf{r}'_s = \mathbf{r}'_t t'_s, \quad (24)$$

выражающего правило дифференцирования вектор-функции при замене переменного. ●

### 3. Теорема Лагранжа и локальная формула Тейлора для вектор-функции.

Замечание 1. Формула Лагранжа, т. е. формула

$$\mathbf{r}(\beta) - \mathbf{r}(\alpha) = \mathbf{r}'(\xi)(\beta - \alpha), \quad \xi \in (\alpha, \beta), \quad (25)$$

для вектор-функций, вообще говоря, неверна.

○ В самом деле, пусть формула (25) верна, и пусть  $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ , тогда  $\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$ ,  $|\mathbf{r}'(t)| = 1$ . Полагая  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 2\pi$ , получим из равенства (25)  $\mathbf{0} = \mathbf{r}(2\pi) - \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}'(\xi)2\pi$ , что невозможно, так как  $|\mathbf{r}'(\xi)| = 1$ . ●

**Теорема (Лагранжа).** Если вектор-функция  $\mathbf{r}(t)$  непрерывна на отрезке  $[\alpha, \beta]$  и дифференцируема на интервале  $(\alpha, \beta)$ , то

$$\exists \xi \in (\alpha, \beta): |\mathbf{r}(\beta) - \mathbf{r}(\alpha)| \leq |\mathbf{r}'(\xi)|(\beta - \alpha). \quad (26)$$

○ Рассмотрим скалярную функцию

$$\varphi(t) = (\mathbf{r}(\beta) - \mathbf{r}(\alpha), \mathbf{r}(t)).$$

Эта функция непрерывна на отрезке  $[\alpha, \beta]$ , так как вектор-функция  $\mathbf{r}(t)$  непрерывна на этом отрезке. Кроме того, функция  $\varphi(t)$  дифференцируема на интервале  $(\alpha, \beta)$ , так как функция  $\mathbf{r}(t)$  дифференцируема на этом интервале, причем в силу правила дифференцирования скалярного произведения

$$\varphi'(t) = (\mathbf{r}(\beta) - \mathbf{r}(\alpha), \mathbf{r}'(t)).$$

По теореме Лагранжа

$$\exists \xi \in (\alpha, \beta): \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) = \varphi'(\xi)(\beta - \alpha). \quad (27)$$

Преобразуем левую часть равенства (27):

$$\begin{aligned}\varphi(\beta) - \varphi(\alpha) &= (\mathbf{r}(\beta) - \mathbf{r}(\alpha), \mathbf{r}(\beta)) - (\mathbf{r}(\beta) - \mathbf{r}(\alpha), \mathbf{r}(\alpha)) = \\ &= (\mathbf{r}(\beta) - \mathbf{r}(\alpha), \mathbf{r}(\beta) - \mathbf{r}(\alpha)) = |\mathbf{r}(\beta) - \mathbf{r}(\alpha)|^2.\end{aligned}$$

Тогда равенство (27) примет вид

$$|\mathbf{r}(\beta) - \mathbf{r}(\alpha)|^2 = (\mathbf{r}(\beta) - \mathbf{r}(\alpha), \mathbf{r}'(\xi))(\beta - \alpha). \quad (28)$$

Если  $\mathbf{r}(\beta) = \mathbf{r}(\alpha)$ , то неравенство (26) справедливо при любом  $\xi \in (\alpha, \beta)$ . Если  $\mathbf{r}(\beta) \neq \mathbf{r}(\alpha)$ , то  $|\mathbf{r}(\beta) - \mathbf{r}(\alpha)| > 0$ . Тогда, используя неравенство  $|(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \leq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$ , из формулы (28) получим

$$|\mathbf{r}(\beta) - \mathbf{r}(\alpha)|^2 \leq |\mathbf{r}(\beta) - \mathbf{r}(\alpha)| \cdot |\mathbf{r}'(\xi)|(\beta - \alpha),$$

откуда, разделив обе части неравенства на  $|\mathbf{r}(\beta) - \mathbf{r}(\alpha)| > 0$ , получим неравенство (26). ●

**Замечание 2.** Для вектор-функции  $\mathbf{r}(t)$  справедлива локальная формула Тейлора

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{k=0}^n \frac{\mathbf{r}^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k + \varepsilon(t - t_0), \quad (29)$$

где  $\varepsilon(t - t_0) = \mathbf{o}((t - t_0)^n)$  — вектор-функция такая, что  $\varepsilon(t - t_0) = (t - t_0)^n \varepsilon_1(t - t_0)$ , где  $\varepsilon_1(t - t_0) \rightarrow \mathbf{0}$  при  $t \rightarrow t_0$ .

Эта формула справедлива в предположении, что существует  $\mathbf{r}^{(n)}(t_0)$ . Для доказательства формулы (29) достаточно воспользоваться локальной формулой Тейлора для компонент вектор-функции  $\mathbf{r}(t)$ .

## § 22. Кривые

**1. Понятие простой кривой.** Пусть в трехмерном пространстве выбрана прямоугольная система координат  $Oxyz$ , и пусть на отрезке  $[\alpha, \beta]$  заданы непрерывные функции  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ .

Тогда говорят, что задано непрерывное отображение отрезка  $[\alpha, \beta]$  в трехмерное пространство. Числа  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  можно рассматривать как координаты точки  $M$  (рис. 22.1), где  $M = M(t)$ , или как координаты вектора  $\mathbf{r}(t)$  с началом в точке  $O$  и концом в точке  $M$ , т. е.

$$\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Если считать, что переменное  $t$  есть время, то уравнения

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad (1)$$

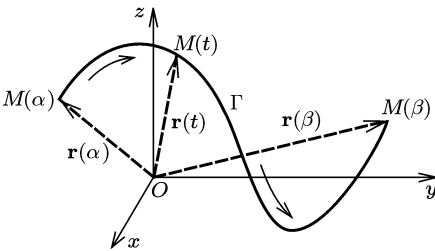


Рис. 22.1

определяют закон движения точки  $M(t)$ , а множество точек  $M(t)$ , соответствующих всевозможным значениям  $t$  из отрезка  $[\alpha, \beta]$ , можно рассматривать как *след (путь)* точки, движущейся по закону (1).

**Замечание 1.** В общем случае закон движения может быть очень сложным. Например, существуют такие непрерывные на отрезке  $[\alpha, \beta]$  функции  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ , что точка  $M(t)$ , движущаяся в соответствии с законом (1), пройдет через каждую точку некоторого куба.

Предположим, что любым двум различным значениям  $t_1$  и  $t_2$  из отрезка  $[\alpha, \beta]$  соответствуют различные точки  $M(t_1)$  и  $M(t_2)$  пространства, и обозначим через  $K$  множество всех точек  $M(x, y, z)$  пространства, координаты которых определяются формулами (1).

Будем говорить, что *точка  $M(t_2) \in K$  следует за точкой  $M(t_1) \in K$  или точка  $M(t_1)$  предшествует точке  $M(t_2)$* , если  $\alpha \leq t_1 < t_2 \leq \beta$ . Введенное правило следования точек устанавливает порядок на множестве  $K$ . Упорядоченное указанным способом множество  $K$  будем называть *простой кривой  $\Gamma$*  и записывать уравнение этой кривой либо в *координатной форме*

$$\Gamma = \{x = x(t), y = y(t), z = z(t), \alpha \leq t \leq \beta\}, \quad (2)$$

либо в *векторной форме*

$$\Gamma = \{\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \alpha \leq t \leq \beta\}, \quad (3)$$

где

$$\mathbf{r} = (x, y, z), \quad \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Условимся переменное  $t$  в уравнениях (2), (3) называть *параметром кривой  $\Gamma$* . Точки  $M(\alpha)$  и  $M(\beta)$ , соответствующие значениям  $\alpha$  и  $\beta$  параметра кривой  $\Gamma$ , будем называть *начальной точкой (началом) кривой* и *конечной точкой (концом) кривой*.

Согласно определению простой кривой отображение (1) является взаимно однозначным: каждому значению  $t \in [\alpha, \beta]$  соответствует единственная точка  $M(t) \in \Gamma$ , и наоборот, каждой точке  $M \in \Gamma$  соответствует единственное значение  $t \in [\alpha, \beta]$ .

Если простая кривая  $\Gamma$  лежит в некоторой плоскости  $\mathcal{P}$ , то эту кривую называют *плоской*. В частности, если плоскость  $\mathcal{P}$  совпадает с плоскостью  $Oxy$ , то уравнение кривой  $\Gamma$  имеет вид

$$\Gamma = \{x = x(t), y = y(t), z = 0, \alpha \leq t \leq \beta\}.$$

Обычно в этом случае опускают уравнение  $z = 0$  и записывают уравнение кривой в виде

$$\Gamma = \{x = x(t), y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta\}.$$

Например, уравнением

$$\Gamma = \{x = R \cos t, y = R \sin t, 0 \leq t \leq \pi\},$$



где  $R > 0$ , задается полуокружность радиуса  $R$ , лежащая в верхней полуплоскости ( $y \geq 0$ ) и “пробегаемая” против часовой стрелки. График функции  $y = f(x)$ , непрерывной на отрезке  $[\alpha, \beta]$ , можно рассматривать как простую плоскую кривую  $\Gamma$ , заданную уравнением

$$\Gamma = \{x = t, y = f(t), \alpha \leq t \leq \beta\}.$$

**2. Параметризуемые кривые.** Если существуют два различных значения  $t_1$  и  $t_2$  из отрезка  $[\alpha, \beta]$  таких, что  $M(t_1) = M(t_2)$ , то отображение (1) отрезка в трехмерное пространство не является взаимно однозначным.

Предположим, что отрезок  $[\alpha, \beta]$  можно разбить на отрезки  $\Delta_k = [t_{k-1}, t_k]$ ,  $k = \overline{1, n}$ , где  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta$ , такие, что каждое из непрерывных отображений

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in \Delta_k, \quad k = \overline{1, n},$$

является взаимно однозначным и, следовательно, определяет простую кривую

$$\Gamma_k = \{x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in \Delta_k\}.$$

Тогда будем говорить, что уравнения (2) задают *параметризуемую кривую*  $\Gamma$  или что кривая  $\Gamma$  параметризована при помощи уравнений (2), где под кривой  $\Gamma$  понимают упорядоченную совокупность  $(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$  простых кривых таких, что конечная точка кривой  $\Gamma_k$  совпадает с начальной точкой кривой  $\Gamma_{k+1}$ ,  $k = \overline{1, n-1}$ . В этом случае говорят также, что “кривая  $\Gamma$  разбита на простые кривые  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ ” или что “кривая  $\Gamma$  составлена из простых кривых  $\Gamma_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ ” и пишут  $\Gamma = \Gamma_1 \Gamma_2 \dots \Gamma_n$ , а каждую из кривых  $\Gamma_k$  называют *частью кривой*  $\Gamma$  или *простой дугой кривой*  $\Gamma$ .

**Замечание 2.** Одна и та же кривая  $\Gamma$  может быть параметризована различными способами. Мы будем рассматривать только такие параметризации, которые получаются из данной параметризации (2) путем представления параметра  $t$  в виде непрерывной строго возрастающей функции другого параметра.

Это означает, что если наряду с представлением кривой  $\Gamma$  через параметр  $t$  уравнением (3) эта кривая представлена через параметр  $s$  уравнением

$$\Gamma = \{\rho = \rho(s), \alpha_1 \leq s \leq \beta_1\}, \quad (4)$$

то должно выполняться условие:  $s = s(t)$  — непрерывная строго возрастающая функция на отрезке  $[\alpha, \beta]$ , причем

$$s(\alpha) = \alpha_1, \quad s(\beta) = \beta_1, \quad \rho(s(t)) = \mathbf{r}(t) \quad \text{для всех } t \in [\alpha, \beta]. \quad (5)$$

В этом случае на отрезке  $[\alpha_1, \beta_1]$  определена непрерывная и строго возрастающая функция  $t = t(s)$ , обратная к функции  $s = s(t)$ , и для всех  $s \in [\alpha_1, \beta_1]$  выполняется равенство

$$\rho(s) = \mathbf{r}(t(s)). \quad (6)$$

**Замечание 3.** Условимся в дальнейшем, если не оговорено противное, для записи уравнений кривых использовать только параметризации, указанные в замечании 2, и называть их *допустимыми*.

Пусть параметризуемая кривая  $\Gamma$  задана уравнением (3), и пусть существуют значения  $t_1$  и  $t_2$  ( $t_1 \neq t_2$ ) из отрезка  $[\alpha, \beta]$  такие, что  $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2)$ . Тогда говорят, что точка  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ , где  $x_1 = x(t_1) = x(t_2)$ ,  $y_1 = y(t_1) = y(t_2)$ ,  $z_1 = z(t_1) = z(t_2)$ , является *точкой самопересечения* (*кратной точкой*) кривой  $\Gamma$ .

Если равенство  $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2)$  выполняется при  $t_1 = \alpha$ ,  $t_2 = \beta$ , то кривую  $\Gamma$  называют *замкнутой*. Замкнутую кривую, не имеющую точек самопересечения, отличных от точки  $M_1(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$ , будем называть *простым контуром*.

Например, кривая

$$\Gamma = \{x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

является простым контуром. При изменении  $t$  от 0 до  $2\pi$  точка  $M(\cos t, \sin t)$  “описывает” единичную окружность, двигаясь против часовой стрелки. Точка плоскости  $Oxy$  с координатами  $(1, 0)$  является одновременно начальной и конечной точкой кривой  $\Gamma$ .

**3. Касательная к кривой.** Пусть кривая  $\Gamma$  задана уравнением (3), где  $\mathbf{r}(t)$  — вектор-функция, дифференцируемая в точке  $t_0 \in [\alpha, \beta]$ , причем  $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$ . Тогда

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}'(t_0) \Delta t + \Delta t \alpha(\Delta t), \quad (7)$$

где  $\alpha(\Delta t) \rightarrow \mathbf{0}$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ . Из условия  $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$  и равенства (7) следует, что при всех достаточно малых  $\Delta t \neq 0$  правая часть (7) есть ненулевой вектор, и поэтому  $\Delta \mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ , т. е. существует число  $\delta > 0$  такое, что если

$$0 < |\Delta t| < \delta, \quad t_0 + \Delta t \in [\alpha, \beta], \quad (8)$$

то  $\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) \neq \mathbf{r}(t_0)$ .

Пусть  $M_0$  и  $M$  — точки кривой  $\Gamma$ , соответствующие значениям параметра  $t_0$  и  $t_0 + \Delta t$  (рис. 22.2). Проведем через эти точки прямую и назовем ее *секущей*.

Если  $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$ , то при всех значениях  $\Delta t$ , удовлетворяющих условиям (8), ненулевой вектор  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)$  параллелен секущей, и поэтому вектор  $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$  также параллелен секущей. Уравнение секущей имеет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0) + \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Пусть существует предельное положение секущей, т. е. существует  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \neq \mathbf{0}$ . Тогда прямая, уравнение которой получается из уравнения (9) заменой отношения  $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$  его пределом, называется *касательной к кривой  $\Gamma$  в точке  $M_0$* .

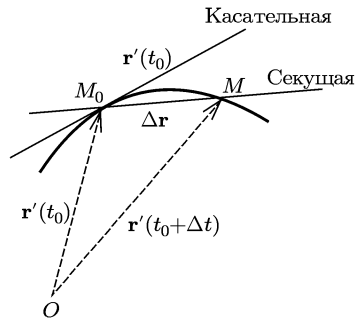


Рис. 22.2

Утверждение 1. Если  $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$ , то существует касательная к кривой  $\Gamma$  в точке  $M_0$ , и уравнение этой касательной можно записать в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{r}'(t_0)\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

○ Если функция  $\mathbf{r}(t)$  дифференцируема при  $t = t_0$  и  $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$ , то существует  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \mathbf{r}'(t_0)$ , и по определению прямая (10) является касательной к кривой  $\Gamma$  в точке  $M_0$ . ●

В координатной форме уравнение (10) имеет вид

$$x = x(t_0) + \lambda x'(t_0), \quad y = y(t_0) + \lambda y'(t_0), \quad z = z(t_0) + \lambda z'(t_0), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

а в канонической форме уравнение касательной записывается в виде

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

**4. Понятие гладкой кривой.** Пусть кривая  $\Gamma$  задана уравнением (3), где  $\mathbf{r}(t)$  — дифференцируемая на отрезке  $[\alpha, \beta]$  функция, тогда говорят, что  $\Gamma$  — *дифференцируемая кривая*.

Если  $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$ , то точку  $M_0 \in \Gamma$ , где  $\overrightarrow{OM_0} = \mathbf{r}(t_0)$ , называют *неособой точкой кривой*  $\Gamma$ ; если же  $\mathbf{r}'(t_0) = \mathbf{0}$ , то говорят, что  $M_0$  — *особая точка кривой*  $\Gamma$ .

Пусть  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , тогда  $\mathbf{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ , и поэтому точка  $M_0$  является неособой точкой кривой  $\Gamma$  тогда и только тогда, когда  $(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2 + (z'(t_0))^2 > 0$ . Из определения неособой точки и утверждения 1 следует, что во всякой неособой точке кривой  $\Gamma$  существует касательная.

Если функция  $\mathbf{r}'(t)$  непрерывна на отрезке  $[\alpha, \beta]$ , то будем говорить, что *кривая*  $\Gamma$ , заданная уравнением (3), *непрерывно дифференцируема*.

Условимся называть кривую *гладкой*, если она является непрерывно дифференцируемой и не имеет особых точек. Следовательно, кривая  $\Gamma$ , заданная уравнением (3), является гладкой, если функция  $\mathbf{r}'(t)$  непрерывна и  $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$  при всех  $t \in [\alpha, \beta]$ . Если кривая составлена из конечного числа гладких кривых, то такую кривую будем называть *кусочно гладкой*.

**Замечание 4.** Для непрерывно дифференцируемой кривой  $\Gamma$  в качестве допустимых преобразований параметра (см. замечания 2 и 3) рассматриваются функции  $s(t)$ , непрерывно дифференцируемые и такие, что  $s'(t) > 0$ .

В этом случае на отрезке  $[\alpha, \beta]$  определена непрерывно дифференцируемая функция  $t = t(s)$ , обратная к функции  $s = s(t)$ , причем  $t'(s) > 0$  и выполняется равенство (6).

### 5. Длина дуги кривой.

а) *Понятие длины кривой.* Пусть кривая  $\Gamma$  задана уравнением (3), и пусть на отрезке  $[\alpha, \beta]$  выбраны точки  $t_k$  ( $k = \overline{0, n}$ ) такие, что

$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta.$$

Набор точек  $t_k$  будем называть *разбиением отрезка*  $[\alpha, \beta]$  и обозначать  $T = \{t_k, k = \overline{0, n}\}$ , а соответствующий набор точек  $M_k = M(t_k)$ , где  $\overrightarrow{OM_k} = \mathbf{r}(t_k)$ , будем называть *разбиением кривой*  $\Gamma$  (рис. 22.3).

Соединив последовательно точки  $M_0, M_1, \dots, M_n$  отрезками  $M_0M_1, M_1M_2, \dots, M_{n-1}M_n$ , получим ломаную  $\mathcal{P}_n$ , которую будем называть *вписанной в кривую*  $\Gamma$ ; отрезки  $M_{k-1}M_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) назовем *звеньями ломаной*  $\mathcal{P}_n$ , а точки  $M_k$  ( $k = \overline{0, n}$ ) — *вершинами ломаной*  $\mathcal{P}_n$ .

Так как длина  $k$ -го звена ломаной  $\mathcal{P}_n$ , т. е. длина отрезка  $M_{k-1}M_k$ , равна  $|\mathbf{r}(t_k) - \mathbf{r}(t_{k-1})|$ , то длина  $\sigma_n$  ломаной  $\mathcal{P}_n$  равна

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n |\mathbf{r}(t_k) - \mathbf{r}(t_{k-1})|. \quad (11)$$

Если существует точная верхняя грань множества длин ломаных, вписанных в кривую  $\Gamma$ , то эта грань называется *длиной кривой*  $\Gamma$ . Кривая, имеющая длину, называется *спрямляемой*.

*Утверждение 2.* Если спрямляемая кривая  $\Gamma$  точкой  $M'$  разбита на кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , т. е.  $\Gamma = \Gamma_1\Gamma_2$ , то кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  спрямляемы, причем

$$S = S_1 + S_2, \quad (12)$$

где  $S, S_1, S_2$  — длины кривых  $\Gamma, \Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  соответственно.

○ Пусть  $P'$  и  $P''$  — произвольные ломаные, вписанные соответственно в  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , тогда  $P = P'P''$  — ломаная, вписанная в  $\Gamma$ , причем

$$\sigma = \sigma' + \sigma'', \quad (13)$$

где  $\sigma, \sigma', \sigma''$  — длины ломаных  $P, P'$  и  $P''$  соответственно. Так как  $\Gamma$  — спрямляемая кривая, то  $\sigma \leq S$ , и поэтому

$$\sigma' \leq S, \quad \sigma'' \leq S.$$

По теореме о точной верхней грани существуют  $\sup \sigma', \sup \sigma''$ , т. е.

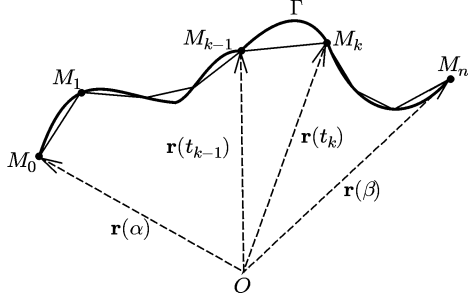


Рис. 22.3

$\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  — спрямляемые кривые. Из равенства (13) следует, что  $\sigma' + \sigma'' \leq S$ , и поэтому  $\sup(\sigma' + \sigma'') = \sup \sigma' + \sup \sigma'' \leq S$ , т. е.

$$S_1 + S_2 \leq S. \quad (14)$$

Докажем, что в (14) вместо знака неравенства можно поставить знак равенства. Предположим противное, т. е. допустим, что  $S_1 + S_2 < S$ . Обозначим  $\varepsilon_0 = S - (S_1 + S_2)$ , тогда  $\varepsilon_0 > 0$ .

По определению точной верхней грани для заданного числа  $\varepsilon_0 > 0$  можно указать такую ломаную  $P_n$ , вписанную в кривую  $\Gamma$ , что  $S < \sigma_n + \varepsilon_0$ . Пусть кривая  $\Gamma$  задана уравнением (3). Будем считать, что вершины  $M_k$  ( $k = \overline{0, n}$ ) ломаной  $P_n$  соответствуют разбиению  $T$  отрезка  $[\alpha, \beta]$ , указанному выше, а общая точка  $M'$  кривых  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  соответствует значению параметра  $t' \in [t_{k-1}, t_k]$ , где  $k$  — одно из чисел  $1, 2, \dots, n$ .

Рассмотрим ломаную  $\tilde{P}$ , полученную из ломаной  $P_n$  заменой звена  $M_{k-1}M_k$  двумя звеньями  $M_{k-1}M'$  и  $M'M_k$  (остальные звенья этих ломаных совпадают). Так как длина отрезка  $M_{k-1}M_k$  не превосходит суммы длин отрезков  $M_{k-1}M'$  и  $M'M_k$ , то  $\sigma_n \leq \tilde{\sigma}$ , где  $\tilde{\sigma}$  — длина ломаной  $\tilde{P}$ ,  $\sigma_n$  — длина ломаной  $P_n$ .

Заметим, что ломаная  $\tilde{P}$  составлена из ломаных  $\tilde{P}'$  и  $\tilde{P}''$ , вписанных соответственно в кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Поэтому

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}' + \tilde{\sigma}'',$$

где  $\tilde{\sigma}'$ ,  $\tilde{\sigma}''$  — длины ломаных  $\tilde{P}'$  и  $\tilde{P}''$ .

Так как  $\tilde{\sigma}' \leq S_1$ ,  $\tilde{\sigma}'' \leq S_2$ , то  $\tilde{\sigma} \leq S_1 + S_2$ . Следовательно,

$$\sigma_n \leq \tilde{\sigma} \leq S_1 + S_2,$$

и поэтому

$$S < \sigma_n + \varepsilon_0 \leq S_1 + S_2 + \varepsilon_0,$$

откуда  $\varepsilon_0 = S - (S_1 + S_2) < \varepsilon_0$ , т. е.  $\varepsilon_0 < \varepsilon_0$ , что невозможно.

Равенство (12) доказано. ●

У п р а ж н е н и е 1. Доказать, что кривая  $\Gamma$ , составленная из спрямляемых кривых  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , спрямляемая, причем выполняется равенство (12).

У п р а ж н е н и е 2. Доказать, что длина кривой  $\Gamma$  не зависит от ее параметризации.

**Теорема 1.** Если кривая  $\Gamma$ , заданная уравнением (3), непрерывно дифференцируема, то она спрямляемая, а для ее длины  $S$  справедливо неравенство

$$S \leq (\beta - \alpha) \max_{\alpha \leq t \leq \beta} |\mathbf{r}'(t)|. \quad (15)$$

○ Пусть  $T = \{t_k, k = \overline{0, n}\}$  — разбиение отрезка  $[\alpha, \beta]$ . По теореме Лагранжа для вектор-функции получаем

$$|\mathbf{r}(t_k) - \mathbf{r}(t_{k-1})| \leq |\mathbf{r}'(\tau_k)|(t_k - t_{k-1}), \quad \tau_k \in (t_{k-1}, t_k). \quad (16)$$

Из непрерывности вектор-функции  $\mathbf{r}'(t)$  на отрезке  $[\alpha, \beta]$  следует не-

прерывность и ограниченность функции  $|\mathbf{r}'(t)|$ , и поэтому

$$\exists C > 0: \forall t \in [\alpha, \beta] \rightarrow |\mathbf{r}'(t)| \leq C.$$

В качестве  $C$  можно в силу теоремы Вейерштрасса взять число

$$C = \max_{\alpha \leq t \leq \beta} |\mathbf{r}'(t)|. \quad (17)$$

Так как  $|\mathbf{r}'(\tau_k)| \leq C$ , то из (11) и (16) следует, что

$$\sigma_n \leq \sum_{k=1}^n C(t_k - t_{k-1}) = C(\beta - \alpha),$$

где число  $C$  определяется формулой (17). Итак, множество длин ломанных, вписанных в  $\Gamma$ , ограничено сверху, откуда по теореме о точной верхней грани следует, что  $\Gamma$  — спрямляемая кривая, и выполняется неравенство (15). ●

б) Производная переменная длины дуги.

**Теорема 2.** Пусть кривая  $\Gamma = \{\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \alpha \leq t \leq \beta\}$  непрерывно дифференцируема, и пусть  $s(t)$  — длина той части кривой  $\Gamma$ , которая соответствует изменению параметра от  $\alpha$  до  $t$ .

Тогда для любого  $t_0 \in [\alpha, \beta]$  существует  $s'(t_0)$ , причем

$$s'(t_0) = |\mathbf{r}'(t_0)|. \quad (18)$$

○ Пусть  $t_0 + \Delta t \in [\alpha, \beta]$ ,  $M_0$  и  $M$  — точки кривой  $\Gamma$ , соответствующие значениям  $t_0$  и  $t_0 + \Delta t$  параметра кривой (рис. 22.4). Тогда длина дуги  $M_0M$  равна  $|\Delta s|$ , где

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0),$$

а длина хорды  $M_0M$  равна  $|\Delta \mathbf{r}|$ , и поэтому получаем неравенство

$$|\Delta \mathbf{r}| \leq |\Delta s|. \quad (19)$$

По теореме 1 получаем

$$|\Delta s| \leq \max_{t \in P} |\mathbf{r}'(t)| |\Delta t|, \quad (20)$$

где  $P$  — отрезок с концами  $t_0$  и  $t_0 + \Delta t$ .

Из неравенств (19) и (20) следует, что

$$|\Delta \mathbf{r}| \leq |\Delta s| \leq \max_{t \in P} |\mathbf{r}'(t)| |\Delta t|,$$

откуда при  $\Delta t \neq 0$  получаем

$$\left| \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right| \leq \left| \frac{\Delta s}{\Delta t} \right| \leq \max_{t \in P} |\mathbf{r}'(t)|. \quad (21)$$

Заметим, что если  $\Delta t > 0$ , то  $\Delta s \geq 0$ , а если  $\Delta t < 0$ , то  $\Delta s \leq 0$ , так как  $s(t)$  — возрастающая функция. Поэтому  $\frac{\Delta s}{\Delta t} \geq 0$  и  $\left| \frac{\Delta s}{\Delta t} \right| = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ . Следовательно, неравенство (21) можно записать в виде

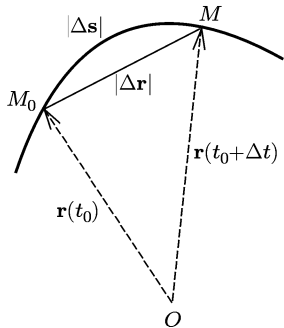


Рис. 22.4

$$\left| \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right| \leq \frac{\Delta s}{\Delta t} \leq \max_{t \in P} |\mathbf{r}'(t)|. \quad (22)$$

Функция  $\mathbf{r}'(t)$  непрерывна на отрезке  $[\alpha, \beta]$ , и поэтому функция  $|\mathbf{r}'(t)|$  также непрерывна на этом отрезке. Согласно теореме Вейерштрасса существует точка  $\xi \in P$  такая, что  $\max_{t \in P} |\mathbf{r}'(t)| = |\mathbf{r}'(\xi)|$ .

Пусть  $\Delta t \rightarrow 0$ , тогда  $|\mathbf{r}'(\xi)| \rightarrow |\mathbf{r}'(t_0)|$  в силу непрерывности функции  $|\mathbf{r}'(t)|$  при  $t = t_0$ . Поэтому правая часть неравенства (22) имеет при  $\Delta t \rightarrow 0$  предел, равный  $|\mathbf{r}'(t_0)|$ .

Кроме того, по определению производной вектор-функции существует  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \mathbf{r}'(t_0)$ .

По свойствам пределов из (22) следует, что существует  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = |\mathbf{r}'(t_0)|$ , т. е. справедливо равенство (18). Таким образом, доказано, что переменная длина дуги непрерывно дифференцируемой кривой  $\Gamma$ , т. е. функция  $s(t)$ , дифференцируема на отрезке  $[\alpha, \beta]$  и выполняется равенство

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)|, \quad (23)$$

причем функция  $s'(t)$  непрерывна на отрезке  $[\alpha, \beta]$ . ●

в) *Натуральное уравнение гладкой кривой.* Пусть кривая  $\Gamma$ , заданная уравнением (3), является гладкой. Тогда функция  $\mathbf{r}'(t)$  непрерывна на отрезке  $[\alpha, \beta]$ ,  $\mathbf{r}'(t) \neq 0$ , и поэтому  $|\mathbf{r}'(t)| > 0$ . Из равенства (23) следует, что  $\frac{ds}{dt} > 0$  для всех  $t \in [\alpha, \beta]$ . Поэтому непрерывно дифференцируемая функция  $s = s(t)$  является строго возрастающей. По теореме об обратной функции на отрезке  $[0, S]$ , где  $S$  — длина кривой  $\Gamma$ , определена функция  $t = t(s)$ , причем  $t(s)$  — непрерывно дифференцируемая строго возрастающая функция и

$$t'(s) = \frac{1}{s'(t)} > 0.$$

Таким образом, функция  $t = t(s)$  является допустимым преобразованием параметра (замечания 3, 4), и уравнение кривой  $\Gamma$  можно записать в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s)), \quad 0 \leq s \leq S.$$

Если параметром кривой  $\Gamma$  является переменная длина ее дуги  $s$ , то  $s$  называют *натуральным параметром*, а уравнение кривой  $\Gamma$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s), \quad 0 \leq s \leq S, \quad (24)$$

записанное через параметр  $s$ , называют *натуральным уравнением*.

**Пример 1.** Записать натуральное уравнение *винтовой линии*

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где  $a > 0$ ,  $b > 0$ .

△ Кривая  $\Gamma$  является гладкой, так как вектор-функция  $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$  непрерывно дифференцируема и

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2} > 0.$$

По формуле (23) находим

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

откуда заключаем (§ 17, следствие 2 из теоремы Лагранжа), что

$$s = t\sqrt{a^2 + b^2} + B,$$

где  $B = 0$ , так как  $s(0) = 0$ . Следовательно,  $t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ , и поэтому искомое представление кривой  $\Gamma$  имеет вид

$$x = a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y = a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad z = \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad 0 \leq s \leq T\sqrt{a^2 + b^2},$$

так как длина  $S$  кривой  $\Gamma$  равна  $s(T) = T\sqrt{a^2 + b^2}$ . ▲

Утверждение 3. Если параметром гладкой кривой  $\Gamma$  является переменная длина ее дуги  $s$ , то

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = 1. \quad (25)$$

○ В самом деле, из формулы (23) при  $t = s$  следует равенство (25). ●

Упражнение 3. Пусть кривая  $\Gamma$  задана натуральным уравнением (24), и пусть  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы, образованные вектором касательной к этой кривой в точке  $M_0$ , называющую нормальной плоскостью кривой  $\Gamma$  в точке  $M_0$ .

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma).$$

## 6. Нормальная плоскость и главная нормаль кривой.

а) *Нормальная плоскость.*

Плоскость  $\mathcal{P}$ , проходящую через точку  $M_0$  кривой  $\Gamma$  и перпендикулярную касательной к этой кривой в точке  $M_0$ , называют *нормальной плоскостью кривой  $\Gamma$  в точке  $M_0$* .

Если кривая  $\Gamma$  задана уравнением (3),  $t_0 \in [\alpha, \beta]$ ,

$\overrightarrow{OM_0} = \mathbf{r}(t_0)$  и  $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$ , то

вектор  $\mathbf{r}'(t_0)$  параллелен касательной к кривой  $\Gamma$  в точке  $M_0$ . Пусть  $M$  — произвольная точка нормальной плоскости  $\mathcal{P}$  (рис. 22.5),

$\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}$ . Тогда вектор  $\overrightarrow{MM_0} = \mathbf{r} - \mathbf{r}(t_0)$  перпендикулярен вектору

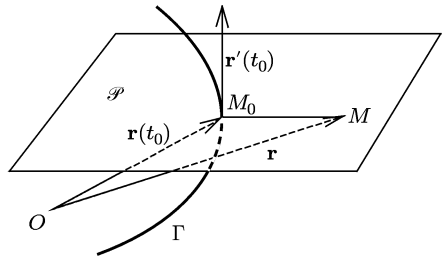


Рис. 22.5



$\mathbf{r}'(t_0)$ , и поэтому уравнение нормальной плоскости  $\mathcal{P}$  к кривой  $\Gamma$  в точке  $M_0$  можно записать в виде

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_0), \mathbf{r}'(t_0)) = 0$$

или

$$(x - x(t_0))x'(t_0) + (y - y(t_0))y'(t_0) + (z - z(t_0))z'(t_0) = 0.$$

б) *Главная нормаль.* Любую прямую, лежащую в нормальной плоскости  $\mathcal{P}$  к кривой  $\Gamma$  в точке  $M_0$  и проходящую через точку  $M_0$ , называют *нормалью кривой  $\Gamma$  в точке  $M_0$* . Среди всех нормалей выделяют одну — главную нормаль.

Понятие главной нормали требует введения дополнительных ограничений на вектор-функции, с помощью которых записываются уравнения кривых. Пусть  $\Gamma$  — гладкая кривая, заданная уравнением (3), причем для всех  $t \in [\alpha, \beta]$  существует  $\mathbf{r}''(t)$ . В этом случае говорят, что  $\Gamma$  — *дважды дифференцируемая кривая без особых точек*.

Утверждение 4. Если  $\Gamma$  — дважды дифференцируемая кривая без особых точек, заданная уравнением (3),  $s$  — переменная длина дуги кривой  $\Gamma$ , то существуют  $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$  и  $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$  и справедливы равенства

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{s'(t)}, \quad (26)$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{s'(t)\mathbf{r}''(t) - s''(t)\mathbf{r}'(t)}{(s'(t))^3}. \quad (27)$$

○ Применяя правило дифференцирования вектор-функции при замене переменного, получаем формулу (26):

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{1}{s'(t)} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{s'(t)}.$$

Используя формулу (26) и правило дифференцирования произведения векторной функции на скалярную, находим

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) \frac{dt}{ds} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{r}'(t)}{s'(t)} \right) \frac{1}{s'(t)} = \left( \frac{\mathbf{r}''(t)}{s'(t)} - \frac{s''(t)\mathbf{r}'(t)}{(s'(t))^2} \right) \frac{1}{s'(t)},$$

откуда следует формула (27).

Заметим, что  $s''(t)$  существует, так как  $s'(t) = |\mathbf{r}'(t)|$ ,

$$s''(t) = \frac{d}{dt} (|\mathbf{r}'(t)|) = \frac{d}{dt} (\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}'(t))^{1/2},$$

а  $\mathbf{r}''(t)$  существует и  $|\mathbf{r}'(t)| \neq 0$ . ●

Перейдем к определению главной нормали. Будем считать, что  $\Gamma$  — дважды дифференцируемая кривая без особых точек, заданная уравнением (3). Тогда существуют  $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$  и  $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$ , причем  $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$  — единичный

вектор в силу равенства (25). Обозначим этот вектор буквой  $\boldsymbol{\tau}$ . Тогда

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \boldsymbol{\tau}, \quad |\boldsymbol{\tau}| = 1, \quad (28)$$

и поэтому (см. § 21, пример 1) вектор  $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$  ортогонален вектору  $\boldsymbol{\tau}$ .

Предположим, что

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \neq \mathbf{0}, \quad (29)$$

и обозначим

$$k = \left| \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \right|. \quad (30)$$

Пусть  $\boldsymbol{\nu}$  — единичный вектор, параллельный вектору  $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$ . Тогда

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = k\boldsymbol{\nu}, \quad |\boldsymbol{\nu}| = 1, \quad (31)$$

причем вектор  $\boldsymbol{\nu}$  ортогонален вектору  $\boldsymbol{\tau}$ .

Так как вектор  $\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$  параллелен вектору касательной  $\mathbf{r}'(t)$  к кривой  $\Gamma$  в силу равенства (26), то из (31) следует, что вектор  $\boldsymbol{\nu}$  параллелен нормальной плоскости кривой  $\Gamma$  в точке  $M$  ( $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}(t)$ ). Поэтому вектор  $\boldsymbol{\nu}$  параллелен одной из нормалей кривой  $\Gamma$  в точке  $M$ . Эту нормаль называют *главной*.

Итак, если в точке  $M \in \Gamma$  выполняется условие (29), то нормаль к кривой  $\Gamma$  в точке  $M$ , параллельная вектору  $\boldsymbol{\nu}$  (формула (31)), называется *главной нормалью*.

**7. Кривизна кривой.** Пусть  $\Gamma = \{\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \alpha \leq t \leq \beta\}$  — дважды дифференцируемая кривая, не имеющая особых точек. Тогда существует  $\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \boldsymbol{\tau}$  и  $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$ , где  $s = s(t)$  — переменная длина дуги кривой  $\Gamma$ . Число  $k$ , определяемое формулой (30), называют *кривизной кривой в точке  $M \in \Gamma$*  ( $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}(t)$ ).

Утверждение 5. *Кривизна  $k$  дважды дифференцируемой кривой  $\Gamma = \{\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \alpha \leq t \leq \beta\}$ , не имеющей особых точек, выражается формулой*

$$k = \frac{|\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}. \quad (32)$$

○ Заметим, что

$$k = \left| \left[ \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}, \boldsymbol{\tau} \right] \right|. \quad (33)$$

Действительно, так как  $\boldsymbol{\tau}$  — единичный вектор, ортогональный вектору  $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$ , то, используя определение кривизны (формула (30)), получаем

$$\left| \left[ \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}, \boldsymbol{\tau} \right] \right| = \left| \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \right| \cdot |\boldsymbol{\tau}| = \left| \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \right| = k.$$

Применяя формулы (26), (27) и учитывая, что  $[\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}'(t)] = \mathbf{0}$ ,  $s'(t) = |\mathbf{r}'(t)|$ , из равенства (33) получаем формулу (32). ●

Если  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , то  $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ ,  $\mathbf{r}''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$ ,

$$s'(t) = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2},$$

и из формулы (32), опуская аргументы, получаем

$$k = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}}{((x')^2 + (y')^2 + (z')^2)^{3/2}}. \quad (34)$$

Если  $z(t) = 0$  ( $\Gamma$  — плоская кривая), то формула (34) примет вид

$$k = \frac{|x'y'' - y'x''|}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}. \quad (35)$$

В частности, если плоская кривая  $\Gamma$  задана уравнением  $y = f(x)$ , то из формулы (35) находим

$$k = \frac{|f''(x)|}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}}. \quad (36)$$

Пример 2. Найти максимум кривизны кривой  $y = f(x)$ , где

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

△ Так как  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ ,  $f''(x) = -\frac{x}{(x^2 + 1)^{3/2}}$ , то по формуле (36) находим

$$k(x) = \frac{|x|}{(x^2 + 1)^{3/2} \left(1 + \frac{1}{x^2 + 1}\right)^{3/2}} = \frac{|x|}{(x^2 + 2)^{3/2}}.$$

Функция  $k(x)$  является четной, и при  $x > 0$  получаем

$$k'(x) = \frac{(x^2 + 2)^{3/2} - \frac{3x}{2}(x^2 + 2)^{1/2} \cdot 2x}{(x^2 + 2)^3} = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 2)^{5/2}},$$

откуда следует, что максимального значения ( $k_{\max}$ ) кривизна достигает при  $x = \pm 1$ , причем

$$k_{\max} = k(\pm 1) = \frac{\sqrt{3}}{9}. \quad \blacktriangle$$

Выясним физический смысл кривизны кривой. Пусть кривая  $\Gamma$  задана уравнением (24), и пусть в точке  $M \in \Gamma$ , где  $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}(s)$ , существует кривизна  $k(s)$ .

Тогда  $k(s) = \left| \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \right|$ , где  $|\boldsymbol{\tau}(s)| = 1$ . Обозначим

$$\Delta\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(s + \Delta s) - \boldsymbol{\tau}(s),$$

где  $\tau(s + \Delta s)$  и  $\tau(s)$  — единичные векторы, параллельные касательным к кривой  $\Gamma$  в точках кривой, определяемых значениями параметра  $s + \Delta s$  и  $s$ .

Пусть  $\Delta\varphi$  — *угол поворота касательной к кривой  $\Gamma$*  при изменении ее параметра от  $s$  до  $s + \Delta s$ , т. е. угол между векторами  $\tau(s + \Delta s)$  и  $\tau(s)$ , тогда (рис. 22.6)

$$\frac{1}{2} |\Delta\tau| = \sin \frac{|\Delta\varphi|}{2}. \quad (37)$$

Назовем *скоростью вращения вектора  $\tau$*  величину

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\tau}{\Delta s} \right|. \quad (38)$$

Так как

$$k(s) = \left| \frac{d\tau}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\tau}{\Delta s} \right|, \quad (39)$$

то, используя равенство (37) и учитывая, что  $2 \sin \frac{|\Delta\varphi|}{2} \sim |\Delta\varphi|$  при  $\Delta\varphi \rightarrow 0$ , запишем формулу (39) в следующем виде:

$$k(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right|. \quad (40)$$

Из равенств (40) и (38) следует, что кривизна кривой  $\Gamma$ , заданной

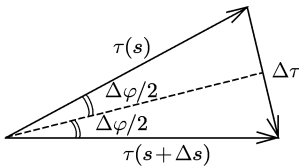


Рис. 22.6

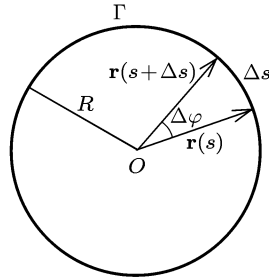


Рис. 22.7

уравнением (24), в точке  $M \in \Gamma$  равна скорости вращения вектора касательной к этой кривой в точке  $M$ .

Число  $R = \frac{1}{k(s)}$  называют *радиусом кривизны кривой  $\Gamma$*  в точке

$M \in \Gamma$  ( $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}(s)$ ). Заметим, что если  $\Gamma$  — окружность радиуса  $R$  (рис. 22.7), то угол  $\Delta\varphi$  равен углу между векторами  $\mathbf{r}(s)$  и  $\mathbf{r}(s + \Delta s)$ . В этом случае  $|\Delta s| = R|\Delta\varphi|$ , и поэтому  $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right| = k = \frac{1}{R}$ , т. е. кривизна окружности равна обратной величине ее радиуса.

**8. Соприкасающаяся плоскость.** Плоскость, проходящую через касательную и главную нормаль в данной точке кривой, называют *соприкасающейся плоскостью*.

Отсюда и из определения главной нормали следует, что соприкасающаяся плоскость определена для точек кривой, в которых кривизна  $k \neq 0$ .

**Утверждение 6.** Если гладкая кривая  $\Gamma = \{\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \alpha \leq t \leq \beta\}$  дважды дифференцируема и ее кривизна в точке  $M_0 = M(t_0)$  не равна нулю, то уравнение соприкасающейся плоскости  $Q$  в точке  $M_0$  имеет вид

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_0), \mathbf{r}'(t_0), \mathbf{r}''(t_0)) = 0. \quad (41)$$

○ Если  $s = s(t)$  — переменная длина дуги кривой  $\Gamma$ , то дифференцируя  $\mathbf{r}(t)$  как сложную функцию и используя формулы (28) и (31), получаем

$$\mathbf{r}'_t = \mathbf{r}'_s s'_t = s'_t \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{r}''_{tt} = \frac{d}{dt}(s'_t \boldsymbol{\tau}) = s''_{tt} \boldsymbol{\tau} + s'_t \boldsymbol{\tau}'_s s'_t = s''_{tt} \boldsymbol{\tau} + (s'_t)^2 k \boldsymbol{\nu},$$

где индексы указывают, по каким переменным производится дифференцирование. Отсюда следует, что векторы  $\mathbf{r}'_t$  и  $\mathbf{r}''_{tt}$  параллельны плоскости  $Q$ . По условию  $k \neq 0$ , и поэтому  $[\mathbf{r}'_t, \mathbf{r}''_{tt}] \neq \mathbf{0}$ . Следовательно, векторы  $\mathbf{r}'_t$  и  $\mathbf{r}''_{tt}$  не коллинеарны.

Так как векторы  $\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_0)$ ,  $\mathbf{r}'(t_0) = \mathbf{r}'_t(t_0)$ ,  $\mathbf{r}''(t_0) = \mathbf{r}''_{tt}(t_0)$  параллельны плоскости  $Q$  (рис. 22.8), то их смешанное произведение равно нулю, т. е. во всех точках плоскости  $Q$  (и только в этих точках) должно выполняться условие (41). ●

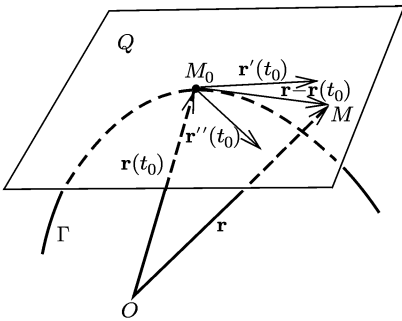


Рис. 22.8

Запишем уравнение (41) в координатной форме:

$$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

**9. Центр кривизны кривой. Эволюта.** Пусть кривая  $\Gamma$  задана натуральным уравнением (24). Будем предполагать, что в точке  $M \in \Gamma$ , где  $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}(s)$ , существует кривизна  $k = k(s) \neq 0$ . Тогда радиус кривизны кривой  $\Gamma$  в точке  $M$  равен

$$R = R(s) = \frac{1}{k(s)}. \quad (42)$$

Отложим на главной нормали кривой  $\Gamma$  (рис. 22.9) в направлении вектора главной нормали  $\nu = \nu(s)$  отрезок  $MN$  длиной  $R = R(s)$  и назовем точку  $N$  *центром кривизны кривой*  $\Gamma$  в точке  $M$ . Пусть  $\overrightarrow{ON} = \rho$ .

Так как  $\overrightarrow{MN} = R(s)\nu(s)$ , то получаем

$$\rho = \mathbf{r}(s) + R(s)\nu(s). \quad (43)$$

Используя формулу (42) и равенство

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d\tau}{ds} = k(s)\nu(s),$$

запишем уравнение (43) в следующем виде:

$$\rho = \mathbf{r}(s) + \frac{1}{(k(s))^2} \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}. \quad (44)$$

Предполагая, что во всех точках кривой  $\Gamma$  кривизна отлична от нуля, построим для каждой точки кривой центр кривизны и назовем множество всех центров кривизны кривой  $\Gamma$  *эволютой* этой кривой.

Если кривая  $\Gamma_1$  — эволюта кривой  $\Gamma$ , то кривую  $\Gamma$  называют *эвольвентой кривой*  $\Gamma_1$ . Уравнение эволюты кривой  $\Gamma$ , заданной натуральным уравнением, имеет вид (44).

Если кривая  $\Gamma$  задана уравнением (3), то уравнение эволюты этой кривой можно получить, заменив в равенстве (44)  $k$  и  $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$  их выражениями по формулам (34) и (27).

В случае когда плоская кривая  $\Gamma$  задана уравнением  $\Gamma = \{x = x(t), y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta\}$ , ее кривизна выражается формулой (35), а  $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$  — формулой (27), где

$$\mathbf{r}' = (x', y'), \quad \mathbf{r}'' = (x'', y''), \quad s' = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}, \quad s'' = \frac{x'x'' + y'y''}{s'},$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} &= \left( \frac{x''}{(s')^2} - \frac{x'(x'x'' + y'y'')}{(s')^4}, \frac{y''}{(s')^2} - \frac{y'(x'x'' + y'y'')}{(s')^4} \right) = \\ &= \left( y' \frac{x''y' - x'y''}{((x')^2 + (y')^2)^2}, x' \frac{y''x' - y'x''}{((x')^2 + (y')^2)^2} \right). \end{aligned}$$

Если  $\rho = (\xi, \eta)$ , то уравнение (44) в координатной форме примет вид

$$\xi = x - y' \frac{(x')^2 + (y')^2}{x'y'' - y'x''}, \quad \eta = y + x' \frac{(x')^2 + (y')^2}{x'y'' - y'x''}. \quad (45)$$

Равенства (45) задают эволюту кривой  $\Gamma$  в координатной форме.

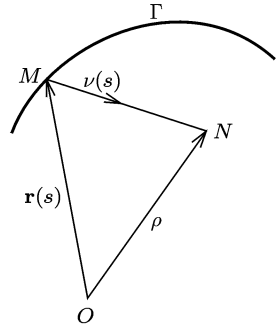


Рис. 22.9

**Замечание 4.** Приведем без доказательства физическое истолкование эволюты и эвольвенты (см. [3] и [17]). Пусть на эволюту натянута гибкая нерастяжимая нить. Если эту нить разворачивать, оставляя все время натянутой, то конец нити опишет эвольвенту. Этим можно объяснить термины эволюта (“развертка”) и эвольвента (“разворачивающаяся”).

**Пример 3.** Найти эволюту эллипса  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ .

$\Delta$  В этом случае  $x' = -a \sin t$ ,  $y' = b \cos t$ ,  $x'' = -a \cos t$ ,  $y'' = -b \sin t$ , и формулы (45) принимают вид

$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t, \quad \eta = \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 t.$$

Следовательно, эволютой эллипса является *астроида* (рис. 22.10).  $\blacktriangle$

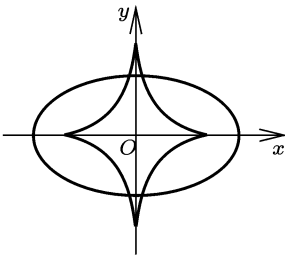


Рис. 22.10

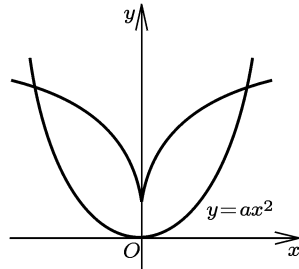


Рис. 22.11

Если плоская кривая задана уравнением  $y = f(x)$ , то уравнения (45) записываются в виде

$$\xi = x - \frac{1 + (f'(x))^2}{f''(x)} f'(x), \quad \eta = f(x) + \frac{1 + (f'(x))^2}{f''(x)}. \quad (46)$$

**Пример 4.** Найти эволюту параболы  $y = ax^2$ .

$\Delta$  Используя формулы (46), где  $f(x) = ax^2$ , получаем

$$\xi = x - \frac{1 + 4a^2x^2}{2a} 2ax = -4a^2x^3, \quad \eta = ax^2 + \frac{1 + 4a^2x^2}{2a} = \frac{1}{2a} + 3ax^2.$$

Исключая  $x$ , получаем

$$\xi^2 = \frac{16a}{27} \left( \eta - \frac{1}{2a} \right)^3.$$

Следовательно эволютой параболы является *полукубическая парабола* (рис. 22.11).  $\blacktriangle$

**10. Сопровождающий трехгранник кривой.** Пусть  $\Gamma$  — дважды дифференцируемая кривая без особых точек, удовлетворяющая условию (29). Тогда выполняются равенства (28) и (31), где  $\boldsymbol{\tau}$  — единичный вектор касательной,  $\boldsymbol{\nu}$  — единичный вектор нормали к кривой  $\Gamma$  в данной ее точке.

Рассмотрим вектор

$$\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}]. \quad (47)$$

Тогда  $\beta$  — единичный вектор, ортогональный векторам  $\tau$  и  $\nu$ :

$$\tau = [\nu, \beta], \quad \nu = [\beta, \tau]. \quad (48)$$

Прямую, проходящую через точку кривой параллельно вектору  $\beta$ , называют *бинормалью*. Тетраэдр с вершиной в точке кривой, ребра

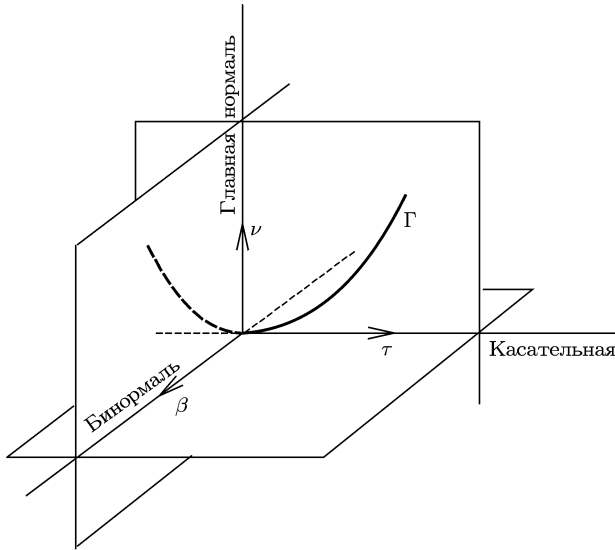


Рис. 22.12

которого имеют длину, равную единице, и параллельны векторам  $\tau$ ,  $\nu$ ,  $\beta$ , называют *сопровождающим трехгранником Френе* (рис. 22.12).

Утверждение 7. Если  $\Gamma$  — трижды непрерывно дифференцируемая кривая, удовлетворяющая условию (29), то справедливы формулы Френе

$$\frac{d\tau}{ds} = k\nu,$$

$$\frac{d\nu}{ds} = -k\tau + \kappa\beta, \quad (49)$$

$$\frac{d\beta}{ds} = -\kappa\nu. \quad (50)$$

○ Первая из формул Френе получена в п. 6 (формула (31)). Докажем формулу (50). Дифференцируя равенство (47) с учетом формулы (31) и равенства  $[\nu, \nu] = \mathbf{0}$ , получаем

$$\frac{d\beta}{ds} = \left[ \frac{d\tau}{ds}, \nu \right] + \left[ \tau, \frac{d\nu}{ds} \right] = \left[ \tau, \frac{d\nu}{ds} \right].$$



Так как  $\nu$  — единичный вектор, то он ортогонален вектору  $\frac{d\nu}{ds}$ . Кроме того, вектор  $\nu$  ортогонален вектору  $\tau$ . Поэтому вектор  $\left[\tau, \frac{d\nu}{ds}\right]$  параллелен вектору  $\nu$  и справедливо равенство (50). Коэффициент  $\varkappa$  в формуле (50) называют *кручением кривой в данной ее точке*.

Пользуясь формулами (31), (47), (48) и (50), получаем

$$\frac{d\nu}{ds} = \left[\frac{d\beta}{ds}, \tau\right] + \left[\beta, \frac{d\tau}{ds}\right] = -\varkappa[\nu, \tau] + k[\beta, \nu] = -k\tau + \varkappa\beta,$$

т. е. справедлива формула (49). ●

Докажем, наконец, следующее: если кривая, заданная натуральным уравнением, трижды дифференцируема, а ее кривизна  $k = k(s)$  отлична от нуля, то кручение кривой  $\varkappa = \varkappa(s)$  выражается формулой

$$\varkappa = \frac{\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\right)}{k^2}. \quad (51)$$

○ Используя формулы (31) и (49), находим

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = k(s)\nu, \quad \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} = k'(s)\nu + k(s)\frac{d\nu}{ds} = k'(s)\nu - k^2(s)\tau + k(s)\varkappa(s)\beta.$$

Вычислим смешанное произведение векторов, указанных в формуле (51), пользуясь тем, что  $(\tau, \nu, \nu) = (\tau, \nu, \tau) = 0$  и  $(\tau, \nu, \beta) = 1$ . Тогда из равенства

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\right) &= (\tau, k(s)\nu, k'(s)\nu - k^2(s)\tau + k(s)\varkappa(s)\beta) = \\ &= k^2(s)\varkappa(s)(\tau, \nu, \beta) = k^2(s)\varkappa(s) \end{aligned}$$

следует формула (51). ●

**Замечание 5.** Из формулы (50) следует, что  $\left|\frac{d\beta}{ds}\right| = |\varkappa|$ , так как  $|\nu| = 1$ . Повторяя рассуждения, связанные с выяснением физического смысла кривизны кривой (п. 7), отсюда получим, что

$$|\varkappa| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right|, \quad (52)$$

где  $\Delta\alpha$  — угол поворота бинормали к кривой  $\Gamma$  при изменении ее параметра от  $s$  до  $s + \Delta s$ . Выражение в правой части (52), как и в п. 7, назовем *скоростью вращения вектора бинормали*. Эта скорость равна скорости вращения соприкасающейся плоскости кривой, так как вектор  $\beta$  перпендикулярен этой плоскости.

Таким образом, модуль кручения кривой равен скорости вращения соприкасающейся плоскости.

**Пример 5.** Вычислим кривизну  $k$  и кручение  $\varkappa$  винтовой линии (пример 1).

△ В примере 1 получено натуральное уравнение винтовой линии

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) = (a \cos \lambda s, a \sin \lambda s, b\lambda s),$$

где

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= \frac{d\mathbf{r}}{ds} = (-a\lambda \sin \lambda s, a\lambda \cos \lambda s, b\lambda), \\ \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} &= (-a\lambda^2 \cos \lambda s, -a\lambda^2 \sin \lambda s, 0),\end{aligned}$$

откуда по формуле (30) находим

$$k = \left| \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \right| = a\lambda^2 = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

Используя формулу (31), отсюда получаем

$$\boldsymbol{\nu} = (-\cos \lambda s, -\sin \lambda s, 0).$$

Для нахождения  $\varkappa$  воспользуемся формулой (50), а вектор  $\boldsymbol{\beta}$  найдем по формуле (47). Имеем

$$\boldsymbol{\beta} = (b\lambda \sin \lambda s, -b\lambda \cos \lambda s, a\lambda),$$

откуда

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = (b\lambda^2 \cos \lambda s, b\lambda^2 \sin \lambda s, 0) = -b\lambda^2(-\cos \lambda s, -\sin \lambda s, 0),$$

т. е.

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = -b\lambda^2 \boldsymbol{\nu},$$

отсюда по формуле (50) находим

$$\varkappa = b\lambda^2 = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Таким образом, кривизна кривой и кручение для винтовой линии постоянные. ▲

#### УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ IV

1. Показать, что функция  $f(x) = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$  недифференцируема в точке  $x = 0$  и  $f'(x) = -\operatorname{sign} x \frac{2}{1+x^2}$  при  $x \neq 0$ .
2. Доказать формулы для производных обратных гиперболических функций (§ 12, п. 6)

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbf{R},$$

$$(\operatorname{arch}_+ x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1,$$

$$(\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| < 1.$$

3. Пусть  $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ . Показать, что  $f'_+(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $f'_-(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

4. Привести пример функции, непрерывной на отрезке  $[a, b]$ , дифференцируемой на интервале  $(a, b)$  и не имеющей правой производной в точке  $a$ .

5. Доказать, что если функция  $f(x)$  дифференцируема при  $x > a$  и  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ , то  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ .

6. Доказать, что если функция  $f(x)$  удовлетворяет условиям теоремы Ролля на отрезке  $[a, b]$  и не является постоянной, то на этом отрезке существуют точки  $\xi_1$  и  $\xi_2$  такие, что  $f'(\xi_1) > 0$ ,  $f'(\xi_2) < 0$ .

7. Привести пример функции, дифференцируемой на интервале  $(a, b)$ , имеющей локальный экстремум в точке  $x_0 \in (a, b)$  и такой, что ее производная в любой окрестности точки  $x_0$  принимает как положительные, так и отрицательные значения.

8. Показать, что для функции  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$  при  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 0$ :

а) точка  $x = 0$  не является ни точкой экстремума, ни точкой возрастания или убывания;

б) касательная, проведенная к ее графику в точке  $(0, 0)$ , имеет бесконечное множество общих точек с графиком в любой окрестности точки  $x = 0$ .

9. Показать, что функция  $f(x) = x^2 \left( 2 + \cos \frac{1}{x} \right)$  при  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 0$  имеет строгий минимум в точке  $x = 0$ , но не является убывающей в интервале  $(-\delta, 0)$  и не является возрастающей в интервале  $(0, \delta)$  при любом  $\delta > 0$ .

10. Показать, что если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то она является выпуклой вверх на этом отрезке тогда и только тогда, когда для любых точек  $x_1$  и  $x_2$  отрезка  $[a, b]$  и для любых  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  таких, что  $\lambda_1 \geq 0$ ,  $\lambda_2 \geq 0$ ,  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ , выполняется неравенство  $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$ .

11. Пусть функция  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ , имеет вторую производную в проколотой  $\delta$ -окрестности точки  $x_0$ , причем  $f''(x)$  меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку  $x_0$ . Доказать, что на интервалах  $(x_0 - \delta, x_0)$  и  $(x_0, x_0 + \delta)$  график функции  $y = f(x)$  лежит соответственно ниже и выше касательной, проведенной к этому графику в точке  $M_0(x_0, f(x_0))$ .

12. Показать, что если функция дважды дифференцируема, то между двумя ее точками экстремума лежит хотя бы одна точка перегиба.

13. Пусть существует номер  $n > 2$  такой, что

$$f^{(2)}(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)} \neq 0.$$

Доказать, что если  $n$  — нечетное число, то точка  $x_0$  — точка перегиба функции  $f(x)$ , а если  $n$  — четное число, то в окрестности точки  $x_0$  функция  $f(x)$  либо выпукла вверх, либо выпукла вниз.

14. Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема на отрезке  $[a, b]$  и  $f'_+(a)f'_-(b) < 0$ . Доказать, что существует точка  $x_0 \in (a, b)$  такая, что  $f'(x_0) = 0$ .

15. Пусть функция  $f(x)$  имеет непрерывную вторую производную на  $R$  и существуют конечные пределы  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = B$ . Доказать, что найдется точка  $x_0$  такая, что  $f''(x_0) = 0$ .

**16.** Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема на отрезке  $[0, 1]$ ,  $f(0) = 0$ ,  $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|$  для всех  $x \in [0, 1]$ . Доказать, что  $f(x) \equiv 0$ ,  $x \in [0, 1]$ .

**17.** Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема на отрезке  $[1, 2]$ . Доказать, что существует точка  $\xi \in (1, 2)$  такая, что

$$f(2) - f(1) = \frac{\xi^2}{2} f'(\xi).$$

**18.** Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и дифференцируема на интервале  $(a, b)$ , где  $a > 0$ . Доказать, что существует точка  $\xi \in (a, b)$  такая, что

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

**19.** Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[0, 1]$ , дифференцируема на интервале  $(0, 1)$  и удовлетворяет условиям  $f(0) = 5$ ,  $f(1) = 3$ ,  $f'(x) \geq -2$  для всех  $x \in (0, 1)$ . Доказать, что  $f(x)$  — линейная на отрезке  $[0, 1]$  функция.

**20.** Пусть функция  $f(x)$  удовлетворяет на  $R$  условиям  $f(x) > 0$ ,  $f'(x) > 0$ ,  $f^{(2)}(x) > 0$ ,  $f^{(3)}(x) > 0$ . Доказать, что существует число  $a > 0$  такое, что при любом  $x > 0$  справедливо неравенство  $f(x) > ax^2$ .

**21.** Доказать, что нормаль к эвольвенте в точке  $P$  является касательной к эволюте в центре кривизны, соответствующем точке  $P$ .

**22.** Показать, что если кручение  $\kappa(s) = 0$  во всех точках кривой  $\Gamma$ , то  $\Gamma$  — плоская кривая.

§ 23. Пространство  $R^n$ 

**1. Метрическое пространство.** Будем множество  $X$  называть *метрическим пространством*, если каждой паре элементов  $x$  и  $y$  этого множества поставлено в соответствие неотрицательное число  $\rho(x, y)$ , называемое *расстоянием* между элементами  $x$  и  $y$ , такое, что для любых элементов  $x, y, z$  множества  $X$  выполнены следующие условия:

$$1^\circ) \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

$$2^\circ) \rho(x, y) = \rho(y, x);$$

$$3^\circ) \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \text{ (неравенство треугольника).}$$

Элементы метрического пространства будем называть *точками*, функцию  $\rho(x, y)$ , определенную на множестве пар точек метрического пространства  $X$ ,  $\rho$  — *метрикой*, а условия  $1^\circ)$ – $3^\circ)$  — *аксиомами метрики*.

Например, определяя расстояние между вещественными числами  $\alpha$  и  $\beta$  при помощи формулы  $\rho(\alpha, \beta) = |\beta - \alpha|$ , получаем метрическое пространство, которое обозначается через  $R$ .

Рассмотрим множество пар вещественных чисел  $x = (x_1, x_2)$ . Если  $x = (x_1, x_2)$ , а  $y = (y_1, y_2)$ , то полагая

$$\rho(x, y) = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)^{1/2},$$

получаем метрическое пространство, которое обозначается через  $R^2$ . Для проверки аксиом  $1^\circ)$ – $3^\circ)$  воспользуемся тем, что между множеством точек евклидовой плоскости и множеством пар вещественных чисел можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором евклидово расстояние между точками плоскости совпадает с введенным выше расстоянием между соответствующими этим точкам парами вещественных чисел (декартовыми координатами точек). При такой геометрической интерпретации пространства  $R^2$  доказательство неравенства треугольника следует из того, что длина любой стороны треугольника не превышает суммы длин двух других его сторон.

На одном и том же множестве можно различными способами определять расстояние между элементами и получать тем самым различные метрические пространства. На множестве пар вещественных чисел можно расстояние между точками определить также и следующим образом:

$$\tilde{\rho}(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|). \quad (1)$$

Аксиомы метрики 1°) и 2°), очевидно, выполняются. Проверим неравенство треугольника.

○ Из (1) следует, что

$$|x_1 - y_1| \leq \tilde{\rho}(x, y), \quad |x_2 - y_2| \leq \tilde{\rho}(x, y),$$

а поэтому

$$|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i| \leq \tilde{\rho}(x, z) + \tilde{\rho}(z, y) \quad \text{при } i = 1, 2.$$

Следовательно,

$$\rho(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|) \leq \tilde{\rho}(x, z) + \tilde{\rho}(z, y). \quad \bullet$$

У п р а ж н е н и е 1. Показать, что на множестве пар вещественных чисел можно определить расстояние между точками формулой

$$\hat{\rho}(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

Если рассмотреть множество всевозможных упорядоченных троек вещественных чисел  $x = (x_1, x_2, x_3)$  и для  $x = (x_1, x_2, x_3)$  и  $y = (y_1, y_2, y_3)$  определить расстояние  $\rho(x, y)$  при помощи формулы

$$\rho(x, y) = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2)^{1/2},$$

то получим метрическое пространство  $R^3$ .

Если в евклидовом пространстве выбрать декартову прямоугольную систему координат, то между этим пространством и пространством  $R^3$  устанавливается взаимно однозначное соответствие, при котором расстояние между любыми двумя точками евклидова пространства совпадает с расстоянием между соответствующими им точками пространства  $R^3$ . Проверка аксиом метрики проводится так же, как и в  $R^2$ .

**2. Метрическое пространство  $R^n$ .** Точками пространства  $R^n$  являются упорядоченные совокупности из  $n$  вещественных чисел

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_n), \quad z = (z_1, \dots, z_n).$$

Расстояние между точками  $x$  и  $y$  определяется формулой

$$\rho(x, y) = \left( \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}. \quad (2)$$

Свойства 1°) и 2°) расстояния, очевидно, выполняются. Сложнее проверить, что справедливо неравенство треугольника.

Докажем сначала *неравенство Коши*

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2,$$

справедливое для любых вещественных чисел  $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ .

○ Рассмотрим квадратный трехчлен

$$P(\xi) = \sum_{i=1}^n (a_i + \xi b_i)^2 = A + 2B\xi + C\xi^2, \quad (3)$$

$$\text{где } A = \sum_{i=1}^n a_i^2, \quad B = \sum_{i=1}^n a_i b_i, \quad C = \sum_{i=1}^n b_i^2.$$

Так как квадратный трехчлен  $P(\xi)$  принимает только неотрицательные значения, то его дискриминант неположителен, а именно,  $B^2 - AC \leq 0$ . Подставляя в неравенство значения коэффициентов  $A$ ,  $B$  и  $C$ , получаем неравенство Коши. ●

Докажем *неравенство Минковского*

$$\left( \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \right)^{1/2} \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2}. \quad (4)$$

○ Используя неравенство Коши, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 &= \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2 \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2} + \sum_{i=1}^n b_i^2 = \\ &= \left( \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2} \right)^2. \end{aligned}$$

Извлекая из обеих частей этого неравенства квадратные корни, получаем неравенство Минковского (4). ●

Полагая в неравенстве (4)  $a_i = x_i - z_i$ ,  $b_i = z_i - y_i$ , получаем неравенство

$$\left( \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} \leq \left( \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2 \right)^{1/2},$$

т. е. неравенство треугольника для расстояния  $\rho(x, y)$ , определяемого формулой (2).

На множестве всех упорядоченных совокупностей из  $n$  вещественных чисел расстояние между элементами можно определить и другими способами. Например, можно положить

$$\tilde{\rho}(x, y) = \max_{i=1, n} |x_i - y_i|, \quad \hat{\rho}(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

Неравенство треугольника в этих случаях проверяется так же, как в случае  $n = 2$ . Расстояние, определяемое формулой (2), будем называть *евклидовым*.

Упражнение 2. Доказать неравенства

$$\frac{\rho(x, y)}{n} \leq \tilde{\rho}(x, y) \leq \rho(x, y) \leq \widehat{\rho}(x, y) \leq n\tilde{\rho}(x, y). \quad (5)$$

В этой главе, посвященной функциям многих переменных, используется только метрическое пространство  $R^n$ . Но те свойства пространства  $R^n$ , при доказательстве которых существенны лишь свойства расстояния, будут справедливы и для произвольного метрического пространства. Поэтому в некоторых случаях доказательства будут проводиться для произвольного метрического пространства.

**3. Сходимость последовательности точек в метрическом пространстве.** Пусть  $\{x^{(k)}\}$  — последовательность точек метрического пространства  $X$ . Говорят, что последовательность точек  $\{x^{(k)}\}$  *сходится к точке  $a$*  (имеет предел  $a$ ) и пишут  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = a$ , если  $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x^{(k)}, a) = 0$ . Последовательность точек  $\{x^{(k)}\}$  называется *ограниченной*, если  $\exists C \in R$  и  $\exists a \in X$  такие, что для любого  $k \in N$  выполнено неравенство  $\rho(x^{(k)}, a) \leq C$ .

Докажем несколько простых свойств сходящихся последовательностей.

**Лемма 1.** *Если последовательность  $\{x^{(k)}\}$  имеет предел, то она ограничена.*

○ Пусть  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = a$ , тогда  $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x^{(k)}, a) = 0$ . Поэтому числовая последовательность  $\{\rho(x^{(k)}, a)\}$  ограничена, т. е.  $\exists C \in R$  такое, что для любого  $k \in N$  выполнено неравенство  $\rho(x^{(k)}, a) \leq C$ . ●

**Лемма 2.** *Последовательность  $\{x^{(k)}\}$  не может сходиться к двум различным точкам.*

○ Пусть  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = a$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = b$ . В силу неравенства треугольника для любого  $k \in N$  выполнено неравенство

$$0 \leq \rho(a, b) \leq \rho(a, x^{(k)}) + \rho(x^{(k)}, b).$$

Так как числовые последовательности  $\rho(a, x^{(k)})$  и  $\rho(x^{(k)}, b)$  бесконечно малы, то  $\rho(a, b) = 0$ . Поэтому  $a = b$ . ●

*Шаром* радиуса  $r$  с центром в точке  $a \in X$  будем называть следующее множество точек метрического пространства  $X$ :

$$S_r(a) = \{x: x \in X, \rho(x, a) < r\}.$$

Упражнение 3. Доказать, что для сходимости последовательности точек метрического пространства к точке  $a$  необходимо и достаточно, чтобы любой шар  $S_r(a)$  содержал все точки последовательности  $\{x^{(k)}\}$ , за исключением, быть может, конечного числа точек.

**Лемма 3.** *Для того чтобы последовательность точек  $\{x^{(k)}\}$  метрического пространства  $R^n$ , где  $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ , сходилась к*



пределу  $a = (a_1, \dots, a_n)$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = a_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

○ Пусть  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = a$ . Так как  $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x^{(k)}, a) = 0$ , то при  $i = \overline{1, n}$  получаем

$$0 \leq |x_i^{(k)} - a_i| \leq \left( \sum_{j=1}^n (x_j^{(k)} - a_j)^2 \right)^{1/2} = \rho(x^{(k)}, a) \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Наоборот, если при любом  $i = \overline{1, n}$  выполнено условие  $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_i^{(k)} - a_i| = 0$ , то

$$\rho(x^{(k)}, a) = \left( \sum_{i=1}^n (x_i^{(k)} - a_i)^2 \right)^{1/2} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad \bullet$$

Последовательность точек  $\{x^{(k)}\}$  метрического пространства  $X$  называется *фундаментальной*, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$  такое, что  $\forall k \geq N$  и  $\forall m \geq N$  выполнено неравенство  $\rho(x^{(k)}, x^{(m)}) < \varepsilon$ .

Лемма 4. Если последовательность точек  $\{x^{(k)}\}$  метрического пространства  $X$  сходится, то она фундаментальна.

○ Пусть  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = a$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$  такое, что  $\forall k \geq N$  и  $\forall m \geq N$  выполнены неравенства  $\rho(x^{(k)}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$  и  $\rho(x^{(m)}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Поэтому  $\forall k \geq N$  и  $\forall m \geq N$  в силу неравенства треугольника

$$\rho(x^{(k)}, x^{(m)}) \leq \rho(x^{(k)}, a) + \rho(a, x^{(m)}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \bullet$$

Обратное утверждение для произвольного метрического пространства неверно. Фундаментальная последовательность может и не быть сходящейся.

Метрическое пространство  $X$  называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность его точек сходится.

В силу критерия Коши сходимости числовой последовательности пространство  $R$  вещественных чисел полное.

Теорема 1. Пространство  $R^n$  полное.

○ Пусть  $\{x^{(k)}\}$  — фундаментальная последовательность точек в  $R^n$ . Если

$$x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}),$$

то числовые последовательности  $\{x_i^{(k)}\}$  фундаментальны при  $i = \overline{1, n}$ . В самом деле,  $\forall \varepsilon > 0 \exists N$  такое, что для любых  $k, m \geq N$  выполнено неравенство  $\rho(x^{(k)}, x^{(m)}) < \varepsilon$ . Но

$$|x_i^{(k)} - x_i^{(m)}| \leq \rho(x^{(k)}, x^{(m)}) < \varepsilon, \quad i = \overline{1, n}.$$

Числовая последовательность  $\{x_i^{(k)}\}$  в силу критерия Коши является сходящейся при  $i = \overline{1, n}$ . По лемме 3 сходится и последовательность точек  $\{x^{(k)}\}$  в  $R^n$ . ●

**4. Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве.** Шар радиуса  $r$  с центром в точке  $a$  определяется как множество  $S_r(a) = \{x: x \in X, \rho(x, a) < r\}$ .

Шар в  $R$  есть интервал  $(a - r, a + r)$ , шар в  $R^2$  — круг  $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2$ , шар в  $R^n$  — множество

$$S_r(a) = \left\{ x: x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n, \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2 < r^2 \right\}.$$

Пусть  $M$  есть множество точек в метрическом пространстве  $X$ . Точка  $x^0 \in M$  называется *внутренней* точкой множества  $M$ , если  $\exists S_\varepsilon(x^0) \subset M$ , т. е. точка  $x$  принадлежит множеству  $M$  вместе с некоторым шаром с центром в точке  $x$ . Совокупность всех внутренних точек множества  $M$  называется его *внутренностью* и обозначается  $\text{int } M$ . Очевидно, что  $\text{int } M \subset M$ . Если  $\text{int } M = M$ , т. е. все точки множества  $M$  внутренние, то множество  $M$  называется *открытым* в метрическом пространстве  $X$ . Пустое множество считается открытым по определению.

**Пример 1.** Шар в метрическом пространстве — открытое множество.

△ Действительно, пусть

$$S_C(a) = \{x: \rho(x, a) < C\},$$

и пусть точка  $\bar{x} \in S_C(a)$ ,  $\rho(\bar{x}, a) < C$ . Положим  $\varepsilon = C - \rho(\bar{x}, a)$ . Шар  $S_\varepsilon(\bar{x}) \subset S_C(a)$  (рис. 23.1). В самом деле, если  $x \in S_\varepsilon(\bar{x})$ , то  $\rho(x, \bar{x}) < \varepsilon$ . В силу неравенства треугольника получаем

$$\begin{aligned} \rho(x, a) &\leq \rho(x, \bar{x}) + \rho(\bar{x}, a) < \varepsilon + \rho(\bar{x}, a) = \\ &= C - \rho(\bar{x}, a) + \rho(\bar{x}, a) = C. \end{aligned}$$

Следовательно,  $x \in S_C(a)$ . Так как  $x$  — произвольная точка шара  $S_\varepsilon(\bar{x})$ , то  $S_\varepsilon(\bar{x}) \subset S_C(a)$ . Итак, любая точка  $\bar{x}$  шара  $S_C(a)$  принадлежит ему вместе с некоторым шаром  $S_\varepsilon(\bar{x})$ . Поэтому  $S_C(a)$  есть открытое множество. ▲

**Теорема 2.** *Открытые множества в метрическом пространстве обладают следующими свойствами:*

- 1) все пространство  $X$  и пустое множество  $\emptyset$  — открытые множества;
- 2) объединение любого множества открытых множеств — открытое множество;
- 3) пересечение конечного числа открытых множеств — открытое множество.

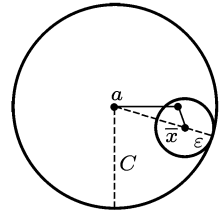


Рис. 23.1

○ Свойство 1) очевидно. Докажем свойство 2). Пусть  $G = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$ , где  $G_\alpha$  — открытые множества. Пусть точка  $a \in G$ . Тогда существует  $\bar{\alpha} \in \Lambda$  такое, что  $a \in G_{\bar{\alpha}}$ . Но множество  $G_{\bar{\alpha}}$  открытое. Поэтому существует шар  $S_\varepsilon(a) \subset G_{\bar{\alpha}}$ . Тем более,  $S_\varepsilon(a) \subset G$ . Итак,  $a$  — внутренняя точка множества  $G$ . В силу произвольности точки  $a$  множество  $G$  открытое.

Докажем 3). Пусть  $G = \bigcap_{i=1}^n G_i$ , где  $G_i$  — открытые множества. Возьмем любую точку  $a \in G$ . Тогда  $a \in G_i$  при  $i = \overline{1, n}$ . Так как множества  $G_i$  открытые, то существуют шары  $S_{\varepsilon_i}(a) \subset G_i$ . Пусть  $\varepsilon = \min_{i=1, n} \varepsilon_i$ . Тогда  $S_\varepsilon(a) \subset G_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Поэтому

$$S_\varepsilon(a) \subset \bigcap_{i=1}^n G_i = G,$$

и, следовательно,  $G$  есть открытое множество. ●

У п р а ж н е н и е 4. Показать, что пересечение бесконечного множества открытых множеств может не быть открытым множеством.

**5. Предельные точки. Замкнутые множества.** Пусть  $X$  — метрическое пространство. *Окрестностью точки  $x^0 \in X$*  будем называть любое множество  $O(x^0)$ , для которого точка  $x^0$  является внутренней. Например, шар  $S_\varepsilon(x^0)$  является окрестностью (шаровой) точки  $x^0$ .

Точка  $x^0$  называется *предельной точкой множества  $M \subset X$* , если в любой окрестности точки  $x^0$  есть точки множества  $M$ , отличные от точки  $x^0$ . Предельная точка множества  $M$  может принадлежать множеству  $M$ , а может и не принадлежать. Например, все точки интервала  $(a, b)$  будут его предельными точками. Концы интервала  $a$  и  $b$  — тоже его предельные точки, но концы не принадлежат интервалу.

Точка множества  $M$ , не являющаяся предельной точкой множества  $M$ , называется *изолированной точкой множества  $M$* . Если  $x^0$  есть изолированная точка множества  $M$ , то существует такая окрестность  $O(x^0)$ , в которой нет точек множества  $M$ , отличных от точки  $x^0$ . Каждая точка множества  $M$  является или предельной точкой множества  $M$ , или изолированной точкой множества  $M$ .

Множество  $M \subset X$  называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. Например, отрезок  $[a, b]$  замкнут в  $R$ , а интервал  $(a, b)$  не является замкнутым множеством в  $R$ .

Множество, которое получается, если присоединить к множеству  $M$  все его предельные точки, называется *замыканием  $M$*  и обозначается  $\overline{M}$ .

У п р а ж н е н и е 5. Доказать, что  $\overline{M}$  — замкнутое множество.

У п р а ж н е н и е 6. Доказать, что множество в метрическом пространстве замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит пределы всех сходящихся последовательностей своих точек.

**Теорема 3.** *Для того чтобы множество  $F$  в метрическом пространстве  $X$  было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы его дополнение  $X \setminus F$  было открытым.*

○ **Необходимость.** Пусть множество  $F \subset X$  содержит все свои предельные точки. Докажем, что его дополнение  $G = X \setminus F$  есть открытое множество. Если это не так, то существует точка  $a \in G$ , не являющаяся внутренней точкой множества  $G$ . Тогда в любой окрестности  $O(a)$  точки  $a$  есть точки, не принадлежащие  $G$ , т. е. принадлежащие множеству  $F$ . Поэтому  $a$  есть предельная точка множества  $F$ . Так как  $F$  замкнуто, то  $a \in F$ . С другой стороны,  $a \in G = X \setminus F$  и, следовательно,  $a \notin F$ . Полученное противоречие доказывает, что все точки  $G = X \setminus F$  внутренние, т. е.  $G$  — открытое множество.

**Достаточность.** Пусть теперь  $X \setminus F = G$  — открытое множество. Покажем, что  $F$  замкнуто. Пусть  $a$  — предельная точка  $F$ . Предположим, что  $a \notin F$ . Тогда  $a \in G$ , а так как  $G$  — открытое множество, то найдется окрестность  $O(a) \subset G$ . Но тогда  $O(a) \cap F = \emptyset$ , следовательно,  $a$  не может быть предельной точкой множества  $F$ . Поэтому множество  $F$  содержит все свои предельные точки, т. е.  $F$  замкнуто. ●

**Теорема 4.** *Замкнутые множества обладают следующими свойствами:*

- 1) *все пространство  $X$  и пустое множество  $\emptyset$  замкнуты;*
- 2) *пересечение любого множества замкнутых множеств замкнуто;*
- 3) *объединение конечного числа замкнутых множеств есть замкнутое множество.*

○ Свойство 1) очевидно, так как  $X$  и  $\emptyset$  являются друг для друга дополнениями и открыты.

Докажем 2). Пусть  $F = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha$ , где  $F_\alpha$  — замкнутые множества.

В силу закона двойственности (легко проверяемого)

$$X \setminus F = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (X \setminus F_\alpha).$$

Однако в силу теоремы 3 множества  $X \setminus F_\alpha$  открыты как дополнения замкнутых множеств. Их объединение  $X \setminus F$  есть открытое множество. В силу той же теоремы 3 множество  $F$  замкнуто. Столь же просто доказывается и свойство 3). ●

**6. Компакт в метрическом пространстве.** Множество  $M$  в метрическом пространстве  $X$  называется *компактом* в  $X$ , если из любой последовательности точек  $x_n \in M$  можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к точке, принадлежащей множеству  $M$ . Например, отрезок  $[a, b]$  есть компакт в  $R$ , а промежуток  $[a, b)$  не является компактом в  $R$ .

**Упражнение 7.** Доказать, что неограниченное множество в метрическом пространстве не может быть компактом.

Упражнение 8. Доказать, что компакт в метрическом пространстве есть замкнутое множество.

На пространство  $R^n$  обобщается теорема Больцано–Вейерштрасса.

**Теорема 5.** *Из любой ограниченной последовательности точек пространства  $R^n$  можно выделить сходящуюся подпоследовательность точек.*

○ Ограничимся случаем пространства  $R^2$ . В общем случае доказательство аналогично. Пусть  $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$  — произвольная ограниченная последовательность точек пространства  $R^2$ . Числовая последовательность  $\{x_1^{(k)}\}$  ограничена. В силу теоремы Больцано–Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $\{x_1^{(k_m)}\}$ . Тогда у последовательности точек  $x^{(k_m)}$  последовательность первых координат сходится, а последовательность вторых координат ограничена. Применим еще раз теорему Больцано–Вейерштрасса и выделим из ограниченной числовой последовательности  $\{x_2^{(k_m)}\}$  сходящуюся подпоследовательность  $\{x_2^{(k_{m_1})}\}$ . У последовательности точек  $\{x^{(k_{m_1})}\}$  сходится и последовательность первых координат, и последовательность вторых координат. В силу леммы 3 подпоследовательность точек  $\{x^{(k_{m_1})}\}$  сходится в  $R^2$ . ●

**Следствие.** *Для того чтобы множество  $M \subset R^n$  было компактом, необходимо и достаточно, чтобы множество  $M$  было ограниченным и замкнутым.*

○ Необходимость следует из результатов упр. 7 и 8. Докажем достаточность. Пусть множество  $M$  ограничено и замкнуто в пространстве  $R^n$ . Возьмем произвольную последовательность точек  $\{x^{(k)}\} \in M$ . Так как эта последовательность ограничена, то из нее можно выделить подпоследовательность  $\{x^{(k_m)}\}$ , сходящуюся к точке  $a$ . В силу замкнутости множества  $M$  точка  $a \in M$  (см. упр. 6). ●

Справедлива следующая лемма, доказательство которой не приводится; для случая  $R^n$  см., например, [2].

**Лемма (Гейне–Бореля).** *Для того чтобы множество  $M$  в метрическом пространстве  $X$  было компактом, необходимо и достаточно, чтобы из любого его открытого покрытия можно было выделить конечное подпокрытие.*

Поясним понятие покрытия, участвующего в формулировке леммы Гейне–Бореля. Система множеств  $\{G_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$  называется *покрытием* множества  $G$ , если  $G \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$ . Покрытие называется *конечным*, если множество  $\Lambda$  конечно, и *открытым*, если все множества  $G_\alpha$  открыты. Подмножество покрытия называется *подпокрытием*, если это подмножество само образует покрытие.

**7. Граница множества.** Точка  $a$  метрического пространства  $X$  называется *граничной точкой* множества  $M \subset X$ , если в любой

окрестности точки  $a$  есть как точки, принадлежащие множеству  $M$ , так и точки, не принадлежащие множеству  $M$ .

Граничная точка  $a$  множества  $M$  может не принадлежать множеству  $M$ .

Совокупность всех граничных точек множества  $M$  называется *границей множества  $M$*  и обозначается  $\partial M$ . Например,

$$\partial(a, b) = \{a, b\}, \quad \partial[a, b] = \{a, b\}; \quad a, b \in R;$$

$$\partial\{x: \rho(x, a) < \varepsilon, x \in R^n\} = \{x: \rho(x, a) = \varepsilon, x \in R^n\}.$$

**8. Прямые, лучи и отрезки в  $R^n$ .** До сих пор рассматривались только такие объекты в  $R^n$ , при исследовании которых используются лишь свойства расстояния. Такая метрическая геометрия не очень содержательна. В ней есть точки, шары, но нет прямых, векторов, плоскостей и т. д.

В этой главе ограничимся тем, что введем в  $R^n$  такие не связанные с метрикой объекты, как прямые, лучи и отрезки.

*Прямой* в  $R^n$ , проходящей через точки  $a = (a_1, \dots, a_n)$  и  $b = (b_1, \dots, b_n)$ , будем называть следующее множество точек:

$$\{x: x \in R^n, x_i = a_i t + b_i(1 - t), t \in R, i = \overline{1, n}\}.$$

*Лучом* с вершиной в точке  $a$  в направлении  $l = (l_1, \dots, l_n)$ , где  $l_1^2 + \dots + l_n^2 = 1$ , назовем множество

$$\{x: x \in R^n, x_i = a_i + t l_i, 0 \leq t < +\infty, i = \overline{1, n}\}.$$

*Отрезком*, соединяющим точки  $a$  и  $b$ , назовем множество

$$\{x: x \in R^n, x_i = a_i + b_i(1 - t), 0 \leq t \leq 1, i = \overline{1, n}\}.$$

Множество в  $R^n$  будем называть *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит отрезок, который эти точки соединяет.

Упражнение 9. Доказать, что шар в  $R^n$  есть выпуклое множество.

Кривая в  $R^3$  была определена в § 22. Это определение без существенных изменений переносится на  $R^n$ . *Кривая* в  $R^n$  задается параметрическими уравнениями

$$x_i = \varphi_i(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad i = \overline{1, n},$$

где  $\varphi_i(t)$  — непрерывные функции на отрезке  $[\alpha, \beta]$ .

Множество  $M \subset R^n$  называется *связным*, если любые две его точки можно соединить кривой  $\Gamma$ , лежащей в множестве  $M$ . Открытое и связанное множество в  $R^n$  называют *областью*. Замыкание области называют *замкнутой областью*.

Кривая в  $R^n$ , являющаяся объединением конечного числа отрезков, называется *ломаной* в  $R^n$ .

Упражнение 10. Доказать, что открытое множество  $G \subset R^n$  будет областью в том и только том случае, когда любые две его точки можно соединить ломаной  $L \subset G$ .

## § 24. Предел функции многих переменных

**1. Предел функции в точке.** Напомним, что окрестностью  $O(x^0)$  точки  $x^0$  в метрическом пространстве  $X$  называется любое множество, для которого точка  $x^0$  является внутренней. *Проколотая окрестность*  $\dot{O}(x^0)$  получается из  $O(x^0)$  удалением самой точки  $x^0$ , т. е.  $\dot{O}(x^0) = O(x^0) \setminus \{x^0\}$ .

Будем рассматривать функции  $f: M \rightarrow R$ , где  $M$  есть некоторое множество, принадлежащее метрическому пространству  $X$ . Если  $X = R^n$ , то функция  $f: M \rightarrow R$  называется *функцией многих переменных* и обозначается обычно следующим образом:

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n), \quad x \in M.$$

Например, функция  $\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$  определена в единичном круге пространства  $R^2$  с центром в точке  $(0, 0)$ , а функция  $\ln(x_1^2 + x_2^2)$  определена в любой проколотой окрестности точки  $(0, 0)$ .

**Определение 1.** Пусть функция  $f(x)$  определена в проколотой окрестности  $\dot{O}(x^0)$  точки  $x^0$  метрического пространства  $X$ . Говорят, что число  $A$  есть *предел функции*  $f(x)$  при  $x \rightarrow x^0$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  такое, что для  $\forall x \in \dot{O}(x^0)$ , удовлетворяющего условию  $\rho(x, x^0) < \delta$ , выполнено неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

**Определение 2.** Говорят, что *функция*  $f(x)$ , определенная в  $\dot{O}(x^0)$ , *имеет при*  $x \rightarrow x^0$  *предел*  $A$ , если для любой последовательности  $x^{(k)} \in \dot{O}(x^0)$  такой, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^0$ , выполнено равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)}) = A.$$

Эквивалентность двух определений предела доказывается так же, как и для функций одной переменной (§ 9).

Если число  $A$  есть предел функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow x^0$ , то будем писать

$$A = \lim_{x \rightarrow x^0} f(x).$$

Если функция двух переменных  $f(x, y)$  определена в  $\dot{O}((a, b))$ , а число  $A$  есть ее предел при  $(x, y) \rightarrow (a, b)$ , то пишут

$$A = \lim_{x \rightarrow a, y \rightarrow b} f(x, y)$$

и называют иногда число  $A$  *двойным пределом*.

Аналогично, для функции  $n$  переменных наряду с обозначением  $A = \lim_{x \rightarrow x^0} f(x)$  будем использовать обозначение

$$A = \lim_{x \rightarrow x_1^0, \dots, x_n \rightarrow x_n^0} f(x_1, \dots, x_n).$$

**Лемма 1.** Пусть функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  определены в  $\dot{O}(x^0)$  и  $|f(x)| \leq \varphi(x)$  в  $\dot{O}(x^0)$ . Если  $\lim_{x \rightarrow x^0} \varphi(x) = 0$ , то и  $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = 0$ .

○ Так как  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  найдется шар  $S_\delta(x^0)$  такой, что для всех  $x \in \dot{S}_\delta(x^0)$  выполнено неравенство  $|\varphi(x)| < \varepsilon$ . Тем более для всех  $x \in \dot{S}_\delta(x^0)$  выполнено неравенство  $|f(x)| < \varepsilon$ , т. е.  $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = 0$ . ●

Пример 1. Доказать, что  $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} (x^2 + y^2)^a = 0$ , если  $a > 0$ .

△ Возьмем любое  $\varepsilon > 0$ . Положим  $\delta = \varepsilon^{1/(2a)}$ . Пусть  $(x, y) \in S_\delta(0, 0)$ , тогда

$$(x^2 + y^2)^a < \delta^{2a} < \varepsilon,$$

т. е.

$$\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} (x^2 + y^2)^a = 0. \quad \blacktriangle$$

Пример 2. Показать, что  $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{(x^2 + y^2)^\gamma} = 0$ , если  $\alpha + \beta - 2\gamma > 0$ .

△ Так как

$$|x| < \sqrt{x^2 + y^2}, \quad |y| < \sqrt{x^2 + y^2},$$

то при  $x^2 + y^2 > 0$  имеем неравенства

$$\begin{aligned} 0 \leq f(x, y) &= \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{(x^2 + y^2)^\gamma} \leq \frac{(x^2 + y^2)^{\alpha/2} (x^2 + y^2)^{\beta/2}}{(x^2 + y^2)^\gamma} = \\ &= (x^2 + y^2)^{(\alpha + \beta - 2\gamma)/2} = \varphi(x, y). \end{aligned}$$

В силу примера 1  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \varphi(x, y) = 0$ , так как  $\alpha + \beta - 2\gamma > 0$ .

Применяя лемму 1, получаем, что

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0. \quad \blacktriangle$$

Пример 3. Функция

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \quad (1)$$

не имеет предела при  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ .

△ Рассмотрим последовательность точек  $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ . Тогда  $f(x_n, y_n) = 1$  и, следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = 1$ . Если же взять последовательность точек  $(x'_n, y'_n) = \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right)$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n, y'_n) = -1$ .

Так как при любом  $n \in \mathbb{N}$  точки  $(x_n, y_n)$  и  $(x'_n, y'_n)$  не совпадают с точкой  $(0, 0)$ , а последовательности точек  $(x_n, y_n)$  и  $(x'_n, y'_n)$  сходятся к точке  $(0, 0)$ , то, используя определение 2 предела, получаем, что функция  $f(x, y)$  не имеет предела при  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ . ▲



Пример 4. Функция

$$f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2} \quad (2)$$

не имеет предела при  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ .

△ Повторяя рассуждения примера 3, построим две последовательности точек  $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$  и  $(x'_n, y'_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$ . Так как  $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$  и  $(x'_n, y'_n) \rightarrow (0, 0)$ , а  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = 0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n, y'_n) = 1$ , то двойной предел функции  $f(x, y)$  при  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  не существует. ▲

**2. Предел по множеству.** Предел  $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x)$  был определен в п. 1 для функции, заданной в  $\dot{O}(x^0)$ . Расширим определение предела, введя понятие предела по множеству.

Определение 3. Пусть  $M$  есть подмножество области определения функции  $f(x)$ ,  $x^0$  — предельная точка множества  $M$ . Будем говорить, что число  $A$  есть *предел функции  $f(x)$  по множеству  $M$  при  $x \rightarrow x^0$* , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  такое, что  $\forall x \in \dot{S}_\delta(x^0) \cap M$  выполнено неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ . В этом случае пишут

$$A = \lim_{x \rightarrow x^0, x \in M} f(x).$$

Пусть функция двух переменных  $f(x, y)$  определена в проколотой окрестности  $\dot{O}(x_0, y_0)$ . *Пределом функции  $f(x, y)$  в точке  $(x_0, y_0)$  по направлению  $l = (\cos \alpha, \sin \alpha)$*  будем называть выражение

$$\lim_{t \rightarrow +0} f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \sin \alpha) = \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \\ (x, y) \in \dot{O}(x_0, y_0) \cap L}} f(x, y),$$

где  $L$  есть луч, выходящий из точки  $(x_0, y_0)$  в направлении  $l$ .

Пример 5. Показать, что предел функции  $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$  в точке  $(0, 0)$  по любому направлению  $l = (\cos \alpha, \sin \alpha)$  существует и равен  $\sin 2\alpha$ .

△ Так как при  $t > 0$  выполнено равенство

$$f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha,$$

то

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = \sin 2\alpha. \quad \blacktriangle$$

Пример 6. Показать, что предел функции  $f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$  в точке  $(0, 0)$  по любому направлению  $l = (\cos \alpha, \sin \alpha)$  существует и равен нулю.

△ При  $t > 0$  справедливо равенство

$$f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = \frac{2t \cos^2 \alpha \sin \alpha}{t^2 \cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha}.$$

Если  $\sin \alpha = 0$ , то  $f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = 0$  и, следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow +0} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = 0.$$

Если  $\sin \alpha \neq 0$ , то

$$\lim_{t \rightarrow +0} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = 0. \quad \blacktriangle$$

Ясно, что из существования  $\lim_{x \rightarrow x^0, x \in M} f(x)$  следует существование  $\lim_{x \rightarrow x^0, x \in M'} f(x)$  для любого подмножества  $M' \subset M$ , для которого  $x^0$  есть предельная точка. В частности, из существования двойного предела функции  $f(x, y)$  при  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$  следует существование предела функции  $f(x, y)$  в точке  $(x_0, y_0)$  по любому направлению и равенство этих пределов двойному пределу функции  $f(x, y)$  при  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ .

Из результатов примеров 4 и 6 следует, что из существования и равенства пределов по любому направлению в точке  $(x_0, y_0)$  не вытекает существование в этой точке предела функции.

Предел функции  $f(x)$  в точке  $x^0 \in R^n$  по направлению  $l = (l_1, \dots, l_n)$ , где  $l_1^2 + \dots + l_n^2 = 1$ , определяется по аналогии со случаем функции двух переменных.

У п р а ж н е н и е 1. Пусть выполнены следующие условия:

- а) множества  $M_i \subset R^n$ ,  $i = \overline{1, N}$ ;
- б)  $x^0$  есть предельная точка каждого из множеств  $M_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ ;
- в) функция  $f(x)$  определена на множестве  $M = \bigcup_{i=1}^N M_i$ .

Доказать, что  $A = \lim_{x \rightarrow x^0, x \in M} f(x)$  в том и только том случае, когда  $A = \lim_{x \rightarrow x^0, x \in M_i} f(x)$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

У п р а ж н е н и е 2. Показать, что результат упр. 1 не допускает обобщения на тот случай, когда множество  $M$  есть объединение бесконечного множества множеств  $M_\alpha$ .

У к а з а н и е. Проанализируйте еще раз результат примеров 4 и 6.

**3. Повторные пределы. Бесконечные пределы.** Пусть функция двух переменных  $f(x, y)$  определена на множестве

$$\Pi = \{(x, y) : 0 < |x - x_0| < a, 0 < |y - y_0| < b\}.$$

Пусть  $\forall x \in (x_0 - a, x_0 + a)$ ,  $x \neq x_0$ , существует  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = g(x)$ , а функция  $g(x)$  определена в проколотой окрестности точки  $x_0$ . Если существует  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ , то этот предел называется *повторным*. Аналогично определяется другой повторный предел  $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ .

Как показывают простые примеры, из существования двойного предела не следует существование повторных пределов, а из существования и равенства повторных пределов не следует существование двойного предела.

Так, для функции  $\frac{2xy}{x^2 + y^2}$  примера 3 двойной предел при  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  не существует, но оба повторных предела равны нулю, так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0.$$

Для функции

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases}$$

справедливо неравенство  $|f(x, y)| \leq |x|$ . В силу леммы 1 двойной предел этой функции при  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  равен нулю. Но при  $x \neq 0$  не существует

$$\lim_{y \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{y},$$

а поэтому не существует и соответствующий повторный предел.

**Упражнение 3.** Пусть функция  $f(x, y)$  определена в проколотой окрестности точки  $(x_0, y_0)$  и существует двойной предел функции  $f(x, y)$  при  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ . Доказать, что в том случае, когда в проколотой окрестности точки  $y_0$  определена функция  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ , будет существовать и повторный предел  $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ , причем он равен двойному пределу.

Бесконечные пределы для функций многих переменных определяются по той же схеме, что и для функций одной переменной. Например,  $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = +\infty$ , если для любого числа  $C > 0$  найдется такое число  $\delta > 0$ , что для всех  $x$  из проколотой окрестности  $\dot{O}_\delta(x^0)$  точки  $x^0$  выполнено неравенство  $f(x) > C$ .

**Упражнение 4.** Придать смысл следующим символам:

$$\lim_{x \rightarrow x^0, x \in M} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty} f(x, y) = A.$$

**Пример 7.** Показать, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)} = 0.$$

$\Delta$  Так как при  $x > 0, y > 0$  справедливо неравенство

$$0 \leq (x^2 + y^2)e^{-(x+y)} \leq (x + y)^2 e^{-(x+y)}$$

и  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^{-t} = 0$ , то  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  такое, что  $\forall t > \delta$  выполнено нера-

венство  $t^2 e^{-t} < \varepsilon$ . Но тогда  $\forall x > \frac{\delta}{2}$  и  $\forall y > \frac{\delta}{2}$  справедливо неравенство

$$0 \leq (x^2 + y^2)e^{-(x+y)} < \varepsilon. \quad \blacktriangle$$

## § 25. Непрерывность функции многих переменных

### 1. Непрерывность функции в точке.

Определение 1. Говорят, что функция  $f(x)$ , определенная в окрестности  $O(x^0)$  точки  $x^0$  метрического пространства, *непрерывна в точке  $x^0$* , если  $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = f(x^0)$ .

Определение 2. Говорят, что функция  $f(x)$ , определенная в окрестности  $O(x^0)$ , *непрерывна в точке  $x^0$* , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такая окрестность  $S_\delta(x^0)$ , что для любого  $x \in S_\delta(x^0)$  выполняется неравенство  $|f(x) - f(x^0)| < \varepsilon$ .

Эквивалентность двух определений следует из определения предела на языке окрестностей.

Пользуясь определением предела по множеству, можно дать соответствующее определение *непрерывности функции в точке по множеству*.

Определение 3. Пусть функция  $f(x)$  определена на множестве  $M \subset R^n$ , точка  $x^0 \in M$ , причем  $x^0$  — предельная точка множества  $M$ . Говорят, что функция  $f(x)$  *непрерывна в точке  $x^0$  по множеству  $M$* , если

$$\lim_{x \rightarrow x^0, x \in M} f(x) = f(x^0).$$

Если  $x^0$  есть изолированная точка множества  $M$ , то функция  $f(x)$  считается непрерывной в точке  $x^0$  по множеству  $M$ .

Пример 1. Функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & x = y = 0, \end{cases}$$

непрерывна в точке  $(0, 0)$  по любому лучу, но не является непрерывной в точке  $(0, 0)$ .

△ Из результата примера 4 из § 24 следует, что функция  $f(x, y)$  не имеет предела при  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  и, следовательно, не является непрерывной в точке  $(0, 0)$ . Из результата примера 6 из § 24 следует, что в точке  $(0, 0)$  предел функции  $f(x, y)$  по любому направлению существует и равен нулю. Следовательно, функция  $f(x, y)$  непрерывна в точке  $(0, 0)$  по любому направлению. ▲

Основные теоремы о свойствах непрерывных в некоторой точке функций (например, теорема о непрерывности суммы непрерывных функций) доказываются для функций многих переменных так же, как и для функции одной переменной. Ниже будет доказано, что суперпозиция непрерывных функций есть непрерывная функция.

### 2. Непрерывность сложной функции.

Теорема 1. Пусть функции  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$  определены в некоторой окрестности точки  $x^0 \in R^m$  и непрерывны в точке  $x^0$ , а функция  $f(y) = f(y_1, \dots, y_n)$  определена в окрестности точки  $y^0 = (\varphi_1(x^0), \dots$

...,  $\varphi_n(x_0)$ ) и непрерывна в точке  $y^0$ . Тогда в некоторой окрестности точки  $x^0$  определена сложная функция

$$\Phi(x) = f(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)),$$

причем функция  $\Phi(x)$  непрерывна в точке  $x^0$ .

○ Так как функция  $f(y) = f(y_1, \dots, y_n)$  непрерывна в точке  $y^0$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  найдется шар  $S_\sigma(y^0)$  такой, что для всех  $y \in S_\sigma(y^0)$  выполнено неравенство

$$|f(y) - f(y^0)| = |f(y_1, \dots, y_n) - f(y_1^0, \dots, y_n^0)| < \varepsilon. \quad (1)$$

Так как при любом  $i \in \{1, \dots, n\}$  функция  $\varphi_i(x)$  непрерывна в точке  $x^0$ , то для числа  $\sigma$  найдется шар  $S_{\delta_i}(x^0)$  такой, что для всех  $x \in S_{\delta_i}(x^0)$  выполнено неравенство

$$|\varphi_i(x) - \varphi_i(x^0)| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (2)$$

Пусть  $\delta$  есть наименьшее из чисел  $\delta_1, \dots, \delta_n$ . Тогда для любого  $x \in S_\delta(x^0)$  и для любого  $i \in \{1, \dots, n\}$  выполнено неравенство (2). Следовательно, для любого  $x \in S_\delta(x^0)$  выполняется неравенство

$$\left( \sum_{i=1}^n (\varphi_i(x) - \varphi_i(x^0))^2 \right)^{1/2} < \sigma, \quad (3)$$

которое означает, что точка  $(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$  лежит в шаре  $S_\sigma(y^0)$ . Но для любого  $y \in S_\sigma(y^0)$  определено значение функции  $f(y_1, \dots, y_n)$ . Значит, в  $S_\delta(x^0)$  определена сложная функция  $\Phi(x) = f(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ .

Покажем, что эта сложная функция непрерывна в точке  $(x^0)$ . При любом  $x \in S_\delta(x^0)$  подставим в неравенство (1) вместо  $y \in S_\sigma(y^0)$  точку  $(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ . Получаем, что для любого  $x \in S_\delta(x^0)$  выполнено неравенство  $|\Phi(x) - \Phi(x^0)| < \varepsilon$ , которое означает, что сложная функция  $\Phi(x)$  непрерывна в точке  $x^0$ . ●

Упражнение 1. Пусть функции  $\varphi_i(x)$  при  $i = \overline{1, n}$  непрерывны по множеству  $M \subset R^m$  в точке  $x^0$ , функция  $f(y_1, \dots, y_n)$  определена на множестве  $\varphi(M) = \{(y_1, \dots, y_n): y_1 = \varphi_1(x), \dots, y_n = \varphi_n(x), x \in M\}$  и непрерывна в точке  $y^0 = (\varphi_1(x^0), \dots, \varphi_n(x^0))$ .

Показать, что сложная функция  $f(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$  непрерывна в точке  $x^0$  по множеству  $M$ .

Указание. Доказательство практически не отличается от доказательства теоремы 1.

Упражнение 2. Пусть:

а) множества  $M_i \subset R^n$  при  $i = \overline{1, N}$ ;

б) точка  $x^0 \in M_i$  при  $i = \overline{1, N}$ ;

в) функция  $f(x)$  определена на множестве  $M = \bigcup_{i=1}^N M_i$ .

Доказать, что функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x^0$  по множеству  $M$  в том и только том случае, когда она непрерывна в точке  $x^0$  по каждому из множеств  $M_i$  при  $i = \overline{1, N}$ .

Указание. См. упр. 1 из § 24.

Упражнение 3. Показать, что результат упр. 2 не обобщается на тот случай, когда множество  $M$  есть объединение бесконечного множества множеств  $M_\alpha$ .

Указание. См. упр. 2 из § 24.

**3. Свойства функций, непрерывных на компакте.** Функция  $f(x)$  называется *непрерывной на множестве  $M$* , если она непрерывна в каждой точке множества  $M$  по этому множеству, т. е. если в каждой предельной точке множества  $x^0$  выполнено условие

$$\lim_{x \rightarrow x^0, x \in M} f(x) = f(x^0). \quad (4)$$

Доказательства следующих двух теорем о свойствах функций, непрерывных на компакте в метрическом пространстве, практически не отличаются от соответствующих доказательств для функций одной переменной, непрерывных на отрезке.

**Теорема 2 (Вейерштрасса).** *Функция  $f(x)$ , непрерывная на компакте метрического пространства, ограничена на этом компакте.*

**Теорема 3 (Вейерштрасса).** *Функция  $f(x)$ , непрерывная на компакте метрического пространства, принимает на этом компакте свои наибольшее и наименьшее значения.*

**4. Равномерная непрерывность.** Введем фундаментальное понятие равномерной непрерывности функции на множестве.

**Определение.** Говорят, что функция  $f(x)$  *равномерно непрерывна на множестве  $G$*  метрического пространства  $X$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  такое, что для  $\forall x, x' \in G$  таких, что  $\rho(x, x') < \delta$ , выполнено неравенство

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Функция, непрерывная на множестве, не обязательно будет равномерно непрерывной на этом множестве. Прежде чем приводить примеры, построим отрицание: функция  $f(x)$  не будет равномерно непрерывной на множестве  $G$ , если  $\exists \varepsilon_0 > 0$  такое, что для любого  $\delta > 0$  существуют элементы  $x, x' \in G$  такие, что  $\rho(x, x') < \delta$ , но

$$|f(x) - f(x')| \geq \varepsilon_0.$$

**Пример 2.** Покажем, что функция  $f(x) = x^2$  не является равномерно непрерывной на интервале  $(0, +\infty)$ .

$\Delta$  Пусть  $\varepsilon_0 = 1$ . Для любого  $\delta > 0$  возьмем  $x_\delta = 1/\delta$ ,  $x'_\delta = 1/\delta + \delta/2$ . Тогда  $\rho(x'_\delta, x_\delta) = |x'_\delta - x_\delta| = \delta/2 < \delta$ , но

$$|f(x'_\delta) - f(x_\delta)| =$$

$$= (x'_\delta)^2 - x_\delta^2 = (x'_\delta - x_\delta)(x'_\delta + x_\delta) = \frac{\delta}{2} \left( \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2} \right) \geq 1. \quad \blacktriangle$$

Упражнение 4. Привести пример функции, непрерывной и ограниченной на  $(0, 1)$ , но не являющейся равномерно непрерывной на этом интервале.

**Теорема 4 (Кантора).** *Функция  $f(x)$ , непрерывная на компакте метрического пространства, равномерно непрерывна на этом компакте.*

○ Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на компакте  $M$ , но не равномерно непрерывна на этом компакте. Тогда  $\exists \varepsilon_0 > 0$  такое, что  $\forall n$  найдутся точки  $x_n, x'_n \in M$  такие, что

$$\rho(x_n, x'_n) < \frac{1}{n}, \quad \text{но} \quad |f(x'_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0. \quad (5)$$

Так как  $M$  — компакт, то из последовательности  $\{x_n\}$  можно выделить подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$ , сходящуюся к некоторой точке  $x^0 \in M$ .

Используя неравенство треугольника, получаем

$$\begin{aligned} 0 \leq \rho(x'_{n_k}, x^0) &\leq \rho(x'_{n_k}, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x^0) < \\ &< \frac{1}{n_k} + \rho(x_{n_k}, x^0) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x'_{n_k} = x^0.$$

Но функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x^0$ . Поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x'_{n_k}) = f(x^0).$$

Полагая теперь в (5)  $n = n_k$ , получаем

$$|f(x'_{n_k}) - f(x_{n_k})| \geq \varepsilon_0. \quad (6)$$

Переходя в неравенстве (6) к пределу, получаем

$$0 = |f(x^0) - f(x^0)| \geq \varepsilon_0 > 0.$$

Полученное противоречие доказывает, что функция  $f(x)$  должна быть равномерно непрерывной на множестве  $M$ . ●

Пусть функция  $f(x)$  ограничена на множестве  $E$ . Выражение

$$\omega_f(\delta, E) = \sup_{x, x' \in E; \rho(x, x') < \varepsilon} |f(x) - f(x')| \quad (7)$$

называют *модулем непрерывности функции  $f(x)$  на множестве  $E$* . Очевидно, что модуль непрерывности возрастает при увеличении  $\delta$ .

**Теорема 5.** *Функция  $f(x)$  равномерно непрерывна на множестве  $E$  в том и только том случае, когда*

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega_f(\delta, E) = 0. \quad (8)$$

○ Если функция  $f(x)$  равномерно непрерывна на множестве  $E$ , то  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0: \forall x, x' \in E: \rho(x, x') < \delta_\varepsilon \rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}$ . (9)

Из (7) и (9) следует, что

$$\omega_f(\delta_\varepsilon, E) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Поскольку модуль непрерывности — возрастающая функция  $\delta$ , то при  $0 < \delta < \delta_\varepsilon$  выполняется неравенство

$$\omega_f(\delta, E) < \varepsilon$$

и, следовательно, справедливо равенство (8).

Покажем, что из равенства (8) следует равномерная непрерывность функции  $f(x)$  на множестве  $E$ . Из (8) следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0: \forall \delta < \delta_\varepsilon \rightarrow \omega_f(\delta, E) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (10)$$

Из (10) и (7) следует, что выполнено условие равномерной непрерывности (9). ●

### 5. Промежуточные значения непрерывной функции.

**Теорема 6.** Пусть функция  $f(x)$  непрерывна в области  $G \in R^n$  и принимает в этой области значения  $A$  и  $B$ . Тогда функция  $f(x)$  принимает в области  $G$  все значения, заключенные между  $A$  и  $B$ .

○ По условию  $G$  — область, т. е. открытое и связное множество. Пусть функция  $f(x)$  непрерывна в  $G$  и  $f(a) = A$ ,  $f(b) = B$ ,  $a, b \in G$ .

Соединим  $a$  и  $b$  непрерывной кривой  $x = x(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ ,  $x(\alpha) = a$ ,  $x(\beta) = b$ . Сложная функция  $f[x(t)] = \varphi(t)$  непрерывна на отрезке  $[\alpha, \beta]$  и принимает на концах этого отрезка значения  $A$  и  $B$ . Так как  $\varphi(t)$  есть непрерывная функция одной переменной, то в силу теоремы о промежуточных значениях для функции одной переменной она принимает на отрезке  $[\alpha, \beta]$  все значения, заключенные между  $A$  и  $B$ . Но множество значений функции  $\varphi(t) = f[x(t)]$  содержится в множестве значений функции  $f(x)$ . Поэтому функция  $f(x)$  принимает все значения, заключенные между значениями  $A$  и  $B$ . ●

## § 26. Дифференцируемость функции многих переменных

### 1. Частные производные. Пусть функция

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$$

определена в окрестности точки  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ . Рассмотрим функцию одной переменной

$$\varphi(x_1) = f(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0).$$



Функция  $\varphi(x_1)$  может иметь производную в точке  $x_1^0$ . По определению такая производная называется *частной производной*  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)$ . Таким образом,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, \dots, x_n^0) = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)}{\Delta x_1},$$

где  $\Delta x_1 = x_1 - x_1^0$ .

Аналогично определяются частные производные (первого порядка)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, \dots, x_n^0), \quad i = \overline{2, n}.$$

Используются и другие обозначения для частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = f_{x_i}(x^0) = D_i f(x^0) = f'_{x_i}(x^0) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x^0) = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}.$$

Функция двух переменных может иметь в точке  $(x^0, y^0)$  две частные производные первого порядка

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^0, y^0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0).$$

Для функции трех переменных — три частные производные первого порядка

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^0, y^0, z^0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0, z^0), \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x^0, y^0, z^0).$$

Поскольку при вычислении частных производных все переменные, кроме одной, фиксируются, то техника вычисления частных производных такая же, как техника вычисления производных функции одной переменной.

Например,

$$\frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

**2. Дифференцируемость функции многих переменных в точке.** Дадим определение дифференцируемости функции в точке.

**Определение.** Функция  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  называется *дифференцируемой в точке*  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ , если она определена в некоторой окрестности этой точки и существуют такие числа  $A_1, \dots, A_n$ , что

$$f(x) - f(x^0) = \sum_{i=1}^n A_i (x_i - x_i^0) + o(\rho(x, x^0)) \quad \text{при } x \rightarrow x^0. \quad (1)$$

Теорема 1. Функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x^0$  в том и только том случае, когда в некоторой окрестности точки  $x^0$  функция  $f(x)$  может быть представлена в следующем виде:

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{i=1}^n f_i(x)(x_i - x_i^0), \quad (2)$$

где функции  $f_i(x)$  непрерывны в точке  $x^0$ .

○ Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x^0$ . Тогда выполнено условие (1). Заметим, что равенство  $\psi(x) = o(\rho(x, x^0))$  при  $x \rightarrow x^0$  означает, что  $\psi(x) = \varepsilon(x)\rho(x, x^0)$ , где  $\lim_{x \rightarrow x^0} \varepsilon(x) = 0$ .

Тогда

$$\psi(x) = \frac{\varepsilon(x)}{\rho(x, x^0)} \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(x)(x_i - x_i^0), \quad (3)$$

где  $\varepsilon_i(x) = \varepsilon(x) \frac{x_i - x_i^0}{\rho(x, x^0)}$ ,  $\lim_{x \rightarrow x^0} \varepsilon_i(x) = 0$ , так как  $0 \leq \frac{|x_i - x_i^0|}{\rho(x, x^0)} \leq 1$ .

Доопределим функции  $\varepsilon_i(x)$  в точке  $x^0$  по непрерывности, полагая  $\lim_{x \rightarrow x^0} \varepsilon_i(x) = \varepsilon_i(x^0) = 0$ .

Тогда из (1) и (3) получаем

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x^0) + \sum_{i=1}^n A_i(x_i - x_i^0) + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(x)(x_i - x_i^0) = \\ &= f(x^0) + \sum_{i=1}^n f_i(x)(x_i - x_i^0), \quad f_i(x) = A_i + \varepsilon_i(x). \end{aligned}$$

Так как функции  $\varepsilon_i(x)$  непрерывны в точке  $x^0$ , то и функции  $f_i(x)$  непрерывны в точке  $x^0$  и  $f_i(x^0) = A_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Пусть выполнено (2). Тогда, воспользовавшись непрерывностью функции  $f_i(x)$  в точке  $x^0$ , положим

$$A_i = f_i(x^0), \quad f_i(x) = A_i + \varepsilon_i(x), \quad \lim_{x \rightarrow x^0} \varepsilon_i(x) = 0.$$

Получаем

$$\begin{aligned} f(x) - f(x^0) &= \sum_{i=1}^n A_i(x_i - x_i^0) + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(x)(x_i - x_i^0) = \\ &= \sum_{i=1}^n A_i(x_i - x_i^0) + o(\rho(x, x^0)), \end{aligned}$$

так как

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i(x)(x_i - x_i^0)}{\rho(x, x^0)} \right| \leq \sum_{i=1}^n |\varepsilon_i(x)| \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow x^0. \quad \bullet$$

У п р а ж н е н и е 1. Пусть функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  определены в окрестности точки  $x^0 \in R^n$ , функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x^0$  и  $f(x^0) = 0$ , а функция  $\varphi(x)$  непрерывна в точке  $x^0$ . Доказать, что функция  $f(x)\varphi(x)$  дифференцируема в точке  $x^0$ .

У п р а ж н е н и е 2. Доказать, что функция

$$(x + y)(x^3 + y^3)^{1/3}$$

дифференцируема в точке  $(0, 0)$ .

У к а з а н и е. Воспользоваться результатом упр. 1.

П р и м е р 1. Показать, что функция

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^4}$$

дифференцируема в точке  $(0, 0)$ .

$\Delta$  Покажем, что существует число  $C > 0$  такое, что для любых  $x \in R$  и  $y \in R$  справедливо неравенство

$$|\sqrt[3]{x^3 + y^4} - x| \leq C|y|^{4/3}. \quad (4)$$

Если  $y = 0$ , то неравенство (4) справедливо при любом  $C$ . Пусть  $y \neq 0$ . Положим  $t = xy^{-4/3}$ . Тогда неравенство (4) эквивалентно неравенству  $|\psi(t)| < C$ , где  $\psi(t) = \sqrt[3]{1 + t^3} - t$ .

Так как функция  $\psi(t)$  непрерывна на  $R$  и  $\psi(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , то  $\psi(t)$  есть ограниченная функция на  $R$  (см. упр. 4 к гл. III).

Итак, неравенство (4) установлено. Так как

$$\left| \frac{y^{4/3}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = |y|^{1/3} \frac{|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq |y|^{1/3},$$

то

$$y^{4/3} = o(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad \text{при} \quad (x, y) \rightarrow (0, 0),$$

и, следовательно,

$$\sqrt[3]{x^3 + y^4} = x + o(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad \text{при} \quad (x, y) \rightarrow (0, 0),$$

т. е. функция  $f(x, y)$  дифференцируема в точке  $(0, 0)$ .  $\blacktriangle$

П р и м е р 2. Показать, что функция

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

недифференцируема в точке  $(0, 0)$ .

$\Delta$  *Первый способ.* Пусть функция дифференцируема в точке  $(0, 0)$ , тогда, согласно определению, существуют числа  $A$  и  $B$  такие, что

$$f(x, y) - f(0, 0) = Ax + By + o(\rho), \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

где  $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ ,  $f(0, 0) = 0$ ,  $A = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = 1$ ,  $B = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = 1$ .

Поэтому

$$\sqrt[3]{x^3 + y^3} = x + y + o(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Пусть  $x = y > 0$ , тогда

$$\sqrt[3]{2x} = 2x + o(x)$$

или  $(\sqrt[3]{2} - 2)x = o(x)$  при  $x \rightarrow 0$ , что противоречит определению символа  $o(x)$ . Следовательно, функция  $\sqrt[3]{x^3 + y^3}$  недифференцируема в точке  $(0, 0)$ .

*Второй способ.* Если функция  $f(x, y)$  дифференцируема в точке  $(0, 0)$ , то ее можно в некоторой окрестности этой точки, согласно теореме 1, представить в следующем виде:

$$\sqrt[3]{x^3 + y^3} = x\varphi(x, y) + y\psi(x, y), \quad (5)$$

где функции  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$  непрерывны в точке  $(0, 0)$ .

Пусть  $k$  — произвольное число. Положим в (5)  $y = kx$ . Тогда

$$\sqrt[3]{1 + k^3} = \varphi(x, kx) + k\psi(x, kx).$$

Переходя к пределу при  $x \rightarrow 0$  и пользуясь непрерывностью функций  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$  в точке  $(0, 0)$ , получаем, что при любом  $k$  выполняется равенство

$$\sqrt[3]{1 + k^3} = \varphi(0, 0) + k\psi(0, 0) = a + kb.$$

Это неверно, так как функция  $\sqrt[3]{1 + k^3}$  не есть линейная функция (ее вторая производная по  $k$  не обращается тождественно в нуль).  $\blacktriangle$

Из теоремы 1 следует, что функция  $f(x)$ , дифференцируемая в точке  $x^0$ , непрерывна в этой точке. Обратное утверждение неверно: функция примера 2 непрерывна, но недифференцируема в точке  $(0, 0)$ .

### 3. Необходимое условие дифференцируемости функции в точке.

*Теорема 2.* Если функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ , то она имеет в точке  $x^0$  все частные производные  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , и

$$f(x) - f(x^0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)(x_i - x_i^0) + o(\rho(x, x^0)) \quad \text{при } x \rightarrow x^0. \quad (6)$$

○ Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x^0$ . Тогда найдутся такие числа  $A_1, \dots, A_n$ , что при  $x \rightarrow x^0$  будет выполнено равенство (1). Пусть в этом равенстве  $x_1 \neq x_1^0$ , а  $x_2 = x_2^0, \dots, x_n = x_n^0$ . Тогда равенство (1) принимает следующий вид:

$$f(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0) = A_1(x_1 - x_1^0) + o(|\Delta x_1|)$$

при  $x_1 - x_1^0 = \Delta x_1 \rightarrow 0$ .

Следовательно, существует предел:

$$A_1 = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)}{\Delta x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0).$$

Аналогично доказывается, что у функции  $f(x)$  в точке  $x^0$  существуют и остальные частные производные и что

$$A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0), \quad i = \overline{2, n}.$$

Подставляя эти выражения в равенство (1), получаем (6). ●

Функция примера 2 имеет в точке  $(0, 0)$  обе частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3}}{x} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1.$$

Так как функция  $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$  примера 2 недифференцируема в точке  $(0, 0)$ , то этот пример показывает, что из существования частных производных в точке не следует дифференцируемость функции в этой точке. Существование частных производных функции в точке не гарантирует даже непрерывности функции в этой точке. Так, функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{при } x^2 + y^2 > 0, \\ 0 & \text{при } x = y = 0 \end{cases}$$

не имеет предела при  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ , а поэтому и не является непрерывной в точке  $(0, 0)$ . Тем не менее у этой функции в точке  $(0, 0)$  существуют обе частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

#### 4. Достаточные условия дифференцируемости функции в точке.

**Теорема 3.** Если все частные производные  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , определены в окрестности точки  $x^0 \in R^n$  и непрерывны в точке  $x^0$ , то функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x^0$ .

○ Рассмотрим случай функции трех переменных. Общий случай рассматривается аналогично. Пусть функции  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)$  определены в некотором шаре  $S_\varepsilon(x^0, y^0, z^0)$  и непрерывны в центре шара  $(x^0, y^0, z^0)$ .

Запишем приращение функции в следующем виде:

$$f(x, y, z) - f(x^0, y^0, z^0) = f(x, y, z) - f(x^0, y, z) + \\ + f(x^0, y, z) - f(x^0, y^0, z) + f(x^0, y^0, z) - f(x^0, y^0, z^0).$$

Пусть  $x^0 < x$ . Рассмотрим функцию одной переменной  $\psi(t) = f(t, y, z)$  при  $t \in [x^0, x]$ . На этом отрезке функция  $\psi(t)$  имеет производную

$$\psi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, y, z).$$

Применяя формулу конечных приращений Лагранжа для функции  $\psi(t)$  на отрезке  $[x^0, x]$ , получаем

$$\psi(x) - \psi(x^0) = \psi'(x^0 + \theta(x - x^0))(x - x^0), \quad 0 < \theta < 1.$$

Если подставить в эту формулу выражение для  $\psi(t)$ , то

$$\begin{aligned} f(x, y, z) - f(x^0, y, z) &= f_1(x, y, z)(x - x^0), \\ f_1(x, y, z) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x^0 + \theta(x - x^0), y, z). \end{aligned} \quad (7)$$

Так как частная производная  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$  непрерывна в точке  $(x^0, y^0, z^0)$ , то существует

$$\lim_{(x, y, z) \rightarrow (x^0, y^0, z^0)} f_1(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^0, y^0, z^0).$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} f(x^0, y, z) - f(x^0, y^0, z) &= f_2(x, y, z)(y - y^0), \\ f(x^0, y^0, z) - f(x^0, y^0, z^0) &= f_3(x, y, z)(z - z^0), \end{aligned} \quad (8)$$

где функции  $f_2(x, y, z)$  и  $f_3(x, y, z)$  имеют конечные пределы при  $(x, y, z) \rightarrow (x^0, y^0, z^0)$ . Доопределяя эти функции в точке  $(x^0, y^0, z^0)$  предельными значениями, получим, что функции  $f_i(x, y, z)$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , непрерывны в точке  $(x^0, y^0, z^0)$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} f(x, y, z) - f(x^0, y^0, z^0) &= \\ &= (x - x^0)f_1(x, y, z) + (y - y^0)f_2(x, y, z) + (z - z^0)f_3(x, y, z). \end{aligned}$$

Из непрерывности функций  $f_1(x, y, z)$ ,  $f_2(x, y, z)$  и  $f_3(x, y, z)$  в точке  $(x^0, y^0, z^0)$  и теоремы 1 следует дифференцируемость функции  $f(x, y, z)$  в точке  $(x^0, y^0, z^0)$ . ●

Непрерывность частных производных в точке не является необходимым условием дифференцируемости функции в этой точке.

Функция

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & x = y = 0, \end{cases}$$

дифференцируема в точке  $(0, 0)$ , так как

$$f(x, y) = 0 \cdot x + 0 \cdot y + o(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad \text{при} \quad (x, y) \rightarrow (0, 0).$$

Но при  $x^2 + y^2 > 0$  частная производная

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

не имеет предела при  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  и, следовательно, не является непрерывной функцией в точке  $(0, 0)$ . Чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что  $\frac{\partial f(x, 0)}{\partial x}$  не имеет предела при  $x \rightarrow 0$ .

### 5. Дифференцируемость сложной функции.

**Теорема 4.** Пусть функции  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$  дифференцируемы в точке  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in R^n$ ,  $y^0 = (\varphi_1(x^0), \dots, \varphi_m(x^0)) \in R^m$  и функция  $f(y) = f(y_1, \dots, y_m)$  дифференцируема в точке  $y^0$ .

Тогда сложная функция

$$\Phi(x) = f(\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))$$

дифференцируема в точке  $x^0$ , причем при  $x \rightarrow x^0$

$$\Phi(x) - \Phi(x^0) = \sum_{i=1}^n A_i(x_i - x_i^0) + o(\rho(x, x^0)), \quad (9)$$

$$A_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x^0) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}(y^0) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x^0), \quad i = \overline{1, n}.$$

○ Так как функция  $f(y)$  дифференцируема в точке  $y^0$ , то в силу теоремы 1 найдутся функции  $f_j(y)$ ,  $j = \overline{1, m}$ , непрерывные в точке  $y^0 = (y_1^0, \dots, y_m^0)$  и такие, что

$$f(y) - f(y^0) = \sum_{j=1}^m f_j(y)(y_j - y_j^0), \quad f_j(y^0) = \frac{\partial f}{\partial y_j}(y^0). \quad (10)$$

Воспользовавшись тем, что дифференцируемая в точке функция непрерывна в этой точке, а также теоремой о непрерывности сложной функции, получаем, что функции

$$\psi_j(x) = f_j(\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)), \quad j = \overline{1, m}, \quad (11)$$

непрерывны в точке  $x^0$ , причем

$$\psi_j(x^0) = f_j(\varphi_1(x^0), \dots, \varphi_m(x^0)) = f_j(y^0) = \frac{\partial f}{\partial y_j}(y^0). \quad (12)$$

Подставив в (10)  $y_1 = \varphi_1(x)$ , ...,  $y_m = \varphi_m(x)$  и воспользовавшись обозначениями (11), получаем

$$\Phi(x) - \Phi(x^0) = \sum_{j=1}^m \psi_j(x)(\varphi_j(x) - \varphi_j(x^0)). \quad (13)$$

Но функции  $\varphi_j(x)$ ,  $j = \overline{1, m}$ , дифференцируемы в точке  $x^0$ , поэтому найдутся такие непрерывные в точке  $x^0$  функции  $\varphi_{ij}(x)$ , что

$$\varphi_j(x) - \varphi_j(x^0) = \sum_{i=1}^n \varphi_{ij}(x)(x_i - x_i^0), \quad \varphi_{ij}(x^0) = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x^0), \quad (14)$$

$$i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}.$$

Подставляя выражения (14) в (13), получаем

$$\Phi(x) - \Phi(x^0) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(x)(x_i - x_i^0), \quad \Phi_i(x) = \sum_{j=1}^m \varphi_{ij}(x) \psi_j(x). \quad (15)$$

Так как функции  $\psi_j(x)$  и  $\varphi_{ij}(x)$  непрерывны в точке  $x^0$ , то и функции  $\Phi_i(x)$  непрерывны в точке  $x^0$ . А это означает, что сложная функция  $\Phi(x)$  дифференцируема в точке  $x^0$  (теорема 1).

Дифференцируемая функция  $\Phi(x)$  может быть записана в виде (9) с коэффициентами  $A_i$ , равными, в силу (12) и (14),

$$A_i = \Phi_i(x^0) = \sum_{j=1}^m \varphi_{ij}(x^0) \psi_j(x^0) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}(y^0) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x^0) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x^0). \quad \bullet$$

**Замечание.** Вторая из формул (9) дает правило нахождения частных производных сложной функции, аналогичное соответствующему правилу для функций одной переменной.

**Пример 3.** Пусть функция  $f(x, y)$  дифференцируема во всех точках пространства  $R^2$ . Перейти к полярным координатам и найти выражения для  $\frac{\partial f}{\partial r}$  и  $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$ .

$\Delta$  Пусть  $F(r, \varphi) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ ,  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . Тогда, пользуясь правилом (9), получаем

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left( x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial y} = -y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y}. \quad \blacktriangle$$

**6. Дифференциал. Инвариантность формы первого дифференциала. Правила дифференцирования.** Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x^0$ . Тогда при  $x \rightarrow x^0$  ее можно записать в виде (5):

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} (x_i - x_i^0) + o(\rho(x, x^0)).$$

Положим по определению

$$dx_i = \Delta x_i = x_i - x_i^0.$$

Если функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x^0$ , то линейную форму относительно приращений независимых переменных

$$df(x^0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) dx_i \quad (16)$$



назовем *дифференциалом функции*  $f(x)$  в точке  $x^0$ . Тогда

$$f(x) = f(x^0) + df(x^0) + o(\rho(x, x^0)) \quad \text{при } x \rightarrow x^0.$$

Иногда выражение (16) называют *первым дифференциалом* функции  $f(x)$  в точке  $x^0$ .

Найдем теперь дифференциал сложной функции. Пусть функции  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$  дифференцируемы в точке  $x^0$ , а функция  $f(y_1, \dots, y_m)$  дифференцируема в точке  $y^0 = (\varphi_1(x^0), \dots, \varphi_m(x^0))$ . Тогда в силу теоремы 3 сложная функция  $\Phi(x) = f(\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))$  дифференцируема в точке  $x^0$ . Используя формулы (9), получаем

$$\begin{aligned} d\Phi(x^0) &= df(\varphi_1(x^0), \dots, \varphi_m(x^0)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x^0) dx_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}(y^0) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x^0) dx_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}(y^0) \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x^0) dx_i = \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}(y^0) dy_j(x^0), \quad dy_j(x^0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x^0) dx_i. \end{aligned}$$

Итак,

$$df(y_1(x^0), \dots, y_m(x^0)) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}(y^0) dy_j(x^0). \quad (17)$$

Если бы  $y_1, \dots, y_m$  были независимыми переменными, то  $df(y^0)$  отличался бы от дифференциала сложной функции (17) только тем, что в выражении (17)  $dy_j(x^0)$  — дифференциалы функций  $\varphi_j$ , а в

$$df(y^0) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}(y^0) dy_j$$

$dy_j$  — дифференциалы независимых переменных. Формальная запись дифференциала в обоих случаях одинакова. Говорят, что форма первого дифференциала *инвариантна относительно замены переменных*.

Инвариантность формы первого дифференциала является весьма удобным его свойством. При записи  $df(y^0)$  в виде (17) мы можем не задумываться о том, являются ли переменные  $y_1, \dots, y_m$  независимыми. Заметим, что во многих прикладных задачах часто бывает затруднительно выяснить вопрос о независимости переменных.

Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема во всех точках некоторого открытого множества  $G \subset R^n$ . Тогда в каждой точке  $x \in G$  можно вычислить дифференциал

$$df(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i.$$

Он будет функцией  $2n$  переменных  $x_1, \dots, x_n, dx_1, \dots, dx_n$ , причем при фиксированных  $x_1, \dots, x_n$  дифференциал есть линейная функция  $dx_1, \dots, dx_n$ . Правила дифференцирования такие же, как и для функций одной переменной:

- а)  $d(u + v) = du + dv$ ;  
 б)  $d(uv) = u dv + v du$ ;  
 в)  $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$ ,  $v \neq 0$ .

Докажем, например, б).

○ Прежде всего заметим, что из теоремы о дифференцируемости сложной функции следует, что функция  $u(x)v(x)$  дифференцируема, если дифференцируемы функции  $u(x)$  и  $v(x)$ . Далее, имеем

$$\begin{aligned} d(uv) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial(uv)}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^n \left( u \frac{\partial v}{\partial x_i} + v \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dx_i = \\ &= u \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} dx_i + v \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i = u dv + v du. \quad \bullet \end{aligned}$$

Пример 4. Найти дифференциал функции  $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ .

△ Пусть  $u = \frac{y}{x}$ , тогда

$$\begin{aligned} d\left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right) &= d(\operatorname{arctg} u) = \frac{du}{1+u^2} = \frac{d(y/x)}{1+(y/x)^2} = \\ &= \frac{x^2}{x^2+y^2} \frac{x dy - y dx}{x^2} = \frac{x dy - y dx}{x^2+y^2}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

**7. Формула конечных приращений Лагранжа.** Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема в выпуклой области  $G \subset R^n$ . Напомним, что выпуклая область есть открытое множество, любые две точки которого можно соединить отрезком, лежащим в области. Тогда для любых двух точек  $x = (x_1, \dots, x_n) \in G$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n) \in G$  найдется число  $\theta \in (0, 1)$  такое, что

$$f(y) - f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \theta(y-x))(y_i - x_i). \quad (18)$$

Формула (18) называется *формулой конечных приращений Лагранжа*. Докажем ее.

○ Пусть точки  $x, y \in G$ . Так как область  $G$  выпукла, то отрезок, соединяющий точки  $x$  и  $y$ , лежит в области  $G$ . Поэтому определена функция одной переменной

$$\varphi(t) = f(x_1 + t(y_1 - x_1), \dots, x_n + t(y_n - x_n)), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (19)$$

Очевидно, что  $\varphi(0) = f(x)$ ,  $\varphi(1) = f(y)$  и что функция  $\varphi(t)$  дифференцируема на отрезке  $[0, 1]$ . По правилу нахождения производной сложной функции имеем

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1 + t(y_1 - x_1), \dots, x_n + t(y_n - x_n))(y_i - x_i). \quad (20)$$

Применим к функции  $\varphi(t)$  формулу конечных приращений Лагранжа для функции одной переменной. Получаем, что найдется число  $\theta \in (0, 1)$  такое, что  $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta)$ . Используя формулы (19) и (20), теперь легко получаем формулу (18). ●

**8. Касательная плоскость к графику функции двух переменных. Геометрический смысл дифференциала.** Пусть функция  $f(x, y)$  дифференцируема на открытом множестве  $G \subset R^2$ . Рассмотрим ее график

$$\text{Gr } f = \{(x, y, z): z = f(x, y), (x, y) \in G\}.$$

Пусть точка  $P(x_0, y_0, z_0)$  лежит на  $\text{Gr } f$ , т. е.  $z_0 = f(x_0, y_0)$ , и пусть гладкая кривая

$$\Gamma = \{x = x(t), y = y(t), z = z(t), \alpha \leq t \leq \beta\}$$

лежит на графике и проходит через точку  $(x_0, y_0, z_0)$ . Это означает, что

$$z(t) = f(x(t), y(t)); \quad (x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = (x_0, y_0, z_0), \quad t_0 \in (\alpha, \beta). \quad (21)$$

Дифференцируя тождество (21) в точке  $t_0$  и пользуясь инвариантностью формы первого дифференциала, получаем

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) dy. \quad (22)$$

Вектор  $d\tau = (dx, dy, dz)$  есть касательный вектор к кривой  $\Gamma$  в точке  $(x_0, y_0, z_0)$ . Введем вектор

$$\mathbf{N} = \left( -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), 1 \right). \quad (23)$$

Условие (22) означает, что вектор  $\mathbf{N}$  ортогонален к касательной к кривой  $\Gamma$  в точке  $(x_0, y_0, z_0)$ . Говорят, что вектор  $\mathbf{N}$  ортогонален к кривой  $\Gamma$  в точке  $P$ . Но  $\Gamma$  — любая гладкая кривая, лежащая на  $\text{Gr } f$  и проходящая через точку  $P$ . Поэтому вектор  $\mathbf{N}$  ортогонален к любой кривой, лежащей на  $\text{Gr } f$  и проходящей через точку  $P$ . Он называется вектором нормали к  $\text{Gr } f$  в точке  $P$ .

Плоскость, проходящая через точку  $P$  и ортогональная вектору нормали  $\mathbf{N}$ , называется касательной плоскостью к  $\text{Gr } f$  в точке  $P$ . Ее уравнение есть

$$Z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(X - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(Y - y_0). \quad (24)$$

Прямая, проходящая через точку  $P$  и параллельная вектору  $\mathbf{N}$ , называется *нормалью* к  $\text{Gr } f$  в точке  $P$ . Ее уравнение —

$$\frac{X - x_0}{-f_x(x_0, y_0)} = \frac{Y - y_0}{-f_y(x_0, y_0)} = Z - f(x_0, y_0).$$

Найдем значение аппликаты касательной плоскости, построенной в точке  $P(x_0, y_0, z_0) \in \text{Gr } f$ .

Из (24) получаем

$$Z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = df(x_0, y_0).$$

Таким образом,  $df(x_0, y_0)$  есть приращение аппликаты касательной плоскости (рис. 26.1).

**9. Производная по направлению. Градиент.** Пусть функция  $f(x, y, z)$  определена в области  $G \subset R^3$ , и пусть точка  $P(x_0, y_0, z_0) \in G$ . Рассмотрим луч, проходящий через точку и параллельный направлению

$$\mathbf{l} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma),$$

где

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Так как  $P$  — внутренняя точка  $G$ , то найдется число  $t_0$  такое, что отрезок

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t \cos \alpha, & y &= y_0 + t \cos \beta, \\ z &= z_0 + t \cos \gamma, & -t_0 &\leq t \leq t_0, \end{aligned}$$

лежит в области  $G$ . *Производной функции  $f(x, y, z)$  в точке  $(x_0, y_0, z_0)$  в направлении  $\mathbf{l}$*  назовем

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t}.$$

**Теорема 5.** *Если функция  $f(x, y, z)$  дифференцируема в точке  $P(x_0, y_0, z_0)$ , то производную по направлению  $\mathbf{l}$  в этой точке можно вычислить при помощи следующей формулы:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0, z_0) &= \left. \frac{d}{dt} f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma) \right|_{t=0} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \cos \gamma. \end{aligned} \quad (25)$$

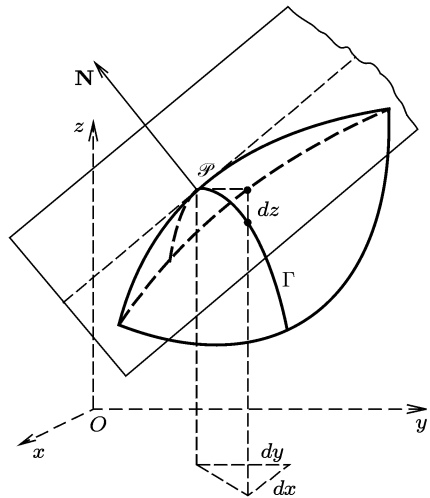


Рис. 26.1

○ Формула (25) есть простое следствие правила нахождения производной сложной функции. ●

Обозначим через  $\text{grad } f(x_0, y_0, z_0)$  вектор

$$\text{grad } f(x_0, y_0, z_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right).$$

Тогда равенство (25) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x_0, y_0, z_0) = (\mathbf{1}, \text{grad } f(x_0, y_0, z_0)).$$

Если ввести символический вектор (*оператор Гамильтона*)

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (26)$$

и договориться, что векторы, стоящие слева от  $\nabla$ , перемножаются с  $\nabla$  по правилам векторной алгебры, а на величины, стоящие справа,  $\nabla$  действует как дифференциальный оператор, то

$$(\mathbf{1}, \nabla) = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \cos \beta \frac{\partial}{\partial y} + \cos \gamma \frac{\partial}{\partial z}.$$

Тогда формулу (25) можно записать через оператор Гамильтона

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x_0, y_0, z_0) = (\mathbf{1}, \nabla) f(x_0, y_0, z_0).$$

**Упражнение 3.** Пусть функция  $f(x, y, z)$  дифференцируема во всем пространстве  $R^3$ . Множество точек  $f(x, y, z) = C_0$ ,  $C_0 \in R$ , будем называть *поверхностью уровня* функции  $f(x, y, z)$ . Показать, что вектор  $\text{grad } f(x, y, z)$  ортогонален к любой гладкой кривой  $\Gamma$ , лежащей на поверхности уровня и проходящей через точку  $P(x, y, z)$ .

**Указание.** Обобщить рассуждения п. 8.

## § 27. Частные производные и дифференциалы высших порядков

**1. Частные производные высших порядков.** Пусть во всех точках открытого множества  $G \subset R^3$  существует частная производная  $\partial f(x)/\partial x_i$ . Эта производная как функция  $x$  может иметь в некоторой точке  $x^0$  производную

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{x=x^0},$$

которая называется *частной производной второго порядка* и обозначается одним из символов

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0), \quad f_{x_i x_j}(x^0), \quad D_{x_i x_j}(x^0), \quad \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Если  $i = j$ , то для частной производной применяется обозначение

$$\frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_i^2}.$$

Для функции двух переменных можно записать четыре производные второго порядка в точке  $(x, y)$ :

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}.$$

Производные  $f_{xy}(x, y)$  и  $f_{yx}(x, y)$  называют *смешанными*. Вообще говоря, они могут быть неравны.

Пример 1. Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

Покажем, что  $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$ .

△ Так как

$$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{при } x^2 + y^2 > 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{при } x^2 + y^2 > 0,$$

то

$$f_{yx}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_y(x, 0) - f_y(0, 0)}{x} = 1,$$

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f_x(0, y) - f_x(0, 0)}{y} = -1.$$

Таким образом,  $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$ . ▲

## 2. Теорема о смешанных производных.

Теорема 1. Если обе смешанные производные  $f_{xy}(x, y)$  и  $f_{yx}(x, y)$  определены в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0)$  и непрерывны в этой точке, то  $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$ .

○ Пусть смешанные производные определены в прямоугольнике  $\Pi = \{(x, y) : |x - x_0| < \varepsilon, |y - y_0| < \eta\}$  и непрерывны в точке  $(x_0, y_0)$ .

Рассмотрим в прямоугольнике  $\Pi$  функцию

$$w(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y) - f(x, y_0) + f(x_0, y_0).$$

При фиксированном  $y \in (y_0 - \eta, y_0 + \eta)$  рассмотрим на интервале  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  функцию

$$\varphi(t) = f(t, y) - f(t, y_0).$$

Она дифференцируема на  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  и

$$\varphi'(t) = f_x(t, y) - f_x(t, y_0).$$

Функцию  $w(x, y)$  можно записать в виде

$$w(x, y) = \varphi(x) - \varphi(x_0).$$

Применяя формулу конечных приращений Лагранжа, получаем

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \varphi'(x_0 + \theta_1(x - x_0))(x - x_0) = \\ &= \Delta x [f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y) - f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0)], \quad \Delta x = x - x_0, \quad 0 < \theta_1 < 1. \end{aligned}$$

Применяя еще раз формулу конечных приращений Лагранжа, но уже по переменной  $y$ , получаем

$$w(x, y) = \Delta x \Delta y f_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y), \quad \Delta y = y - y_0, \quad 0 < \theta_2 < 1. \quad (1)$$

Положим теперь

$$\psi(\tau) = f(x, \tau) - f(x_0, \tau), \quad \tau \in (y_0 - \eta, y_0 + \eta).$$

Тогда

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \psi(y) - \psi(y_0) = \frac{d\psi}{d\tau}(y_0 + \theta_3 \Delta y) \Delta y = \\ &= \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0 + \theta_3 \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \theta_3 \Delta y) \right] \Delta y = \\ &= \Delta x \Delta y f_{yx}(x_0 + \theta_4 \Delta x, y_0 + \theta_3 \Delta y), \quad 0 < \theta_3, \quad \theta_4 < 1. \quad (2) \end{aligned}$$

Из (1) и (2) следует, что

$$f_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y) = f_{yx}(x_0 + \theta_4 \Delta x, y_0 + \theta_3 \Delta y).$$

Переходя к пределу при  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$  и пользуясь непрерывностью смешанных производных в точке  $(x_0, y_0)$ , получаем равенство  $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$ . •

**Замечание.** Поскольку для функции  $n$  переменных  $f(x_1, \dots, x_n)$  при вычислении смешанных производных  $\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$  и  $\partial^2 f / \partial x_j \partial x_i$  все переменные, кроме  $x_i$  и  $x_j$ , фиксируются, то фактически рассматривается функция только двух переменных и обе смешанные производные в точке  $x^0$  равны, если они в этой точке непрерывны.

Производные порядка выше первого определяются по индукции. Например, если  $f(x, y, z)$  — функция трех переменных, то

$$\frac{\partial^3(x, y, z)}{\partial y \partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial y \partial z} \right).$$

Если  $f(x)$  — функция  $n$  переменных, то

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_m}} \left( \frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{m-1}}} \right). \quad (3)$$

По индукции легко доказать, что если производная (3) и все производные порядка  $m$ , которые получаются при помощи всевозмож-

ных перестановок индексов  $i_1, i_2, \dots, i_m$ , определены в окрестности точки  $x^0$  и непрерывны в точке  $x^0$ , то все эти производные равны в точке  $x^0$ . Если вспомнить, что транспозицией называется такая перестановка, которая переставляет два соседних элемента, а все остальные оставляет на своих местах, то легко понять, что две производные  $m$ -го порядка, полученные при помощи транспозиции индексов, будут равны по теореме 1 о смешанной производной. В курсе алгебры доказывается, что все перестановки можно упорядочить таким образом, что каждая последующая перестановка получается из предыдущей при помощи транспозиции. Упорядочивая таким же образом и все производные  $m$ -го порядка, получающиеся перестановкой индексов, заключаем, что все они равны.

**3. Дифференциалы высших порядков.** Пусть функция  $u(x)$  имеет в области  $G \subset R^n$  непрерывные частные производные первого и второго порядков. Тогда дифференциал

$$du(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx_i, \quad x \in G,$$

есть функция  $2n$  переменных, а именно  $x_1, \dots, x_n$  и  $dx_1, \dots, dx_n$ .

Если фиксировать переменные  $dx_1, \dots, dx_n$ , то дифференциал  $du(x)$  будет функцией  $x$ , имеющей в области  $G$  непрерывные частные производные. В силу теоремы 3 из § 26  $du(x)$  как функция  $x$  имеет в каждой точке  $x \in G$  дифференциал  $d(du)$ . Если приращения независимых переменных обозначить через  $\delta x_1, \dots, \delta x_n$ , то

$$d(du(x)) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k}(du(x)) \delta x_k = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k \partial x_i} dx_i \delta x_k. \quad (4)$$

Выражение  $d(du(x))$  есть билинейная форма относительно приращений  $dx_1, \delta x_1, \dots, dx_n, \delta x_n$ . Полагая в этой билинейной форме  $dx_1 = \delta x_1, \dots, dx_n = \delta x_n$ , получаем квадратичную форму, которая называется *вторым дифференциалом функции  $u(x)$*  в точке  $x$  и обозначается через  $d^2u(x)$ . Таким образом,

$$d^2u(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_k} dx_i dx_k. \quad (5)$$

Аналогично, предполагая, что все частные производные третьего порядка непрерывны, можно вычислить первый дифференциал от  $d^2u(x)$ , после чего положить  $\delta x_i = dx_i$  и полученную однородную форму третьего порядка назвать *третьим дифференциалом функции  $u(x)$* . Третий дифференциал обозначается через  $d^3u(x)$ . Таким образом,

$$d^3u(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^3 u(x)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} dx_i dx_j dx_k.$$



По индукции определяется дифференциал  $m$ -го порядка в предположении, что все частные производные  $m$ -го порядка непрерывны в точке  $x$ . Если дифференциал  $d^{m-1}u(x)$  вычислен как однородная форма порядка  $m - 1$  относительно  $dx_1, \dots, dx_n$  с коэффициентами, являющимися функциями  $x$ , то, вычисляя первый дифференциал от  $d^{m-1}u(x)$  и полагая затем  $\delta x_i = dx_i$  при  $i = \overline{1, n}$ , получим, что  $d^m u(x)$  есть однородная форма порядка  $m$ , т. е.

$$d^m u(x) = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n \frac{\partial^m u(x)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} dx_{i_1} \dots dx_{i_m}.$$

Покажем, что дифференциал второго порядка уже не обладает свойством инвариантности относительно замены переменных. Пусть  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ ,  $x_i = \varphi_i(u)$ ,  $u \in R^m$ , функции  $f(x)$  и  $\varphi_i(u)$  имеют все непрерывные частные производные до второго порядка включительно и сложная функция  $f(\varphi_1(u), \dots, \varphi_n(u))$  определена в некоторой окрестности точки  $u$ . Тогда в силу инвариантности формы первого дифференциала получаем равенство

$$d f(x(u)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i(u).$$

Пользуясь правилом нахождения дифференциала произведения и суммы, получаем

$$\begin{aligned} d^2 f(x(u)) &= \sum_{i=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x(u)) dx_i(u)\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(x(u))}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x(u))}{\partial x_i} d^2 x_i. \quad (6) \end{aligned}$$

Формула (6) отличается от формулы (5) наличием суммы

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} d^2 x_i,$$

которая обращается в нуль, если  $x_1, \dots, x_n$  — независимые переменные.

*З а м е ч а н и е.* Если замена переменных линейная, то  $d^2 x_i = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Таким образом, второй дифференциал  $d^2 f(x)$  инвариантен относительно линейной замены переменных. То же самое справедливо и для дифференциалов всех порядков.

Если функция  $u(x, y)$  имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, то, воспользовавшись теоремой о равенстве смешанных производных, получаем

$$\begin{aligned} d^2 u(x, y) &= \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y \partial x} dy dx + \\ &+ \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} dy^2 = u_{xx} dx^2 + 2u_{xy} dx dy + u_{yy} dy^2. \quad (7) \end{aligned}$$

Замечание. Если ввести формально дифференциальный оператор

$$d = \sum_{i=1}^n dx_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (8)$$

то выражения для дифференциалов можно записать в удобной символической форме:

$$d^2 u(x) = (d^2)u(x) = \left( \sum_{i=1}^n dx_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 u(x),$$

$$d^m u(x) = (d^m)u(x) = \left( \sum_{i=1}^n dx_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^m u(x).$$

Под произведением дифференциальных операторов понимается их последовательное применение. Например, если  $D_i = \partial/\partial x_i$ , то

$$(D_i D_j)u = D_i(D_j u) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}, \quad D_i D_j = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}. \quad (9)$$

При перемножении дифференциальных операторов вида (8) нужно пользоваться правилом (9). При этом дифференциалы независимых переменных  $dx_1, \dots, dx_n$  перемножаются как вещественные числа.

## § 28. Неявные функции

### 1. Неявные функции, определяемые одним уравнением.

Пусть функция  $F(x, y)$  определена в  $R^2$ . Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 0. \quad (1)$$

Множество  $G_F$  точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению (1), было в § 9 названо графиком уравнения. Через  $A_F$  будем обозначать проекцию графика  $G_F$  на ось  $x$ . Будем рассматривать такие уравнения (1), графики которых не есть пустые множества.

Так, график уравнения  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  есть окружность (рис. 9.12), график уравнения  $(x-1)(x+y-1) = 0$  есть пара прямых  $x=1$  и  $x+y-1=0$  (рис. 28.1).

Если график  $G_F$  уравнения (1) взаимно однозначно проектируется на  $A_F$ , то существует единственная функция  $f: A_F \rightarrow R$ , график которой совпадает с графиком уравнения. Эта функция каждому  $x \in A_F$  ставит в соответствие тот единственный  $y$ , для которого  $F(x, y) = 0$ . Говорят, что уравнение (1) определяет  $y$  как неявную функцию  $x$ .

Но, как правило, график уравнения (1) не проектируется взаимно однозначно на  $A_F$ . Тогда на  $A_F$  в общем случае определено бесконечное множество функций, графики которых совпадают с некоторым

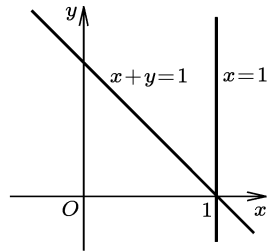


Рис. 28.1

подмножеством графика  $G_F$  уравнения (1). Так, разбивая отрезок  $[-1, 1]$  точками  $x_0 = -1 < x_1 < \dots < x_n = 1$  и полагая на каждом из отрезков  $[x_{i-1}, x_i]$  функцию  $f(x)$  равной  $\sqrt{1-x^2}$  или  $-\sqrt{1-x^2}$ , получим, что график  $f$  есть некоторое подмножество графика уравнения  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ , так что  $x^2 + (f(x))^2 - 1 = 0$ .

Пусть график уравнения  $G_F$  не проектируется взаимно однозначно на  $A_F$ , но существует такой прямоугольник

$$K = \{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\},$$

что та часть графика  $G_F$ , которая лежит внутри  $K$ , взаимно однозначно проектируется на отрезок  $[a, b]$ . Тогда определена функция  $f: [a, b] \rightarrow R$ , которая каждому  $x \in [a, b]$  ставит в соответствие единственный  $y \in [c, d]$  такой, что  $(x, y) \in G_F$ . Очевидно, что  $F(x, f(x)) \equiv 0$ . Говорят, что функция  $f(x)$  неявно определяется уравнением (1) в прямоугольнике  $K$  или что уравнение (1) определяет в прямоугольнике  $K$  переменную  $y$  как *неявную функцию* переменной  $x$ .

Например, уравнение  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  неявно определяет функцию  $y = \sqrt{1-x^2}$  в прямоугольнике  $-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$  и функцию  $y = -\sqrt{1-x^2}$  в прямоугольнике  $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 0$ .

Меняя места переменные  $x$  и  $y$ , можно говорить о том, что уравнение (1) определяет в некотором прямоугольнике переменную  $x$  как неявную функцию переменной  $y$ .

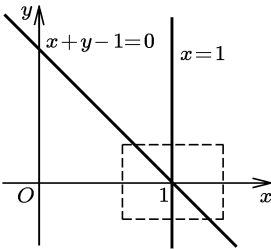


Рис. 28.2

**Упражнение 1.** Показать, что ни в одном прямоугольнике с центром и точке  $(1, 0)$  уравнение  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  не определяет  $y$  как неявную функцию  $x$ . Найти прямоугольник с центром в точке  $(1, 0)$ , в котором уравнение  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  определяет  $x$  как неявную функцию  $y$ .

**Упражнение 2.** Показать, что не существует прямоугольника с центром в точке  $(1, 0)$ , в котором уравнение  $(x-1)(x+y-1) = 0$  определяет  $y$  как неявную функцию  $x$  или  $x$  как неявную функцию  $y$  (рис. 28.2).

Докажем теорему, дающую достаточные условия существования, непрерывности и дифференцируемости неявной функции, определяемой уравнением (1) в некотором прямоугольнике.

**Теорема 1.** Пусть:

а) функция  $F(x, y)$  имеет в окрестности точки  $(x_0, y_0)$  непрерывные частные производные  $F_x(x, y)$  и  $F_y(x, y)$ ;

б)  $F(x_0, y_0) = 0$ ;

в)  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ .

Тогда существует прямоугольник

$$K = \{(x, y): x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\},$$

в котором уравнение  $F(x, y) = 0$  определяет  $y$  как неявную функцию  $x$ . Функция  $y = f(x)$  непрерывно дифференцируема на интервале  $(x_0 - a, x_0 + a)$  и

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}. \quad (2)$$

○ Разобьем доказательство на два пункта.

1) *Доказательство существования неявной функции.* Из условия в) следует, что либо  $F_y(x_0, y_0) > 0$ , либо  $F_y(x_0, y_0) < 0$ . Без ограничения общности можно считать, что

$$F_y(x_0, y_0) > 0. \quad (3)$$

Если  $F_y(x_0, y_0) < 0$ , то вместо уравнения  $F(x, y) = 0$  можно было бы рассмотреть эквивалентное уравнение  $\tilde{F}(x, y) = -F(x, y) = 0$ . Тогда  $\tilde{F}_y(x_0, y_0) = -F_y(x_0, y_0) > 0$ .

Так как функция  $F_y(x, y)$  в точке  $(x_0, y_0)$  непрерывна и в силу

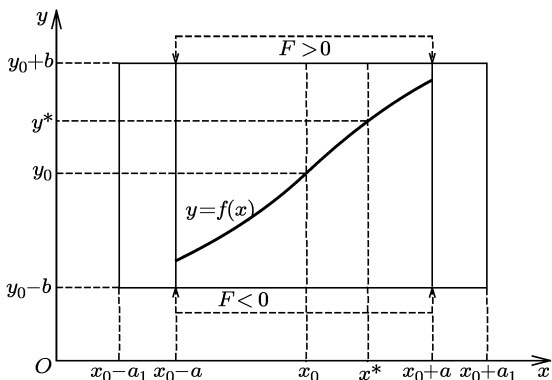


Рис. 28.3

условия (3) принимает в этой точке положительное значение, то найдется такой прямоугольник (рис. 28.3)

$$K_1 = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a_1, |y - y_0| \leq b\},$$

в котором функция  $F_y(x, y) > 0$ .

Рассмотрим функцию одной переменной

$$\psi(y) = F(x_0, y), \quad y_0 - b \leq y \leq y_0 + b.$$

Функция  $\psi(y)$  строго возрастает на отрезке  $[y_0 - b, y_0 + b]$ , так как

$$\psi'(y) = F_y(x_0, y) > 0.$$

Кроме того, в силу условия б)

$$\psi(y_0) = F(x_0, y_0) = 0.$$

Поэтому

$$\psi(y_0 - b) = F(x_0, y_0 - b) < 0, \quad \psi(y_0 + b) = F(x_0, y_0 + b) > 0. \quad (4)$$

Неравенства (4) в силу непрерывности функции  $F(x, y)$  должны сохраняться в некоторых окрестностях точек  $(x_0, y_0 - b)$  и  $(x_0, y_0 + b)$ . Поэтому существует такое  $a \in (0, a_1)$ , что для всех  $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$  выполнены неравенства

$$F(x, y_0 - b) < 0, \quad F(x, y_0 + b) > 0. \quad (5)$$

Покажем, что в прямоугольнике

$$K = \{(x, y): |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

уравнение  $F(x, y) = 0$  определяет  $y$  как неявную функцию  $x$ .

Возьмем любую точку  $x^* \in [x_0 - a, x_0 + a]$  и рассмотрим непрерывную на отрезке  $[y_0 - b, y_0 + b]$  функцию одной переменной  $\varphi(y) = F(x^*, y)$ . В силу условия (5) эта функция принимает на концах отрезка значения разных знаков:

$$\varphi(y_0 - b) = F(x^*, y_0 - b) < 0, \quad \varphi(y_0 + b) = F(x^*, y_0 + b) > 0.$$

По теореме Коши о промежуточных значениях найдется такая точка  $y^* \in [y_0 - b, y_0 + b]$ , что

$$\varphi(y^*) = F(x^*, y^*) = 0.$$

Так как  $\varphi'(y) = F_y(x^*, y) > 0$ , то функция  $\varphi(y)$  строго возрастает на отрезке  $[y_0 - b, y_0 + b]$  и не может обратиться на этом отрезке в нуль более одного раза.

Таким образом, для любого  $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$  найдется единственный  $y \in [y_0 - b, y_0 + b]$  такой, что  $F(x, y) = 0$ . Это означает, что в прямоугольнике  $K$  уравнение  $F(x, y) = 0$  определяет  $y$  как неявную функцию  $x$ .

2) *Доказательство непрерывной дифференцируемости неявной функции.* Непрерывная на замкнутом прямоугольнике  $K$  функция  $F_y(x, y)$  по теореме Вейерштрасса принимает на этом прямоугольнике свое наименьшее значение  $\alpha$ . Так как  $F_y(x, y) > 0$  на  $K$ , то

$$F_y(x, y) \geq \alpha > 0, \quad (x, y) \in K. \quad (6)$$

Непрерывная на  $K$  функция  $F_x(x, y)$  ограничена на  $K$ . Поэтому

$$|F_x(x, y)| < \beta, \quad (x, y) \in K. \quad (7)$$

Пусть  $y = f(x)$  есть неявная функция, определяемая в прямоугольнике  $K$  уравнением  $F(x, y) = 0$ . Возьмем две точки  $(x, y)$  и  $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ , лежащие на графике функции  $f(x)$ . Тогда

$$F(x, y) = 0, \quad F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0.$$

Применяя формулу конечных приращений Лагранжа, получаем

$$F_x(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y)\Delta x + F_y(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y)\Delta y = 0,$$

$$\Delta y = -\frac{F_x(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y)}{F_y(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y)} \Delta x, \quad 0 < \theta < 1. \quad (8)$$

Если воспользоваться неравенствами (6) и (7), то из (8) получаем

$$|\Delta y| \leq \frac{\beta}{\alpha} |\Delta x|. \quad (9)$$

Следовательно,  $\Delta y \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  и неявная функция  $f(x)$  непрерывна в любой точке  $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$ .

Если теперь воспользоваться непрерывностью частных производных, то, деля второе из равенств (8) на  $\Delta x$  и переходя к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$ , получаем, что существует предел отношения  $\Delta y/\Delta x$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  и  $f'(x)$  вычисляется при помощи формулы (2). Из этой формулы следует, что  $f'(x)$  будет непрерывной функцией на отрезке  $[x_0 - a, x_0 + a]$  как суперпозиция непрерывных функций. ●

**Замечание.** Если известно, что уравнение  $F(x, y) = 0$  определяет в прямоугольнике  $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$  переменную  $y$  как неявную функцию  $x$ , то связь между  $dy$  и  $dx$  можно установить, формально дифференцируя тождество  $F(x, y(x)) \equiv 0$ . Воспользовавшись инвариантностью формы дифференциала, получаем

$$F_x(x, y) dx + F_y(x, y) dy = 0.$$

Дифференцируя последнее тождество еще раз, можем найти второй дифференциал  $d^2y$ :

$$F_{xx} dx^2 + 2F_{xy} dx dy + F_{yy} dy^2 + F_y d^2y = 0.$$

**Упражнение 3.** Построить прямоугольную окрестность точки  $(1, 1)$ , в которой уравнение  $x^4 + xy + y^3 - 3 = 0$  определяет  $y$  как неявную функцию  $x$ . Найти  $dy$  и  $d^2y$  в точке  $x = 1$ .

## 2. Неявные функции, определяемые системой уравнений.

Рассмотрим систему  $m$  уравнений с  $n + m$  неизвестными

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

При формулировке общей теоремы о неявных функциях удобно пользоваться понятием декартова произведения множеств. Если  $A$  и  $B$  — произвольные множества, то их *декартово произведение*  $A \times B$  есть множество пар  $(x, y)$ , где  $x \in A, y \in B$ . Так, декартово произведение  $[a, b] \times [c, d]$  есть множество пар вещественных чисел таких, что  $a \leq x \leq b$  и  $c \leq y \leq d$ , т. е. прямоугольник в  $R^2$ .

*Клочной окрестностью точки*  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  будем называть следующее множество:

$$K(x^0) = \{x: x \in R^n, -\varepsilon_i \leq x_i - x_i^0 \leq \varepsilon_i, i = \overline{1, n}\},$$

где  $\varepsilon_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , — положительные числа,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

Легко видеть, что в том случае, когда  $K_1(x^0) \subset R^n$  и  $K_2(y^0) \subset R^m$  — клеточные окрестности, их декартово произведение  $K_1(x^0) \times K_2(y^0)$  есть клеточная окрестность точки  $(x^0, y^0) = (x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_m^0)$  в пространстве  $R^{n+m}$ .

Для дальнейшего удобно преобразовать переменные, полагая  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_m)$ , где  $y_1 = x_{n+1}, \dots, y_m = x_{n+m}$ .

Тогда систему уравнений (10) можно записать в более кратком виде:

$$F_i(x, y) = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (11)$$

Функции  $F_i(x, y) = 0$  будем считать определенными в некоторой клеточной окрестности точки  $(x^0, y^0)$ .

**Определение.** Пусть  $K(x^0) \subset R^n$  и  $Q(y^0) \subset R^m$  есть клеточные окрестности. Будем говорить, что система уравнений  $F_i(x, y) = 0$ ,  $i = \overline{1, m}$ , определяет в  $K(x^0) \times Q(y^0)$  переменные  $y_1, \dots, y_m$  как неявные функции переменных  $x_1, \dots, x_n$ , если для любого  $x \in K(x^0)$  найдется единственный  $y \in Q(y^0)$  такой, что  $F_i(x, y) = 0$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

**Теорема 2.** Пусть выполнены следующие условия:

а) функции  $F_i(x, y) = 0$ ,  $i = \overline{1, m}$ , непрерывно дифференцируемы в клеточной окрестности точки  $(x^0, y^0)$ ;

б)  $F_i(x^0, y^0) = 0$ ,  $i = \overline{1, m}$ ;

$$\text{в) } \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}_{(x^0, y^0)} \neq 0. \quad (12)$$

Тогда найдутся клеточные окрестности  $K(x^0) \subset R^n$  и  $Q(y^0) \subset R^m$  такие, что в  $K(x^0) \times Q(y^0)$  система уравнений (11) определяет переменные  $y_1, \dots, y_m$  как неявные функции переменных  $x_1, \dots, x_n$ . Неявные функции  $y_j = \varphi_j(x)$  непрерывно дифференцируемы в  $K(x^0)$  и  $y_j^0 = \varphi_j(x^0)$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

○ Воспользуемся методом индукции по числу уравнений  $m$ . При  $m = 1$  доказательство теоремы 2 не отличается от доказательства теоремы 1 (в дальнейшем будем ссылаться на этот частный случай теоремы 2 как на теорему 1).

Предположим, что утверждение теоремы верно в том случае, когда система (11) содержит  $m - 1$  уравнение. Докажем, что тогда теорема верна и для системы (11) из  $m$  уравнений.

Так как определитель (12) отличен от нуля, то, раскладывая его по элементам последней строки, получаем, что хотя бы один из соответствующих миноров  $m - 1$ -го порядка отличен от нуля. Пусть,

например,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_{m-1}} \end{vmatrix} \neq 0.$$

(Здесь и в дальнейшем символ 0 означает, что значение соответствующей функции берется для аргументов с верхним индексом 0.)

Тогда в силу предположения индукции найдутся такие клеточные окрестности

$$K_1 = \{(x, y_m) : |x_i - x_i^0| \leq \varepsilon'_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad |y_m - y_m^0| < \delta'_m\}, \quad (13)$$

$$Q_1 = \{(y_1, \dots, y_{m-1}) : |y_j - y_j^0| \leq \delta'_j, \quad j = \overline{1, m-1}\},$$

в которых система первых  $m - 1$  уравнений (11) определяет  $y_1, \dots, y_{m-1}$  как неявные функции переменных  $x_1, \dots, x_n, y_m$ , т. е.

$$y_j = \psi_j(x, y_m), \quad j = \overline{1, m-1}. \quad (14)$$

Функции  $\psi_j(x, y_m)$  непрерывно дифференцируемы и

$$\psi_j(x^0, y_m^0) = y_j^0, \quad j = \overline{1, m-1}; \quad (x, y_m) \in K_1, \quad (15)$$

$$F_j(x, \psi_1(x, y_m), \dots, \psi_{m-1}(x, y_m), y_m) \equiv 0. \quad (16)$$

Если

$$K_2 = \{(x_1, \dots, x_n) : |x_i - x_i^0| < \varepsilon'_i, \quad i = \overline{1, n}\},$$

$$Q_2 = \{(y_1, \dots, y_m) : |y_j - y_j^0| < \delta'_j, \quad i = \overline{1, m}\},$$

то при  $x \in K_2, y \in Q_2$  система уравнений (11) эквивалентна следующей системе:

$$\begin{aligned} y_1 - \psi_1(x, y_m) &= 0, \quad \dots, \quad y_{m-1} - \psi_{m-1}(x, y_m) = 0, \\ \tilde{F}_m(x, y_m) &= F_m(x, \psi_1(x, y_m), \dots, \psi_{m-1}(x, y_m), y_m) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Покажем, что последнее уравнение системы (17)  $\tilde{F}_m(x, y_m) = 0$  может быть разрешено относительно  $y_m$ . Для него выполнены все условия теоремы 1. Из формулы (17) следует, что  $\tilde{F}_m(x, y_m)$  непрерывно дифференцируема как суперпозиция непрерывно дифференцируемых функций. Вследствие равенств (15) получаем, что

$$\begin{aligned} \tilde{F}_m(x^0, y_m^0) &= \\ &= F_m(x^0, \psi_1(x^0, y_m^0), \dots, \psi_{m-1}(x^0, y_m^0), y_m^0) = F_m(x^0, y_1^0, \dots, y_m^0) = 0. \end{aligned}$$

Осталось проверить условие  $\frac{\partial \tilde{F}_m}{\partial y_m} \Big|_0 \neq 0$ .

Если оно не выполнено, то

$$\frac{\partial \tilde{F}_m}{\partial y_m} \Big|_0 = \sum_{p=1}^{m-1} \frac{\partial F_m}{\partial y_p} \Big|_0 \frac{\partial \psi_p}{\partial y_m} \Big|_0 + \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \Big|_0 = 0. \quad (18)$$



С другой стороны, дифференцируя по  $y_m$  тождества (16) в точке  $(x^0, y^0)$ , получаем

$$\sum_{p=1}^{m-1} \frac{\partial F_j}{\partial y_p} \Big|_0 \frac{\partial \psi_p}{\partial y_m} \Big|_0 + \frac{\partial F_j}{\partial y_m} \Big|_0 = 0, \quad j = \overline{1, m-1}. \quad (19)$$

Из (18) и (19) следует, что последний столбец определителя (12) есть линейная комбинация остальных его столбцов, поэтому определитель (12) равен нулю, что противоречит условию теоремы. Так как выполнены все условия теоремы 1, то найдется окрестность

$$K = \{(x, y_m): |x_i - x_i^0| < \varepsilon_i < \varepsilon'_i, \quad i = \overline{1, n}; |y_m - y_m^0| < \delta_m < \delta'_m\},$$

в которой уравнение  $\tilde{F}_m(x, y_m) = 0$  определяет  $y_m$  как неявную непрерывно дифференцируемую функцию  $y_m = \varphi_m(x)$ , причем  $y_m^0 = \varphi_m(x^0)$ .

В окрестности  $K$  система уравнений (17) эквивалентна и системе (11), и системе

$$\begin{aligned} y_1 - \psi_1(x, y_m) = 0, \quad \dots, \quad y_{m-1} - \psi_{m-1}(x, y_m) = 0, \\ y_m - \varphi_m(x) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

В свою очередь система (20) эквивалентна следующей системе:

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad \dots, \quad y_m = \varphi_m(x), \quad (21)$$

где  $\varphi_1(x) = \psi_1(x, \varphi_m(x))$ ,  $\dots$ ,  $\varphi_{m-1}(x) = \psi_{m-1}(x, \varphi_m(x))$ , причем

$$\varphi_1(x^0) = y_1^0, \quad \dots, \quad \varphi_m(x^0) = y_m^0. \quad (22)$$

Система функций  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$  неявно определяется уравнениями (11) в окрестности  $K \times Q$  точки  $(x^0, y^0)$ , где

$$K = \{x: |x_i - x_i^0| < \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}\}, \quad (23)$$

$$Q = \{y: |y_j - y_j^0| < \delta_j, \quad j = \overline{1, m}\}, \quad \delta_j = \delta'_j \quad \text{при} \quad j = \overline{1, m-1}. \quad \bullet$$

**З а м е ч а н и е.** Существует несколько способов доказательства теоремы о неявных функциях. Предложенный способ является, по-видимому, наиболее простым, но обладает двумя недостатками: не дает алгоритма для вычисления неявной функции и не обобщается на бесконечномерный случай.

### 3. Локальная обратимость регулярного отображения.

Пусть на множестве  $E \subset R^n$  заданы  $n$  функций

$$f_1(x), \quad \dots, \quad f_n(x).$$

Они задают отображение  $f: E \rightarrow R^n$ , которое каждой точке  $x \in E$  ставит в соответствие точку  $y = f(x)$ , где

$$y_1 = f_1(x), \quad \dots, \quad y_n = f_n(x).$$

Точка  $y = f(x)$  называется *образом точки  $x$*  при отображении  $f$ . Точка  $x$  называется *прообразом точки  $y$* .

Если  $\Omega \subset E$ , то множество

$$f(\Omega) = \{y: y = f(x), x \in \Omega\}$$

называется *образом множества  $\Omega$*  при отображении  $f$ . Если  $\omega \subset f(E)$ , то множество

$$f^{-1}(\omega) = \{x: f(x) \in \omega\}$$

называется *прообразом множества  $\omega$* .

Пусть  $G \subset R^n$  есть открытое множество. Отображение  $f: G \rightarrow R^n$  называется *непрерывным в точке  $x^0$* , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  такое, что  $\forall x$  таких, что  $\rho(x, x^0) < \delta$ , выполнено неравенство  $\rho(f(x), f(x^0)) < \varepsilon$ .

На языке окрестностей непрерывность отображения в точке  $x^0$  означает, что для любой шаровой окрестности  $S_\varepsilon(y^0)$ ,  $y^0 = f(x^0)$ , найдется такая шаровая окрестность  $S_\delta(x^0)$ , что

$$f(S_\delta(x^0)) \subset S_\varepsilon(y^0). \quad (24)$$

**Упражнение 4.** Показать, что отображение  $f: G \rightarrow R^n$  непрерывно в точке  $x^0$  в том и только том случае, когда непрерывны в точке  $x^0$  функции  $f_1(x), \dots, f_n(x)$ , задающие отображение.

**Указание.** Воспользоваться соотношениями

$$\rho^2(f(x), f(x^0)) = \sum_{i=1}^n (f_i(x) - f_i(x^0))^2 \geq |f_i(x) - f_i(x^0)|^2, \quad i = \overline{1, n}.$$

Отображение  $f: G \rightarrow R^n$  называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке множества  $G$ .

**Лемма 1.** *Если  $G$  есть открытое множество, а  $f: G \rightarrow R^n$  — непрерывное отображение, то прообраз каждого открытого множества  $\omega \in f(G)$  есть открытое множество.*

○ Пусть  $\Omega = f^{-1}(\omega)$ . Возьмем любую точку  $x^0 \in \Omega$ . Тогда  $f(x^0) = y^0 \in \omega$ . Так как множество  $\omega$  открыто, то найдется окрестность  $S_\varepsilon(y^0) \in \omega$ . В силу непрерывности отображения  $f$  в точке  $x^0$  найдется шаровая окрестность  $S_\delta(x^0)$ , для которой выполнено условие (24). Следовательно,

$$S_\delta(x^0) \subset f^{-1}(\omega) \subset \Omega,$$

и  $\Omega$  — открытое множество. ●

Как обычно, под окрестностью  $A(x^0)$  точки  $x^0$  будем понимать любое множество  $A$ , для которого точка  $x^0$  внутренняя.

Пусть  $G \subset R^n$  — открытое множество. Отображение  $f: G \rightarrow R^n$  будем называть *непрерывно дифференцируемым*, если функции  $f_1(x), \dots, f_n(x)$ , задающие это отображение, непрерывно дифференцируемы в  $G$ . Непрерывно дифференцируемое отображение  $f: G \rightarrow R^n$  будем называть *регулярным*, если в области  $G$  якобиан отображения

$j_f(x) \neq 0$ . Якобианом отображения  $j_f(x)$  называется следующий функциональный определитель:

$$j_f(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

**Теорема 3.** Пусть  $G$  — открытое множество в  $R^n$ , а отображение  $f: G \rightarrow R^n$  регулярно. Тогда в каждой точке  $x^0 \in G$  оно локально регулярно обратимо, т. е.  $\forall x^0 \in G$  найдутся такие окрестности  $A(x^0) \subset G$  и  $B(y^0) \subset f(G)$ , где  $y^0 = f(x^0)$ , что отображение  $f: A(x^0) \rightarrow B(y^0)$  будет взаимно однозначным, причем обратное отображение  $f^{-1}: B(y^0) \rightarrow A(x^0)$  регулярно.

○ Рассмотрим в  $G \times R^n$  систему уравнений

$$F_i(x, y) \equiv y_i - f_i(x) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (25)$$

Пусть  $x^0$  — произвольная точка множества  $G$  и  $y^0 = f(x^0)$ . Тогда функции  $F_i(x, y)$  непрерывно дифференцируемы в  $G \times R^n$  и  $y_i^0 = f_i(x^0)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Так как отображение  $f$  регулярно, то

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}_{(x^0, y^0)} = (-1)^n j_f(x^0) \neq 0.$$

Для системы уравнений (25) выполнены все условия теоремы 2 о неявных функциях. Поэтому найдутся такие клеточные окрестности

$$K(x^0) = \{x: |x_i - x_i^0| \leq \varepsilon_i, i = \overline{1, n}\}, \quad K(x^0) \subset G,$$

$$Q(y^0) = \{y: |y_i - y_i^0| \leq \delta_i, i = \overline{1, n}\}, \quad Q(y^0) \subset f(G),$$

что в  $K(x^0) \times Q(y^0)$  система уравнений (25) определяет переменные  $x_1, \dots, x_n$  как неявные непрерывно дифференцируемые функции переменных  $y_1, \dots, y_n$ :

$$x_1 = \varphi_1(y), \quad \dots, \quad x_n = \varphi_n(y),$$

$$x \in K(x^0), \quad y \in Q(y^0), \quad x_i^0 = \varphi_i(y^0), \quad i = \overline{1, n}. \quad (26)$$

Пусть  $B(y^0)$  есть внутренность  $Q(y^0)$ :

$$B(y^0) = \{y: |y_i - y_i^0| < \delta_i, i = \overline{1, n}\}.$$

Вследствие леммы 1 прообраз открытого множества  $B(y^0)$  при непрерывном отображении  $f$  есть открытое множество, причем в силу условий (26) это множество содержит точку  $x^0$ . Обозначим прообраз  $f^{-1}(B)$  через  $A(x^0)$ . Отображение окрестности  $A(x^0)$  на окрестность  $B(y^0)$  будет взаимно однозначным, и обратное отображение

$f^{-1}: B(y^0) \rightarrow A(x^0)$ , определяемое формулами (26), будет непрерывно дифференцируемым.

Докажем регулярность обратного отображения  $f^{-1}$ . Так как

$$y_i - f_i(\varphi_1(y), \dots, \varphi_n(y)) \equiv 0, \quad i = \overline{1, n},$$

то, дифференцируя эти тождества по переменным  $y_j$ , получаем

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_j} = \frac{\partial y_i}{\partial y_j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (27)$$

Из равенств (27) и из теоремы об умножении определителей следует, что

$$j_f(x)j_{f^{-1}}(y) = 1, \quad y = f(x), \quad x \in A(x^0). \quad \bullet \quad (28)$$

*Следствие.* Если  $f: G \rightarrow R^n$  есть регулярное отображение, то образ любого открытого множества  $\Omega \subset G$  есть открытое множество.

○ Пусть  $\omega = f(\Omega)$ . Возьмем произвольную точку  $y^0 \in \omega$  и пусть  $x^0$  есть какой-то ее прообраз. Тогда, вследствие теоремы 3, найдутся такие окрестности  $A(x^0) \subset \Omega$  и  $B(y^0) \subset \omega$ , что отображение  $f: A(x^0) \rightarrow B(y^0)$  регулярно обратимо. Поэтому каждая точка  $y^0 \in \omega$  принадлежит  $\omega$  вместе с некоторой окрестностью  $B(y^0)$ . Множество  $\omega = f(\Omega)$  открыто. ●

## § 29. Замена переменных

Выражения, содержащие различные функции и их производные, постоянно встречаются в математике и ее приложениях. Целесообразность перехода к новым независимым переменным, а иногда и к новым функциям, основана как на особой роли новых переменных в изучаемом вопросе, так и на упрощениях, к которым приводит выбранная замена переменных.

Техника замены переменных основана на правилах дифференцирования сложных функций и функций, заданных неявно при помощи уравнений. Такая техника будет продемонстрирована на нескольких достаточно содержательных примерах. Обоснование всех условий, при выполнении которых замена переменных будет законной, в большинстве примеров не представляет труда и поэтому не обсуждается.

**Пример 1.** В уравнении  $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = 0$  сделать замену независимой переменной  $x = e^t$ .

△ Если  $z(t) = y(e^t)$ , то, применяя правило нахождения производной сложной функции, получаем

$$\frac{dz(t)}{dt} = e^t \frac{dy(e^t)}{dx} = x \frac{dy(x)}{dx}, \quad \text{откуда} \quad \frac{d}{dt} = x \frac{d}{dx}.$$

Таким образом,

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = x \frac{d}{dx} \left( x \frac{dy}{dx} \right) + y = \frac{d^2 z}{dt^2} + z = 0.$$

Заметим, что уравнение  $\frac{d^2 z}{dt^2} + z = 0$  легко решается (см. § 36), а именно  $z = C_1 \sin t + C_2 \cos t$ . Поэтому при  $x > 0$  решение исходного уравнения имеет следующий вид:  $y = C_1 \sin(\ln x) + C_2 \cos(\ln x)$ . Так как уравнение не изменяет своего вида при замене  $x$  на  $-x$ , то при любом  $x \in \mathbf{R}$ ,  $x \neq 0$ , решение имеет следующий вид:  $y(x) = C_1 \sin(\ln |x|) + C_2 \cos(\ln |x|)$ . ▲

**Пример 2.** В системе уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y - 2kx(x^2 + y^2), \quad \frac{dy}{dt} = -x - 2ky(x^2 + y^2), \quad k > 0,$$

перейти к полярным координатам.

Δ Умножим первое уравнение на  $x$ , второе на  $y$  и сложим. Аналогично умножим первое уравнение на  $y$  и вычтем из него второе уравнение, умноженное на  $x$ . Получим новую систему уравнений, при  $x^2 + y^2 > 0$  эквивалентную исходной системе уравнений,

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = -2k(x^2 + y^2)^2, \quad y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} = y^2 + x^2. \quad (1)$$

Но  $x^2 + y^2 = r^2$ ,  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . Поэтому систему (1) можно записать в виде (см. § 26, пример 3)

$$r \frac{dr}{dt} = -2kr^4, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1, \quad \text{или} \quad \frac{dr}{dt} = -2kr^3, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1. \quad (2)$$

Заметим, что система уравнений (2) легко решается (см. § 36). Получаем решение в виде

$$r = \frac{1}{\sqrt{k(t + t_0)}}, \quad \varphi = \varphi_0 + t \quad (-t_0 < t < +\infty),$$

где числа  $t_0$  и  $\varphi_0$  являются произвольными постоянными. ▲

**Пример 3.** Преобразовать уравнение  $y'y''' - 3(y'')^2 = x$ , принимая  $y$  за независимую переменную, а  $x$  — за неизвестную функцию.

Δ Так как  $y(x)$  и  $x(y)$  — обратные функции, то  $\frac{dy}{dx} = y'(x) = \frac{1}{x'(y)}$ ,

$$\frac{df(x(y))}{dy} = \frac{df(x)}{dx} x'(y) = \frac{1}{y'(x)} \frac{df(x)}{dx}, \quad \text{откуда} \quad \frac{d}{dy} = \frac{1}{y'(x)} \frac{d}{dx}.$$

Преобразуем уравнение при  $y' \neq 0$ , поделив его на  $(y')^4$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{y'y''' - 3(y'')^2}{(y')^4} - \frac{x}{(y')^4} = \frac{d}{dx} \left( \frac{y''}{(y')^3} \right) - x(x')^4 = \\ &= \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{y'} \frac{d}{dx} \left( -\frac{1}{y'} \right) \right) - x(x')^4 = -y' \left[ \frac{1}{y'} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{y'} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{y'} \right) \right) + x(x')^5 \right] = \\ &= -y' \left[ \frac{d}{dy} \left( \frac{d}{dy} x' \right) + x(x')^5 \right] = -y' [x''' + x(x')^5] = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, при  $y' \neq 0$  уравнение преобразуется к виду  $x''' + x(x')^5 = 0$ . Это частный случай уравнения общего вида  $x''' = \Phi(y, x, x', x'')$  с непрерывно дифференцируемой в  $R^4$  функцией  $\Phi(y, u, v, w)$ . Уравнения такого типа хорошо изучены в теории обыкновенных дифференциальных уравнений [13]. Исходное уравнение не имело стандартного вида. ▲

Пример 4. Преобразовать выражение  $w = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  к полярным координатам, полагая  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . Найти решение уравнения Лапласа  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ , зависящее только от полярного радиуса  $r$ .

$$\Delta \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad r dr = x dx + y dy, \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r},$$

$$d\varphi = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{r^2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{r^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{y}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \sin \varphi \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left( \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) = \\ &= \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \cos \varphi \sin \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \\ &\quad + \frac{2 \cos \varphi \sin \varphi}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \left( \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left( \sin \varphi \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) = \\ &= \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cos \varphi \sin \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \\ &\quad - \frac{2 \cos \varphi \sin \varphi}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \end{aligned}$$

$$w = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Пусть  $u = v(r)$  есть решение уравнения Лапласа, зависящее только от  $r$ . Тогда функция  $v(r)$  должна быть решением дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} &= 0 \quad \text{или} \quad \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = 0, \\ r \frac{dv}{dr} &= C, \quad v = C_1 \ln r + C_2, \end{aligned} \tag{3}$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные. ▲

Пример 5. Сделать в уравнении колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad a > 0, \quad -\infty < x, t < +\infty, \quad (4)$$

замену независимых переменных  $\xi = x - at$ ,  $\eta = x + at$  и найти общее решение этого уравнения.

△ Пусть  $w(\xi, \eta) = w(x - at, x + at) = u(x, t)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} = \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) w, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -a \frac{\partial w}{\partial \xi} + a \frac{\partial w}{\partial \eta} = -a \left( \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) w, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left[ a^2 \left( \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 - a^2 \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 \right] w = -4a^2 \frac{\partial^2 w(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \\ &\frac{\partial^2 w(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \end{aligned}$$

Решение уравнения  $\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = 0$  легко находится. Так как  $\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) = 0$ , то  $\frac{\partial w}{\partial \eta} = \varphi(\eta)$ , где  $\varphi(\eta)$  — произвольная непрерывная функция  $\eta$ .

Пусть  $\Phi(\eta)$  есть ее первообразная на  $R$ . Тогда, интегрируя уравнение  $w_\eta = \varphi(\eta)$ , получаем, что  $w = \Phi(\eta) + \Psi(\xi)$ , где  $\Psi(\xi)$  — произвольная функция.

Если считать, что функции  $\Phi(\eta)$  и  $\Psi(\xi)$  есть непрерывно дифференцируемые функции, то общее решение уравнения (4) имеет следующий вид:

$$u(x, t) = \Psi(x - at) + \Phi(x + at). \quad \blacktriangle$$

Пример 6. Сделать в дифференциальном уравнении

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left( 1 + \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \quad (5)$$

замену переменных  $u = x$ ,  $v = y + z$ .

△ Запишем уравнение (5) в виде

$$\frac{(z_y)_x}{(1 + z_y)^2} = 1 \quad \text{или} \quad - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{1 + z_y} = 1. \quad (6)$$

Пусть

$$z(x(u, v), y(u, v)) = w(u, v),$$

тогда

$$z(x, y) = w(x, y + z(x, y)). \quad (7)$$

Вычисляя частные производные по  $x$  и  $y$  от обеих частей тождества (7), получаем

$$\begin{aligned} z_x &= w_u + w_v z_x, & z_y &= w_v(1 + z_y), \\ z_x &= \frac{w_u}{1 - w_v}, & z_y &= \frac{w_v}{1 - w_v}, & \frac{1}{1 + z_y} &= 1 - w_v. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (6), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} w_v &= 1, & \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} &= 1, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + z_x \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} &= 1, & \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{w_u}{1 - w_v} \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} &= 1. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Пример 7. Определитель  $n$ -го порядка

$$\Gamma = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

есть функция  $n^2$  переменных  $a_{ij}$ . Показать, что

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial a_{ij}} = A_{ij}, \quad (8)$$

где  $A_{ij}$  — алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}$ .

$\Delta$  Разложим определитель по элементам первой строки:

$$\Gamma = a_{11}A_{11} + \dots + a_{1n}A_{1n}.$$

Элемент  $a_{11}$  входит только в первое слагаемое, причем  $A_{11}$  не зависит от  $a_{11}$ , поэтому  $\frac{\partial \Gamma}{\partial a_{11}} = A_{11}$ . Аналогично доказываются остальные равенства (8).  $\blacktriangle$

Замечание. Пусть элементы определителя  $\Gamma$  есть дифференцируемые функции  $a_{ij}(t)$  при  $\alpha < t < \beta$ . Тогда и определитель  $\Gamma$  есть дифференцируемая функция на  $(\alpha, \beta)$ . Воспользовавшись правилом нахождения производной сложной функции и формулой (8), получаем правило для вычисления производной определителя:

$$\frac{d\Gamma(t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Gamma}{\partial a_{ij}} \frac{da_{ij}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \Gamma_i(t),$$

где

$$\Gamma_i(t) = \sum_{j=1}^n A_{ij}(t) \frac{da_{ij}(t)}{dt}.$$

Нетрудно видеть, что  $\Gamma_i(t)$  есть определитель, который получится, если функции, стоящие в  $i$ -й строке определителя  $\Gamma$ , заменить их производными.



## УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ V

1. Пусть в полном метрическом пространстве задана последовательность замкнутых вложенных шаров, радиусы которых стремятся к нулю. Показать, что последовательность центров будет фундаментальной и что предел этой последовательности есть единственная точка, принадлежащая всем шарам.

2. Показать, что у последовательности вложенных непустых компактов в метрическом пространстве есть хотя бы одна общая точка.

3. Пусть  $\Omega$  есть ограниченное множество в  $R^n$ . Показать, что граница множества  $\Omega$  есть компакт в  $R^n$ .

4. Функция  $f(x)$ , определенная и окрестности точки  $x^0$  метрического пространства  $X$ , называется *полу непрерывной сверху (снизу) в точке  $x^0$* , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует шар  $S_\delta(x^0)$  такой, что для всех  $x \in S_\delta(x^0)$  выполнено неравенство  $f(x) - f(x^0) < \varepsilon$  ( $f(x) - f(x^0) > \varepsilon$ ).

Доказать, что:

а) функция  $f(x)$ , полунепрерывная сверху (снизу) на компакте метрического пространства, ограничена сверху (снизу) на этом компакте;

б) функция  $f(x)$ , полунепрерывная сверху (снизу) на компакте в метрическом пространстве, принимает на этом компакте свое наибольшее (наименьшее) значение.

Указание. Доказательство получается при помощи несложного обобщения доказательства теорем Вейерштрасса о том, что функция одной переменной, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке и принимает на нем свое наибольшее и наименьшее значения.

5. Доказать, что при любых  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  выполняется равенство

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{|x|^\alpha |y|^\beta} = 1.$$

6. Показать, что функция  $\sin x^2$  не является равномерно непрерывной на  $(-\infty, +\infty)$ .

7. Показать, что функция  $f(x, y)$ , имеющая в некоторой выпуклой области пространства  $R^2$  ограниченные частные производные  $f_x(x, y)$  и  $f_y(x, y)$ , удовлетворяет в этой области условию Липшица

$$|f(x, y) - f(x', y')| \leq C_1|x - x'| + C_2|y - y'|$$

и поэтому является в этой области равномерно непрерывной.

8. Пусть функция  $f(x, y)$  имеет в  $R^2$  непрерывные частые производные первого и второго порядков. Найти первый и второй дифференциалы функции  $f\left(x^2 + y^2, \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right)$  при  $x^2 + y^2 > 0$ .

9. Найти якобиан отображения

$$x = ar \cos \varphi, \quad y = br \sin \varphi, \quad r > 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Найти прообразы лучей  $\varphi = \text{const}$  и отрезков  $r = \text{const}$ . Выяснить, будет ли отображение взаимно однозначным.

10. Для отображения  $u = x^2 - y^2$ ,  $v = 2xy$ ,  $(x, y) \in R^2$ , найти якобиан, прообразы прямых  $u = u_0$  и  $v = v_0$ ; выяснить, будет ли отображение взаимно однозначным.

11. В уравнении Лапласа  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  сделать замену переменных, принимая  $y$  за неизвестную функцию, а  $x$  и  $u$  — за независимые переменные.

# ГЛАВА VI

## НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

### § 30. Определение и свойства неопределенного интеграла. Основные методы интегрирования

В главе IV (§ 14) была рассмотрена задача о нахождении мгновенной скорости материальной точки по заданному закону ее движения. Если  $s = s(t)$  — путь, пройденный точкой за время  $t$  от начала движения, то мгновенная скорость  $v$  в момент  $t$  равна производной функции  $s(t)$ , т. е.

$$v = s'(t).$$

В физике встречается обратная задача: по заданной скорости  $v = v(t)$  найти закон движения, т. е. найти такую функцию  $s(t)$ , производная которой равна  $v(t)$ .

**1. Первообразная.** Пусть функции  $f(x)$  и  $F(x)$  определены на интервале  $(a, b)$ . Если функция  $F(x)$  имеет производную на интервале  $(a, b)$  и если для всех  $x \in (a, b)$  выполняется равенство

$$F'(x) = f(x), \tag{1}$$

то функция  $F(x)$  называется *первообразной для функции  $f(x)$  на интервале  $(a, b)$* .

Замечание 1. Понятие первообразной можно ввести и для других промежутков (полуинтервала — конечного или бесконечного, отрезка).

Дадим определение первообразной на отрезке. Если функции  $f(x)$  и  $F(x)$  определены на отрезке  $[a, b]$ , причем функция  $F$  дифференцируема на интервале  $(a, b)$ , непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и для всех  $x \in (a, b)$  выполняется равенство (1), то функцию  $F(x)$  назовем *первообразной для функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$* .

Замечание 2. Если  $F(x)$  — первообразная для функции  $f(x)$  на интервале  $(a, b)$ , то функция  $F(x) + C$  при любом значении  $C = \text{const}$  также является первообразной для  $f(x)$ .

Справедливо и обратное утверждение.

**Теорема.** Если  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  — две первообразные для функции  $f(x)$  на интервале  $(a, b)$ , то для всех  $x \in (a, b)$  выполняется равенство

$$F_2(x) = F_1(x) + C, \tag{2}$$

где  $C$  — постоянная.

○ Обозначим  $\Phi(x) = F_2(x) - F_1(x)$ . По определению первообразной в силу условий теоремы для всех  $x \in (a, b)$  выполняются равенства

$$F_2'(x) = f(x), \quad F_1'(x) = f(x),$$

откуда следует, что функция  $\Phi(x)$  дифференцируема на интервале  $(a, b)$  и для всех  $x \in (a, b)$  имеет место равенство

$$\Phi'(x) = 0.$$

Согласно следствию 1 из теоремы Лагранжа (§ 17)  $\Phi(x) = C = \text{const}$  для всех  $x \in (a, b)$  или  $F_2(x) - F_1(x) = C$ , т. е. справедливо равенство (2). ●

Таким образом, для данной функции  $f(x)$  ее первообразная  $F(x)$  определяется неоднозначно, с точностью до постоянной. Для того чтобы из совокупности первообразных выделить какую-либо первообразную  $F_1(x)$ , достаточно указать точку  $M_0(x_0, y_0)$ , принадлежащую графику функции  $y = F_1(x)$ .

**Пример 1.** Для функции  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  найти такую первообразную  $F_1(x)$ , график которой проходит через точку  $(1, 2)$ .

△ Совокупность всех первообразных функции  $\frac{1}{x^2}$  описывается формулой

$$F(x) = -\frac{1}{x} + C.$$

По условию  $F_1(1) = 2$ , т. е.  $2 = -1 + C$ , откуда  $C = 3$ . Следовательно,  $F_1(x) = 3 - \frac{1}{x}$ . ▲

**Замечание 3.** В дальнейшем (гл. VII, § 36) будет доказано, что первообразная существует для любой функции, непрерывной на отрезке (или интервале).

**2. Понятие неопределенного интеграла.** Совокупность всех первообразных для функции  $f(x)$  на некотором промежутке  $\Delta$  называют *неопределенным интегралом от функции  $f$  на этом промежутке*, обозначают символом  $\int f(x) dx$  и пишут

$$\int f(x) dx = F(x) + C. \quad (3)$$

Здесь  $F(x)$  — какая-нибудь первообразная функции  $f$  на промежутке  $\Delta$ ,  $C$  — произвольная постоянная. Знак  $\int$  называют *знаком интеграла*,  $f$  — *подынтегральной функцией*,  $f(x) dx$  — *подынтегральным выражением*.

Подынтегральное выражение можно записать в виде  $F'(x) dx$  или  $dF(x)$ , т. е.

$$f(x) dx = dF(x). \quad (4)$$

Операцию нахождения неопределенного интеграла от данной функции, которая является обратной операцией дифференцирования, называют *интегрированием*. Поэтому любую формулу для производной, т. е. формулу вида  $F'(x) = f(x)$ , можно записать в виде (3).

Используя таблицу производных, можно найти интегралы от некоторых элементарных функций. Например, из равенства  $(\sin x)' = \cos x$  следует, что  $\int \cos x \, dx = \sin x + C$ .

### 3. Свойства неопределенного интеграла.

Свойство 1.

$$d\left(\int f(x) \, dx\right) = f(x) \, dx. \quad (5)$$

○ Из равенства (3) следует, что

$$d\left(\int f(x) \, dx\right) = d(F(x) + C) = dF(x),$$

так как  $dC = 0$ . ●

Согласно формуле (5) знаки дифференциала и интеграла взаимно уничтожаются, если знак дифференциала стоит перед знаком интеграла.

Свойство 2.

$$\int dF(x) = F(x) + C. \quad (6)$$

○ Равенство (6) следует из равенств (3) и (4). ●

Соотношение (6) показывает, что и в случае, когда знак интеграла стоит перед знаком дифференциала, эти знаки также взаимно уничтожаются (если отбросить постоянную  $C$ ).

Свойство 3. Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют на некотором промежутке первообразные, то для любых  $\alpha \in R$ ,  $\beta \in R$  таких, что  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ , функция  $\varphi(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$  также имеет первообразную на этом промежутке, причем

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) \, dx = \alpha \int f(x) \, dx + \beta \int g(x) \, dx. \quad (7)$$

○ Пусть  $F$  и  $G$  — первообразные для функций  $f$  и  $g$  соответственно, тогда  $\Phi = \alpha F + \beta G$  — первообразная для функции  $\varphi$ , так как  $(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha f(x) + \beta g(x)$ . Согласно определению интеграла левая часть (7) состоит из функций вида  $\Phi(x) + C$ , а правая часть — из функций вида  $\alpha F(x) + \alpha C_1 + \beta G(x) + \beta C_2 = \Phi(x) + \alpha C_1 + \beta C_2$ . Так как  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ , то каждая функция вида  $\Phi(x) + C$  принадлежит совокупности функций  $\Phi(x) + \alpha C_1 + \beta C_2$ , и наоборот, т. е. по заданному числу  $C$  можно найти  $C_1$  и  $C_2$ , а по заданным  $C_1$  и  $C_2$  — число  $C$  такое, чтобы выполнялось равенство  $C = \alpha C_1 + \beta C_2$ . ●

Таким образом, интегрирование обладает свойством линейности: интеграл от линейной комбинации функций равен соответствующей линейной комбинации интегралов от рассматриваемых функций.

Пример 2. Найти  $\int f(x) \, dx$ , если:

а)  $f(x) = e^x + x^2$ ;   б)  $f(x) = -2 \sin x + \frac{3}{1+x^2}$ .

△ а) Используя таблицу производных (§ 15) и свойство 3 интеграла,

получаем

$$\int (e^x + x^2) dx = e^x + \frac{x^3}{3} + C.$$

б) Так как  $(-\cos x)' = \sin x$ ,  $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ , то

$$\int \left( -2 \sin x + \frac{3}{1+x^2} \right) dx = 2 \cos x + 3 \operatorname{arctg} x + C. \quad \blacktriangle$$

Дальнейшее расширение множества функций, интегралы от которых выражаются через элементарные функции, можно получить, если воспользоваться правилом дифференцирования сложной функции и правилом дифференцирования произведения двух функций.

**4. Метод замены переменного (метод подстановки).** Пусть функция  $t = \varphi(x)$  определена и дифференцируема на промежутке  $\Delta$  и пусть  $\Delta_1 = \varphi(\Delta)$  — множество значений функции  $\varphi$  на  $\Delta$ .

Если функция  $U(t)$  определена и дифференцируема на  $\Delta_1$ , причем

$$U'(t) = u(t), \quad (8)$$

то на промежутке  $\Delta$  определена и дифференцируема сложная функция  $F(x) = U(\varphi(x))$  и

$$F'(x) = [U(\varphi(x))]' = U'(\varphi(x)) \varphi'(x) = u(\varphi(x)) \varphi'(x). \quad (9)$$

Из равенств (8) и (9) следует, что если  $U(t)$  — первообразная для функции  $u(t)$ , то  $U(\varphi(x))$  — первообразная для функции  $u(\varphi(x)) \varphi'(x)$ . Это означает, что если

$$\int u(t) dt = U(t) + C, \quad (10)$$

то

$$\int u(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = U(\varphi(x)) + C, \quad (11)$$

или

$$\int u(\varphi(x)) d\varphi(x) = U(\varphi(x)) + C. \quad (12)$$

Формулу (12) (или формулу (11)) называют *формулой интегрирования заменой переменного*. Она получается из формулы (10), если вместо  $t$  подставить дифференцируемую функцию  $\varphi(x)$ .

**Замечание 4.** Формула (12) дает возможность найти интеграл  $\int f(x) dx$ , если функция  $f(x)$  представляется в виде  $f(x) = u(\varphi(x)) \varphi'(x)$  и если известна первообразная функции  $u(t)$ , т. е. известен интеграл (10).

Отметим важные частные случаи формулы (12).

а) Пусть  $F(x)$  — первообразная функции  $f(x)$ , т. е.

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Тогда

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C, \quad a \neq 0. \quad (13)$$

Здесь  $\varphi(x) = ax + b$ ,  $f(ax + b) dx = \frac{1}{a} f(ax + b) d(ax + b)$ .

б) Используя равенство

$$\int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C,$$

получаем

$$\int \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = \int \frac{\varphi'(x) dx}{\varphi(x)} = \ln |\varphi(x)| + C, \quad \text{если } \varphi(x) \neq 0. \quad (14)$$

в) Так как

$$\int t^\alpha dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1, \quad t > 0,$$

то

$$\int (\varphi(x))^\alpha \varphi'(x) dx = \int (\varphi(x))^\alpha d\varphi(x) = \frac{(\varphi(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (15)$$

где  $\varphi(x) > 0$ ,  $\alpha \neq -1$ .

Приведем примеры применения формул (13)–(15).

Пример 3.  $\int (2x + 3)^6 dx = \frac{1}{2} \int (2x + 3)^6 d(2x + 3) = \frac{(2x + 3)^7}{14} + C.$

Пример 4.  $\int \frac{dx}{(x+a)^k} = \begin{cases} \ln |x+a| + C, & k = 1, \\ \frac{(x+a)^{-k+1}}{1-k} + C, & k \neq 1. \end{cases}$

Пример 5.  $\int \frac{x dx}{x^2 + \alpha} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + \alpha)}{x^2 + \alpha} = \frac{1}{2} \ln |x^2 + \alpha| + C.$

Пример 6.  $\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln |\sin x| + C.$

Пример 7.  $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = \int \frac{d(x^2 + \alpha)}{2\sqrt{x^2 + \alpha}} = \sqrt{x^2 + \alpha} + C.$

Пример 8.  $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d(x/a)}{1 + (x/a)^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0.$

Пример 9.  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{d(x/a)}{\sqrt{1 - (x/a)^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad a > 0.$

Пример 10.  $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \int \frac{1}{2a} \left( \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad a \neq 0.$

Пример 11.  $J = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}}, \quad \alpha \neq 0.$

△ Пусть  $x + \sqrt{x^2 + \alpha} = t = t(x)$ ; тогда

$$dt = t'(x) dx = \left( 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + \alpha}} \right) dx = \frac{t(x)}{\sqrt{x^2 + \alpha}} dx,$$

откуда

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = \frac{dt(x)}{t(x)}.$$

Поэтому

$$J = \int \frac{dt(x)}{t(x)} = \ln |t(x)| + C = \ln |x + \sqrt{x^2 + \alpha}| + C,$$

т. е.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + \alpha}| + C. \quad \blacktriangle$$

З а м е ч а н и е 5. При вычислении этого интеграла использована *подстановка Эйлера*  $x + \sqrt{x^2 + \alpha} = t$ .

З а м е ч а н и е 6. Интегралы, рассмотренные в примерах 8–11, часто применяются. Эти интегралы обычно считаются табличными.

Приведем таблицу интегралов, полученную из соответствующей таблицы производных. Сюда включены интегралы, найденные в примерах 8–11.

$$1) \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$$

$$2) \int \frac{dx}{x+a} = \ln |x+a| + C.$$

$$3) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1; \quad \int e^x dx = e^x + C.$$

$$4) \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$5) \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$6) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$7) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$8) \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$$

$$9) \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$$

$$10) \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$$

$$11) \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

$$12) \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a > 0.$$

$$13) \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C, \quad a > 0.$$

$$14) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad a \neq 0.$$

$$15) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| + C, \quad a \neq 0.$$

Пример 12.  $J = \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$

△ Так как

$$x(1-x) = -(x^2 - x) = \frac{1}{4} - \left(x^2 - 2x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2,$$

то, используя пример 9 при  $a = \frac{1}{2}$ , получаем

$$J = \int \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} = \arcsin \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + C,$$

т. е.  $J = \arcsin(2x - 1) + C$ . ▲

Пример 13.  $J = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3x + 5}}$ .

△ Так как  $x^2 - 3x + 5 = x^2 - 2x \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + 5 - \frac{9}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$ , то, используя пример 11, получаем

$$J = \int \frac{d\left(x - \frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}}} = \ln \left| x - \frac{3}{2} + \sqrt{x^2 - 3x + 5} \right| + C. \quad \blacktriangle$$

Иногда бывает целесообразно при вычислении интеграла

$$J = \int f(x) dx \tag{16}$$

перейти к новой переменной.

Пусть  $x = \varphi(t)$  — строго монотонная и дифференцируемая функция. Тогда она имеет обратную функцию

$$t = \omega(x). \tag{17}$$

Преобразуя подынтегральное выражение в интеграле (16) с помощью подстановки  $x = \varphi(t)$ , получаем  $f(x) dx = f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$ . Обозначим  $u(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ , тогда

$$f(x) dx = u(t) dt. \tag{18}$$

Пусть  $U(t)$  — первообразная для функции  $u(t)$ , тогда

$$\int u(t) dt = U(t) + C. \tag{19}$$

Из равенств (16)–(19) находим

$$J = \int f(x) dx = \int u(t) dt = U(t) + C = U(\omega(x)) + C. \tag{20}$$

Формулу (20) называют *формулой интегрирования подстановкой*. Согласно этой формуле для вычисления интеграла (16) достаточно подобрать такую обратимую дифференцируемую функцию  $x = \varphi(t)$ , с помощью которой подынтегральное выражение  $f(x) dx$  представляется в виде  $u(t) dt$ , причем первообразная для функции  $u(t)$  известна.



Пример 14. Вычислить интеграл

$$J = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx, \quad a > 0.$$

$\Delta$  Подынтегральная функция определена на отрезке  $[-a, a]$ . Положим  $x = \varphi(t) = a \sin t$ ; тогда  $t = \omega(x) = \arcsin \frac{x}{a}$ ,  $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 \cos^2 t} = a \cos t$ , так как  $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $a > 0$ . Следовательно,

$$J = \int a \cos t a \cos t dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{a^2}{2} \left( t + \frac{\sin 2t}{2} \right) + C.$$

Так как

$$\sin t = \frac{x}{a}, \quad \cos t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a},$$

то

$$\frac{1}{2} \sin 2t = \sin t \cos t = \frac{x \sqrt{a^2 - x^2}}{a^2}.$$

Поэтому

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x \sqrt{a^2 - x^2}}{2} + C. \quad \blacktriangle$$

**5. Метод интегрирования по частям.** Пусть функции  $u(x)$  и  $v(x)$  имеют непрерывные производные на промежутке  $\Delta$ . Тогда функция  $uv$  также имеет непрерывную производную на  $\Delta$  и согласно правилу дифференцирования произведения выполняется равенство

$$uv' = (uv)' - vu'.$$

Интегрируя это равенство и учитывая, что

$$\int (uv)' dx = uv + C,$$

получаем

$$\int uv' dx = uv + C - \int vu' dx.$$

Относя произвольную постоянную  $C$  к интегралу  $\int vu' dx$ , находим

$$\int uv' dx = uv - \int vu' dx, \quad (21)$$

или

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (22)$$

Формула (21) (или (22)) называется *формулой интегрирования по частям*. Она сводит вычисление интеграла  $\int u dv$  к вычислению интеграла  $\int v du$ .

Пример 15.

$$\int x \cos x \, dx = \int x d(\sin x) = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x - \cos x + C.$$

Пример 16. Вычислить интеграл

$$J = \int \sqrt{x^2 + a} \, dx.$$

△ Полагая  $u = \sqrt{x^2 + a}$ ,  $v = x$ , по формуле (21) находим

$$J = x\sqrt{x^2 + a} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a}} \, dx,$$

где  $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a}} \, dx = \int \frac{x^2 + a - a}{\sqrt{x^2 + a}} \, dx = J - a \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}$ . Отсюда получаем уравнение относительно  $J$ :

$$J = x\sqrt{x^2 + a} - J + a \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}.$$

Используя результат примера 11, находим

$$\int \sqrt{x^2 + a} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| + C. \quad \blacktriangle$$

Пример 17. Пусть

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a \neq 0.$$

Выведем рекуррентную формулу для вычисления интеграла  $J_n$ .

△ Пусть  $u = (x^2 + a^2)^{-n}$ ,  $v = x$ . Тогда  $u' = -2nx(x^2 + a^2)^{-n-1}$ ,  $v' = 1$  и по формуле (21) получаем

$$J_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} \, dx,$$

где

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} \, dx = \int \frac{(x^2 + a^2) - a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} \, dx = J_n - a^2 J_{n+1}.$$

Следовательно,

$$J_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n J_n - 2na^2 J_{n+1},$$

откуда

$$J_{n+1} = \frac{x}{2na^2(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} J_n. \quad \blacktriangle \quad (23)$$

Замечание 7. Так как  $J_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$ , то из формулы (23) находим

$$J_2 = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

Замечание 8. Повторное применение формулы (21) позволяет получить обобщенную формулу интегрирования по частям

$$\int uv^{(n+1)} dx = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} + \dots + (-1)^n u^{(n)}v + (-1)^{n+1} \int u^{(n+1)}v dx \quad (24)$$

в предположении, что существуют непрерывные производные  $u^{(n+1)}$ ,  $v^{(n+1)}$  на рассматриваемом промежутке. При  $n = 1$  формула (24) принимает вид

$$\int uv'' dx = uv' - u'v + \int u''v dx. \quad (25)$$

Пример 18. Вычислить интеграл

$$J = \int x^2 e^x dx.$$

$\Delta$  Полагая  $u = x^2$ ,  $v = e^x$  и учитывая, что  $u' = 2x$ ,  $u'' = 2$ ,  $v' = v'' = e^x$ , получаем по формуле (25)

$$J = x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int e^x dx,$$

откуда

$$\int x^2 e^x dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + C. \quad \blacktriangle$$

Пример 19. Вычислить интеграл

$$J = \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx, \quad \alpha \beta \neq 0.$$

$\Delta$  Положим  $u = \cos \beta x$ ,  $v = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2}$ . Тогда  $u' = -\beta \sin \beta x$ ,  $u'' = -\beta^2 \cos \beta x$ ,  $v' = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$ ,  $v'' = e^{\alpha x}$ . По формуле (25) находим

$$J = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \cos \beta x + \frac{\beta}{\alpha^2} e^{\alpha x} \sin \beta x - \frac{\beta^2}{\alpha^2} J + C,$$

откуда

$$J = \frac{\alpha \cos \beta x + \beta \sin \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} e^{\alpha x} + C_1. \quad \blacktriangle$$

### § 31. Комплексные числа

Известно, что квадратное уравнение с вещественными коэффициентами и отрицательным дискриминантом не имеет вещественных корней. В частности, уравнение

$$z^2 + 1 = 0$$

не имеет корней на множестве  $R$ . Возникает потребность расширить

множество  $R$  так, чтобы на более широком множестве было разрешимо квадратное уравнение с любыми вещественными коэффициентами.

**1. Определение комплексного числа.** *Комплексными числами* называют пары  $(x, y)$  вещественных (действительных) чисел  $x$  и  $y$ , для которых следующим образом определены понятие равенства и операции сложения и умножения.

Обозначим комплексное число  $(x, y)$  буквой  $z$ , т. е. положим  $z = (x, y)$ . Пусть  $z_1 = (x_1, y_1)$ ,  $z_2 = (x_2, y_2)$ . Два комплексных числа  $z_1$  и  $z_2$  считаются *равными* тогда и только тогда, когда  $x_1 = x_2$  и  $y_1 = y_2$ , т. е.

$$\{(x_1, y_1) = (x_2, y_2)\} \Leftrightarrow \{x_1 = x_2\} \wedge \{y_1 = y_2\}.$$

*Сумма и произведение* комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2$  обозначаются соответственно  $z_1 + z_2$  и  $z_1 z_2$  и определяются формулами

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (1)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (2)$$

Из формул (1) и (2) следуют соотношения

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0), \quad (x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1 x_2, 0),$$

которые показывают, что операции над комплексными числами вида  $(x, 0)$  совпадают с операциями над действительными числами. Поэтому комплексное число вида  $(x, 0)$  отождествляют с действительным числом  $x$ , т. е. полагают  $(x, 0) = x$ .

Среди комплексных чисел особую роль играет число  $(0, 1)$ , которое называют *мнимой единицей* и обозначают  $i$ , т. е.

$$i = (0, 1).$$

Вычислив произведение  $i$  на  $i$  по формуле (2), получим

$$i \cdot i = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1,$$

т. е.  $i^2 = -1$ . Используя формулы (1), (2), находим

$$i \cdot y = (0, 1)(y, 0) = (0, y), \quad (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy.$$

Следовательно, любое комплексное число  $z = (x, y)$  можно записать в виде  $x + iy$ , т. е.

$$z = x + iy. \quad (3)$$

Запись комплексного числа  $z = (x, y)$  в виде (3) называют *алгебраической формой комплексного числа*.

В записи (3) число  $x$  называют *действительной частью комплексного числа* и обозначают  $\operatorname{Re} z$ , а число  $y$  — *мнимой частью* и обозначают  $\operatorname{Im} z$ , т. е.

$$\operatorname{Re} z = x, \quad \operatorname{Im} z = y.$$

Если  $x = 0$ , т. е.  $z = iy$ , то такое комплексное число называют *чисто мнимым*.

Здесь и всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, в записи  $x + iy$  числа  $x$  и  $y$  считаются действительными (вещественными).

Число  $\sqrt{x^2 + y^2}$  обозначают  $|z|$  и называют *модулем* комплексного числа  $z$ , т. е.

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (4)$$

Заметим, что  $|z| \geq 0$  и  $\{|z| = 0\} \Leftrightarrow \{z = 0\}$ .

Комплексное число  $x - iy$  называют *сопряженным комплексному числу*  $z = x + iy$  и обозначают  $\bar{z}$ , т. е.

$$\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy. \quad (5)$$

Из равенств (4) и (5) следует, что

$$|z| = |\bar{z}|, \quad z\bar{z} = |z|^2, \quad (6)$$

так как  $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$ .

**2. Свойства операций.** Операции сложения и умножения комплексных чисел обладают свойствами:

а) *коммутативности*, т. е.

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 z_2 = z_2 z_1;$$

б) *ассоциативности*, т. е.

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \quad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3);$$

в) *дистрибутивности*, т. е.

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

Эти свойства вытекают из определения операций сложения и умножения комплексных чисел и свойств операций для вещественных чисел.

Из этих свойств следует, что сложение и умножение комплексных чисел можно выполнять по правилам действий с многочленами, заменяя  $i^2$  на  $-1$ . Например, равенство (2) можно получить так:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = \\ &= x_1 x_2 + ix_1 y_2 + ix_2 y_1 + i^2 y_1 y_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned}$$

Множество комплексных чисел обозначают буквой  $C$ . Числа  $0 = 0 + 0 \cdot i$  и  $1 = 1 + 0 \cdot i$  на множестве  $C$  обладают такими же свойствами, какие они имеют на множестве  $R$ , а именно: для любого  $z \in C$  справедливы равенства

$$z + 0 = z, \quad z \cdot 1 = z.$$

На множестве  $C$  вычитание вводится как операция, обратная сложению. Для любых комплексных чисел  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$  существует, и притом только одно, число  $z$  такое, что

$$z + z_2 = z_1. \quad (7)$$

Это число называют *разностью* чисел  $z_1$  и  $z_2$  и обозначают  $z_1 - z_2$ . В частности, разность  $0 - z$  обозначают  $-z$ .

Из уравнения (7) в силу правила равенства и определения суммы комплексных чисел следует, что

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

*Деление* на множестве  $\mathcal{C}$  вводится как операция, обратная умножению, а *частным* от деления комплексного числа  $z_1 = x_1 + iy_1$  на число  $z_2 = x_2 + iy_2$  называют такое число  $z$ , которое удовлетворяет уравнению

$$z z_2 = z_1 \quad (8)$$

и обозначается  $z_1 : z_2$  или  $\frac{z_1}{z_2}$ .

Докажем, что уравнение (8) для любых комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2$ , где  $z_2 \neq 0$ , имеет единственный корень.

○ Умножая обе части уравнения (8) на  $\bar{z}_2$ , получим в силу равенства (6) уравнение

$$z |z_2|^2 = z_1 \bar{z}_2, \quad (9)$$

которое равносильно уравнению (8), так как  $\bar{z}_2 \neq 0$ .

Умножая обе части (9) на  $\frac{1}{|z_2|^2}$ , получаем  $z = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}$ , т. е.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2},$$

или

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_2 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \quad \bullet$$

Эту формулу можно не запоминать — важно знать, что она получается умножением числителя и знаменателя на число, сопряженное со знаменателем.

**Пример 1.** Найти частное  $\frac{z_1}{z_2}$ , если  $z_1 = 5 - 2i$ ,  $z_2 = 3 + 4i$ .

$$\Delta \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{(5 - 2i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \frac{15 - 26i + 8i^2}{25} = \frac{7}{25} - \frac{26}{25}i. \quad \blacktriangle$$

### 3. Геометрическая интерпретация комплексного числа.

а) *Комплексная плоскость.* Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат. Комплексное число  $z = x + iy$  изображается точкой плоскости с координатами  $(x, y)$ , и эта точка обозначается той же буквой  $z$ .

Такое соответствие между множеством  $\mathcal{C}$  и точками плоскости является взаимно однозначным: каждому числу  $z \in \mathcal{C}$  соответствует одна точка плоскости с координатами  $(x, y)$ , и наоборот, каждой точке плоскости с координатами  $(x, y)$  соответствует одно комплекс-

ное число  $z = x + iy$ . Поэтому слова “комплексное число” и “точка плоскости” часто употребляются как синонимы.

При этом действительные числа, т. е. числа вида  $x + 0 \cdot i$ , изображаются точками оси абсцисс, а чисто мнимые числа, т. е. числа вида  $iy = 0 + iy$  — точками оси ординат. Поэтому ось абсцисс называют *действительной* осью, а ось ординат — *мнимой* осью. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называют *комплексной плоскостью*.

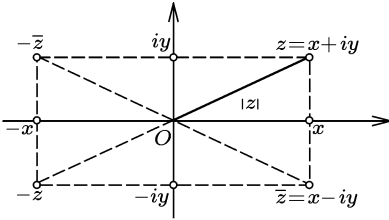


Рис. 31.1

На рис. 31.1 изображены точки  $z$ ,  $-z$ ,  $\bar{z}$ ,  $-\bar{z}$ . Отметим, что точки  $z$  и  $-z$  симметричны относительно точки  $O$ , а точки  $z$  и  $\bar{z}$

симметричны относительно действительной оси.

б) *Геометрический смысл модуля комплексного числа.* Комплексное число  $z = x + iy$  можно изображать вектором с началом в точке  $O$  и концом в точке  $z$ . Этот вектор будем обозначать той же буквой  $z$ . Из рис. 31.1 или из формулы (4) видно, что длина вектора  $z$  равна  $|z|$  и справедливы неравенства  $|x| \leq |z|$ ,  $|y| \leq |z|$ , т. е.

$$|\operatorname{Re} z| \leq |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|.$$

С помощью векторной интерпретации наглядно иллюстрируются сумма и разность комплексных чисел. Число  $z_1 + z_2$  изображается вектором, построенным по правилу сложения векторов  $z_1$  и  $z_2$

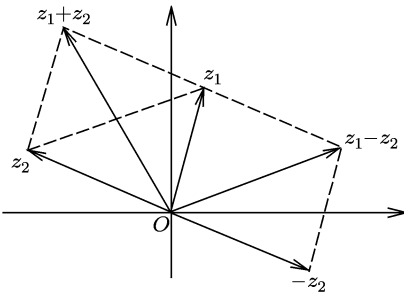


Рис. 31.2

(рис. 31.2), а вектор  $z_1 - z_2$  можно построить как сумму векторов  $z_1$  и  $-z_2$ . Из рис. 31.2 видно, что расстояние между точками  $z_1$  и  $z_2$  равно длине вектора  $z_1 - z_2$ , т. е. равно  $|z_1 - z_2|$ . Это же утверждение следует из равенства

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Итак,  $|z_1 - z_2|$  — расстояние между точками  $z_1$  и  $z_2$ .

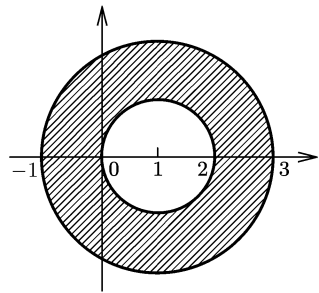


Рис. 31.3

**Пример 2.** Дать геометрическое описание множества всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

а)  $|z - z_0| = R$ ,  $R > 0$ ;

б)  $1 < |z - 1| < 2$ ;

в)  $|z - i| = |z + i|$ .

△ а) Условию  $|z - z_0| = R$ , где  $R > 0$ ,  $z_0$  — заданное комплексное число, удовлетворяют все точки, расстояние от которых до точки  $z_0$  равно  $R$ , т. е. точки, лежащие на окружности радиуса  $R$  с центром в точке  $z_0$ .

б) Условию  $|z - 1| < 2$  удовлетворяют все точки, лежащие внутри круга радиуса 2 с центром в точке  $z = 1$ , а условию  $|z - 1| > 1$  — точки, лежащие вне круга радиуса 1 с центром в точке  $z = 1$ .

Оба эти условия выполняются для точек, лежащих между окружностями  $|z - 1| = 1$  и  $|z - 1| = 2$  (рис. 31.3).

в) Условию  $|z - i| = |z + i|$  удовлетворяют те и только те точки, которые равноудалены от точек  $i$  и  $-i$ , т. е. все точки действительной оси. ▲

Покажем, что для любых комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2$  справедливы неравенства

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \quad (10)$$

○ Рассмотрим треугольник с вершинами  $0$ ,  $z_1$  и  $z_1 + z_2$  (рис. 31.2). Длины его сторон равны  $|z_1|$ ,  $|z_2|$  и  $|z_1 + z_2|$ . Поэтому неравенства (10) выражают известные из геометрии свойства длин сторон треугольника. ●

**4. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.** Пусть  $r$  и  $\varphi$  — полярные координаты точки  $z = x + iy$  комплексной плоскости (рис. 31.4); тогда

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad (11)$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ ,  $\varphi$  — угол между действительной осью и вектором  $z$ , отсчитываемый от положительного направления действительной оси. Если отсчет ведется против часовой стрелки, то величина угла считается положительной, а если по часовой стрелке — отрицательной. Этот угол называют *аргументом комплексного числа*  $z$  ( $z \neq 0$ ) и обозначают  $\arg z$ . Для числа  $z = 0$  аргумент не определяется, поэтому в дальнейшем при использовании понятия аргумента предполагается, что  $z \neq 0$ .

Из равенств (11) следует, что любое комплексное число  $z = x + iy$ , где  $z \neq 0$ , представляется в виде

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (12)$$

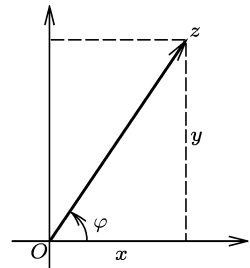


Рис. 31.4

понятия аргумента



Запись комплексного числа  $z \neq 0$  в виде (12) называют *тригонометрической формой комплексного числа*.

Из формул (11) находим

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (13)$$

Решив систему (13), найдем аргумент комплексного числа  $z \neq 0$ . Эта система имеет бесконечно много решений вида  $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\varphi_0$  — одно из решений системы (13), т. е. аргумент комплексного числа определяется неоднозначно.

Для нахождения аргумента обычно пользуются не формулами (13), а формулой

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad (14)$$

получаемой почленным делением второго из равенств (13) на первое. Следует иметь в виду, что не все значения  $\varphi$ , удовлетворяющие уравнению (14), являются аргументами числа  $z$ .

**Пример 3.** Найти все аргументы числа  $-1 + i\sqrt{3}$  и записать это число в тригонометрической форме.

$\Delta$  Комплексное число лежит во второй четверти, поэтому в качестве одного из решений уравнения  $\operatorname{tg} \varphi = -\sqrt{3}$  можно взять  $\varphi_0 = \frac{2\pi}{3}$ , а все значения аргумента данного комплексного числа определяются формулой

$$\varphi = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Так как  $|-1 + i\sqrt{3}| = 2$ , то

$$-1 + i\sqrt{3} = 2 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right). \quad \blacktriangle$$

Если  $|z| = 1$ ,  $\varphi = \arg z$ , то из формулы (12) получаем  $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ . Комплексное число  $\cos \varphi + i \sin \varphi$  обозначается символом  $e^{i\varphi}$ , т. е. для любого  $\varphi \in \mathbb{R}$  функция  $e^{i\varphi}$  определяется *формулой Эйлера*

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (15)$$

Равенство (15) находит обоснование в теории рядов (§ 44).

Из формулы (15) следует, что  $e^{2\pi i} = 1$ ,  $e^{\pi i} = -1$ ,  $e^{\pi i/2} = i$ ,  $e^{-\pi i/2} = -i$  (рис. 31.5) и  $|e^{i\varphi}| = 1$  для любого  $\varphi \in \mathbb{R}$ .

Заменяя в равенстве (15)  $\varphi$  на  $-\varphi$ , получаем

$$e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi, \quad (16)$$

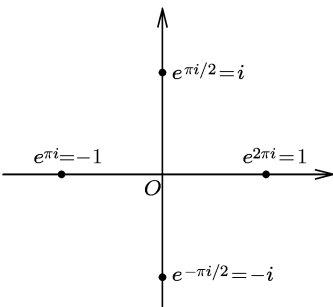


Рис. 31.5

а из равенств (15) и (16) следует, что

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}), \quad \sin \varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}). \quad (17)$$

Отметим, что

$$e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (18)$$

Для доказательства формул (18) следует воспользоваться формулами (15) и (2), а также формулами синуса и косинуса суммы (разности) углов. С помощью индукции из (18) можно получить *формулу Муавра*

$$e^{in\varphi} = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Используя формулы (12) и (15), запишем комплексное число  $z \neq 0$  в *показательной форме*

$$z = r e^{i\varphi}, \quad \text{где } r = |z|, \quad \varphi = \arg z. \quad (19)$$

С помощью равенств (18) можно получить формулы для произведения и частного комплексных чисел: если  $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ ,  $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ , то

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad (20)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad z_2 \neq 0. \quad (21)$$

Из формулы (20) следует, что при перемножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются, т. е.

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \arg(z_1 + z_2), \quad \text{если } \varphi_1 = \arg z_1, \quad \varphi_2 = \arg z_2.$$

Аналогично из формулы (21) следует, что модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей этих чисел, а разность аргументов делимого и делителя является аргументом частного, т. е.

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \text{если } z_2 \neq 0,$$

и

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \arg \frac{z_1}{z_2}, \quad \text{если } \varphi_1 = \arg z_1, \quad \varphi_2 = \arg z_2.$$

**Пример 4.** Вычислить  $\frac{(1+i)^4}{(1-i\sqrt{3})^6}$ .

△ Так как  $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ ,  $1-i\sqrt{3} = 2e^{-i\pi/3}$ , то

$$\frac{(1+i)^4}{(1-i\sqrt{3})^6} = \frac{(\sqrt{2})^4 e^{i\pi}}{2^6 e^{-2\pi i}} = -\frac{1}{16}. \quad \blacktriangle$$

Из геометрической интерпретации (рис. 31.4) следует правило равенства двух комплексных чисел в показательной форме: если  $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$  и  $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ , то  $z_1 = z_2$  тогда и только тогда, когда

$$r_1 = r_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим теперь некоторые важные свойства комплексно сопряженных чисел. Пусть  $z = r e^{i\varphi} = r \cos \varphi + i r \sin \varphi$ , тогда  $\bar{z} = r \cos \varphi - i r \sin \varphi = r e^{-i\varphi}$ , т. е. если  $\varphi = \arg z$ , то  $-\varphi = \arg \bar{z}$ . Отсюда и из равенств (20), (21) следует, что

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad \overline{(z^n)} = (\bar{z})^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

а из определения комплексно сопряженного числа следует, что

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2.$$

### 5. Извлечение корня. Рассмотрим уравнение

$$z^n = a, \tag{22}$$

где  $a \neq 0$  — комплексное число,  $n$  — натуральное число.

Если  $z = r e^{i\varphi}$ ,  $a = \rho e^{i\theta}$ , то уравнение (22) примет вид

$$r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\theta},$$

откуда

$$r^n = \rho, \quad n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

и поэтому

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \quad \varphi_k = \frac{1}{n}(\theta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{23}$$

т. е. числа

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\varphi_k} \tag{24}$$

являются корнями уравнения (22) и других корней это уравнение не имеет.

Заметим, что числа  $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$  различны, так как их аргументы  $\varphi_0 = \frac{\theta}{n}$ ,  $\varphi_1 = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}$ , ...,  $\varphi_{n-1} = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi(n-1)}{n}$  различны и отличаются друг от друга меньше, чем на  $2\pi$ . Далее,  $z_n = z_0$ , так как  $|z_n| = |z_0| = \sqrt[n]{\rho}$  и  $\varphi_n = \varphi_0 + 2\pi$ . Аналогично,  $z_{n+1} = z_1$ ,  $z_{-1} = z_{n-1}$  и т. д.

Итак, при  $a \neq 0$  уравнение (22) имеет ровно  $n$  различных корней, определяемых формулами (23) и (24), где  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

На комплексной плоскости точки  $z_k$  ( $k = \overline{0, n-1}$ ) располагаются в вершинах правильного  $n$ -угольника, вписанного в окружность радиуса  $\sqrt[n]{\rho}$  с центром в точке 0.

Пример 5. Найти все корни уравнения  $z^4 = 1 + i$ .

△ Корни  $z_k$  ( $k = \overline{0, 3}$ ) этого уравнения определяются формулами (23) и (24), где  $\rho = |1 + i| = \sqrt{2}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , т. е.

$$z_k = \sqrt[4]{2} e^{i\varphi_k},$$

где

$$\varphi_k = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Точки  $z_k$  располагаются в вершинах квадрата (рис. 31.6). ▲

**6. Комплекснозначные функции действительного переменного.** Если каждому значению  $t \in [\alpha, \beta]$  поставлено в соответствие комплексное число  $z = z(t)$ , то говорят, что на отрезке  $[\alpha, \beta]$  задана комплекснозначная функция действительного переменного.

Пусть  $\operatorname{Re} z(t) = x(t)$ ,  $\operatorname{Im} z(t) = y(t)$ , тогда  $z(t) = x(t) + iy(t)$ . Функцию  $z(t)$  можно рассматривать как вектор-функцию  $z(t) = (x(t), y(t))$ . Определения предела, непрерывности, производной для комплекснозначной функции аналогичны соответствующим определениям для вектор-функции.

Например, производная функции  $z(t) = x(t) + iy(t)$  определяется формулой

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t). \quad (25)$$

Следовательно, производная  $z'(t)$  существует, если существуют производные  $x'(t)$  и  $y'(t)$ .

Применяя формулу (25) к функции  $e^{it} = \cos t + i \sin t$ , получаем  $(e^{it})' = -\sin t + i \cos t = i^2 \sin t + i \cos t = i(\cos t + i \sin t)$ , т. е.

$$(e^{it})' = ie^{it}. \quad (26)$$

Таким образом, формула для производной комплексной функции  $e^{it}$  имеет такой же вид, как и для функции  $e^{\alpha t}$ , где  $\alpha \in R$ .

Определим теперь показательную функцию  $e^{(\alpha+i\beta)t}$ , где  $\alpha, \beta$  — заданные действительные числа,  $t$  — действительное переменное. Функция  $f(t) = e^t$ , где  $t \in R$ , удовлетворяет условию

$$f(t_1)f(t_2) = f(t_1 + t_2). \quad (27)$$

Аналогично функция  $e^{i\beta t}$ , где  $\beta \in R$ , обладает свойством (27) в силу первого из равенств (18).

Поэтому функцию  $e^{(\alpha+i\beta)t}$  естественно определить так, чтобы для нее выполнялось условие (27), т. е.

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t}.$$

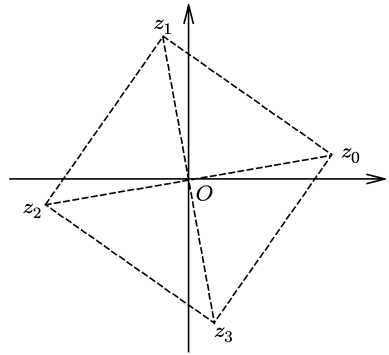


Рис. 31.6

Используя формулу (15), отсюда находим

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t). \quad (28)$$

Применяя к функции  $e^{\lambda t}$ , где  $\lambda = \alpha + i\beta$ , правило дифференцирования (25), легко показать, что

$$(e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t}, \quad \lambda = \alpha + i\beta. \quad (29)$$

По аналогии с производной неопределенный интеграл от комплекснозначной функции  $z(t) = x(t) + iy(t)$  определяется формулой

$$\int z(t) dt = \int x(t) dt + i \int y(t) dt.$$

Если комплексная функция  $\omega(t) = \xi(t) + i\eta(t)$  такова, что  $\omega'(t) = z(t)$ , то

$$\int z(t) dt = \int \omega'(t) dt = \int \xi'(t) dt + i \int \eta'(t) dt = \xi(t) + C_1 + i\eta(t) + iC_2.$$

Следовательно,

$$\int z(t) dt = \omega(t) + C, \quad C = C_1 + iC_2.$$

Применяя это утверждение к функции  $e^{(\alpha+i\beta)t}$  и используя формулу (29), получаем

$$\int e^{(\alpha+i\beta)t} dt = \frac{e^{(\alpha+i\beta)t}}{\alpha + i\beta} + C_1 + iC_2. \quad (30)$$

Выделяя в равенстве (30) действительные и мнимые части, находим

$$\int e^{\alpha t} \cos \beta t dt + i \int e^{\alpha t} \sin \beta t dt = \frac{\alpha - i\beta}{\alpha^2 + \beta^2} e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t) + C_1 + iC_2,$$

откуда получаем

$$\int e^{\alpha t} \cos \beta t dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha \cos \beta t + \beta \sin \beta t) + C_1, \quad (31)$$

$$\int e^{\alpha t} \sin \beta t dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha \sin \beta t - \beta \cos \beta t) + C_2. \quad (32)$$

Заметим, что формула (31) была получена с помощью интегрирования по частям в § 30 (пример 19).

## § 32. Разложение рациональной функции на простые дроби

### 1. Разложение многочлена на множители.

а) *Корни многочлена.* Пусть задан многочлен  $n$ -й степени

$$Q_n(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0, \quad c_n \neq 0. \quad (1)$$

Коэффициенты  $c_n, c_{n-1}, \dots, c_1, c_0$  многочлена могут быть как действительными, так и комплексными числами, переменное  $x$  может принимать любые значения из множества  $R$  или  $C$ .

Число  $a$  называют *корнем многочлена*  $Q_n(x)$ , если  $Q_n(a) = 0$ . Например, число  $x = 1$  — корень многочлена  $x^3 - 3x^2 + 2$ , а число  $x = i$  — корень многочлена  $x^2 + 1$ .

Рассмотрим вопрос о делении многочлена  $Q_n(x)$  на двучлен  $(x - a)$ . Разделить многочлен  $Q_n(x)$  на двучлен  $(x - a)$ , где  $a$  — заданное число, означает по определению представить его в виде

$$Q_n(x) = (x - a)\tilde{Q}_{n-1}(x) + r, \quad (2)$$

где  $\tilde{Q}_{n-1}(x)$  — многочлен степени  $n - 1$ ,  $r$  — некоторое число (его называют *остатком от деления многочлена на  $x - a$* ). Предполагается, что равенство (2) справедливо при всех значениях  $x \in R$  (или  $x \in C$ ). Если  $r = 0$ , то говорят, что *многочлен делится без остатка (нацело) на  $x - a$* .

**Теорема 1 (Безу).** *Число  $a$  является корнем многочлена  $Q_n(x)$  тогда и только тогда, когда этот многочлен делится без остатка на  $x - a$ , т. е. справедливо равенство*

$$Q_n(x) = \tilde{Q}_{n-1}(x)(x - a). \quad (3)$$

○ Пусть  $x = a$  — корень многочлена  $Q_n(x)$ , тогда  $Q_n(a) = 0$ . С другой стороны, из равенства (2) при  $x = a$  получаем  $r = Q_n(a)$ . Следовательно,  $r = 0$ , т. е. многочлен  $Q_n(x)$  делится без остатка на  $x - a$ , если  $a$  — корень этого многочлена.

Обратно, если многочлен делится без остатка на  $x - a$ , т. е. справедливо равенство (3), то из этого равенства следует, что  $Q_n(a) = 0$ . Следовательно,  $x = a$  — корень многочлена  $Q_n(x)$ . ●

Введем понятие кратности корня. Число  $x = a$  называют *корнем многочлена  $Q_n(x)$  кратности  $k$* , если существуют число  $k \in N$  и многочлен  $Q_{n-k}^*(x)$  такие, что для всех  $x \in R$  ( $x \in C$ ) выполняется равенство

$$Q_n(x) = (x - a)^k Q_{n-k}^*(x), \quad (4)$$

где

$$Q_{n-k}^*(a) \neq 0. \quad (5)$$

Упражнение. Показать, что число  $a \in \mathcal{R}$  является корнем кратности  $k$  многочлена с действительными коэффициентами  $Q_n(x)$  тогда и только тогда, когда

$$Q_n^{(p)}(a) = 0 \quad \text{при } p = 0, 1, \dots, k-1 \quad \text{и} \quad Q_n^{(k)}(a) \neq 0.$$

б) *Многочлен с действительными коэффициентами.* Рассмотрим многочлен второй степени (квадратный трехчлен) с действительными коэффициентами

$$Q(x) = x^2 + px + q.$$

Предположим, что его дискриминант отрицателен, т. е.

$$D = p^2 - 4q < 0.$$

Тогда

$$Q(x) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - i^2 \left(-\frac{D}{4}\right),$$

или

$$Q(x) = \left(x + \frac{p}{2} - i \frac{\sqrt{-D}}{2}\right) \left(x + \frac{p}{2} + i \frac{\sqrt{-D}}{2}\right),$$

откуда следует, что корнями многочлена  $Q(x)$  являются комплексно сопряженные числа

$$x_1 = -\frac{p}{2} + i \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}, \quad x_2 = -\frac{p}{2} - i \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

и других корней этот многочлен не имеет. Это утверждение остается в силе и для многочлена любой степени  $n$  ( $n \geq 2$ ) с действительными коэффициентами, т. е. справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** *Если число  $x_0 = \gamma + i\delta$  — не вещественный корень ( $\delta \neq 0$ ) многочлена  $Q_n(x)$  с действительными коэффициентами, то число  $\bar{x} = \gamma - i\delta$  также является корнем этого многочлена.*

○ По условию  $Q_n(x_0) = 0$ , т. е.

$$c_n x_0^n + c_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + c_1 x_0 + c_0 = 0,$$

откуда следует, что  $\overline{Q_n(x_0)} = 0$ , или

$$\overline{c_n x_0^n + c_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + c_1 x_0 + c_0} = 0. \quad (6)$$

В силу свойств сопряженных чисел равенство (6) можно записать в виде

$$\bar{c}_n \bar{x}_0^n + \bar{c}_{n-1} \bar{x}_0^{n-1} + \dots + \bar{c}_1 \bar{x}_0 + \bar{c}_0 = 0,$$

или

$$c_n (\bar{x}_0)^n + c_{n-1} (\bar{x}_0)^{n-1} + \dots + c_1 \bar{x}_0 + c_0 = 0, \quad (7)$$

так как  $\bar{c}_k = c_k$  (по условию все коэффициенты многочлена  $Q_n(x)$  — действительные числа),  $k = \overline{0, n}$ . Равенство (7) можно записать так:

$$Q_n(\bar{x}_0) = 0.$$

Это означает, что  $\bar{x}_0$  — корень многочлена  $Q_n(x)$ . ●

Теоремы 1 и 2 доказаны в предположении, что многочлен  $Q_n(x)$  имеет корень. Ответ на вопрос о существовании корня многочлена дает сформулированная ниже теорема 3.

в) *Основная теорема алгебры.*

Теорема 3. *Всякий многочлен степени  $n \geq 1$  с действительными или комплексными коэффициентами имеет по крайней мере один корень.*

Эта теорема, доказательство которой обычно приводится в курсе теории функций комплексного переменного (см., например, [6]), называется *основной теоремой алгебры*.

Пусть  $x_1$  — корень многочлена  $Q_n(x)$ , степень которого равна  $n$ . Тогда по теореме 1 этот многочлен представляется в виде

$$Q_n(x) = (x - x_1)\tilde{Q}_{n-1}(x),$$

где  $\tilde{Q}_{n-1}(x)$  — многочлен степени  $n - 1$ .

Применяя к многочлену  $\tilde{Q}_{n-1}(x)$  теоремы 1 и 3, находим  $Q_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\tilde{Q}_{n-2}(x)$ .

С помощью индукции получим следующий результат:

$$Q_n(x) = c_n(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n). \quad (8)$$

Здесь  $c_n$  — коэффициент при  $x^n$  многочлена  $Q_n(x)$ ;  $x_1, \dots, x_n$  — его корни, среди этих корней могут быть равные.

г) *Разложение многочлена с действительными коэффициентами на множители.* Если  $x = a$  — действительный корень кратности  $k$  многочлена степени  $n$  с действительными коэффициентами  $Q_n(x)$ , то выполняется равенство (4), где  $Q_{n-k}^*(x)$  — многочлен степени  $n - k$  с действительными коэффициентами, для которого число  $x = a$  не является его корнем.

Пусть  $x_0 = \gamma + i\delta$  — невещественный корень ( $\delta \neq 0$ ) многочлена  $Q_n(x)$ ; тогда число  $\bar{x}_0 = \gamma - i\delta$  также является корнем этого многочлена (теорема 2), и поэтому правая часть (8) содержит множители  $(x - x_0)$  и  $(x - \bar{x}_0)$ , произведение которых равно

$$(x - x_0)(x - \bar{x}_0) = (x - \gamma - i\delta)(x - \gamma + i\delta) = (x - \gamma)^2 + \delta^2 = x^2 + px + q,$$

где  $p = -2\gamma$ ,  $q = \gamma^2 + \delta^2$ ,  $p^2 - 4q = -4\delta^2 < 0$ . Таким образом, многочлен  $Q_n(x)$  в этом случае делится без остатка на квадратный трехчлен  $x^2 + px + q$ , коэффициенты которого являются действительными числами, а дискриминант трехчлена отрицателен, т. е.  $p^2 - 4q < 0$ . Это означает, что существует такой многочлен  $\tilde{Q}_{n-2}(x)$  с действительными коэффициентами, что

$$Q_n(x) = (x^2 + px + q)\tilde{Q}_{n-2}(x).$$

Если число  $x_0 = \gamma + i\delta$ , где  $\delta \neq 0$ , является корнем многочлена  $Q_n(x)$  кратности  $s$ , то число  $\bar{x}_0$  также будет корнем этого многочлена



кратности  $s$ , и поэтому многочлен  $Q_n(x)$  можно представить в виде

$$Q_n(x) = (x - x_0)^s (x - \bar{x}_0)^s \tilde{Q}_{n-2s}(x),$$

или

$$Q_n(x) = (x^2 + px + q)^s \tilde{Q}_{n-2s}(x), \quad (9)$$

где  $p, q$  — действительные числа,  $p^2 - 4q < 0$ , а  $\tilde{Q}_{n-2s}(x)$  — многочлен степени  $n - 2s$  с действительными коэффициентами, для которого числа  $x_0$  и  $\bar{x}_0$  не являются его корнями, т. е.

$$\tilde{Q}_{n-2s}(x_0) \neq 0, \quad \tilde{Q}_{n-2s}(\bar{x}_0) \neq 0. \quad (10)$$

Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_k$  — все действительные корни многочлена  $Q_n(x)$ , а их кратности соответственно равны  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ . Тогда равенство (8) можно записать в виде

$$Q_n(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} \dots (x - a_k)^{\alpha_k} R(x),$$

где  $R(x)$  — многочлен степени  $t = n - \sum_{m=1}^k \alpha_m$  с действительными коэффициентами, не имеющий действительных корней.

Если  $R(x)$  — многочлен ненулевой степени, то каждой паре комплексно сопряженных корней  $x_j$  и  $\bar{x}_j$  кратности  $\beta_j$  многочлена  $Q_n(x)$  соответствует множитель  $(x^2 + p_j x + q_j)^{\beta_j}$  в формуле (8), где  $p_j^2 - 4q_j < 0$ . Поэтому

$$Q_n(x) = c_n (x - a_1)^{\alpha_1} \dots (x - a_k)^{\alpha_k} (x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + p_s x + q_s)^{\beta_s}, \quad (11)$$

где  $\sum_{m=1}^k \alpha_m + 2 \sum_{j=1}^s \beta_j = n$ .

Таким образом, зная все действительные и невещественные корни многочлена с действительными коэффициентами  $Q_n(x)$ , можно этот многочлен разложить на множители, т. е. представить в виде (11), где числа  $c_n, a_1, \dots, a_k, p_1, \dots, p_s, q_1, \dots, q_s$  являются действительными.

## 2. Теорема о разложении правильной рациональной дроби.

Рассмотрим рациональную функцию (рациональную дробь), т. е. функцию вида  $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ , где  $P_m(x)$  и  $Q_n(x)$  — многочлены степени  $m$  и  $n$  соответственно. В случае когда  $m < n$ , эту дробь называют *правильной*. Будем предполагать, что коэффициенты многочленов  $P_m$  и  $Q_n$  являются действительными числами.

**Лемма 1.** Если  $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$  — правильная рациональная дробь и  $x = a$  — действительный корень многочлена  $Q_n(x)$  кратности  $k \geq 1$ ,

то существуют действительное число  $A$  и многочлен  $P(x)$  с действительными коэффициентами такие, что

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P(x)}{(x-a)^{k-1}Q_{n-k}^*(x)}, \quad (12)$$

где  $Q_{n-k}^*(x)$  — частное от деления  $Q_n(x)$  на  $(x-a)^k$ .

Второе слагаемое в правой части равенства (12) — правильная дробь, число  $A$  и многочлен  $P(x)$  определяются однозначно.

○ Найдем такое число  $A$ , чтобы многочлен

$$\varphi(x) = P_m(x) - AQ_{n-k}^*(x) \quad (13)$$

делился без остатка на  $x-a$ . В формулах (12) и (13)  $Q_{n-k}^*$  — частное от деления  $Q_n(x)$  на  $(x-a)^k$ , т. е. многочлен, определяемый равенством (4) и условием (5).

Согласно теореме 1 многочлен  $\varphi(x)$  будет делиться без остатка на  $x-a$  в том и только том случае, когда  $\varphi(a) = 0$ , т. е.

$$P_m(a) - AQ_{n-k}^*(a) = 0,$$

откуда в силу условия (5) находим

$$A = \frac{P_m(a)}{Q_{n-k}^*(a)}. \quad (14)$$

Таким образом, число  $A$  является действительным и определяется однозначно формулой (14).

Так как многочлен  $\varphi(x)$ , где число  $A$  определяется формулой (14), делится без остатка на  $x-a$ , то существует единственный многочлен с действительными коэффициентами  $P(x)$  такой, что

$$\varphi(x) = (x-a)P(x). \quad (15)$$

Из равенств (13) и (15) следует, что

$$P_m(x) - AQ_{n-k}^*(x) = (x-a)P(x). \quad (16)$$

Разделив обе части равенства (16) на  $Q_n(x) = (x-a)^k Q_{n-k}^*(x)$ , получим соотношение (12).

Пусть  $r$  — степень многочлена  $\varphi(x)$ ; тогда  $r \leq \max(m, n-k)$ , где  $m < n$ ,  $n-k \leq n-1 < n$ , и поэтому  $r < n$ . Следовательно, дробь  $\frac{P(x)}{(x-a)^{k-1}Q_{n-k}^*(x)} = \frac{\varphi(x)}{Q_n(x)}$  является правильной. ●

Следствие. *Применив эту лемму  $k$  раз, получим равенство*

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \dots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{P^*(x)}{Q_{n-k}^*(x)}, \quad (17)$$

где числа  $A_1, \dots, A_k$  являются действительными,  $P^*(x)$  — многочлен с действительными коэффициентами, дробь  $\frac{P^*(x)}{Q_{n-k}^*(x)}$  является правильной, а число  $x = a$  не является корнем многочлена  $Q_{n-k}^*(x)$ .

**Лемма 2.** Если  $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$  — правильная дробь, а число  $x_0 = \gamma + i\delta$  — невещественный корень многочлена  $Q_n(x)$  кратности  $s$ , то существуют действительные числа  $B$  и  $D$ , а также многочлен  $\tilde{P}(x)$  с действительными коэффициентами такие, что

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{Bx + D}{(x^2 + px + q)^s} + \frac{\tilde{P}(x)}{(x^2 + px + q)^{s-1} \tilde{Q}_{n-2s}(x)}, \quad (18)$$

причем второе слагаемое в правой части равенства (18) — правильная дробь, числа  $B$ ,  $D$  и коэффициенты многочлена  $\tilde{P}(x)$  определяются однозначно, а многочлен  $\tilde{Q}_{n-2s}(x)$  — частное от деления  $Q_n(x)$  на  $(x^2 + px + q)^s$ , где  $x^2 + px + q = (x - x_0)(x - \bar{x}_0)$ .

○ Найдем такие числа  $B$  и  $D$ , чтобы многочлен

$$\psi(x) = P_m(x) - (Bx + D)\tilde{Q}_{n-2s}(x) \quad (19)$$

делился без остатка на  $x^2 + px + q$ . Это будет выполняться в силу теорем 1 и 2 тогда и только тогда, когда число  $x_0$  будет корнем многочлена  $\psi(x)$ , т. е. в случае, когда  $\psi(x_0) = 0$  или

$$P_m(x_0) - (Bx_0 + D)\tilde{Q}_{n-2s}(x_0) = 0. \quad (20)$$

Из равенства (20) в силу условия (10) получаем

$$Bx_0 + D = \frac{P_m(x_0)}{\tilde{Q}_{n-2s}(x_0)}. \quad (21)$$

Пусть  $c$  и  $d$  — соответственно действительная и мнимая части дроби, стоящей в правой части равенства (21). Тогда это равенство примет вид

$$D + B(\gamma + i\delta) = c + id,$$

откуда, предполагая, что  $B$  и  $D$  — действительные числа, получаем

$$\begin{cases} B\gamma + D = c, \\ \delta B = d. \end{cases} \quad (22)$$

Так как  $\delta \neq 0$ , то из системы уравнений (22) однозначно определяются действительные числа  $B$  и  $D$  такие, для которых выполняется условие  $\psi(x_0) = 0$ , и поэтому при значениях  $B$  и  $D$ , удовлетворяющих системе (22) или условию (21), многочлен  $\psi(x)$  делится без остатка на  $x^2 + px + q$ .

Следовательно, существует единственный многочлен с действительными коэффициентами  $\tilde{P}(x)$  такой, что

$$\psi(x) = (x^2 + px + q)\tilde{P}(x). \quad (23)$$

Из равенств (19) и (23) следует, что

$$P_m(x) - (Bx + D)\tilde{Q}_{n-2s}(x) = (x^2 + px + q)\tilde{P}(x). \quad (24)$$

Разделив обе части равенства (24) на  $Q_n(x) = (x^2 + px + q)^s \tilde{Q}_{n-2s}(x)$ , получим соотношение (18), в котором дробь  $\frac{\tilde{P}(x)}{(x^2 + px + q)^{s-1} \tilde{Q}_{n-2s}(x)} = \frac{\psi(x)}{Q_n(x)}$  является правильной. В самом деле, если  $r$  — степень многочлена  $\psi(x)$ , то  $r \leq m$  и  $r \leq n - 2s + 1$ , откуда следует, что  $r \leq n - 1$ . ●

*Следствие. Применив эту лемму  $s$  раз, получим*

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{B_s x + D_s}{(x^2 + px + q)^s} + \frac{B_{s-1} x + D_{s-1}}{(x^2 + px + q)^{s-1}} + \dots + \frac{B_1 x + D_1}{x^2 + px + q} + \frac{P^*(x)}{\tilde{Q}_{n-2s}(x)}, \quad (25)$$

где  $B_j, D_j$  ( $j = \overline{1, s}$ ) — действительные числа,  $P^*(x)$  — многочлен с действительными коэффициентами, дробь  $P^*(x)/\tilde{Q}_{n-2s}(x)$  является правильной, причем многочлен  $\tilde{Q}_{n-2s}(x)$  не делится нацело на  $x^2 + px + q$ .

*Теорема 4. Если  $P_m(x)$  и  $Q_n(x)$  — многочлены степеней  $m$  и  $n$  соответственно, причем  $m < n$  и коэффициенты этих многочленов — действительные числа, а  $Q_n(x)$  представляется в виде (11), то*

$$\begin{aligned} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} &= \frac{A_1^{(\alpha_1)}}{(x - a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_1^{(\alpha_1 - 1)}}{(x - a_1)^{\alpha_1 - 1}} + \dots + \frac{A_1^{(1)}}{x - a_1} + \dots \\ &\dots + \frac{A_k^{(\alpha_k)}}{(x - a_k)^{\alpha_k}} + \dots + \frac{A_k^{(1)}}{x - a_k} + \frac{B_1^{(\beta_1)} x + D_1^{(\beta_1)}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1}} + \dots \\ &\dots + \frac{B_1^{(1)} x + D_1^{(1)}}{x^2 + p_1 x + q_1} + \dots + \frac{B_s^{(\beta_s)} x + D_s^{(\beta_s)}}{(x^2 + p_s x + q_s)^{\beta_s}} + \dots + \frac{B_s^{(1)} x + D_s^{(1)}}{x^2 + p_s x + q_s}, \end{aligned}$$

или

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \sum_{l=1}^k \sum_{j=1}^{\alpha_l} \frac{A_l^{(j)}}{(x - a_l)^j} + \sum_{l=1}^s \sum_{j=1}^{\beta_l} \frac{B_l^{(j)} x + D_l^{(j)}}{(x^2 + p_l x + q_l)^j}. \quad (26)$$

Все коэффициенты разложения (26) являются действительными числами и определяются однозначно.

○ Применяя лемму 1, выделим сначала простые (элементарные) дроби вида  $A_1^{(p)}/(x - a_1)^p$ , где  $p$  принимает значения от 1 до  $\alpha_1$ . Затем к дроби  $P^*(x)/Q_{n-\alpha_1}^*(x)$  снова применим лемму 1 (формула (17)) и

т. д., пока не выделим простые дроби, соответствующие всем действительным корням многочлена  $Q_n(x)$ . В результате правильная дробь  $P_m(x)/Q_n(x)$  будет представлена в виде

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \sum_{l=1}^k \sum_{j=1}^{\alpha_l} \frac{A_l^{(j)}}{(x-a_l)^j} + \frac{P(x)}{Q_{n-t}^*(x)}, \quad (27)$$

где  $t = n - \sum_{l=1}^k \alpha_l$ ,  $P(x)/Q_{n-t}^*(x)$  — правильная дробь, а многочлен  $Q_{n-t}^*(x)$  не имеет действительных корней.

Применяя к каждой паре комплексно сопряженных корней многочлена  $Q_n(x)$  лемму 2 (формула (25)), получим

$$\frac{P(x)}{Q_{n-t}^*(x)} = \sum_{l=1}^s \sum_{j=1}^{\beta_l} \frac{B_l^{(j)}x + D_l^j}{(x^2 + px + q_l)^j}. \quad (28)$$

Из формул (27) и (28) следует равенство (26), которое дает разложение правильной рациональной дроби на простые (элементарные) дроби. ●

Например, если  $f(x) = \frac{x+1}{(x-1)^2(x+3)^2(x^2-3x+5)^2}$ , то разложение функции  $f(x)$  на простые дроби имеет вид

$$f(x) = \frac{A_1^{(1)}}{x-1} + \frac{A_1^{(2)}}{(x-1)^2} + \frac{A_2^{(1)}}{x+3} + \frac{A_2^{(2)}}{(x+3)^2} + \frac{A_2^{(3)}}{(x+3)^3} + \\ + \frac{B_1^{(1)}x + D_1^{(1)}}{x^2+1} + \frac{B_2^{(1)}x + D_2^{(1)}}{x^2-3x+5} + \frac{B_2^{(2)}x + D_2^{(2)}}{(x^2-3x+5)^2}.$$

**З а м е ч а н и е.** Для нахождения коэффициентов  $A_l^{(j)}$ ,  $B_l^{(j)}$ ,  $D_l^{(j)}$  разложения (26) обычно приводят простые дроби в правой части формулы (26) к общему знаменателю, который равен  $Q_n(x)$ . Тогда формулу (26) можно записать в виде  $P_m(x)/Q_n(x) = T(x)/Q_n(x)$ , откуда следует, что  $P_m(x) = T(x)$ .

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  многочленов  $P_m(x)$  и  $T(x)$ , получим линейную систему уравнений, из которой найдем коэффициенты разложения (26). Эта система в силу теоремы 4 имеет единственное решение.

### § 33. Интегрирование рациональных, иррациональных, тригонометрических и гиперболических функций

**1. Интегрирование рациональных функций.** В § 32 (теорема 4) было доказано, что всякая функция вида  $P_m(x)/Q_n(x)$ , где  $P_m$  и  $Q_n$  — многочлены с действительными коэффициентами степеней  $m$  и  $n$  соответственно и  $m < n$ , т. е. *правильная рациональная дробь*, представляется в виде суммы простых дробей вида

$$\frac{A}{(x-a)^r}, \quad r \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

$$\frac{Bx + D}{(x^2 + px + q)^k}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad p^2 - 4q < 0. \quad (2)$$

Если дробь  $P_m(x)/Q_n(x)$  является *неправильной* ( $m \geq n$ ), то, разделив числитель на знаменатель, например, способом “деления в столбик”, эту дробь можно записать в виде

$$P_m(x)/Q_n(x) = S(x) + R(x)/Q_n(x),$$

где  $S(x)$  — многочлен (частное от деления  $P_m$  на  $Q_n$ ),  $R(x)$  — остаток от деления,  $R(x)/Q_n(x)$  — правильная дробь. Например, дробь  $x^4/(x^2 - x + 1)$  является неправильной. Выполняя деление  $x^4$  на  $x^2 - x + 1$ , получаем

$$\begin{array}{r|l} x^4 & x^2 - x + 1 \\ -x^4 + x^3 - x^2 & x^2 + x \\ \hline x^3 - x^2 & \\ -x^3 + x^2 - x & \\ \hline -x & \end{array}$$

Следовательно,

$$\frac{x^4}{x^2 - x + 1} = x^2 + x - \frac{x}{x^2 - x + 1}. \quad (3)$$

Обратимся к интегрированию рациональных дробей. Рассмотрим сначала дроби вида (1). Если  $r = 1$ , то

$$\int \frac{A dx}{x - a} = A \ln |x - a| + C,$$

а если  $r > 1$ , то

$$\int \frac{A dx}{(x - a)^r} = \frac{A}{(1 - r)(x - a)^{r-1}} + C.$$

Таким образом, при интегрировании дроби (1) получается либо логарифмическая функция ( $r = 1$ ), либо правильная рациональная дробь ( $r > 1$ ).

Обозначим

$$J_k = \int \frac{Bx + D}{(x^2 + px + q)^k} dx.$$

Так как  $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$ , где  $q - \frac{p^2}{4} > 0$ , то, полагая

$\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} = a$ ,  $x + \frac{p}{2} = t$ , получаем

$$J_k = \int \frac{B\left(t - \frac{p}{2}\right) + D}{(t^2 + a^2)^k} dt.$$

Следовательно, интеграл  $J_k$  является линейной комбинацией интегралов

$$J'_k = \int \frac{t dt}{(t^2 + a^2)^k} \quad \text{и} \quad J''_k = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k}.$$

При  $k = 1$  эти интегралы соответственно равны:

$$J'_1 = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 + a^2)}{t^2 + a^2} = \frac{1}{2} \ln(t^2 + a^2) + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 + px + q) + C,$$

$$\begin{aligned} J''_1 &= \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} = \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C = \\ &= \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C. \end{aligned}$$

Если  $k > 1$ , то

$$J'_k = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 + a^2)}{(t^2 + a^2)^k} = \frac{1}{2(1-k)(x^2 + px + q)^{k-1}} + C,$$

а интеграл  $J''_k$  можно вычислить с помощью полученной в § 30 (пример 17) рекуррентной формулы, причем согласно этой формуле  $J''_k$  является линейной комбинацией правильной рациональной дроби и арктангенса.

Таким образом, интеграл от любой рациональной дроби представляется в виде линейной комбинации многочлена (если рассматривается неправильная дробь), правильной рациональной дроби, логарифмической функции и арктангенса.

**Пример 1.** Найти  $J = \int \frac{x^4}{x^2 - x + 1} dx$ .

△ Запишем равенство (3) в следующем виде:

$$\frac{x^4}{x^2 - x + 1} = x^2 + x - \frac{1}{2} \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{2} \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}.$$

Отсюда находим

$$J = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(x^2 - x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C. \quad \blacktriangle$$

**Пример 2.** Найти  $J = \int \frac{dx}{(x+2)(x-1)(x-3)}$ .

△ Так как подынтегральная функция — правильная рациональная дробь, а корни ее знаменателя являются вещественными и простыми (их кратность равна единице), то

$$\frac{1}{(x+2)(x-1)(x-3)} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x-3}. \quad (4)$$

Умножив обе части равенства (4) на знаменатель его левой части, получим

$$1 = A_1(x-1)(x-3) + A_2(x+2)(x-3) + A_3(x+2)(x-1). \quad (5)$$

Для нахождения чисел  $A_1, A_2, A_3$  можно приравнять коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  в тождестве (5). Однако существует более эффективный способ вычисления. Полагая в тождестве (5) сначала  $x = -2$ , затем  $x = 1$  и, наконец,  $x = 3$ , последовательно находим

$$1 = 15A_1, \quad 1 = -6A_2, \quad 1 = 10A_3,$$

откуда получаем

$$A_1 = \frac{1}{15}, \quad A_2 = -\frac{1}{6}, \quad A_3 = \frac{1}{10}.$$

Заметим, что число  $A_1$  можно найти из равенства (4), если умножить обе его части на  $x+2$ , а затем перейти к пределу при  $x \rightarrow -2$ . Тогда  $A_1 = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{(x-1)(x-3)} = \varphi(-2)$ , где  $\varphi(x) = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$  — функция, которая получается вычеркиванием множителя  $x+2$  в знаменателе левой части равенства (4). Тем же способом можно найти числа  $A_2$  и  $A_3$ .

Таким образом,

$$\frac{1}{(x+2)(x-1)(x-3)} = \frac{1}{15} \frac{1}{x+2} - \frac{1}{6} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{10} \frac{1}{x-3},$$

откуда

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{15} \ln|x+2| - \frac{1}{6} \ln|x-1| + \frac{1}{10} \ln|x-3| + C = \\ &= \frac{1}{30} \ln \frac{(x-2)^2|x-3|^3}{|x-1|^5} + C. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Пример 3. Найти  $J = \int \frac{3x^3 - 5x + 10}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 5)} dx$ .

$\Delta$  Так как подынтегральная функция  $f(x)$  — правильная дробь, а квадратный трехчлен  $x^2 + 2x + 5$  имеет невещественные корни, то

$$f(x) = \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{Bx+D}{x^2+2x+5},$$

откуда следует равенство

$$\begin{aligned} 3x^3 - 5x + 10 &= A_1(x^2 + 2x + 5) + A_2(x-1)(x^2 + 2x + 5) + \\ &+ (Bx + D)(x-1)^2. \quad (6) \end{aligned}$$

Полагая в тождестве (6)  $x = 1$ , находим  $8 = 8A_1$ , откуда  $A_1 = 1$ . Дифференцируя тождество (6), а затем полагая  $x = 1$  в полученном равенстве, находим  $4 = 4 + 4A_2$ , откуда  $A_2 = 0$ . Приравнивая коэффициенты при  $x^3$  и свободные члены в равенстве (6), получаем  $3 = B$ ,  $10 = 5A_1 + D$ , откуда  $D = 5$ .



Итак,  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = 0$ ,  $B = 3$ ,  $D = 5$ , и поэтому

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3x+5}{x^2+2x+5} = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3}{2} \frac{2x+2}{x^2+2x+5} + 2 \frac{1}{(x+1)^2+4},$$

откуда находим, что

$$J = -\frac{1}{x-1} + \frac{3}{2} \ln(x^2+2x+5) + \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C. \quad \blacktriangle$$

Пример 4. Найти  $\int \frac{dx}{x^4+1}$ .

$\Delta$  Используя равенство

$$x^4+1 = x^4+2x^2+1 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$$

и учитывая, что многочлен  $x^4+1$  не имеет действительных корней, получаем

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Bx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{B_1x+D_1}{x^2-\sqrt{2}x+1},$$

откуда

$$1 = (Bx+D)(x^2-\sqrt{2}x+1) + (B_1x+D_1)(x^2+\sqrt{2}x+1). \quad (7)$$

Сравнивая коэффициенты при  $x^3$ ,  $x^2$ ,  $x^1 = x$ ,  $x^0$  (свободные члены) в тождестве (7), получаем

$$\begin{array}{l|l} x^3 & 0 = B + B_1 \\ x^2 & 0 = -B\sqrt{2} + D + B_1\sqrt{2} + D_1 \\ x^1 & 0 = B - \sqrt{2}D + B_1 + \sqrt{2}D_1 \\ x^0 & 1 = D + D_1 \end{array}$$

Из первого, третьего и четвертого уравнения этой системы следует, что  $D = D_1$ ,  $2D = 1$ , откуда находим  $D = D_1 = \frac{1}{2}$ , а из первого, второго и четвертого уравнений получаем  $B_1 = -B$ ,  $2B\sqrt{2} = D + D_1 = 1$ , откуда  $B = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ ,  $B_1 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ .

Следовательно,

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

Так как

$$\begin{aligned} \int \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} dx + \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+\sqrt{2}x+1) + \operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1) + C_1, \end{aligned}$$

$$\int \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2-\sqrt{2}x+1) - \operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1) + C_2,$$

то

$$\int \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} (\operatorname{arctg}(x\sqrt{2} + 1) - \operatorname{arctg}(x\sqrt{2} - 1)) + C. \quad \blacktriangle$$

Замечание 1. Укажем другой способ вычисления коэффициентов  $B$ ,  $D$ ,  $B_1$ ,  $D_1$ . Заметим, что корни многочлена  $x^4 + 1$  определяются формулой

$$x_k = e^{i(\pi + 2k\pi)/4}, \quad \text{где } k = 0, 1, 2, 3,$$

причем  $x_0 = e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$  — корень трехчлена  $x^2 + \sqrt{2}x + 1$ , а  $x_3 = -x_0$  — корень трехчлена  $x^2 - \sqrt{2}x + 1$ . Полагая в (7)  $x = x_0$  и сравнивая в полученном соотношении действительные и мнимые части, найдем  $B_1$  и  $D_1$ . Аналогично, полагая в равенстве (7)  $x = -x_0$ , найдем  $B$  и  $D$ .

Замечание 2. В некоторых случаях для вычисления интеграла от рациональной дроби  $f(x)$  целесообразно вместо разложения ее на простые дроби применить какой-либо другой метод, например, преобразование дроби  $f(x)$ , использование подходящей подстановки или метода интегрирования по частям.

Пример 5. Найти интегралы от функций

$$\frac{x^4}{x^{10} + 2}, \quad \frac{x^2}{(x-1)^5}, \quad \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}, \quad \frac{1}{x^4(1+x^2)}.$$

$$\Delta \text{ а) } \int \frac{x^4}{x^{10} + 2} dx = \frac{1}{5} \int \frac{d(x^5)}{(x^5)^2 + 2} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^5}{\sqrt{2}} + C.$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \int \frac{x^2}{(x-1)^5} dx &= \int \frac{(x-1)^2 + 2(x-1) + 1}{(x-1)^5} dx = \\ &= -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{2}{3(x-1)^3} - \frac{1}{4(x-1)^4} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx &= \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{d\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{2}x} + C. \end{aligned}$$

$$\text{г) Так как } \frac{1}{x^4(1+x^2)} = \frac{1-x^4+x^4}{(1+x^2)x^4} = \frac{1-x^2}{x^4} + \frac{1}{1+x^2}, \text{ то}$$

$$\int \frac{1}{x^4(1+x^2)} dx = -\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x + C. \quad \blacktriangle$$

Замечание 3. В случае когда знаменатель  $Q(x)$  правильной рациональной дроби  $P(x)/Q(x)$  имеет кратные невещественные корни, удобно использовать (см., например, [2]) следующую формулу Остроградского:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} + \int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} dx, \quad (8)$$

где  $Q_1(x)$  — многочлен, имеющий те же корни, что и  $Q(x)$ , но кратности 1,  $Q(x) = Q_1(x)Q_2(x)$ ,  $P_1(x)$  и  $P_2(x)$  — многочлены, причем  $P_1/Q_1$  и  $P_2/Q_2$  — правильные дроби.

Второе слагаемое в правой части равенства (8) — интеграл, выражающийся через логарифм и арктангенс; это слагаемое называют *трансцендентной частью интеграла от  $P(x)/Q(x)$* .

*Метод Остроградского* (формула (8)) дает возможность найти рациональную часть интеграла (функцию  $P_2(x)/Q_2(x)$ ) алгебраическим путем (без интегрирования). Для нахождения многочленов  $P_1$  и  $P_2$  их записывают с неопределенными коэффициентами и вычисляют эти коэффициенты из соотношения, получаемого при дифференцировании тождества (8).

**2. Интегрирование иррациональных функций.** Многие часто встречающиеся в приложениях интегралы от иррациональных функций удается преобразовать в интегралы от рациональных функций с помощью различных подстановок.

Здесь и в дальнейшем будем обозначать буквой  $R$  рациональную функцию. Например, запись  $R(u, v)$  будет означать, что рассматривается *рациональная функция переменных  $u, v$* , т. е. функция, представляемая в виде  $R(u, v) = \frac{P(u, v)}{Q(u, v)}$ , где  $P$  и  $Q$  — многочлены относительно  $u$ , а коэффициенты этих многочленов являются многочленами относительно  $v$ . Так,  $\frac{u^2 - 3uv + 4v^2u^3 - 1}{u^4v + v - u^2v^2}$  — рациональная функция относительно  $u$  и  $v$ ,  $\frac{\sin^3 x - 3\operatorname{ctg} x + 1}{\cos^4 x - 2\operatorname{ctg}^2 x}$  — рациональная функция относительно  $\sin x$  и  $\cos x$ .

Рассмотрим некоторые типы интегралов от рациональных функций.

а) Интегралы вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right) dx, \quad (9)$$

где  $r_k \in \mathbb{Q}$  ( $k = \overline{1, n}$ ),  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $ad - bc \neq 0$ , подстановкой

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^p$$

( $p$  — общий знаменатель рациональных чисел  $r_1, \dots, r_n$ ) приводятся к интегралу от рациональной функции (см. [2]).

Например, при вычислении интеграла  $\int \frac{1 + 3\sqrt{x} + x^2}{5 - \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x^5}} dx$  можно применить подстановку  $x = t^6$ , так как подынтегральная функция является рациональной относительно переменных  $u = x$ ,  $v = x^{1/2}$ ,  $\omega = x^{2/3}$ ,  $r = x^{5/6}$ , а общий знаменатель дробей  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$  равен 6.

Чтобы вычислить интеграл  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^4(2+x)^5}}$ , целесообразно подынтегральную функцию  $f(x)$  записать в виде

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{2+x}{3-x}} \frac{1}{(2+x)^2(3-x)}.$$

Так как  $f(x)$  — функция, рациональная относительно  $x$  и  $\left(\frac{2+x}{3-x}\right)^{1/3}$ , то с помощью подстановки  $\frac{2+x}{3-x} = t^3$  данный интеграл сводится к интегралу от рациональной функции.

б) Интегралы вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx, \quad a \neq 0, \quad b^2 - 4ac \neq 0, \quad (10)$$

можно свести (см., например, [2]) к интегралам от рациональных функций с помощью *подстановок Эйлера*:

$$1) \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t \pm \sqrt{a}x, \quad a > 0, \quad (11)$$

$$2) \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm xt \pm \sqrt{c}, \quad c > 0, \quad (12)$$

$$3) \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t(x - x_1), \quad b^2 - 4ac > 0, \quad (13)$$

где  $x_1$  — один из корней квадратного трехчлена  $ax^2 + bx + c$ . Например, при вычислении интеграла  $\int \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{x\sqrt{x^2 - x + 1}} dx$  можно воспользоваться подстановкой (12), т. е.  $\sqrt{x^2 - x + 1} = xt + 1$ .

**З а м е ч а н и е 4.** Следует иметь в виду, что подстановки (11)–(13) часто приводят к громоздким вычислениям. Поэтому для нахождения интегралов вида (10) обычно применяют другие способы, о которых пойдет речь ниже.

Заметим, что подынтегральную функцию в (10) можно представить в виде

$$\frac{R_1(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + R_2(x),$$

где  $R_1$  и  $R_2$  — рациональные дроби. Записывая  $R_1(x)$  в виде суммы многочлена  $P_n(x)$  и суммы простых дробей, сведем интеграл (10) к линейной комбинации интегралов следующих трех типов:

$$а) \quad \int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx; \quad (14)$$

$$б) \quad \int \frac{dx}{(x-a)^r \sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad r \in \mathbb{N}; \quad (15)$$

$$в) \quad \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k \sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad p^2 - 4q < 0. \quad (16)$$

При нахождении интеграла (14), где  $P_n(x)$  — многочлен степени  $n$ , удобно использовать формулу

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = Q(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}. \quad (17)$$

В этой формуле  $Q(x)$  — многочлен степени не выше  $n - 1$ ,  $\lambda$  — некоторое число. Дифференцируя тождество (17) и умножая затем обе части получаемого соотношения на  $2\sqrt{ax^2 + bx + c}$ , находим

$$2P_n(x) = 2Q'(x)(ax^2 + bx + c) + Q(x)(2ax + b) + 2\lambda. \quad (18)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  в тождестве (18), вычислим коэффициенты многочлена  $Q(x)$  и число  $\lambda$ . Заметим, что интеграл в правой части формулы (17) сводится к табличному с помощью линейной подстановки.

Пример 6. Найти  $J = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$ .

$\Delta$  Воспользуемся формулой (18), где  $P_n(x) = x^2$ ,  $Q(x) = Ax + B$ . Получим тождество  $2x^2 = 2A(x^2 + x + 1) + (Ax + B)(2x + 1) + 2\lambda$ , откуда следует, что

$$2 = 2A + 2A, \quad 0 = 2A + A + 2B, \quad 0 = 2A + B + 2\lambda.$$

Поэтому

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{3}{4}, \quad \lambda = -\frac{1}{8}.$$

Так как

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = \int \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} = \ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}\right) + C,$$

то

$$J = \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)\sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{8}\ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}\right) + C. \quad \blacktriangle$$

Рассмотрим интеграл (15). Подстановкой

$$t = \frac{1}{x - \alpha}$$

этот интеграл сводится к интегралу (14).

Обратимся, наконец, к интегралу (16). Если существует число  $\omega$  такое, что для всех  $x \in R$  выполняется равенство  $ax^2 + bx + c = \omega(x^2 + px + q)$ , т. е.  $b = ap$ ,  $c = aq$ , то интеграл (16) можно представить в виде линейной комбинации интегралов

$$J_1 = \int \frac{(2x + p) dx}{(x^2 + px + q)^{k+1/2}} \quad \text{и} \quad J_2 = \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^{k+1/2}}.$$

Интеграл  $J_1$  сводится к табличному, а интеграл  $J_2$  подстановкой Абеля

$$u = (\sqrt{x^2 + px + q})' = \frac{2x + p}{2\sqrt{x^2 + px + q}} \quad (19)$$

сводится к интегралу от многочлена.

Если  $b \neq ap$ , то используется подстановка

$$x = \frac{\alpha t + \beta}{t + 1}, \quad (20)$$

где числа  $\alpha$  и  $\beta$  подбираются такими, чтобы коэффициенты при  $t$  в квадратных трехчленах подынтегральной функции обратились в нуль. При этом интеграл (16) примет вид

$$\int \frac{P(t) dt}{(t^2 + \lambda)^k \sqrt{\mu t^2 + \nu}}, \quad (21)$$

где  $P(t)$  — многочлен степени  $2k - 1$ ,  $\lambda > 0$ .

Заметим, что если  $b = ap$ , но  $c \neq aq$  (случай  $b = ap$ ,  $c = aq$  рассмотрен выше), то вместо подстановки (20) можно применить подстановку  $x = t - \frac{p}{2}$ .

Чтобы вычислить интеграл (21), разложим правильную рациональную дробь на простые дроби и представим интеграл (21) в виде линейной комбинации интегралов вида

$$J' = \int \frac{t dt}{(t^2 + \lambda)^m \sqrt{\mu t^2 + \nu}} \quad \text{и} \quad J'' = \int \frac{dt}{(t^2 + \lambda)^m \sqrt{\mu t^2 + \nu}}, \quad \text{где } m \in \mathbb{N}.$$

Интеграл  $J'$  вычисляется с помощью подстановки  $u^2 = \mu t^2 + \nu$ , а интеграл  $J''$  — с помощью подстановки Абеля  $v = \frac{\mu t}{\sqrt{\mu t^2 + \nu}}$ .

в) Интеграл вида

$$\int x^m (ax^n + b)^p dx, \quad (22)$$

где  $a, b$  — действительные,  $m, n, p$  — рациональные числа, причем  $a \neq 0, b \neq 0, n \neq 0, p \neq 0$ , называют *интегралом от дифференциального бинома*. Интеграл (22) сводится к интегралу от рациональной функции в следующих трех случаях ([2]):

$$1) p \in \mathbb{Z}; \quad 2) \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}; \quad 3) \frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}.$$

В первом случае применяется подстановка  $x = t^q$ , где  $q$  — общий знаменатель дробей  $m$  и  $n$ , во втором и третьем случаях — соответственно подстановки

$$ax^n + b = t^s \quad \text{и} \quad a + bx^{-n} = t^s,$$

где  $s$  — знаменатель дроби  $p$ .

Отметим, что эти случаи были известны еще Ньютону, но лишь в середине XIX века выдающийся русский математик Пафнутий Львович Чебышев доказал, что интеграл вида (22) в других случаях не выражается через элементарные функции.

Пример 7. Найти  $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ .

$\Delta$  Это интеграл вида (22), где  $m = 0$ ,  $n = 4$ ,  $p = -\frac{1}{4}$  и  $\frac{m+1}{n} + p = 0$ . Полагая  $t = (1+x^{-4})^{1/4}$ , получаем  $t^4 = 1+x^{-4}$ , откуда  $4t^3 dt = -4x^{-5} dx$ ,  $x^4 = \frac{1}{t^4-1}$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} &= \int \frac{x^4 dx}{x^5 \sqrt[4]{1+x^{-4}}} = \int \frac{1}{t(t^4-1)} (-t^3) dt = \\ &= \int \frac{t^2 dt}{1-t^4} = -\frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{t^2-1} + \frac{1}{t^2+1} \right) dt = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C = \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{1+x^4} + x}{\sqrt[4]{1+x^4} - x} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} + C. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

### 3. Интегрирование тригонометрических и гиперболических функций.

а) Интеграл вида

$$\int R(\sin x, \cos x) dx, \quad (23)$$

где  $R(u, v)$  — рациональная функция от  $u$  и  $v$ , можно свести к интегралу от рациональной дроби с помощью подстановки

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad x \in (-\pi, \pi), \quad (24)$$

так как

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2 dt}{1+t^2}.$$

Пример 8. Найти интегралы  $\int \frac{dx}{\sin x}$  и  $\int \frac{dx}{\cos x}$ .

$\Delta$  а) Применяя подстановку (24), получаем

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dt}{t} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C. \quad (25)$$

б) Используя формулу (25), находим

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right| + C. \quad \blacktriangle$$

Приведем другой способ вычисления интеграла (25):

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x} = \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x - 1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} + C.$$

Замечание 5. Подстановка (24), которую называют *универсальной*, часто приводит к громоздким вычислениям интеграла (23). Поэтому ее используют лишь в тех случаях, когда не видно других путей к вычислению интеграла (23).

Если подынтегральная функция  $R$  удовлетворяет одному из условий:

- а)  $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ ,
- б)  $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ ,
- в)  $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ ,

то для нахождения интеграла (23) можно использовать соответственно подстановки  $t = \cos x$ ,  $x \in (0, \pi)$ ;  $t = \sin x$ ,  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ;  $t = \operatorname{tg} x$ ,  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , или  $t = \cos 2x$ .

В приложениях часто встречаются интегралы вида

$$\int \sin^m x \cos^n x dx, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (26)$$

При вычислении интеграла вида (26) можно руководствоваться следующими правилами:

а) если  $m + n$  — четное число, то применяется либо подстановка  $t = \operatorname{tg} x$ , либо подстановка  $t = \cos 2x$ ;

б) если  $m + n$  — нечетное число, то используют подстановку  $t = \sin x$  или  $t = \cos x$ .

Пример 9. Найти интеграл вида (26) в следующих случаях:

- а)  $m = 0$ ,  $n = -6$ ;    б)  $m = 3$ ,  $n = 4$ ;
- в)  $m = 2$ ,  $n = 4$ ;    г)  $m = -1$ ,  $n = -3$ .

$\Delta$  а) Воспользуемся подстановкой  $t = \operatorname{tg} x$ . Так как  $\frac{dx}{\cos^2 x} = dt$ ,  $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + t^2$ , то  $\int \frac{dx}{\cos^6 x} = \int (1 + t^2)^2 dt = t + \frac{2}{3} t^3 + \frac{t^5}{5} + C = \operatorname{tg} x \left(1 + \frac{2}{3} \operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^4 x\right) + C$ .

$$\begin{aligned} \text{б) } \int \sin^3 x \cos^4 x dx &= \int (\cos^2 x - 1) \cos^4 x d(\cos x) = \\ &= \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + C. \end{aligned}$$

в) Воспользовавшись формулами  $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ ,  $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ , получаем

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^4 x dx &= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x (1 + \cos 2x) dx = \\ &= \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x) dx + \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d(\sin 2x) = \\ &= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C. \end{aligned}$$



г) Используя тождество  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , находим

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x} &= \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx + \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \\ &= -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^3 x} + \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{2 \cos^2 x} + \ln |\operatorname{tg} x| + C. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Пример 10. Найти интегралы от функций:

а)  $\sin x \sin 3x$ ; б)  $(\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x)^{-1}$ .

$\Delta$  а) Так как  $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$ , то

$$\int \sin x \sin 3x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 2x - \cos 4x) dx = \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 4x}{8} + C.$$

б) Разделив числитель и знаменатель на  $\cos^2 x$  и полагая  $\operatorname{tg} x = t$ , получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x} &= \int \frac{dx / \cos^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x + 5} = \\ &= \int \frac{dt}{(t+1)^2 + 4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{1 + \operatorname{tg} x}{2} \right) + C. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Интеграл вида

$$\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) dx, \quad (27)$$

где  $R(u, v)$  — рациональная функция от  $u$  и  $v$ , сводится к интегралу от рациональной дроби с помощью подстановки

$$t = \operatorname{th} \frac{x}{2},$$

$$\text{так как } \operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2 dt}{1-t^2}.$$

Иногда более эффективными при вычислении интеграла (27) могут оказаться подстановки  $t = \operatorname{sh} x$ ,  $t = \operatorname{ch} x$ ,  $t = \operatorname{th} x$ ,  $t = \operatorname{ch} 2x$  или метод интегрирования по частям.

Пример 11. Найти  $J = \int \operatorname{ch}^5 x \operatorname{sh}^4 x dx$ .

$\Delta$  Так как  $\operatorname{ch}^2 x = 1 + \operatorname{sh}^2 x$ ,  $\operatorname{ch} x dx = d(\operatorname{sh} x)$ , то, полагая  $\operatorname{sh} x = t$ , получаем

$$\begin{aligned} J &= \int (1+t^2)^2 t^4 dt = \frac{t^5}{5} + \frac{2t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + C = \\ &= \operatorname{sh}^5 x \left( \frac{1}{5} + \frac{2}{7} \operatorname{sh}^2 x + \frac{1}{9} \operatorname{sh}^4 x \right) + C. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

В заключение отметим, что интегралы от трансцендентных функций часто не выражаются через элементарные функции. К таким

интегралам относятся, например, следующие встречающиеся в приложениях интегралы:

- а)  $\int e^{-x^2} dx$  — интеграл Пуассона;  
 б)  $\int \sin x^2 dx$  и  $\int \cos x^2 dx$  — интегралы Френеля;  
 в)  $\int \frac{dx}{\ln x}$  — интегральный логарифм;  
 г)  $\int \frac{\sin x}{x} dx$  — интегральный синус;  
 д)  $\int \frac{\cos x}{x} dx$  — интегральный косинус.

### УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ VI

1. Доказать, что функция  $f(x) = \operatorname{sign} x$  не имеет ни одной первообразной на  $R$ .

2. Привести пример разрывной функции, имеющей первообразную на  $R$ .

3. Найти все первообразные функций  $x|x|$  и  $e^{|x|}$  на  $R$ .

4. Пусть  $P_n(x)$  — многочлен степени  $n$  и  $a \neq 0$ . Доказать формулу

$$\int P_n(x)e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{P_n^{(k)}(x)}{a^k} + C.$$

5. При каком условии первообразная функции  $\frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{ax^2 + bx + c}$ , где  $a \neq 0$ ,  $b^2 \neq 4ac$ , является рациональной функцией?

6. Доказать, что для интеграла  $J_{n,m} = \int \sin^n x \cos^m x dx$ , где  $n \in N$ ,  $m \in N$ , справедлива рекуррентная формула

$$J_{n,m} = -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{n+m} + \frac{n-1}{n+m} J_{n-2,m}.$$

7. Пусть  $F(x)$  — первообразная для функции  $f(x)$  на всей числовой прямой. Доказать или опровергнуть следующие утверждения:

а) если  $f(x)$  — периодическая функция, то и  $F(x)$  — периодическая функция;

б)  $f(x)$  — нечетная функция, то  $F(x)$  — четная функция;

в) если  $f(x)$  — четная функция, то  $F(x)$  — нечетная функция.

8. Пусть  $P_n(x)$  — многочлен степени  $n$ . При каком условии первообразная для функции  $\frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}}$  является рациональной функцией?

# ГЛАВА VII

## ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

### § 34. Определение и условия существования определенного интеграла

#### 1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.

а) *Площадь криволинейной трапеции.* Пусть функция  $f$  непрерывна на отрезке  $\Delta = [a, b]$  и неотрицательна, т. е.  $f(x) \geq 0$  при всех  $x \in \Delta$ . Рассмотрим фигуру  $G$  (рис. 34.1), ограниченную отрезками  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = 0$  и графиком функции  $y = f(x)$ , т. е.

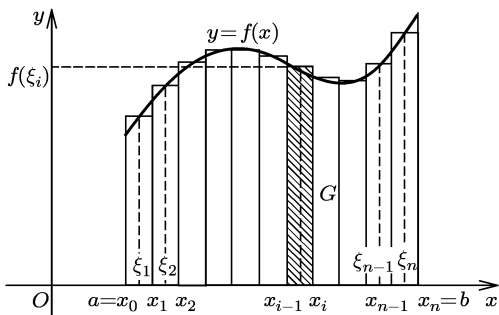


Рис. 34.1

$$G = \{(x, y): a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Такую фигуру называют *криволинейной трапецией*, а отрезок  $\Delta$  — ее основанием.

Разобьем отрезок  $\Delta$  на  $n$  частей точками  $x_i$  ( $i = \overline{1, n-1}$ ), где  $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-2} < x_{n-1}$ , и проведем через эти точки прямые, параллельные оси  $Oy$ . Тогда фигура  $G$  разобьется на  $n$  частей, каждая из которых является криволинейной трапецией.

Обозначим  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $x_0 = a$ ,  $x_n = b$ , и пусть  $\xi_i \in \Delta_i$ , где  $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Тогда сумма

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

зависящая от разбиения отрезка  $\Delta$  и выбора точек  $\xi_i$ , равна площади ступенчатой фигуры (рис. 34.1), составленной из  $n$  прямоугольников, причем основанием  $i$ -го прямоугольника служит отрезок  $\Delta_i$ , а длина его высоты равна  $f(\xi_i)$ . Интуитивно ясно, что эта ступенчатая фигура будет мало отличаться от исходной фигуры  $G$  при достаточно мелком разбиении.

Будем увеличивать число точек разбиения так, чтобы наибольшая

из длин отрезков  $\Delta_i$  стремилась к нулю. Если при этом сумма  $\sigma$  будет иметь предел  $S$ , не зависящий ни от способа дробления отрезка  $\Delta$ , ни от выбора точек  $\xi_i$ , то естественно считать, что площадь фигуры  $G$  равна  $S$ . Существование этого предела будет доказано в п. 6.

**Пример 1.** Найти площадь фигуры, ограниченной параболой  $y = x^2$  и отрезками прямых  $x = a$ , где  $a > 0$ , и  $y = 0$  (рис. 34.2).

$\Delta$  Пользуясь тем, что предел суммы  $\sigma$  для непрерывной функции  $f(x) = x^2$  (см. п. 6) не зависит от способа дробления отрезка  $\Delta = [0, a]$  и выбора точек  $\xi_i$ , будем считать, что отрезок  $\Delta$  разбит на  $n$  отрезков равной длины, а в качестве точки  $\xi_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) взят правый конец отрезка  $\Delta_i$ . Тогда  $\xi_i = x_i = \frac{a}{n} i$ ,  $\Delta x_i = \frac{a}{n}$ ,

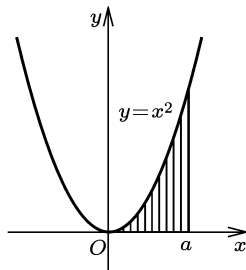


Рис. 34.2

$$\sigma = \sum_{i=1}^n x_i^2 \Delta x_i = \frac{a^3}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2.$$

Так как  $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  (§ 3, пример 2, в)), то  $\sigma = \frac{a^3}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{2n}\right)$ , откуда  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma = \frac{a^3}{3}$ . Поэтому искомая площадь равна  $\frac{a^3}{3}$ . ▲

Заметим, что этот результат был получен еще Архимедом с помощью предельного перехода. В § 36 будет дан простой способ нахождения предела для  $\sigma$ , основанный на формуле Ньютона–Лейбница.

б) *Работа переменной силы.* Пусть материальная точка движется вдоль числовой прямой  $Ox$  под действием силы  $P$ , причем направление действия силы совпадает с направлением движения материальной точки. Предположим, что сила  $P$  задана как непрерывная функция от координаты  $x$  этой прямой, т. е.  $P = P(x)$ .

Найдем работу силы  $P$  при перемещении материальной точки от  $x = a$  до  $x = b$ . Разобьем отрезок  $[a, b]$ , как и в задаче о площади криволинейной трапеции, точками  $x_i$  и выберем  $\xi_i \in \Delta_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ). Тогда работа силы  $P$  на отрезке  $\Delta_i$  приближенно равна  $P(\xi_i)\Delta x_i$ , а на отрезке  $[a, b]$  работу этой силы можно считать приближенно равной

сумме  $\sum_{i=1}^n P(\xi_i)\Delta x_i$ . Предел этой суммы (при тех же условиях, что и в задаче о площади) естественно назвать *работой переменной силы при перемещении материальной точки из точки  $a$  в точку  $b$* .

В рассмотренных задачах речь идет о нахождении предела сумм вида  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ , которые называют интегральными суммами. К вы-

числению предела таких сумм сводится решение многих важных задач из геометрии, физики, техники и других дисциплин. Поэтому вопросы, связанные с обоснованием предельного перехода описанного типа, заслуживают всестороннего изучения.

**2. Понятие определенного интеграла.** Пусть функция одного переменного  $f(x)$  определена на отрезке  $[a, b]$  и пусть  $x_i$  ( $i = \overline{0, n}$ ) — совокупность точек этого отрезка таких, что

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Назовем эту совокупность точек *разбиением отрезка*  $[a, b]$ , обозначим разбиение  $T = \{x_i, i = \overline{0, n}\}$ , а отрезки  $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ , где  $i = \overline{1, n}$ , назовем *отрезками разбиения*  $T$ .

Пусть  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  — длина  $i$ -го отрезка разбиения  $T$ . Тогда число  $l(T) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$  назовем *мелкостью разбиения*  $T$  (или *диаметром этого разбиения*). Если  $\xi_i \in \Delta_i$ , то совокупность точек  $\xi_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) назовем *выборкой* и обозначим  $\xi = \{\xi_i, i = \overline{1, n}\}$ .

Сумму

$$\sigma_T(\xi, f) = \sigma_T(\xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad (1)$$

назовем *интегральной суммой для функции  $f$  при заданном разбиении  $T$  и фиксированной выборке  $\xi$* .

**Определение.** Число  $J$  называется *определенным интегралом от функции  $f$  на отрезке  $[a, b]$*  и обозначается  $\int_a^b f(x) dx$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , что для любого разбиения  $T$ , мелкость которого  $l(T) < \delta$ , и для любой выборки  $\xi$  выполняется неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - J \right| < \varepsilon.$$

С помощью символов это определение можно записать так:

$$\left\{ J = \int_a^b f(x) dx \right\} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0: \quad \forall T: l(T) < \delta(\varepsilon) \quad \forall \xi \rightarrow \\ \rightarrow |\sigma_T(\xi, f) - J| < \varepsilon. \quad (2)$$

Часто утверждение (2) кратко записывают в виде  $\sigma_T(\xi) \rightarrow J$  при  $l(T) \rightarrow 0$  или  $\lim_{l(T) \rightarrow 0} \sigma_T(\xi) = J$ , имея в виду, что предел не зависит от выборки  $\xi$ .

Если существует число  $J$ , определяемое условиями (2), то функцию  $f$  называют *интегрируемой (по Риману) на отрезке  $[a, b]$  и говорят, что существует интеграл от функции  $f$  на отрезке  $[a, b]$* .

### 3. Необходимое условие интегрируемости функции.

Теорема 1. Если функция  $f(x)$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ , то она ограничена на этом отрезке.

○ Пусть функция  $f$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ . Тогда существует число  $J$ , удовлетворяющее условию (2). Полагая в (2)  $\varepsilon = 1$ , получаем неравенство

$$J - 1 < \sigma_T(\xi, f) < J + 1, \quad (3)$$

которое должно выполняться для любого разбиения  $T$  такого, что  $l(T) < \delta_1 = \delta(1)$ , и при любой выборке  $\xi$ .

Зафиксируем разбиение  $T$ , удовлетворяющее условию  $l(T) < \delta_1$ , и предположим, что функция  $f$  не ограничена на отрезке  $[a, b]$ . Тогда она не ограничена по крайней мере на одном из отрезков  $\Delta_i$  разбиения  $T$ . Без ограничения общности можно считать, что функция  $f$  не ограничена на отрезке  $\Delta_1 = [x_0, x_1] = [a, x_1]$ .

Фиксируем точки  $\xi_2, \dots, \xi_n$ , где  $\xi_i \in \Delta_i$ ,  $i = \overline{2, n}$ , и обозначим  $A = \sum_{i=2}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ . Тогда  $\sigma_T = A + f(\xi_1) \Delta x_1$  и в силу (3) получаем неравенства

$$J - 1 < f(\xi_1) \Delta x_1 + A < J + 1, \quad (4)$$

которые должны выполняться для любого  $\xi_1 \in \Delta_1$ .

Так как  $\Delta x_1 > 0$ , то двойное неравенство (4) равносильно неравенству

$$\frac{1}{\Delta x_1} (J - 1 - A) < f(\xi_1) < \frac{1}{\Delta x_1} (J + 1 - A),$$

из которого следует, что функция  $f$  ограничена на  $\Delta_1$ , что противоречит предположению о неограниченности функции  $f$  на отрезке  $\Delta_1$ .

Итак, предположение о неограниченности  $f$  на  $[a, b]$  приводит к противоречию. Теорема доказана. ●

Замечание 1. Ограниченность функции не является достаточным условием ее интегрируемости. Так, функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in J, \end{cases}$$

не интегрируема на отрезке  $[0, 1]$ , хотя и ограничена.

○ Действительно, если выборки  $\xi$  и  $\xi'$  состоят соответственно из рациональных и иррациональных точек, то  $\sigma_T(\xi) = 1$ , а  $\sigma_T(\xi') = 0$  для любого разбиения  $T$  отрезка  $[0, 1]$ . Поэтому не существует предела интегральных сумм при  $l(T) \rightarrow 0$ . ●

**4. Суммы Дарбу и их свойства.** Пусть функция  $f$ , определенная на отрезке  $[a, b]$ , ограничена на этом отрезке и пусть  $T = \{x_i, i = \overline{0, n}\}$  — разбиение отрезка  $[a, b]$ ,  $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ ,  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

( $i = \overline{1, n}$ ). Обозначим

$$\begin{aligned} M_i &= \sup_{x \in \Delta_i} f(x), & m_i &= \inf_{x \in \Delta_i} f(x), \\ S_T &= \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, & s_T &= \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i. \end{aligned} \quad (5)$$

Назовем  $S_T$  и  $s_T$  соответственно *верхней и нижней суммами Дарбу для функции  $f$  при заданном разбиении  $T$  отрезка  $[a, b]$* . Заметим, что эти суммы не зависят от выборки  $\xi$ . Рассмотрим свойства сумм Дарбу.

*Свойство 1. Для любой выборки  $\xi$  справедливы неравенства*

$$s_T \leq \sigma_T(\xi) \leq S_T. \quad (6)$$

○ Так как для любого  $\xi_i \in \Delta_i$  выполняются неравенства

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i,$$

то

$$m_i \Delta x_i \leq f(\xi_i) \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i. \quad (7)$$

Согласно определению сумм Дарбу и интегральной суммы  $\sigma$  утверждения (7) и (6) равносильны. ●

*Свойство 2. Справедливы равенства*

$$S_T = \sup_{\xi} \sigma_T(\xi), \quad (8)$$

$$s_T = \inf_{\xi} \sigma_T(\xi). \quad (9)$$

○ Докажем утверждение (8). Согласно определению точной верхней грани нужно доказать, что выполняются следующие условия:

$$\forall \varepsilon \rightarrow \sigma_T(\xi) \leq S_T, \quad \varepsilon > 0 \quad \exists \xi': S_T - \sigma_T(\xi') < \varepsilon.$$

Первое из этих условий выполняется в силу (6). Докажем второе условие.

Так как  $M_i = \sup_{x \in \Delta_i} f(x)$ , то по определению точной верхней грани

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \xi'_i = \xi'_i(\varepsilon) \in \Delta_i: 0 \leq M_i - f(\xi'_i) < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Умножая  $i$ -е неравенство на  $\Delta x_i$  и складывая все получаемые неравенства, находим

$$0 \leq S_T - \sigma_T(\xi') < \varepsilon,$$

где  $\xi' = \{\xi'_i, i = \overline{1, n}\}$  — выборка. Итак, утверждение (8) доказано. Аналогично доказывается, что справедливо и утверждение (9). ●

Следующее свойство сумм Дарбу связано с еще одним понятием для разбиений. Назовем разбиение  $T_2$  *продолжением (измельчением) разбиения*  $T_1$ , если каждая точка разбиения  $T_1$  является точкой разбиения  $T_2$ . Иначе говоря, разбиение  $T_2$  либо совпадает с разбиением  $T_1$ , либо получено из  $T_1$  добавлением по крайней мере одной новой точки.

Свойство 3. Если разбиение  $T_2$  — продолжение разбиения  $T_1$ , то

$$s_{T_1} \leq s_{T_2} \leq S_{T_2} \leq S_{T_1}, \quad (10)$$

т. е. при измельчении разбиения нижняя сумма Дарбу не уменьшается, а верхняя не увеличивается.

○ Для доказательства неравенств (10) достаточно рассмотреть случай, когда разбиение  $T_2$  получается из разбиения  $T_1$  добавлением только одной точки  $x' \in (x_{i-1}, x_i)$ . Пусть  $\Delta'_i$  и  $\Delta''_i$  — отрезки, на которые точка  $x'$  разбивает отрезок  $\Delta_i$ , а  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — длины этих отрезков; тогда  $\Delta x_i = \lambda_1 + \lambda_2$ . Обозначим  $m'_i = \inf_{x \in \Delta'_i} f(x)$ ,  $m''_i = \inf_{x \in \Delta''_i} f(x)$ .

Очевидно, что  $m'_i \geq m_i$ ,  $m''_i \geq m_i$ .

В суммах  $s_{T_2}$  и  $s_{T_1}$  равны все соответствующие слагаемые, за исключением тех, которые связаны с отрезком  $\Delta_i$ . Поэтому

$$s_{T_2} - s_{T_1} = m'_i \lambda_1 + m''_i \lambda_2 - m_i (\lambda_1 + \lambda_2),$$

где  $m'_i \geq m_i$ ,  $m''_i \geq m_i$ . Следовательно,

$$s_{T_2} - s_{T_1} = (m'_i - m_i) \lambda_1 + (m''_i - m_i) \lambda_2 \geq 0, \quad \text{т. е. } s_{T_1} \leq s_{T_2}.$$

Аналогично доказывается неравенство  $S_{T_2} \leq S_{T_1}$ . Отсюда, используя неравенство  $s_{T_2} \leq S_{T_2}$  (см. (6)), получаем цепочку неравенств (10). ●

Свойство 4. Для любых разбиений  $T'$  и  $T''$  справедливо неравенство

$$s_{T'} \leq s_{T''}. \quad (11)$$

○ Пусть разбиение  $T$  является продолжением как разбиения  $T'$ , так и разбиения  $T''$  (в качестве  $T$  можно взять  $T'$  и добавить к нему те точки разбиения  $T''$ , которые не входят в  $T'$ ).

Из неравенств (10) при  $T_1 = T'$ ,  $T_2 = T$  получаем

$$s_{T'} \leq s_T \leq S_T.$$

Полагая в (10)  $T_2 = T$  и  $T_1 = T''$ , находим

$$S_T \leq S_{T''}.$$

Объединяя полученные неравенства, имеем

$$s_{T'} \leq s_T \leq S_T \leq S_{T''},$$

откуда следует неравенство (11). ●



Свойство 5. *Существуют числа*

$$\underline{J} = \sup_T s_T, \quad \bar{J} = \inf_T S_T,$$

*удовлетворяющие для любых разбиений  $T'$  и  $T''$  отрезка  $[a, b]$  условию*

$$s_{T'} \leq \underline{J} \leq \bar{J} \leq S_{T''}. \quad (12)$$

*Эти числа называют соответственно нижним и верхним интегралами Дарбу от функции  $f$  на отрезке  $[a, b]$ .*

○ Из неравенства (11) по теореме об отделимости числовых множеств (§ 2, теорема 2) следует, что существуют  $\underline{J} = \sup s_T$  и  $\bar{J} = \inf S_T$  (супремум и инфимум по всевозможным разбиениям отрезка  $[a, b]$ ) и для любых разбиений  $T'$  и  $T''$  выполняется неравенство (12). ●

В заключение отметим, что свойства 1–5 справедливы для любой ограниченной на отрезке  $[a, b]$  функции.

### 5. Критерий интегрируемости функции.

*Теорема 2. Для того чтобы функция  $f(x)$ , определенная на отрезке  $[a, b]$ , была интегрируемой на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы эта функция была ограничена и удовлетворяла условию*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0: \forall T: l(T) < \delta_\varepsilon \rightarrow 0 \leq S_T - s_T < \varepsilon. \quad (13)$$

○ *Необходимость.* Пусть функция  $f$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ . Тогда она ограничена (теорема 1) и в силу определения интеграла

$$\exists J: \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0: \forall T: l(T) < \delta_\varepsilon \quad \forall \xi \rightarrow J - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_T(\xi) < J + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Таким образом, при каждом разбиении  $T$  отрезка  $[a, b]$ , мелкость которого удовлетворяет условию  $l(T) < \delta_\varepsilon$ , неравенство

$$J - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_T(\xi) < J + \frac{\varepsilon}{3} \quad (14)$$

выполняется при любой выборке  $\xi$ . Поэтому из левого неравенства (14) и равенства (9) следует, что

$$J - \frac{\varepsilon}{3} \leq \inf_\xi \sigma_T(\xi) = s_T. \quad (15)$$

Аналогично из правого неравенства (14) и равенства (8) следует, что

$$S_T = \sup_\xi \sigma_T(\xi) \leq J + \frac{\varepsilon}{3}. \quad (16)$$

Из неравенств (15), (6) и (16) получаем цепочку неравенств

$$J - \frac{\varepsilon}{3} \leq s_T \leq S_T \leq J + \frac{\varepsilon}{3},$$

откуда следует, что

$$0 \leq S_T - s_T \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Итак, интегрируемая на отрезке функция  $f$  удовлетворяет условию (13).

Достаточность. Пусть функция  $f$  ограничена на отрезке  $[a, b]$  и удовлетворяет условию (13). Докажем, что функция  $f$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ , т. е.

$$\exists J: \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0: \forall T: l(T) < \delta_\varepsilon \quad \forall \xi \rightarrow |\sigma_T(\xi) - J| < \varepsilon. \quad (17)$$

Воспользуемся свойством 5. Из неравенств (12) следует, что

$$0 \leq \overline{J} - \underline{J} \leq S_T - s_T,$$

откуда в силу (13) получаем неравенство

$$0 \leq \overline{J} - \underline{J} \leq S_T - s_T < \varepsilon,$$

справедливое для любого разбиения  $T$  такого, что  $l(T) < \delta_\varepsilon$ . Так как числа  $\overline{J}$  и  $\underline{J}$  не зависят от  $T$ , то отсюда следует, что

$$\overline{J} = \underline{J}.$$

Обозначим

$$J = \overline{J} = \underline{J} \quad (18)$$

и докажем, что число  $J$  есть интеграл от функции  $f$  на отрезке  $[a, b]$ .

Из (12) и (18) следует, что

$$s_T \leq J \leq S_T, \quad (19)$$

а из (19) и (6) в силу (13) получаем

$$|\sigma_T(\xi) - J| \leq S_T - s_T < \varepsilon.$$

Это означает, что функция  $f$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ , а число  $J$  есть интеграл от  $f(x)$  на  $[a, b]$ . ●

*Следствие.* Если функция  $f$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ , а число  $J$  — ее интеграл на этом отрезке, то

$$J = \sup s_T = \inf S_T.$$

*Замечание 2.* Назовем колебанием функции  $f$  на отрезке  $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$  разбиения  $T = \{x_i, i = \overline{0, n}\}$  число

$$\omega_i(f) = \omega_i = M_i - m_i,$$

где  $M_i = \sup_{x \in \Delta_i} f(x)$ ,  $m_i = \inf_{x \in \Delta_i} f(x)$ . Тогда

$$S_T - s_T = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i.$$

Условие интегрируемости (13) часто записывают в виде

$$S_T - s_T = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad l(T) \rightarrow 0. \quad (20)$$

*Замечание 3.* При доказательстве свойств интеграла (§ 35, п. 1) будет использовано следующее равенство:

$$\omega_i(f) = \sup_{x', x'' \in \Delta_i} |f(x'') - f(x')|. \quad (21)$$

○ Согласно определению точной верхней грани равенство (21) означает, что выполняются следующие условия:

$$|f(x'') - f(x')| \leq M_i - m_i \quad \text{для любых } x', x'' \in \Delta_i; \quad (22)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x'_\varepsilon \in \Delta_i \exists x''_\varepsilon \in \Delta_i: M_i - m_i - \varepsilon < |f(x''_\varepsilon) - f(x'_\varepsilon)|. \quad (23)$$

Заметим, что формула (21) справедлива, если  $M_i = m_i$ , так как в этом случае  $f(x) = M_i = m_i$  для всех  $x \in \Delta_i$ . Пусть  $M_i > m_i$ , тогда для любых  $x', x'' \in \Delta_i$  справедливы неравенства  $m_i \leq f(x') \leq M_i$ ,  $m_i \leq f(x'') \leq M_i$ , откуда следует, что выполняется условие (22).

Для доказательства условия (23) зададим произвольное число  $\varepsilon > 0$ , удовлетворяющее условию  $\varepsilon < M_i - m_i$ . В силу определения точных граней найдутся точки  $x'_\varepsilon \in \Delta_i$ ,  $x''_\varepsilon \in \Delta_i$  такие, что

$$f(x'_\varepsilon) < m_i + \frac{\varepsilon}{2} < M_i - \frac{\varepsilon}{2} < f(x''_\varepsilon),$$

откуда следует, что выполняется условие (23). ●

Замечание 4. Можно доказать, что если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое разбиение  $\tilde{T} = \tilde{T}(\varepsilon)$ , что  $S_{\tilde{T}} - s_{\tilde{T}} < \varepsilon$ , то найдется число  $\delta > 0$  такое, что для любого разбиения  $T$ , мелкость которого  $l(T) < \delta$ , выполняется неравенство  $S_T - s_T < \varepsilon$  (см., например, [1, т. 1]). Поэтому критерий интегрируемости можно сформулировать так: для того чтобы ограниченная функция  $f$  была интегрируема по Риману на отрезке  $[a, b]$ , необходимо и достаточно, чтобы для любого  $\varepsilon > 0$  существовало такое разбиение  $T$  отрезка  $[a, b]$ , что

$$S_T - s_T < \varepsilon.$$

## 6. Классы интегрируемых функций.

Теорема 3. Если функция непрерывна на отрезке, то она интегрируема на этом отрезке.

○ Пусть функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ . Тогда по теореме Кантора она равномерно непрерывна на этом отрезке, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0: \forall x', x'' \in [a, b]: |x' - x''| < \delta \rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \quad (24)$$

Докажем, что для функции  $f$  выполняется условие (13). Пусть  $T = \{x_i, i = \overline{0, n}\}$  — произвольное разбиение отрезка  $[a, b]$  такое, что его мелкость  $l(T) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i < \delta$ , где  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ . По теореме

Вейерштрасса существуют точки  $\xi'_i, \xi''_i \in \Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$  такие, что  $f(\xi'_i) = m_i$ ,  $f(\xi''_i) = M_i$ , где  $m_i = \inf_{x \in \Delta_i} f(x)$ ,  $M_i = \sup_{x \in \Delta_i} f(x)$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Поэтому из условия (24) следует, что  $\omega_i = M_i - m_i = f(\xi''_i) - f(\xi'_i) < \frac{\varepsilon}{b-a}$ , так как  $|\xi''_i - \xi'_i| \leq \Delta x_i \leq l(T) < \delta$ . Отсюда получаем

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon.$$

Итак,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0: \forall T: l(T) < \delta \rightarrow S_T - s_T = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \varepsilon,$$

и по теореме 2 функция  $f$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ . ●

Упражнение 1. Доказать теорему 3, используя понятие модуля непрерывности функции.

Пример 2. Доказать, пользуясь определением интеграла и теоремой 3, что:

$$\text{а) } \int_a^b dx = b - a; \quad \text{б) } \int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

△ Функции  $f(x) = 1$  и  $f(x) = x$  непрерывны на отрезке и в силу теоремы 3 интегрируемы. Пусть  $T = \{x_i, i = \overline{0, n}\}$  — произвольное разбиение отрезка  $[a, b]$ .

а) Если  $f(x) = 1$ , то  $\sigma_T(\xi) = \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = b - a$ , откуда  $\lim_{l(T) \rightarrow 0} \sigma_T(\xi) = b - a$ , и поэтому  $\int_a^b dx = b - a$ .

б) Пусть  $\xi_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$ , тогда  $\xi_i \in \Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$  для  $i = \overline{1, n}$ , и, следовательно,  $\sigma_T(\xi) = \sum_{i=1}^n \xi_i \Delta x_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - x_{i-1}^2) = \frac{1}{2} (b^2 - a^2)$ , откуда  $\lim_{l(T) \rightarrow 0} \sigma_T(\xi) = \frac{1}{2} (b^2 - a^2)$ .

Так как функция  $f(x) = x$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ , то из определения интеграла следует, что предел интегральной суммы не зависит от выбора точек  $\xi_i$  на отрезках  $\Delta_i$ . Поэтому

$$\int_a^b x dx = \frac{1}{2} (b^2 - a^2). \quad \blacktriangle$$

Теорема 4. Если функция определена на отрезке и монотонна, то она интегрируема на этом отрезке.

○ Пусть, например, функция  $f$  является возрастающей на отрезке  $[a, b]$ ; тогда для всех  $x \in [a, b]$  выполняется условие

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b),$$

и поэтому функция  $f$  ограничена на отрезке  $[a, b]$ .

Рассмотрим произвольное разбиение  $T = \{x_i, i = \overline{0, n}\}$  отрезка  $[a, b]$ . Тогда  $f(x_{i-1}) = m_i$ ,  $f(x_i) = M_i$ , где  $m_i = \inf_{x \in \Delta_i} f(x)$ ,  $M_i = \sup_{x \in \Delta_i} f(x)$ ,  $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ . Следовательно, получаем  $S_T - s_T = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \Delta x_i$ , откуда  $S_T - s_T \leq$

$$\leq l(T) \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) = l(T)(f(b) - f(a)), \text{ так как}$$

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) \geq 0, \quad \Delta x_i \leq \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i = l(T).$$

Отсюда имеем, что  $S_T - s_T \rightarrow 0$  при  $l(T) \rightarrow 0$ . По теореме 2 функция  $f$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ . ●

### § 35. Свойства определенного интеграла

Заметим сначала, что если функция  $f$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ , то интеграл от этой функции является числом, не зависящим от того, какой буквой обозначен аргумент подынтегральной функции, т. е.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(z) dz.$$

Иногда бывает удобно вместо записи  $\int_a^b f(x) dx$  использовать запись  $\int_{\Delta} f(x) dx$ , где  $\Delta = [a, b]$ .

Перейдем к рассмотрению свойств определенного интеграла. Все отмеченные ниже свойства доказываются в предположении, что подынтегральная функция ограничена на отрезке, по которому она интегрируется.

#### 1. Свойства, связанные с операциями над функциями.

**Свойство 1.** Если функции  $f$  и  $g$  интегрируемы на отрезке  $[a, b]$ , то для любых чисел  $\alpha$  и  $\beta$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ ) функция  $\varphi(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$  также интегрируема на отрезке  $[a, b]$  и справедливо равенство

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx. \quad (1)$$

○ Пусть  $\sigma_T(\xi; \varphi)$ ,  $\sigma_T(\xi; f)$ ,  $\sigma_T(\xi; g)$  — интегральные суммы для функций  $\varphi$ ,  $f$  и  $g$  соответственно при заданном разбиении  $T$  отрезка  $[a, b]$  и фиксированной выборке  $\xi$ . Тогда имеет место равенство

$$\sigma_T(\xi; \varphi) = \alpha \sigma_T(\xi; f) + \beta \sigma_T(\xi; g).$$

Если мелкость разбиения  $T$  стремится к нулю ( $l(T) \rightarrow 0$ ), то правая часть этого равенства в силу интегрируемости функций  $f$  и  $g$  на отрезке  $[a, b]$  имеет предел, а поэтому существует предел и в левой части и при этом справедливо равенство (1). ●

**Свойство 2.** Если функции  $f$  и  $g$  интегрируемы на отрезке  $[a, b]$ , то функция  $\varphi(x) = f(x)g(x)$  также интегрируема на этом отрезке.

○ Из интегрируемости функций  $f$  и  $g$  следует, что эти функции ограничены на отрезке  $[a, b]$ , и поэтому

$$\exists C > 0: \forall x \in [a, b] \rightarrow |f(x)| \leq C, \quad |g(x)| \leq C. \quad (2)$$

Следовательно, функция  $\varphi$  ограничена на отрезке  $[a, b]$ .

Пусть  $x', x''$  — произвольные точки отрезка  $[a, b]$ ; тогда из равенства

$$\varphi(x') - \varphi(x'') = (f(x'') - f(x'))g(x'') + f(x')(g(x'') - g(x'))$$

и условий (2) следует неравенство

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leq C(|f(x'') - f(x')| + |g(x'') - g(x')|). \quad (3)$$

Если  $T = \{x_i, i = \overline{0, n}\}$  — разбиение отрезка  $[a, b]$ ,  $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ ,  $x' \in \Delta_i$ ,  $x'' \in \Delta_i$ ,  $\omega_i(f)$  и  $\omega_i(g)$  — колебания на отрезке  $\Delta_i$  функций  $f$  и  $g$  соответственно (см. § 34, замечание 2), то согласно формуле (21), § 34

$$\omega_i(f) = \sup_{x', x'' \in \Delta_i} |f(x'') - f(x')|, \quad \omega_i(g) = \sup_{x', x'' \in \Delta_i} |g(x'') - g(x')|.$$

Поэтому из неравенства (3) следует, что

$$|\varphi(x'') - \varphi(x')| \leq C(\omega_i(f) + \omega_i(g)),$$

откуда получаем неравенство

$$\omega_i(\varphi) \leq C(\omega_i(f) + \omega_i(g)), \quad i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Умножая  $i$ -е неравенство (4) на  $\Delta x_i$  и складывая все получившиеся неравенства, находим

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(\varphi) \Delta x_i \leq C \left( \sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n \omega_i(g) \Delta x_i \right). \quad (5)$$

Так как правая часть (5) стремится к нулю, если мелкость разбиения  $T$  стремится к нулю (§ 34, замечание 2), то и левая часть (5) стремится к нулю, откуда следует интегрируемость функции  $\varphi$  на отрезке  $[a, b]$ . ●

Упражнение 1. Доказать, что если функция  $f(x)$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$  и

$$\exists C > 0: \forall x \in [a, b] \rightarrow |f(x)| \geq C,$$

то функция  $\frac{1}{f(x)}$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ .

## 2. Свойства, связанные с отрезками интегрирования.

Свойство 1. Если функция  $f(x)$  интегрируема на отрезке  $\Delta = [a, b]$ , то она интегрируема на любом отрезке  $\Delta_1 \subset \Delta$ .

○ Пусть  $\Delta_1 = [a_1, b_1]$ , тогда  $a \leq a_1 < b_1 \leq b$ , так как  $\Delta_1 \subset \Delta$ . Нужно доказать, что для любого разбиения  $T_1$  отрезка  $\Delta_1$  выполняется

условие  $S_{T_1} - s_{T_1} = \sum \omega_i(T_1) \Delta x_i \rightarrow 0$  при  $l(T_1) \rightarrow 0$ , где  $l(T_1)$  — мелкость разбиения  $T_1$ ,  $\omega_i(T_1)$  — колебание функции  $f$  на  $i$ -м отрезке разбиения  $T_1$ .

Рассмотрим такое разбиение  $T$  отрезка  $[a, b]$ , которое имеет на отрезке  $\Delta_1$  те же точки разбиения, что и  $T_1$ , и, кроме того, мелкость разбиения  $T$  удовлетворяет условию  $l(T) \leq l(T_1)$ .

Заметим, что

$$\sum_{T_1} \omega_i \Delta x_i \leq \sum_T \omega_i \Delta x_i, \quad (6)$$

так как все слагаемые в левой и правой частях (6) неотрицательны, а правая сумма соответствует разбиению  $T$  отрезка  $[a, b]$  и содержит все слагаемые левой суммы, составленной для разбиения  $T_1$  отрезка  $[a_1, b_1]$ .

Пусть  $l(T_1) \rightarrow 0$ ; тогда  $l(T) \rightarrow 0$  и по теореме 2, § 34 правая часть (6) стремится к нулю. Но тогда и левая часть (6) для любого разбиения  $T_1$  такого, что  $l(T_1) \rightarrow 0$ , стремится к нулю. Используя достаточное условие теоремы 2, § 34, получаем: функция  $f(x)$  интегрируема на отрезке  $\Delta_1$ . ●

**Свойство 2.** Если функция  $f(x)$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$  и  $a < c < b$ , то справедливо равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (7)$$

○ Существование интегралов в правой части доказано в свойстве 1. Для доказательства формулы (7) воспользуемся равенством

$$\sigma_T(f; \xi) = \sigma'_T(f; \xi) + \sigma''_T(f; \xi),$$

где  $\sigma'$  и  $\sigma''$  — интегральные суммы функции  $f$  на отрезках  $[a, c]$  и  $[c, b]$  разбиения  $T$ , причем  $c$  является точкой этого разбиения.

Если  $l(T) \rightarrow 0$ , то в силу существования интегралов существуют пределы интегральных сумм  $\sigma$ ,  $\sigma'$ ,  $\sigma''$  и справедливо равенство (7). ●

**З а м е ч а н и е 1.** Справедливо утверждение, обратное утверждению, доказанному в свойстве 2: если  $a < c < b$  и если функция  $f(x)$  интегрируема на отрезках  $[a, c]$  и  $[c, b]$ , то она интегрируема на отрезке  $[a, b]$  и справедливо равенство (7).

Следующее свойство требует расширения понятия интеграла  $\int_a^b f(x) dx$  на случай, когда  $b = a$ , а также на случай, когда  $a > b$ .

Положим по определению

$$\int_a^a f(x) dx = 0, \quad (8)$$

если функция  $f$  определена в точке  $a$ .

Если функция интегрируема на отрезке  $[a, b]$ , то будем считать по определению, что

$$\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx, \quad a < b. \quad (9)$$

Определения (8) и (9) естественны. В самом деле, при  $a = b$  можно считать, что длины всех отрезков разбиения равны нулю, и поэтому любая интегральная сумма равна нулю.

В случае  $b > a$  можно символу  $\int_b^a f(x) dx$  поставить в соответствие интегральные суммы, которые отличаются лишь знаком от соответствующих интегральных сумм для интеграла

$$\int_a^b f(x) dx.$$

**Свойство 3.** Если функция  $f$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$  и если  $c_1, c_2, c_3$  — любые точки этого отрезка, то

$$\int_{c_1}^{c_3} f(x) dx = \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x) dx. \quad (10)$$

○ Пусть  $c_1 < c_2 < c_3$ , тогда равенство (10) справедливо в силу свойств 1 и 2.

Докажем формулу (10) для случая, когда  $c_1 < c_3 < c_2$  (другие случаи рассматриваются аналогично). В силу свойства 2

$$\int_{c_1}^{c_2} f(x) dx = \int_{c_1}^{c_3} f(x) dx + \int_{c_3}^{c_2} f(x) dx,$$

откуда получаем равенство (10), так как согласно определению (9)

$$\int_{c_3}^{c_2} f(x) dx = -\int_{c_2}^{c_3} f(x) dx.$$

Если  $c_1 = c_3$ , то формула (10) справедлива в силу определений (8) и (9). ●

### 3. Оценки интегралов.

**Утверждение 1.** Если  $f(x) \geq 0$  для всех  $x \in [a, b]$  и если функция  $f(x)$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ , то

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0. \quad (11)$$



○ Так как для любого разбиения  $T$  отрезка  $[a, b]$  и при любой выборке  $\xi = \{\xi_i, i = \overline{1, n}\}$  выполняется неравенство

$$\sigma_T(\xi; f) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \geq 0,$$

то, переходя в этом неравенстве к пределу при  $l(T) \rightarrow 0$ , получаем неравенство (11). ●

Следствие. Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  интегрируемы на отрезке  $[a, b]$  и если для всех  $x \in [a, b]$  выполняется неравенство  $f(x) \geq g(x)$ , то

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

Упражнение 2. Пусть функция  $f(x)$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$  и пусть существуют числа  $m, M$  такие, что  $\forall x \in [a, b]$  выполняется неравенство  $m \leq f(x) \leq M$ . Доказать, что

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Утверждение 2. Если функция  $f(x)$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ ,

$$f(x) \geq 0 \quad \text{для любого } x \in [a, b], \quad (12)$$

существует точка  $x_0 \in [a, b]$  такая, что  $f(x_0) > 0$ , причем функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , то

$$\int_a^b f(x) dx > 0. \quad (13)$$

○ Пусть  $x_0$  — внутренняя точка отрезка  $[a, b]$ , т. е.  $x_0 \in (a, b)$ . Тогда в силу свойства сохранения знака для непрерывной функции

$$\exists \delta > 0: \forall x \in U_\delta(x_0) \subset [a, b] \rightarrow f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2}. \quad (14)$$

Обозначим  $\Delta_1 = [a, x_0 - \delta]$ ,  $\Delta_0 = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ,  $\Delta_2 = [x_0 + \delta, b]$ . Так как  $\int_{\Delta_i} f(x) dx \geq 0$  для  $i = 1, 2$  в силу условия (12), а

$$\int_{\Delta_0} f(x) dx \geq \int_{\Delta_0} \frac{f(x_0)}{2} dx = f(x_0) \delta > 0,$$

то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\Delta_1} f(x) dx + \int_{\Delta_0} f(x) dx + \int_{\Delta_2} f(x) dx \geq f(x_0) \delta > 0.$$

Аналогично рассматриваются случаи  $x_0 = a$  и  $x_0 = b$ . ●

Замечание 2. Условие непрерывности функции  $f$  в точке  $x_0$ , где  $f(x_0) > 0$ , является существенным. Пример:

$$f(x) = 0, \quad 0 < x \leq 1, \quad f(0) = 1, \quad \int_0^1 f(x) dx = 0.$$

Утверждение 3. Если функция  $f(x)$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ , то функция  $|f(x)|$  также интегрируема на этом отрезке и справедливо неравенство

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad (15)$$

○ Обозначим  $g(x) = |f(x)|$  и заметим, что

$$\forall x', x'' \in [a, b] \rightarrow |g(x'') - g(x')| \leq |f(x'') - f(x')|. \quad (16)$$

Пусть  $T = \{x_i, i = \overline{0, n}\}$  — произвольное разбиение отрезка  $[a, b]$ ,  $\omega_i(f)$  и  $\omega_i(g)$  — колебания функций  $f$  и  $g$  на отрезке  $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ . Из неравенства (16) следует, что

$$\sup_{x', x'' \in \Delta_i} |g(x'') - g(x')| \leq \sup_{x', x'' \in \Delta_i} |f(x'') - f(x')|,$$

т. е.  $\omega_i(g) \leq \omega_i(f)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , откуда получаем неравенство

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(g) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i. \quad (17)$$

В силу интегрируемости функции  $f$  правая часть (17) стремится к нулю при  $l(T) \rightarrow 0$ , поэтому левая часть (17) также стремится к нулю, откуда следует интегрируемость функции  $g(x) = |f(x)|$  на отрезке  $[a, b]$ .

Докажем неравенство (15). Так как

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)| \Delta x_i,$$

т. е.

$$|\sigma_T(\xi; f)| \leq \sigma_T(\xi; |f|),$$

то, переходя в этом неравенстве к пределу, получаем неравенство (15). ●

Замечание 3. Если функция  $f$  интегрируема на отрезке с концами  $a$  и  $b$  ( $a < b$  или  $a > b$ ), то справедливо неравенство

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x)| dx \right|. \quad (18)$$

Замечание 4. Из интегрируемости функции  $|f(x)|$  на отрезке  $[a, b]$  не следует интегрируемость функции  $f(x)$  на этом отрезке. Пример:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q, \\ -1, & x \in J. \end{cases}$$

Упражнение 3. Пусть функция  $f(x)$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$  и существует число  $M > 0$  такое, что  $|f(x)| < M$ . Доказать, что для любых  $\alpha, \beta \in [a, b]$  справедливо неравенство

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right| \leq M|\beta - \alpha|. \quad (19)$$

#### 4. Интегральная теорема о среднем.

Теорема. Пусть функции  $f$  и  $g$  удовлетворяют следующим условиям:

1)  $f(x)$  и  $g(x)$  интегрируемы на отрезке  $[a, b]$ ;

2)  $\exists m, M: \forall x \in [a, b] \rightarrow m \leq f(x) \leq M$ ; (20)

3) функция  $g$  не меняет знака на отрезке  $[a, b]$ , т. е. либо

$$g(x) \geq 0 \quad \text{при } x \in [a, b], \quad (21)$$

либо

$$g(x) \leq 0 \quad \text{при } x \in [a, b].$$

Тогда

$$\exists \mu \in [m, M]: \int_a^b f(x)g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx. \quad (22)$$

○ Пусть, например, выполняется условие (21). Тогда из неравенства (20) следует, что

$$\forall x \in [a, b] \rightarrow mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x). \quad (23)$$

Так как функции  $f$  и  $g$  интегрируемы на отрезке  $[a, b]$ , то функция  $fg$  также интегрируема на этом отрезке и согласно правилу оценки интегралов

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx. \quad (24)$$

Заметим, что если  $\int_a^b g(x) dx = 0$ , то из неравенств (24) следует, что

$\int_a^b f(x)g(x) dx = 0$ , и поэтому равенство (22) в этом случае выполняется при любом  $\mu$ .

Пусть  $\int_a^b g(x) dx \neq 0$ , тогда  $\int_a^b g(x) dx > 0$  в силу (21). Поэтому неравенство (24) равносильно следующему неравенству:

$$m \leq \mu \leq M, \quad (25)$$

где

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}. \quad (26)$$

Из (26) следует равенство (22), где  $\mu \in [m, M]$  в силу неравенства (25). Теорема доказана для случая, когда  $g(x) \geq 0$ . Эта теорема справедлива и в случае  $g(x) \leq 0$ , так как при замене  $g(x)$  на  $-g(x)$  равенство (22) сохраняется. ●

*Следствие.* Если функция  $f(x)$  непрерывна, а функция  $g(x)$  интегрируема на отрезке  $\Delta = [a, b]$  и не меняет знака, то

$$\exists c \in [a, b]: \int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx. \quad (27)$$

В частности, если  $g(x) = 1$ , то

$$\exists c \in [a, b]: \int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a). \quad (28)$$

○ Пусть  $m = \inf_{x \in \Delta} f(x)$ ,  $M = \sup_{x \in \Delta} f(x)$ , где  $\Delta = [a, b]$ . По теореме Вейерштрасса

$$\exists x_1, x_2 \in [a, b]: f(x_1) = m, \quad f(x_2) = M$$

и выполняется неравенство (20). Если  $\mu$  — число, определяемое формулой (22), то  $f(x_1) \leq \mu \leq f(x_2)$ , и по теореме о промежуточных значениях непрерывной функции получаем

$$\exists c \in [a, b]: f(c) = \mu.$$

Поэтому формулу (22) можно записать в виде (27). ●

*Замечание 5.* Доказанное следствие обычно называют *интегральной теоремой о среднем*. Это название связано с тем, что в формуле (27) речь идет о существовании некоторой точки отрезка (“средней точки”), для которой выполняется равенство (27) для интегралов.

*Замечание 6.* Можно доказать (см., например, [2]), что в формуле (27) точку  $c$  всегда можно выбрать так, чтобы она принадлежала интервалу  $(a, b)$ .

*Замечание 7.* Если  $f(x) > 0$ , то равенство (28) означает, что площадь криволинейной трапеции над отрезком  $[a, b]$  равна площади прямоугольника с основанием длины  $b - a$  и высотой, равной значению функции  $f$  в некоторой точке отрезка  $[a, b]$ .

Пример. Доказать неравенство

$$\frac{\pi^2}{809} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{x dx}{100 + 2\sqrt{3} \sin^3 x \cos x} \leq \frac{\pi^2}{800}. \quad (29)$$

△ Обозначим  $f(x) = \frac{1}{100 + 2\sqrt{3} \sin^3 x \cos x}$ ,  $g(x) = x$  и воспользуемся неравенством  $0 \leq \sin^3 x \cos x \leq 3\sqrt{3}/16$ , которое выполняется, если  $0 \leq x \leq \pi/2$  (§ 20, пример 6). Тогда  $0 \leq 2\sqrt{3} \sin^3 x \cos x \leq 9/8$  и  $8/809 \leq f(x) \leq 1/100$ . Применяя интегральную теорему о среднем (неравенство (24)) и учитывая, что

$$\int_0^{\pi/2} g(x) dx = \int_0^{\pi/2} x dx = \frac{\pi^2}{8},$$

получаем неравенство (29). ▲

### § 36. Интеграл с переменным верхним пределом. Вычисление определенных интегралов

**1. Интеграл с переменным верхним пределом.** Если функция  $f$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ , то для любого  $x \in [a, b]$  существует интеграл

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad (1)$$

который называется *интегралом с переменным верхним пределом*.

а) *Непрерывность интеграла.*

**Теорема 1.** Если функция  $f$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ , то функция  $F(x)$  непрерывна на этом отрезке.

○ Пусть  $x \in [a, b]$  и  $x + \Delta x \in [a, b]$ . Докажем, что

$$\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x) \rightarrow 0 \quad \text{при } \Delta x \rightarrow 0.$$

В силу свойств интеграла (§ 35, п. 2)

$$\Delta F = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt. \quad (2)$$

Так как функция  $f$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ , то она ограничена, т. е.

$$\exists M > 0: \forall x \in [a, b] \rightarrow |f(x)| \leq M. \quad (3)$$

Согласно правилу оценки интеграла (§ 35, п. 3) из (2) и (3) следует, что

$$|\Delta F| \leq \left| \int_x^{x+\Delta x} |f(t)| dt \right| \leq M|\Delta x|,$$

откуда получаем:  $\Delta F \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , т. е. функция  $F$  непрерывна в точке  $x$ . Поскольку  $x$  — произвольная точка отрезка  $[a, b]$ , то функция  $F$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ . ●

б) Дифференцируемость интеграла.

Теорема 2. Если функция  $f$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$  и непрерывна в точке  $x_0 \in [a, b]$ , то функция  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  дифференцируема в точке  $x_0$ , причем

$$F'(x_0) = f(x_0). \quad (4)$$

○ Пусть  $\Delta x \neq 0$  и  $x_0 + \Delta x \in [a, b]$ ; тогда при  $x = x_0$  справедливо равенство (2). Докажем, что

$$\sigma = \frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \Delta x \rightarrow 0. \quad (5)$$

Преобразуем  $\sigma$ , пользуясь тем, что  $\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt = \Delta x$  (см. § 34, пример 2, а)). В силу свойств интеграла

$$\sigma = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t) dt - \frac{f(x_0)}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} (f(t) - f(x_0)) dt,$$

откуда

$$|\sigma| \leq \frac{1}{|\Delta x|} \left| \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t) - f(x_0)| dt \right|. \quad (6)$$

По условию функция  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ , т. е. для любого  $\varepsilon > 0$  существует число  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  такое, что для всех  $t \in U_\delta(x_0)$  выполняется неравенство

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad (7)$$

где  $U_\delta(x_0) = \{t: |t - x_0| < \delta\}$ . Пусть  $|\Delta x| < \delta$ ; тогда  $|t - x_0| \leq |\Delta x| < \delta$ , так как  $t \in l$ , где  $l$  — отрезок с концами  $x_0$  и  $x_0 + \Delta x$ . Поэтому для всех  $\Delta x$  таких, что  $|\Delta x| < \delta$ , выполняется неравенство (7). Но тогда из (6) следует, что  $|\sigma| < \frac{1}{|\Delta x|} \varepsilon |\Delta x| = \varepsilon$ . Таким образом, для любого  $\varepsilon > 0$  найдется число  $\delta > 0$  такое, что для всех  $\Delta x$ , удовлетворяющих условию  $0 < |\Delta x| < \delta$ , выполняется неравенство  $\left| \frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0) \right| < \varepsilon$ , т. е. выполняется условие (5). Это означает, что справедливо равенство (4). ●

Замечание 1. Если  $x_0 = a$ , то равенство (4) записывается в виде  $F'_+(a) = f(a)$ , а если  $x_0 = b$ , то в виде  $F'_-(b) = f(b)$ .

в) *Существование первообразной у непрерывной функции.*

Теорема 3. Если функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то она имеет первообразную на этом отрезке, причем первообразной для функции  $f$  является интеграл с переменным верхним пределом (1), и поэтому

$$\int f(x) dx = \int_a^x f(t) dt + C, \quad (8)$$

где  $C$  — произвольная постоянная.

○ Пусть  $x$  — произвольная точка отрезка  $[a, b]$ . По теореме 2 функция  $F(x)$ , определяемая формулой (1), имеет в точке  $x$  производную, равную  $f(x)$ , т. е.

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left( \int_a^x f(t) dt \right) = f(x). \quad (9)$$

Согласно определению первообразной (§ 30) функция  $F(x)$  является первообразной для функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ , и поэтому справедливо равенство (8). ●

Замечание 2. Согласно теореме 3 (формула (9)) операция интегрирования непрерывной функции с переменным верхним пределом является обратной к операции дифференцирования. Утверждение о том, что производная интеграла с переменным верхним пределом от непрерывной функции равна значению подынтегральной функции при значении аргумента, равному верхнему пределу интеграла, является важнейшим фактом курса математического анализа.

Следствие. Из теоремы 3 и теоремы § 30 следует, что всякая первообразная  $\Phi(x)$  для функции  $f$ , непрерывной на отрезке  $[a, b]$ , имеет вид

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt + C, \quad a \leq x \leq b, \quad (10)$$

где  $C$  — постоянная.

Упражнение 1. Доказать теорему 3 с помощью интегральной теоремы о среднем (§ 35, формула (28)).

Упражнение 2. Доказать, что если функция  $f$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$  и непрерывна в точке  $x \in [a, b]$ , то функция  $G(x) = \int_x^b f(t) dt$  дифференцируема в точке  $x$  и  $G'(x) = -f(x)$ .

## 2. Вычисление определенных интегралов.

а) *Формула Ньютона–Лейбница.*

Теорема 4. Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и если  $\Phi(x)$  — какая-нибудь первообразная для  $f(x)$  на этом отрезке, то справедлива формула Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a). \quad (11)$$

○ Согласно следствию из теоремы 3 существует число  $C$  такое, что справедливо равенство (10). Подставляя в формулу (10)  $x = a$  и учитывая, что  $\int_a^a f(t) dt = 0$ , получаем  $C = \Phi(a)$ . Поэтому равенство (10) можно записать в виде

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt + \Phi(a). \quad (12)$$

Равенство (12) выполняется при любых значениях  $x \in [a, b]$  и, в частности, при  $x = b$ , т. е.

$$\Phi(b) = \int_a^b f(t) dt + \Phi(a),$$

откуда следует формула (11), так как величина определенного интеграла не зависит от того, какой буквой обозначается независимое переменное в интеграле. ●

Замечание 3. Формулу Ньютона–Лейбница называют *основной формулой интегрального исчисления* и часто записывают в виде

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(x) \Big|_a^b.$$

Пример 1. Доказать, что для любых  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  справедливы равенства:

$$\text{а) } \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0; \quad (13)$$

$$\text{б) } \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi. \quad (14)$$

△ а) Воспользовавшись формулой  $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$ , получаем

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(m+n)x dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(m-n)x dx.$$

Если  $m \neq n$ , то

$$J = \frac{1}{2(m+n)} \cos(m+n)x \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2(m-n)} \cos(m-n)x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

так как  $\cos \pi k = (-1)^k$  для любого  $k \in \mathbb{Z}$ . Если  $m = n$ , то

$$J = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2nx dx = 0$$



для любого  $n \in \mathbb{N}$ . Таким образом, равенство (13) справедливо при любых  $m, n \in \mathbb{N}$ .

б) Применяя формулы  $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$  и  $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$  и учитывая, что  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2nx \, dx = 0$  при любом  $n \in \mathbb{N}$ , а  $\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$ , получаем равенство (14).  $\blacktriangle$

Упражнение 3. Доказать, что для любых  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  ( $n \neq m$ ) справедливы равенства

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0.$$

Замечание 4. Определенный интеграл можно использовать для эффективного вычисления предела последовательности, если ее можно рассматривать как последовательность интегральных сумм некоторой интегрируемой функции.

Пример 2. Найти с помощью интеграла  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ , если:

а)  $S_n = \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$ ,  $\alpha > 0$ ;

б)  $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ .

$\Delta$  а) Запишем  $S_n$  в виде  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^\alpha$  и заметим, что  $S_n$  — интегральная сумма (см. § 34, п. 1) для функции  $f(x) = x^\alpha$  на отрезке  $[0, 1]$ , соответствующая разбиению  $T$  этого отрезка на отрезки  $\Delta_k = \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ ,  $k = \overline{1, n}$ , каждый из которых имеет длину  $\frac{1}{n}$ ; в качестве точки  $\xi_k \in \Delta_k$  берется конец отрезка  $\Delta_k$ , т. е.  $\xi_k = \frac{k}{n}$ . Так как  $l(T) = \frac{1}{n} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , а функция  $x^\alpha$  непрерывна на отрезке  $[0, 1]$ , то существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 x^\alpha \, dx = \left. \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}.$$

б) Так как  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k/n}$  — интегральная сумма для функции  $\frac{1}{1+x}$  на отрезке  $[0, 1]$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2. \quad \blacktriangle$$

Пример 3. Доказать, что если функция  $f$  непрерывна на  $R$ , а функции  $\varphi$  и  $\psi$  дифференцируемы на  $R$ , то

$$\frac{d}{dx} \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt \right) = \psi'(x)f(\psi(x)) - \varphi'(x)f(\varphi(x)). \quad (15)$$

△ Пусть  $F$  — первообразная для функции  $f$ ; тогда по формуле Ньютона–Лейбница находим

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt = F(t) \Big|_{t=\varphi(x)}^{t=\psi(x)} = F(\psi(x)) - F(\varphi(x)),$$

откуда, используя правило дифференцирования сложной функции и равенство  $F'(t) = f(t)$ , получаем формулу (15). ▲

б) Замена переменного.

Теорема 5. Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на интервале  $(a_0, b_0)$ , а функция  $\varphi(t)$  имеет непрерывную производную на интервале  $(\alpha_0, \beta_0)$ , причем  $\varphi(t) \in (a_0, b_0)$  при всех  $t \in (\alpha_0, \beta_0)$ .

Тогда если  $\alpha \in (\alpha_0, \beta_0)$ ,  $\beta \in (\alpha_0, \beta_0)$ ,  $a = \varphi(\alpha)$ ,  $b = \varphi(\beta)$ , то справедлива формула замены переменного в определенном интеграле

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt. \quad (16)$$

○ Так как  $a \in (a_0, b_0)$ ,  $b \in (a_0, b_0)$ , а функция  $f(x)$  непрерывна на интервале  $(a_0, b_0)$ , то по формуле Ньютона–Лейбница находим

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a), \quad (17)$$

где  $\Phi'(x) = f(x)$  для всех  $x \in (a_0, b_0)$ .

Функция  $\Phi(\varphi(t))$  является первообразной для функции, стоящей под знаком интеграла в правой части формулы (16), так как

$$\frac{d}{dt}(\Phi(\varphi(t))) = \Phi'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Применяя к функции  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$  формулу Ньютона–Лейбница и учитывая, что  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$ , получаем

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)) = \Phi(b) - \Phi(a). \quad (18)$$

Из равенств (17) и (18) следует формула (16). ●

Замечание 5. При условиях теоремы 5 формула (16) справедлива как при  $\alpha \leq \beta$ , так и при  $\alpha > \beta$ .

Формула (16) остается в силе и в случае, когда функции  $f$  и  $\varphi$  заданы соответственно на отрезках  $[a, b]$  и  $[\alpha, \beta]$ , причем множество значений функции  $\varphi$  содержится в отрезке  $[a, b]$ , где  $a = \varphi(\alpha)$ ,  $b = \varphi(\beta)$ . В этом случае под производными сложной функции  $\Phi(\varphi(t))$  и концах отрезка  $[\alpha, \beta]$  понимаются соответствующие односторонние производные.

Пример 4. Вычислить  $J = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$ .

$\Delta$  Полагая  $x = R \sin t$ , где  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ , получаем  $\sqrt{R^2 - x^2} = R \cos t$ ,  $dx = R \cos t dt$ . По формуле (16) находим

$$J = R^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{\pi R^2}{4}. \quad \blacktriangle$$

Пример 5. Пусть функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[-a, a]$ . Доказать, что:

а) если  $f$  — нечетная функция, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0;$$

б) если  $f$  — четная функция, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx. \quad (19)$$

$\Delta$  а) Если  $f$  — нечетная функция, т. е.  $f(-x) = -f(x)$  для всех  $x \in [-a, a]$ , то, полагая  $x = -t$  и используя формулу (16), получаем

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_a^0 f(-t) dt = \int_0^a (-f(t)) dt = - \int_0^a f(x) dx,$$

откуда следует, что

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0.$$

б) Если  $f$  — четная функция, то  $\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(x) dx$ , откуда следует равенство (19).  $\blacktriangle$

Пример 6. Доказать, что если  $f$  — непрерывная на  $R$  периодическая с периодом  $T$  функция, то для любого  $a \in R$  справедливо равенство

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx. \quad (20)$$

$\Delta$  Используя свойства интеграла (§ 35, п. 2), запишем равенство

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx. \quad (21)$$

Полагая  $x = t + T$  и учитывая, что функция  $f$  определена на  $R$  и  $f(t + T) = f(t)$  для всех  $t \in R$  в силу периодичности функции  $f$ ,

получаем

$$\int_T^{a+T} f(x) dx = \int_0^a f(t+T) dt = \int_0^a f(t) dt = - \int_a^0 f(x) dx. \quad (22)$$

Из равенств (21) и (22) следует формула (20). ▲

Пример 7. Вычислить  $J = \int_{-\pi/2}^{5\pi/2} \sin^5 x \cos^8 x dx$ .

△ Так как подынтегральная функция является периодической с периодом  $2\pi$  и нечетной, то, используя примеры 5 и 6, получаем

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^5 x \cos^8 x dx = 0. \quad \blacktriangle$$

в) Интегрирование по частям.

Теорема 6. Если функции  $u(x)$  и  $v(x)$  имеют на отрезке  $[a, b]$  непрерывные производные, то справедлива формула интегрирования по частям

$$\int_a^b uv' dx = (uv)|_a^b - \int_a^b vu' dx. \quad (23)$$

○ Интегрируя на отрезке  $[a, b]$  тождество

$$uv' = (uv)' - u'v,$$

где  $uv'$ ,  $(uv)'$ ,  $u'v$  — непрерывные функции, получаем

$$\int_a^b uv' dx = \int_a^b (uv)' dx - \int_a^b vu' dx. \quad (24)$$

По формуле Ньютона–Лейбница находим

$$\int_a^b (uv)' dx = (uv)|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

Поэтому равенство (24) можно записать в виде (23). ●

Замечание 6. Учитывая, что  $v' dx = dv$ ,  $u' dx = du$ , формулу (23) иногда записывают в виде

$$\int_a^b u dv = (uv)|_a^b - \int_a^b v du.$$

Пример 8. Вычислить  $J = \int_1^2 x \ln x dx$ .

△ Применяя формулу (23), где  $u = \ln x$ ,  $v = \frac{x^2}{2}$ , получаем

$$J = \left( \frac{x^2}{2} \ln x \right) \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \int_1^2 x dx,$$

т. е.

$$J = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}. \quad \blacktriangle$$

### 3. Простейшие дифференциальные уравнения.

а) *Дифференциальные уравнения первого порядка.* Задачу о нахождении первообразной для непрерывной на интервале  $(a, b)$  функции  $f(x)$  можно сформулировать так: найти функцию  $y(x)$ , которая на интервале  $(a, b)$  является решением уравнения

$$y'(x) = f(x). \quad (25)$$

Уравнение такого вида является *обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка*. Все решения уравнения (25) можно записать в виде

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt + C, \quad (26)$$

где  $x_0 \in (a, b)$ ,  $C$  — произвольная постоянная.

Чтобы выделить единственное решение уравнения (25), достаточно задать значение функции  $y(x)$  в какой-либо точке, например в точке  $x_0$ . Если  $y(x_0) = y_0$ , то из формулы (26) получаем

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

В приложениях часто встречаются дифференциальные уравнения первого порядка, имеющие вид

$$y'(x) = ky(x), \quad (27)$$

где  $k$  — постоянная. Уравнением (27) описывается, например, закон размножения бактерий, так как скорость роста числа бактерий пропорциональна их количеству.

Решениями уравнения (27) являются функции  $y = Ce^{kx}$ , где  $C$  — произвольная постоянная. Можно показать [13], что других решений уравнение (27) не имеет. Если известно, что  $y(x_0) = y_0$ , то  $C = y_0$ , и поэтому

$$y = y_0 e^{k(x-x_0)}.$$

б) *Дифференциальные уравнения второго порядка.* Рассмотрим уравнение

$$y''(x) + \omega^2 y(x) = 0, \quad (28)$$

где  $\omega$  — некоторое положительное число. Уравнение (28) называют *уравнением гармонических колебаний*.

Легко проверить, что функции  $\cos \omega x$  и  $\sin \omega x$  являются решениями уравнения (28). Отсюда следует, что функции вида

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x, \quad (29)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные, удовлетворяют уравнению (28). Можно показать [13], что других решений уравнение (28) не имеет. Если известно значение функции  $y(x)$  и значение ее производной при  $x = x_0$  (начальные условия), т. е. заданы числа  $y_0 = y(x_0)$  и  $\tilde{y}_0 = y'(x_0)$ , то этими условиями определяется единственное решение уравнения (28). Например, если  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ , то из формулы (29) находим  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = \frac{1}{\omega}$ , и поэтому  $y = \frac{1}{\omega} \sin \omega x$ .

Обратимся к уравнению

$$y''(x) - \omega^2 y(x) = 0, \quad (30)$$

где  $\omega > 0$ . Его решениями, как нетрудно проверить, являются функции  $e^{\omega x}$  и  $e^{-\omega x}$ , и поэтому функции вида

$$y = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}, \quad (31)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные, также удовлетворяют уравнению (30).

Можно показать, что других решений уравнение (30) не имеет. Если заданы числа  $y_0 = y(x_0)$  и  $\tilde{y} = y'(x_0)$ , то из формулы (31) найдем  $C_1$  и  $C_2$  и тем самым определим единственное решение уравнения (30). Например, если известно, что  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ , то  $C_1 + C_2 = 1$ ,  $\omega C_1 - \omega C_2 = 0$ , откуда  $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$ , и поэтому  $y = \frac{1}{2}(e^{\omega x} + e^{-\omega x}) = \text{ch } \omega x$ .

## § 37. Приложения определенного интеграла

### 1. Вычисление площади плоской фигуры.

а) *Плоская фигура и ее площадь.* Произвольное ограниченное множество точек плоскости будем называть *плоской фигурой*. Если плоскую фигуру можно представить как объединение конечного числа непересекающихся прямоугольников, то такую фигуру назовем *клеточной*. Под *прямоугольником* будем понимать множество точек вида  $K = \{(x, y) : a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2\}$  или множество, получаемое из  $K$  удалением части границы (или всей границы) множества  $K$ .

*Площадью прямоугольника*  $K$  назовем число  $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$  независимо от того, принадлежит или не принадлежит множеству  $K$  его граничные точки, а *площадью клеточной фигуры* назовем сумму площадей прямоугольников, из которых составлена эта фигура.

**Замечание 1.** Можно показать (см § 45), что площадь клеточной фигуры не зависит от способа разбиения ее на прямоугольники. Нетрудно также убедиться в том, что площадь клеточной фигуры неотрицательна и обладает свойствами:

а) *аддитивности*, т. е. площадь объединения двух непересекающихся клеточных фигур равна сумме их площадей;

б) *инвариантности*, т. е. площади двух равных (конгруэнтных) клеточных фигур совпадают;

в) *монотонности*, т. е. если клеточные фигуры  $G_1$  и  $G_2$  таковы, что  $G_1 \subset G_2$ , то площадь фигуры  $G_1$  не превосходит площади фигуры  $G_2$ .

Плоскую фигуру  $G$  назовем *квадрируемой*, если для любого  $\varepsilon > 0$  найдутся клеточные фигуры  $q$  и  $Q$  такие, что

$$q \subset G \subset Q, \quad (1)$$

$$0 \leq S(Q) - S(q) < \varepsilon, \quad (2)$$

где  $S(Q)$ ,  $S(q)$  — площади фигур  $Q$  и  $q$  соответственно.

Пусть плоская фигура  $G$  квадрируема. Тогда *площадью* этой *фигуры* назовем число  $S(G)$  такое, что

$$S(q) \leq S(G) \leq S(Q) \quad (3)$$

для любых клеточных фигур  $q$  и  $Q$ , удовлетворяющих условию (1).

**Теорема 1.** *Для любой квадрируемой фигуры  $G$  число  $S(G)$  существует и единственно, причем*

$$S(G) = \sup S(q) = \inf S(Q). \quad (4)$$

○ Так как для любых клеточных фигур  $q$  и  $Q$ , удовлетворяющих условию (1), выполняется неравенство

$$S(q) \leq S(Q),$$

то по теореме об отделимости (§ 2) существуют  $\sup S(q)$  и  $\inf S(Q)$  (супремум и инфимум берутся по всем клеточным фигурам, соответственно содержащимся в фигуре  $G$  и содержащим эту фигуру), причем

$$S(q) \leq \sup S(q) \leq \inf S(Q) \leq S(Q), \quad (5)$$

откуда

$$S(q) \leq \sup S(q) \leq S(Q). \quad (6)$$

Таким образом, число  $S(G) = \sup S(q)$  удовлетворяет условию (3).

Докажем единственность числа  $S(G)$ . Предположим, что наряду с числом  $S(G)$  существует еще одно число  $S'(G)$ , удовлетворяющее условию (3), т. е.

$$S(q) \leq S'(G) \leq S(Q). \quad (7)$$

Тогда из (3) и (7) в силу свойств неравенств получаем, что

$$|S(G) - S'(G)| \leq S(Q) - S(q) \quad (8)$$

для любых клеточных фигур таких, что  $q \subset G \subset Q$ . Так как  $G$  — квадрируемая фигура, то разность  $S(Q) - S(q)$  можно сделать сколь угодно малой в силу условия (2), выбрав соответствующие фигуры  $Q$  и  $q$ . Поэтому из (8) следует, что  $S'(G) = S(G)$ . Таким образом, квадрируемая фигура  $G$  имеет площадь  $S(G)$ , причем в силу (5) справедливо равенство (4). ●

Теорема 2. Для того чтобы плоская фигура  $G$  была квадратуемой, необходимо и достаточно, чтобы для любого  $\varepsilon > 0$  существовали такие квадратуемые плоские фигуры  $\tilde{q}$  и  $\tilde{Q}$ , что

$$\tilde{q} \subset G \subset \tilde{Q}, \quad 0 \leq S(\tilde{Q}) - S(\tilde{q}) < \varepsilon, \quad (9)$$

где  $S(\tilde{Q})$  и  $S(\tilde{q})$  — площади фигур  $Q$  и  $q$  соответственно.

○ Необходимость условий (9) очевидна, так как по определению квадратуемой фигуры эти условия выполняются, если взять  $\tilde{q} = q$ ,  $\tilde{Q} = Q$ , где  $q$  и  $Q$  — клеточные фигуры, удовлетворяющие соотношениям (1), (2).

Докажем достаточность. Фиксируя произвольное число  $\varepsilon > 0$ , найдем в силу (9) такие квадратуемые плоские фигуры  $\tilde{q}$  и  $\tilde{Q}$ , что

$$\tilde{q} \subset G \subset \tilde{Q}, \quad 0 \leq S(\tilde{Q}) - S(\tilde{q}) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (10)$$

Так как  $\tilde{q}$  и  $\tilde{Q}$  — квадратуемые плоские фигуры, то существуют клеточные фигуры  $q'$  и  $Q'$  такие, что

$$q' \subset \tilde{q}, \quad \tilde{Q} \subset Q', \quad 0 \leq S(\tilde{q}) - S(q') < \frac{\varepsilon}{4}, \quad 0 \leq S(Q') - S(\tilde{Q}) < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (11)$$

Из (10) и (11) следует, что

$$q' \subset G \subset Q', \quad 0 \leq S(Q') - S(q') < \varepsilon.$$

Это означает, что  $G$  — квадратуемая фигура, причем

$$S(G) = \sup S(\tilde{q}) = \inf S(\tilde{Q}). \quad \bullet$$

Замечание 2. Можно доказать (см. § 45), что площадь квадратуемой фигуры обладает свойствами аддитивности, инвариантности и монотонности (см. замечание 1).

б) *Площадь криволинейной трапеции.* Одной из основных задач, приводящих к понятию определенного интеграла, является задача о площади криволинейной трапеции (§ 34, п. 1), т. е. фигуры  $G$ , задаваемой на плоскости  $Oxy$  условиями

$$G = \{(x, y): a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}, \quad (12)$$

где  $f(x)$  — функция, непрерывная на отрезке  $[a, b]$ .

Утверждение 1. *Криволинейная трапеция  $G$  — квадратуемая фигура, площадь которой  $S = S(G)$  выражается формулой*

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (13)$$

○ Пусть  $T = \{x_i, i = \overline{0, n}\}$  — разбиение отрезка  $[a, b]$ ,  $M_i$  и  $m_i$  — соответственно наибольшее и наименьшее значения функции  $f$  на отрезке  $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ ,  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = \overline{1, n}$  (см. рис. 34.1).



Рассмотрим клеточную фигуру  $q$ , составленную из прямоугольников  $q_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), таких, что длина основания  $i$ -го прямоугольника равна  $\Delta x_i$ , а высота равна  $m_i$ .

Аналогично определяется клеточная фигура  $Q$ , составленная из фигур  $Q_i$ , где  $Q_i$  — прямоугольник, длина основания которого  $\Delta x_i$ , а высота  $M_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Очевидно,  $q \subset G \subset Q$ , площади фигур  $q$  и  $Q$  соответственно равны

$$S(q) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, \quad S(Q) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i.$$

Заметим, что

$$S(q) = s_T, \quad S(Q) = S_T, \quad (14)$$

где  $s_T$  и  $S_T$  — соответственно нижняя и верхняя суммы Дарбу для функции  $f$  при разбиении  $T$  отрезка  $[a, b]$ .

Так как функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то в силу критерия интегрируемости (§ 34, теорема 2) для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое разбиение  $T$  этого отрезка, что

$$0 \leq S_T - s_T < \varepsilon.$$

Иными словами (см. равенства (14)), существуют клеточные фигуры  $q$  и  $Q$  такие, что

$$q \subset G \subset Q, \quad 0 \leq S(Q) - S(q) < \varepsilon,$$

т. е. выполняются условия (1), (2). Это означает, что  $G$  — квадратуемая фигура и согласно теореме 1 справедливо равенство (4), которое в силу равенств (14) можно записать в виде

$$S(G) = \sup s_T = \inf S_T. \quad (15)$$

Используя следствие из теоремы 2, § 34, получаем

$$\sup s_T = \inf S_T = \int_a^b f(x) dx. \quad (16)$$

Из (15) и (16) следует, что площадь  $S = S(G)$  криволинейной трапеции  $G$  выражается формулой (13). ●

Замечание 3. В § 34, п. 1 площадь  $S$  фигуры  $G$  была определена как предел интегральной суммы  $\sigma_T(\xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$  при  $l(T) \rightarrow 0$  при условии, что этот предел не зависит от разбиения  $T$  и выборки  $\xi = \{\xi_i, i = \overline{1, n}\}$ , где  $\xi_i \in \Delta_i$ . Для непрерывной на отрезке  $[a, b]$  функции  $\lim_{l(T) \rightarrow 0} \sigma_T(\xi) = \int_a^b f(x) dx$ , и поэтому оба определения площади приводят к одному и тому же результату.

Рассмотрим теперь фигуру  $D$  (рис. 37.1), ограниченную отрезками прямых  $x = a$  и  $x = b$  и графиками непрерывных на отрезке  $[a, b]$

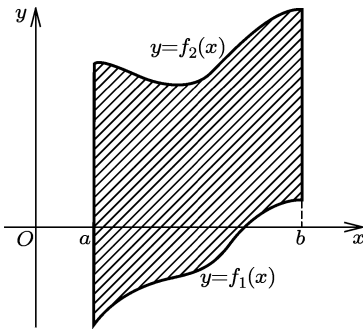


Рис. 37.1

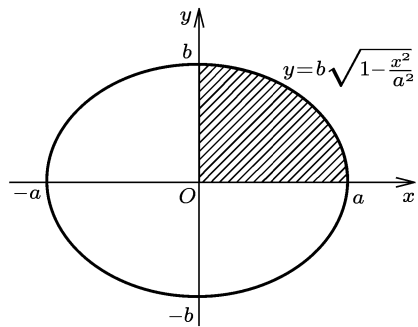


Рис. 37.2

функций  $y = f_1(x)$  и  $y = f_2(x)$ , где  $f_1(x) \leq f_2(x)$  при  $x \in [a, b]$ . Если  $f_1(x) \geq 0$  для всех  $x \in [a, b]$ , то площадь фигуры  $D$  равна разности площадей криволинейных трапеций  $D_2$  и  $D_1$ , где  $D_i = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f_i(x)\}$ ,  $i = 1, 2$ . Поэтому площадь  $S_D$  фигуры  $D$  выражается формулой

$$S_D = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx. \quad (17)$$

Формула (17) остается в силе и в случае, когда не выполняется условие  $f_1(x) \geq 0$  для всех  $x \in [a, b]$ . Чтобы убедиться в этом, достаточно сдвинуть фигуру  $D$  вдоль положительного направления оси  $Oy$  на  $y_0 = \min_{x \in [a, b]} |f_1(x)|$  и воспользоваться тем, что площади равных фигур совпадают.

Пример 1. Найти площадь  $S$  фигуры, ограниченной эллипсом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$\Delta$  Искомая площадь  $S$  равна  $4\sigma$ , где  $\sigma$  (рис. 37.2) — площадь криволинейной трапеции, ограниченной осями  $Ox$ ,  $Oy$  и графиком функции  $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ ,  $0 \leq x \leq a$ . По формуле (13) находим

$$\sigma = b \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = ab \int_0^1 \sqrt{1 - t^2} dt = \frac{1}{4} \pi ab$$

(см. § 36, пример 4). Итак, площадь, ограниченная эллипсом с полуосями  $a$  и  $b$ , равна

$$S = \pi ab.$$

В частности, площадь круга радиуса  $R$  равна  $\pi R^2$ .  $\blacktriangle$

Отсюда следует, что площадь кругового сектора (радиуса  $R$ ), соответствующего центральному углу  $\alpha$ , равна

$$\frac{\pi R^2}{2\pi} \alpha = \frac{R^2 \alpha}{2}.$$

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой  $y = 6x - x^2$  и прямой  $y = x + 4$ .

$\Delta$  Парабола  $y = 6x - x^2$  пересекается с прямой  $y = x + 4$  в точках  $A$  и  $B$  (рис. 37.3), абсциссы которых являются корнями уравнения  $6x - x^2 = x + 4$ . Решая это уравнение, находим его корни  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 4$ . Согласно формуле (17) искомая площадь  $S$  равна

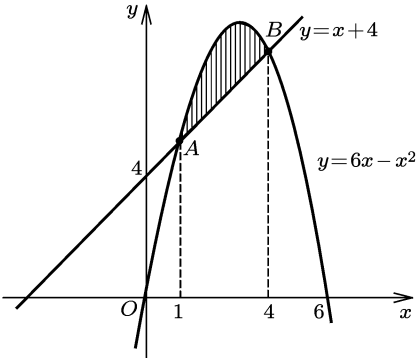


Рис. 37.3

$$\begin{aligned} S &= \int_1^4 ((6x - x^2) - (x + 4)) dx = \\ &= \left( \frac{5}{2} x^2 - \frac{x^3}{3} - 4x \right) \Big|_1^4 = \frac{9}{2}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

в) *Площадь криволинейного сектора.* Пусть кривая  $\Gamma$  задана в полярной системе координат уравнением

$$\rho = \rho(\varphi), \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta,$$

где  $\rho(\varphi)$  — неотрицательная и непрерывная на отрезке  $[\alpha, \beta]$  функция. Тогда плоскую фигуру  $G$ , ограниченную кривой  $\Gamma$  и, быть может, отрезками двух лучей, составляющих с полярной осью углы  $\alpha$  и  $\beta$  (рис. 37.4), назовем *криволинейным сектором*.

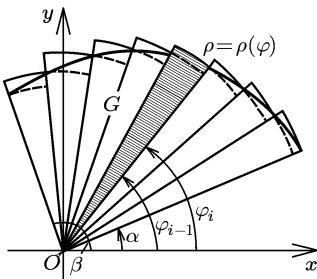


Рис. 37.4

Утверждение 2. *Криволинейный сектор  $G$  — квадратуемая фигура, площадь которой  $S$  выражается формулой*

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi. \quad (18)$$

$\circ$  Пусть  $T = \{\varphi_i, i = \overline{0, n}\}$  — разбиение отрезка  $[\alpha, \beta]$ ,  $m_i$  и  $M_i$  — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции  $\rho(\varphi)$  на отрезке  $\Delta_i = [\varphi_{i-1}, \varphi_i]$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Обозначим через  $q_i$  и  $Q_i$  круговые секторы, ограниченные лучами  $\varphi = \varphi_{i-1}$ ,  $\varphi = \varphi_i$  и дугами окружностей радиусов  $m_i$  и  $M_i$  соответственно (рис. 37.4). Если  $q$  — объединение фигур  $q_1, \dots, q_n$ , а  $Q$  — объединение фигур  $Q_1, \dots, Q_n$ , то  $q \subset G \subset Q$ .

Так как  $q_i$  и  $Q_i$  — квадратуемые фигуры, то  $q$  и  $Q$  также являются квадратуемыми фигурами, а их площади соответственно равны

$$S(q) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i^2 \Delta\varphi_i \quad \text{и} \quad S(Q) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i^2 \Delta\varphi_i.$$

Отсюда следует, что  $S(q)$  и  $S(Q)$  совпадают соответственно с нижней и верхней суммами Дарбу для функции  $\frac{1}{2} \rho^2(\varphi)$  на отрезке  $[\alpha, \beta]$ . Поэтому (следствие из теоремы 2, § 34)

$$\sup S(q) = \inf S(Q) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

Это означает (теорема 2), что  $G$  — квадратуемая фигура, а ее площадь  $S$  выражается формулой (18). ●

Пример 3. Найдите площадь фигуры  $G$ , которая ограничена лемнискатою Бернулли (рис. 37.5), заданной уравнением

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi.$$

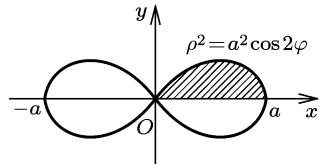


Рис. 37.5

△ Фигура  $G$  симметрична относительно координатных осей. Площадь  $\sigma$  той части фигуры  $G$ , которая лежит в первом квадранте, согласно формуле (18) равна  $\sigma = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{4}$ . Поэтому искомая площадь  $S = 4\sigma = a^2$ . ▲

## 2. Вычисление объема тела.

а) *Тело и его объем.* Произвольное ограниченное множество точек пространства будем называть *телом*.

Основные определения и утверждения, относящиеся к телам, аналогичны соответствующим определениям и утверждениям, содержащимся в п. 1. Поэтому некоторые утверждения для тел (см. теоремы 1 и 2) будут опущены.

По аналогии с понятием клеточной фигуры назовем тело *клеточным*, если его можно представить как объединение конечного числа непересекающихся *параллелепипедов*, т. е. тел вида

$$M = \{(x, y, z) : a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2, a_3 \leq z \leq b_3\},$$

а также тел, получаемых из  $M$  удалением части границы (или всей границы) тела  $M$ . *Объемом параллелепипеда*  $M$  назовем число  $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3)$ , а *объемом клеточного тела* — сумму объемов составляющих его параллелепипедов.

Тело  $\Omega$  будем называть *кубируемым*, если для любого  $\varepsilon > 0$  найдутся клеточные тела  $p$  и  $P$  такие, что

$$p \subset \Omega \subset P, \quad 0 \leq V(P) - V(p) < \varepsilon,$$

где  $V(P)$  и  $V(p)$  — объемы тел  $P$  и  $p$  соответственно. Как и в п. 1, легко показать, что если тело  $\Omega$  кубируемо, то существует единственное число  $V(\Omega)$  такое, что неравенство

$$V(p) \leq V(\Omega) \leq V(P)$$

выполняется для любых клеточных тел  $p, P$ , удовлетворяющих условию  $p \subset \Omega \subset P$ ; при этом

$$V(\Omega) = \sup V(p) = \inf V(P).$$

Это число  $V(\Omega)$  называют *объемом тела*  $V$ . Рассмотрим некоторые классы кубируемых (имеющих объем) тел.

б) *Цилиндрическое тело и его объем.* Пусть простой контур  $\Gamma$  (см. § 22), расположенный в плоскости  $Oxy$ , ограничивает плоскую фигуру  $G$ . Рассмотрим множество  $\Omega$

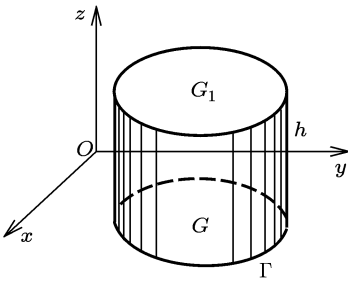


Рис. 37.6

точек пространства, которые получаются сдвигом фигуры  $G$  в направлении положительной полуоси  $Oz$  на расстояние, не превосходящее  $h$ , где  $h$  — заданное число, и назовем  $\Omega$  *цилиндрическим телом*. Граница этого тела состоит из равных (конгруэнтных) фигур  $G$  и  $G_1$  (рис. 37.6) и части цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны оси  $Oz$ . Фигуры  $G$  и  $G_1$  называются *основаниями цилиндрического тела*, а

расстояние между плоскостями оснований — *высотой* этого тела.

*Утверждение 3. Если основанием цилиндрического тела  $\Omega$  служит плоская квадрируемая фигура  $G$ , то тело  $\Omega$  кубируемо, а его объем  $V(\Omega)$  равен  $S(G)h$ , где  $S(G)$  — площадь основания,  $h$  — высота тела  $\Omega$ . В частности, объем прямого кругового цилиндра равен  $V = \pi R^2 h$ , где  $R$  — радиус основания,  $h$  — высота цилиндра.*

○ По определению плоской квадрируемой фигуры для любого  $\varepsilon > 0$  существуют такие клеточные фигуры  $q$  и  $Q$ , что

$$q \subset G \subset Q, \quad 0 \leq S(Q) - S(q) < \frac{\varepsilon}{h}.$$

Рассмотрим цилиндрические тела  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , основаниями которых служат соответственно фигуры  $q$  и  $Q$ , а высота каждого из этих тел равна  $h$ . Тела  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  являются клеточными, а их объемы соответственно равны

$$V(\Omega_1) = S(q)h \quad \text{и} \quad V(\Omega_2) = S(Q)h.$$

Так как  $\Omega_1 \subset \Omega \subset \Omega_2$ ,  $0 \leq V(\Omega_2) - V(\Omega_1) < \varepsilon$ , то  $\Omega$  — кубируемое тело, а его объем равен  $S(G)h$ . ●

Замечание 4. Из свойства аддитивности объема и утверждения 3 следует, что ступенчатое тело, т. е. тело, являющееся объединением конечного числа цилиндрических тел, кубируемо, если основания цилиндрических тел квадратуемы; при этом объем ступенчатого тела равен сумме объемов тел, из которых составлено ступенчатое тело.

в) *Объем тела вращения.*

Утверждение 4. Тело, образованное вращением вокруг оси  $Ox$  криволинейной трапеции  $G$  (условие (12)), где  $f(x)$  — функция, непрерывная на отрезке  $[a, b]$ , кубируемо, а его объем  $V$  выражается формулой

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (19)$$

○ Пусть  $T, m_i, M_i, \Delta x_i, q, Q$  — те же, что и в п. 1, б). При вращении вокруг оси  $Ox$  фигур  $q, G, Q$  получаются тела вращения  $p, \Omega, P$  такие, что

$$p \subset \Omega \subset P,$$

причем объемы ступенчатых тел  $p$  и  $P$  соответственно равны

$$V(p) = \pi \sum_{i=1}^n m_i^2 \Delta x_i, \quad V(P) = \pi \sum_{i=1}^n M_i^2 \Delta x_i.$$

Так как  $V(p)$  и  $V(P)$  равны соответственно нижней и верхней суммам Дарбу для функции  $\pi f^2(x)$  при разбиении  $T$  отрезка  $[a, b]$ , то согласно следствию из теоремы 2, § 34

$$\sup V(p) = \inf V(P) = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Следовательно,  $\Omega$  — кубируемое тело (по теореме, аналогичной теореме 2), а его объем выражается формулой (19). ●

Пример 4. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной осью  $Ox$  и графиком функции  $y = \sin x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ .

△ По формуле (19) получаем  $v = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi^2}{2}$ . ▲

г) *Объем тела с заданными площадями поперечных сечений.* Пусть тело  $\Omega$  заключено между плоскостями, перпендикулярными оси  $Ox$  и пересекающими эту ось в точках  $x = a$  и  $x = b$ , где  $a < b$  (рис. 37.7).

Обозначим через  $G_x$  фигуру, получаемую в сечении тела  $\Omega$  плоскостью, перпендикулярной оси  $Ox$  и проходя-

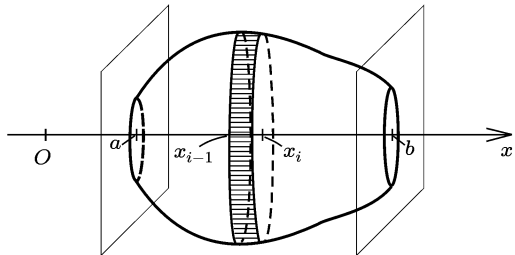


Рис. 37.7

щей через точку  $x \in [a, b]$  этой оси. Будем считать, что при любом  $x \in [a, b]$  фигура  $G_x$  квадратуема, а ее площадь  $\sigma(x)$  — функция, непрерывная на отрезке  $[a, b]$ . Кроме того, предположим, что при проектировании на плоскость, перпендикулярную оси  $Ox$ , фигур  $G_\alpha$  и  $G_\beta$ , где  $\alpha, \beta$  — любые точки отрезка  $[a, b]$ , получаются фигуры, одна из которых содержится в другой.

**Утверждение 5.** При указанных выше условиях тело  $\Omega$  кубуемо, а его объем  $V$  выражается формулой

$$V = \int_a^b \sigma(x) dx. \quad (20)$$

○ Пусть  $T = \{x_i, i = \overline{0, n}\}$  — разбиение отрезка  $[a, b]$ ,  $m_i$  и  $M_i$  — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции  $\sigma(x)$  на отрезке  $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ ,  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Так как  $\sigma(x)$  — непрерывная функция, то существуют точки  $\xi_i \in \Delta_i$  и  $\xi'_i$  такие, что  $\sigma(\xi_i) = m_i$ ,  $\sigma(\xi'_i) = M_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Обозначим через  $\Omega_i$  ту часть тела  $\Omega$ , которая заключена между плоскостями  $A_{i-1}$  и  $A_i$ , перпендикулярными оси  $Ox$  и проходящими соответственно через точки  $x_{i-1}$  и  $x_i$  (см. рис. 37.7).

Пусть  $D_i$  и  $D'_i$  — цилиндрические тела высотой  $\Delta x_i$ , построенные на сечениях  $G_{\xi_i}$  и  $G_{\xi'_i}$  как на основаниях и расположенные между плоскостями  $A_{i-1}$  и  $A_i$ . Тогда  $D_i \subset \Omega_i \subset D'_i$ , а объемы тел  $D_i$  и  $D'_i$  соответственно равны

$$V(D_i) = m_i \Delta x_i, \quad V(D'_i) = M_i \Delta x_i.$$

Если  $p$  — объединение тел  $D_1, \dots, D_n$ , а  $P$  — объединение тел  $D'_1, \dots, D'_n$ , то  $p \subset \Omega \subset P$ ,

$$V(p) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, \quad V(P) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i.$$

Так как  $\sup V(p) = \inf V(P) = \int_a^b \sigma(x) dx$ , то  $\Omega$  — кубуемое тело, а его объем выражается формулой (20). ●

**Пример 5.** Вычислить объем эллипсоида  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

△ Воспользуемся тем, что площадь фигуры  $G$ , получаемой в сечении эллипсоида плоскостью, параллельной плоскости  $Oyz$  и отстоящей от нее на расстоянии  $x_0$ , где  $0 \leq x_0 \leq a$ , равна

$$S(x_0) = \pi bc \left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right). \quad (21)$$

В самом деле, граница фигуры  $G$  — эллипс, задаваемый уравнениями

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x_0^2}{a^2}, \quad x = x_0.$$

Полуоси этого эллипса равны  $b\lambda$  и  $c\lambda$ , где  $\lambda = \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}}$ . Используя пример 1, получаем формулу (21), а по формуле (20) находим иско-мый объем эллипсоида:

$$v = 2 \int_0^a S(x) dx = 2\pi bc \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3} \pi abc.$$

Отсюда следует, что объем шара, радиус которого равен  $R$ , выража-ется формулой  $v = \frac{4}{3} \pi R^3$ . ▲

### 3. Вычисление длины дуги кривой.

Утверждение 6. Если кривая  $\Gamma$ , заданная уравнением

$$\Gamma = \{\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \alpha \leq t \leq \beta\}, \quad (22)$$

непрерывно дифференцируема, то ее длина  $S$  выражается формулой

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} |\mathbf{r}'(t)| dt. \quad (23)$$

○ В § 22 (п. 3) было доказано, что непрерывно дифференцируемая кривая  $\Gamma$  спрямляема (имеет длину), а производная переменной дли-ны дуги  $s(t)$  этой кривой выражается формулой

$$s'(t) = |\mathbf{r}'(t)|. \quad (24)$$

Пусть  $S$  — длина всей кривой  $\Gamma$ ; тогда, используя равенство (24) и формулу Ньютона–Лейбница, получаем

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} s'(t) dt = s(\beta) - s(\alpha) = S,$$

так как  $s(\beta) = S$ , а  $s(\alpha) = 0$ . ●

Если  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , то формула (23) принимает вид

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt, \quad (25)$$

а если  $\Gamma$  — плоская кривая, заданная уравнением

$$y = f(x), \quad a \leq x \leq b,$$

то ее длина выражается формулой

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (26)$$

Пример 6. Найти длину кривой  $y = \operatorname{ch} x$ ,  $0 \leq x \leq a$ .

△ Применяя формулу (26), находим

$$S = \int_0^a \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} dx = \int_0^a \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} a. \quad \blacktriangle$$



**4. Вычисление площади поверхности вращения.** Пусть  $f(x)$  — неотрицательная и непрерывная на отрезке  $[a, b]$  функция,  $T = \{x_i, i = \overline{0, n}\}$  — разбиение отрезка  $[a, b]$ ,  $L_T$  — ломаная с вершинами  $A_i(x_i, f(x_i))$ ,  $i = \overline{0, n}$ , соединяющая последовательно точки  $A_0, A_1, \dots, A_n$  (рис. 37.8),  $l_i$  — длина отрезка  $\mathcal{L}_i = [A_{i-1}, A_i]$  —  $i$ -го звена ломаной  $L_T$ . Тогда

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}. \quad (27)$$

При вращении вокруг оси  $Ox$  звена  $\mathcal{L}_i$  образуется боковая поверхность усеченного конуса (цилиндра в случае, когда  $f(x_i) = f(x_{i-1})$ ). Площадь этой поверхности, как известно из курса элементарной геометрии, равна

$$p_i = \pi(y_{i-1} + y_i)l_i, \quad y_k = f(x_k), \quad k = \overline{1, n},$$

откуда следует, что площадь  $\mathcal{P}_T$  поверхности, получаемой при вращении ломаной  $L_T$  вокруг оси  $Ox$ , равна

$$\mathcal{P}_T = \pi \sum_{i=1}^n (y_{i-1} + y_i)l_i. \quad (28)$$

Если существует

$$\lim_{l(T) \rightarrow 0} \mathcal{P}_T = \mathcal{P}, \quad (29)$$

где  $l(T)$  — мелкость разбиения  $T$ , а  $\mathcal{P}_T$  определяется формулой (28), то число  $\mathcal{P}$  называют

*площадью поверхности вращения*, т. е. площадью поверхности, образующейся при вращении вокруг оси  $Ox$  графика функции  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ .

**Утверждение 7.** Если функция  $f$  имеет непрерывную производную на отрезке  $[a, b]$ , то предел (29) существует, а площадь  $\mathcal{P}$  поверхности вращения выражается формулой

$$\mathcal{P} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (30)$$

○ Из формул (28) и (27) следует, что

$$\mathcal{P}_T = \pi \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} (y_i + y_{i-1}), \quad (31)$$

где  $y_i = f(x_i)$ . По теореме Лагранжа

$$y_i - y_{i-1} = f'(\xi_i) \Delta x_i, \quad (32)$$

где  $\xi_i \in \Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ ,  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ . Поэтому формулу (28) можно записать в виде

$$\mathcal{P}_T = \pi \sum_{i=1}^n (y_i + y_{i-1}) \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i. \quad (33)$$

Прибавим и вычтем в правой части равенства (33) интегральную сумму для интеграла (30), соответствующую разбиению  $T$  и выборке  $\xi = \xi_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), указанной формулой (32), т. е. сумму

$$\sigma_T(\xi, g) = 2\pi \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i, \quad (34)$$

где  $g(x) = 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ . Заметим, что в силу непрерывности функции  $g$  для любой выборки  $\xi$  существует

$$\lim_{l(T) \rightarrow 0} \sigma_T(\xi, g) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Поэтому для доказательства формулы (30) достаточно показать, что

$$\omega = \mathcal{P}_T - \sigma_T(\xi, g) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad l(T) \rightarrow 0. \quad (35)$$

Из (33) и (34) следует, что

$$\omega = \pi \sum_{i=1}^n (y_i + y_{i-1} - 2f(\xi_i)) \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i. \quad (36)$$

При оценке величины  $\omega$  воспользуемся тем, что функция  $f$  равномерно непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , т. е. для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta_\varepsilon > 0$  такое, что для любых точек  $x', x''$  из отрезка  $[a, b]$ , удовлетворяющих условию  $|x' - x''| < \delta_\varepsilon$ , выполняется неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{C}, \quad (37)$$

где число  $C > 0$  будет выбрано ниже.

Пусть разбиение  $T$  удовлетворяет условию  $l(T) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i < \delta_\varepsilon$ ; тогда  $|x_i - \xi_i| \leq l(T) < \delta_\varepsilon$ ,  $|x_{i-1} - \xi_i| \leq l(T) < \delta_\varepsilon$ , так как  $\xi_i \in \Delta_i$ . Из (37) следует, что

$$|y_i - f(\xi_i)| = |f(x_i) - f(\xi_i)| < \frac{\varepsilon}{C}, \quad |y_{i-1} - f(\xi_i)| < \frac{\varepsilon}{C},$$

и поэтому

$$|y_i + y_{i-1} - 2f(\xi_i)| < \frac{2\varepsilon}{C}. \quad (38)$$

В силу непрерывности функции  $f'(x)$  на отрезке  $[a, b]$  существует число  $M > 0$  такое, что  $0 < \sqrt{1 + (f'(x))^2} < M$  для всех  $x \in [a, b]$  и, в частности,

$$0 < \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} < M, \quad i = \overline{1, n}. \quad (39)$$

Из (36), (38) и (39) получаем следующую оценку:

$$|\omega| < \pi \sum_{i=1}^n \frac{2\varepsilon}{C} M \Delta x_i = \frac{2\pi M(b-a)}{C} \varepsilon. \tag{40}$$

Возьмем  $C = 2\pi M(b-a)$  в условии (37); тогда из (40) следует, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta_\varepsilon > 0$  такое, что для каждого разбиения  $T$ , мелкость  $l(T)$  которого удовлетворяет условию  $l(T) < \delta_\varepsilon$ , выполняется неравенство  $|\omega| < \varepsilon$ . Это означает, что  $\omega \rightarrow 0$  при  $l(T) \rightarrow 0$ . Формула (30) доказана. ●

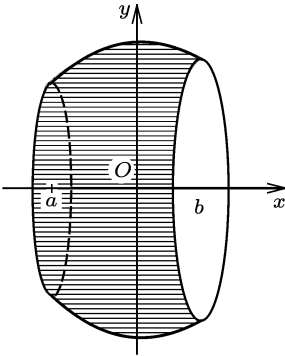


Рис. 37.9

Пример 5. Пользуясь формулой (30), вычислить площадь  $\mathcal{S}$  поверхности сферического пояса высоты  $h$ , если радиус сферы равен  $R$ .

△ Сферический пояс высоты  $h$  можно получить вращением дуги полуокружности, заданной уравнением  $y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ ,  $a \leq x \leq b$ , где  $[a, b] \subset [-R, R]$ ,  $b - a = h$ , вокруг оси  $Ox$  (рис. 37.9). Так как

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \text{ то } 1 + (f'(x))^2 = \frac{R^2}{R^2 - x^2},$$

$f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} = R$ , и по формуле (30) получаем  $\mathcal{S} = 2\pi \int_a^b R dx = 2\pi R(b-a) = 2\pi R h$ . В частности, площадь поверхности сферы радиуса  $R$  равна  $4\pi R^2$ . ▲

**5. Применение определенного интеграла при решении физических задач.** Определенный интеграл широко применяется при решении различных физических задач. С помощью определенного интеграла можно вычислять: путь, пройденный материальной точкой, если известна скорость движения; работу переменной силы (см. § 34, п. 1, б); силу давления жидкости на плоскую фигуру; статические моменты и координаты центра масс плоской кривой и плоской фигуры и т. д.

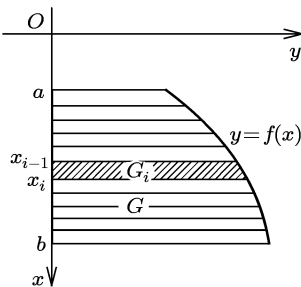


Рис. 37.10

Пусть плоская пластинка  $G$ , имеющая форму криволинейной трапеции, определяемой условиями (1), погружена вертикально в жидкость с плотностью  $\rho$  так, что ее боковые стороны параллельны поверхности жидкости и удалены от уровня жидкости на расстояния  $a$  и  $b$  (рис. 37.10).

Требуется найти силу давления жидкости на пластинку.

Из курса физики известно, что если пластинка погружена в жидкость и расположена горизонтально на расстоянии  $h$  от поверхности жидкости, то сила давления  $\mathcal{P}$  на одну из сторон пластинки равна

$$\mathcal{P} = gphS,$$

где  $S$  — площадь пластинки,  $g$  — ускорение силы тяжести. Таким образом, сила давления — линейная функция от глубины погружения пластинки. Поэтому естественно разбить пластинку  $G$  на части прямыми, параллельными поверхности жидкости (оси  $Oy$ ).

Пусть  $T = \{x_i, i = \overline{0, n}\}$  — разбиение отрезка  $[a, b]$ . Прямыми, проведенными через точки  $x_i$  ( $i = \overline{1, n-1}$ ), разобьем фигуру  $G$  на  $n$  частей (полосок)  $G_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ). Выделим полоску  $G_i$ , ограниченную прямыми  $x = x_{i-1}$  и  $x = x_i$  (рис. 37.10). Площадь этой полоски приближенно равна площади прямоугольника с основанием  $\Delta x_i$  и высотой  $f(x_i)$ , глубину погружения всех точек полоски  $G_i$  можно считать равной  $x_i$ . Поэтому сила давления жидкости на полоску  $G_i$  приближенно равна

$$g\rho x_i f(x_i) \Delta x_i,$$

а сумма

$$\mathcal{P}_T = \sum_{i=1}^n g\rho x_i f(x_i) \Delta x_i$$

приближенно равна силе давления жидкости на пластинку  $G$ .

Если  $l(T) \rightarrow 0$ , где  $l(T)$  — мелкость разбиения  $T$ , а функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то  $\mathcal{P}_T \rightarrow \mathcal{P}$ , где

$$\mathcal{P} = g \int_a^b \rho x f(x) dx. \quad (41)$$

Число  $\mathcal{P}$ , выражаемое формулой (41), называют *силой давления жидкости на пластинку  $G$* .

**Пример 8.** Вычислить силу давления  $\mathcal{P}$  жидкости с плотностью  $\rho$  на вертикальную стенку, имеющую форму полукруга радиуса  $R$  и погруженную в жидкость так, что диаметр полукруга расположен на поверхности жидкости (рис. 37.11).

$\Delta$  Выберем систему координат так, как указано на рис. 37.11. Пользуясь формулой (41), где  $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ ,  $a = 0$ ,  $b = R$ , получаем

$$\mathcal{P} = 2g\rho \int_0^R x \sqrt{R^2 - x^2} dx = -\frac{2}{3} g\rho (R^2 - x^2)^{3/2} \Big|_0^R = \frac{2\rho g}{3} R^3. \quad \blacktriangle$$

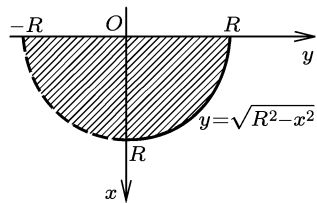


Рис. 37.11

### § 38. Несобственные интегралы

**1. Определение несобственных интегралов.** Интеграл Римана был введен для ограниченных на отрезке функций. Естественно поставить вопрос о распространении понятия интеграла на случай бесконечного промежутка, а также на случай, когда подынтегральная функция является неограниченной.

а) *Интеграл на бесконечном промежутке.* Рассмотрим функцию  $\frac{1}{1+x^2}$ . Эта функция непрерывна на отрезке  $[0, \xi]$  при любом  $\xi \geq 0$ , и поэтому существует интеграл  $J(\xi) = \int_0^{\xi} \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg } \xi$ , откуда следует, что  $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} J(\xi) = \frac{\pi}{2}$ . В этом случае пишут  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ , а символ  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$  называют несобственным интегралом от функции  $\frac{1}{1+x^2}$  на бесконечном промежутке  $[0, +\infty)$ .

Число  $\frac{\pi}{2}$  можно интерпретировать как площадь фигуры, ограниченной графиком функции  $y = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $x \geq 0$ , и координатными осями (рис. 38.1).

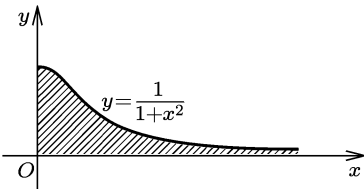


Рис. 38.1

Рассмотрим несобственный интеграл на бесконечном промежутке от функции  $f$ .

Пусть функция  $f(x)$  определена при  $x \geq a$ , где  $a$  — заданное число, и интегрируема на отрезке  $[a, \xi]$  при любом  $\xi \geq a$ . Тогда символ

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$  будем называть не-

собственным интегралом от функции  $f$  на промежутке  $[a, +\infty)$ . Если существует конечный  $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \int_a^{\xi} f(x) dx = A$ , то говорят, что *несобственный интеграл*

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$  сходится и равен  $A$ , а функцию  $f$  называют *интегрируемой в несобственном смысле на промежутке*  $[a, +\infty)$ . Таким образом, сходящийся несобственный интеграл от функции  $f$  на промежутке  $[a, +\infty)$  определяется равенством

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \int_a^{\xi} f(x) dx. \quad (1)$$

Если функция  $\int_a^\xi f(x) dx$  не имеет конечного предела при  $\xi \rightarrow +\infty$ ,

то говорят, что несобственный интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  *расходится*.

**З а м е ч а н и е 1.** Сходимость интеграла (1) равносильна сходимости интеграла  $\int_c^{+\infty} f(x) dx$ , где  $c$  — любое число из промежутка  $(a, +\infty)$ , так как

$$\int_a^\xi f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^\xi f(x) dx.$$

Интеграл на бесконечном промежутке вида  $(-\infty, a)$  определяется аналогично:

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \int_\xi^a f(x) dx. \quad (2)$$

**П р и м е р 1.** Показать, что интеграл  $J = \int_{-\infty}^0 x e^{-x^2} dx$  сходится, и вычислить этот интеграл.

$\Delta$  Обозначим  $F(\xi) = \int_\xi^0 x e^{-x^2} dx$ . Тогда

$$F(\xi) = \frac{1}{2} \int_0^\xi e^{-x^2} d(-x^2) = \frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_0^\xi = \frac{1}{2} (e^{-\xi^2} - 1).$$

Так как существует конечный  $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} F(\xi) = -\frac{1}{2}$ , то согласно определению (2) интеграл  $J$  существует, причем  $J = -\frac{1}{2}$ .  $\blacktriangle$

Определим, наконец, несобственный интеграл на промежутке  $R$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{\xi \rightarrow -\infty \\ \eta \rightarrow +\infty}} \int_\xi^\eta f(x) dx. \quad (3)$$

В этом случае предполагается, что функция  $f$  интегрируема (по Риману) на любом отрезке действительной оси, а интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  называется сходящимся в случае существования конечного предела (3), причем этот предел не должен зависеть от того, каким способом  $\xi$  и  $\eta$  стремятся соответственно к  $-\infty$  и к  $+\infty$ . Иначе говоря, интеграл

сходится тогда и только тогда, когда существуют конечные пределы  $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \int_{\xi}^a f(x) dx = J_1$  и  $\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_a^{\eta} f(x) dx = J_2$ , где  $a \in R$ , и при этом несобственный интеграл по определению равен  $J_1 + J_2$ , т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

**Пример 2.** Показать, что интеграл  $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x+x^2}$  сходится, и вычислить этот интеграл.

$\Delta$  Обозначим  $F(\xi, \eta) = \int_{\xi}^{\eta} \frac{dx}{1+x+x^2}$ , тогда

$$\begin{aligned} F(\xi, \eta) &= \int_{\xi}^{\eta} \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \Big|_{\xi}^{\eta} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \operatorname{arctg} \frac{2\eta+1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \frac{2\xi+1}{\sqrt{3}} \right). \end{aligned}$$

Так как  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} t = \frac{\pi}{2}$ , а  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} t = -\frac{\pi}{2}$ , то существует конечный  $\lim_{\substack{\xi \rightarrow -\infty \\ \eta \rightarrow +\infty}} F(\xi, \eta) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{\pi}{2} - \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ , т. е. несобственный интеграл сходится, причем  $J = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ .  $\blacktriangle$

**Пример 3.** Исследовать на сходимость интеграл

$$J(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}. \quad (4)$$

$\Delta$  Пусть  $\alpha \neq 1$ , тогда

$$\int_1^{\xi} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_1^{\xi} = \frac{\xi^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}.$$

Если  $\alpha > 1$ , то существует конечный  $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \int_1^{\xi} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$ , т. е. интеграл (4) сходится, причем  $J(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$ . Если  $\alpha < 1$ , то  $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \int_1^{\xi} \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty$ , и поэтому интеграл (4) расходится. При  $\alpha = 1$  интеграл также расходится, так как  $\int_1^{\xi} \frac{dx}{x} = \ln \xi \rightarrow +\infty$  при  $\xi \rightarrow +\infty$ .

Таким образом, интеграл (4) сходится при  $\alpha > 1$  и расходится при  $\alpha \leq 1$ .  $\blacktriangle$

Упражнение 1. Показать, что интеграл  $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{(x-c)^\alpha}$ , где  $a > c$ , сходится при  $\alpha > 1$  и расходится при  $\alpha \leq 1$ .

б) *Интеграл на конечном промежутке.* Рассмотрим функцию  $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ . Эта функция непрерывна на промежутке  $[0, 1)$ , но не ограничена на этом промежутке. При любом  $\xi \in [0, 1)$  функция  $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$  интегрируема на отрезке  $[0, \xi]$ , причем  $J(\xi) = \int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x} \Big|_0^\xi = 2(1 - \sqrt{1-\xi})$ , откуда следует, что существует конечный  $\lim_{\xi \rightarrow 1-0} F(\xi) = 2$ . В этом случае говорят, что несобственный интеграл от функции  $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$  на промежутке  $[0, 1)$  равен 2, т. е.  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2$ . Число 2 можно интерпретировать как площадь заштрихованной на рис. 38.2 фигуры  $G$ .

Обратимся к несобственному интегралу на конечном промежутке. Пусть функция  $f(x)$  определена на конечном промежутке  $[a, b)$ , интегрируема на отрезке  $[a, \xi]$  при любом  $\xi \in [a, b)$ .

Если существует конечный  $\lim_{\xi \rightarrow b-0} \int_a^\xi f(x) dx = A$ , то говорят, что *несобственный интеграл от функции  $f(x)$  на промежутке  $[a, b)$  равен  $A$* . Его обозначают символом  $\int_a^b f(x) dx$ . Таким образом, по определению

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\xi \rightarrow b-0} \int_a^\xi f(x) dx. \quad (5)$$

В случае существования конечного предела (5) несобственный интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  называют *сходящимся*, в противном случае — *расходящимся*; символ  $\int_a^b f(x) dx$  употребляют как в случае сходимости, так и в случае расходимости интеграла.

Аналогично, если функция  $f(x)$  определена на конечном промежутке  $(a, b]$ , интегрируема на отрезке  $[\xi, b]$  при любом  $\xi \in (a, b]$ , то

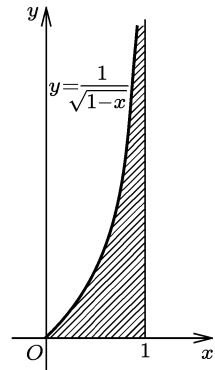


Рис. 38.2



символ  $\int_a^b f(x) dx$  называют несобственным интегралом от функции  $f$  на промежутке  $(a, b]$ .

Если существует конечный  $\lim_{\xi \rightarrow a+0} \int_{\xi}^b f(x) dx = A$ , то говорят, что несобственный интеграл сходится и равен  $A$ , т. е.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\xi \rightarrow a+0} \int_{\xi}^b f(x) dx. \quad (6)$$

Если функция  $\int_{\xi}^b f(x) dx$  не имеет конечного предела при  $\xi \rightarrow a+0$ , то несобственный интеграл называют расходящимся.

**З а м е ч а н и е 2.** Определение (5) несобственного интеграла на конечном промежутке  $[a, b)$  является содержательным лишь в случае, когда функция  $f$  неограничена на интервале  $(b - \delta, b)$  при любом  $\delta > 0$ . В самом деле, если функция  $f$  интегрируема на отрезке  $[a, \xi]$  при любом  $\xi \in [a, b)$  и ограничена на  $[a, b)$ , то, доопределив эту функцию в точке  $b$ , получим функцию, которая интегрируема по Риману на отрезке  $[a, b]$ . При этом интеграл от доопределенной функции равен пределу (5) и не зависит от значения функции в точке  $b$ .

Поэтому в дальнейшем, рассматривая несобственный интеграл (5), будем считать, что функция  $f$  является неограниченной на интервале  $(b - \delta, b)$  при любом  $\delta > 0$ , а точку  $b$  будем называть иногда *особой точкой подынтегральной функции  $f$  или интеграла* (5).

Аналогично, рассматривая несобственный интеграл (6), будем считать, что  $a$  — особая точка функции  $f$ , т. е. предполагать, что функция  $f$  неограничена на интервале  $(a, a + \delta)$  при любом  $\delta > 0$ .

**Пример 4.** Исследовать на сходимость интеграл

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}.$$

$\Delta$  Обозначим  $F(\xi) = \int_{\xi}^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ , тогда

$$F(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(1 - \xi^{1-\alpha}), & \text{если } \alpha \neq 1, \\ -\ln \xi, & \text{если } \alpha = 1. \end{cases}$$

Поэтому при  $\alpha < 1$  существует конечный  $\lim_{\xi \rightarrow +0} F(\xi) = \frac{1}{1-\alpha}$ , а если  $\alpha \geq 1$ , то  $F(\alpha; \xi) \rightarrow +\infty$  при  $\xi \rightarrow +0$ .

Таким образом, интеграл сходится при  $\alpha < 1$  и расходится при  $\alpha \geq 1$ .  $\blacktriangle$

Упражнение 2. Пусть  $-\infty < a < b < +\infty$ . Показать, что интегралы

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-\alpha)^\alpha} \quad \text{и} \quad \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$$

сходятся при  $\alpha < 1$  и расходятся при  $\alpha \geq 1$ .

Замечание 3. Сходимость несобственного интеграла (5) равносильна сходимости интеграла  $\int_c^b f(x) dx$  при любом  $c \in (a, b)$ , так как  $\int_a^\xi f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^\xi f(x) dx$ .

в) *Другие типы несобственных интегралов.* Если функция  $f$  определена на конечном интервале  $(a, b)$ , интегрируема по Риману на отрезке  $[\xi, \eta]$  при любых  $\xi, \eta$  таких, что  $a < \xi \leq \eta < b$ , то сходящийся несобственный интеграл от функции  $f$  на промежутке  $(a, b)$  определяется формулой

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\xi \rightarrow a+0 \\ \eta \rightarrow b-0}} \int_\xi^\eta f(x) dx \quad (7)$$

при условии, что предел в правой части (7) существует и конечен.

Если функция  $f$  определена на отрезке  $[a, b]$ , за исключением точки  $c \in (a, b)$ , и интегрируема на отрезках  $[a, \xi]$  и  $[\eta, b]$  при любых  $\xi, \eta$  таких, что  $a \leq \xi < c < \eta \leq b$ , то несобственный интеграл от функции  $f$  на промежутке  $[a, b]$  обозначается  $\int_a^b f(x) dx$  и определяется равенством

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\xi \rightarrow c-0} \int_a^\xi f(x) dx + \lim_{\eta \rightarrow c+0} \int_\eta^b f(x) dx \quad (8)$$

при условии, что оба предела в правой части (8) существуют и конечны. В этом случае интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  называют *сходящимся* и пишут

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Если функция  $f$  определена на конечном или бесконечном промежутке  $(a, b)$ , за исключением точек  $x_k$  ( $k = \overline{1, m}$ ), где  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ , то несобственный интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  понимается как сумма несобственных интегралов по промежуткам  $\Delta_k = (x_{k-1}, x_k)$ ,  $k = \overline{1, m}$ , и считается сходящимся в том и только том случае, когда сходятся интегралы по всем промежуткам  $\Delta_k$ .

## 2. Свойства и вычисление несобственных интегралов. Будем рассматривать несобственные интегралы вида $\int_a^b f(x) dx$ , предполагая, что:

а) функция  $f$  определена на промежутке  $[a, b)$ , где  $a$  — конечная точка,  $b$  — либо конечная точка, либо символ  $+\infty$ ;

б) функция  $f$  интегрируема по Риману на отрезке  $[a, \xi]$  при любом  $\xi \in [a, b)$ .

Согласно определению сходящегося несобственного интеграла

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\xi \rightarrow b-0} \int_a^{\xi} f(x) dx, \quad \text{если } b \neq +\infty,$$

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \int_a^{\xi} f(x) dx, \quad \text{если } b = +\infty.$$

а) *Линейность интеграла.*

**Утверждение 1.** Если сходятся несобственные интегралы от функций  $f(x)$  и  $g(x)$  на промежутке  $[a, b)$ , то при любых  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  сходится интеграл от функции  $\lambda f(x) + \mu g(x)$  на том же промежутке и выполняется равенство

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx. \quad (9)$$

○ Для любого  $\xi \in [a, b)$  в силу свойств интеграла Римана справедливо равенство

$$\int_a^{\xi} (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^{\xi} f(x) dx + \mu \int_a^{\xi} g(x) dx,$$

правая часть которого имеет по условию конечный предел при  $\xi \rightarrow b - 0$ , откуда следует существование предела при  $\xi \rightarrow b - 0$  в левой части и справедливость формулы (9). ●

б) *Формула Ньютона–Лейбница.*

**Утверждение 2.** Если функция  $f(x)$  непрерывна на промежутке  $[a, b)$  и если  $F(x)$  — первообразная для функции  $f(x)$ , то несобственный интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  сходится тогда и только тогда, когда существует конечный

$$\lim_{\xi \rightarrow b-0} F(\xi) = F(b-0), \quad (10)$$

причем

$$\int_a^b f(x) dx = F(b-0) - F(a). \quad (11)$$

○ Так как функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[a, \xi]$  при любом  $\xi \in [a, b)$ , то справедлива формула Ньютона–Лейбница

$$\int_a^{\xi} f(x) dx = F(\xi) - F(a),$$

откуда, переходя к пределу при  $\xi \rightarrow b-0$  и используя соотношение (10), получаем формулу (11), которую называют *формулой Ньютона–Лейбница для несобственного интеграла*.

Правую часть формулы (11) часто записывают в виде  $F(x)\Big|_a^{b-0}$ , если  $b \neq +\infty$ . Если  $b = +\infty$ , то правую часть формулы (11) записывают в виде  $F(x)\Big|_a^{+\infty}$ . ●

Пример 5. Вычислить интегралы:

$$\text{а) } J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{1+x^2} dx; \quad \text{б) } J_2 = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos \beta x dx, \text{ где } \alpha > 0.$$

△ а) Так как  $\frac{\arctg x}{1+x^2} dx = \arctg x d(\arctg x) = d\left(\frac{(\arctg x)^2}{2}\right)$ , то  $F(x) = \frac{(\arctg x)^2}{2}$  является первообразной для функции  $f(x) = \frac{\arctg x}{1+x^2}$ , и по формуле (11) получаем  $J_1 = \frac{1}{2}(\arctg x)^2\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{8}$ , так как  $\arctg(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}$ ,  $\arctg 0 = 0$ .

б) Ранее в § 30 (пример 19) было показано, что функция  $F(x) = \frac{\beta \sin \beta x - \alpha \cos \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} e^{-\alpha x}$  является первообразной для функции  $f(x) = e^{-\alpha x} \cos \beta x$ . По формуле (11) находим  $J_2 = F(x)\Big|_0^{+\infty} = F(+\infty) - F(0)$ , где  $F(0) = -\frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}$ ,  $F(+\infty) = 0$ , так как  $|\sin \beta x| \leq 1$ ,  $|\cos \beta x| \leq 1$  для всех  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\alpha x} = 0$  при  $\alpha > 0$ . Следовательно,  $J_2 = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}$ . ▲

в) Интегрирование по частям.

Утверждение 3. Пусть функции  $u(x)$ ,  $v(x)$  определены на промежутке  $[a, b)$ , имеют непрерывные производные на отрезке  $[a, \xi]$  для любого  $\xi \in (a, b)$ . Если существует конечный предел

$$\lim_{\xi \rightarrow b-0} [u(\xi) v(\xi)] = u(b-0) v(b-0) = uv \Big|_{\xi=b-0} \quad (12)$$

и интеграл  $\int_a^b v u' dx$  сходится, то и интеграл  $\int_a^b u v' dx$  сходится и спра-

ведлива формула интегрирования по частям

$$\int_a^b uv' dx = uv \Big|_a^{b-0} - \int_a^b vu' dx. \quad (13)$$

○ Так как функции  $u'(x)$ ,  $v'(x)$  непрерывны на отрезке  $[a, \xi]$  при любом  $\xi \in (a, b)$ , то справедлива формула интегрирования по частям (§ 36, теорема 6)

$$\int_a^\xi uv' dx = u(\xi)v(\xi) - u(a)v(a) - \int_a^\xi vu' dx. \quad (14)$$

Правая часть равенства (14) по условию имеет при  $\xi \rightarrow b - 0$  конечный предел, равный правой части формулы (13). Следовательно, существует конечный предел и в левой части (14), т. е. сходится интеграл  $\int_a^b uv' dx$ , и при этом справедлива формула (13).

Отметим, что при наличии конечного предела (12) несобственные интегралы  $\int_a^b vu' dx$  и  $\int_a^b uv' dx$  сходятся или расходятся одновременно. ●

Пример 6. Вычислить несобственный интеграл  $J = \int_0^{+\infty} xe^{-x} dx$ .

△ Применяя формулу (13), получаем

$$J = \int_0^{+\infty} x(-e^{-x})' dx = -xe^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx.$$

Так как  $xe^{-x} = 0$  при  $x = 0$ , а  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$ , то  $J = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1$ . ▲

г) Замена переменного.

Утверждение 4. Если функция  $f(x)$  непрерывна на промежутке  $[a, b)$ , а функция  $x = \varphi(t)$  непрерывно дифференцируема на промежутке  $[\alpha, \beta)$ , строго возрастает и удовлетворяет условиям  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\lim_{t \rightarrow \beta-0} \varphi(t) = b$ , то справедлива формула замены переменного

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad (15)$$

при условии, что хотя бы один из интегралов в (15) сходится.

○ Пусть  $\tau \in [\alpha, \beta)$ ,  $\varphi(\tau) = \xi$ . Тогда  $\varphi(\tau) \rightarrow b$  при  $\tau \rightarrow \beta - 0$ . Применяя формулу замены переменного для интеграла Римана (§ 36,

теорема 5), получаем

$$\int_a^\xi f(x) dx = \int_\alpha^\tau f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (16)$$

Так как функция  $x = \varphi(t)$  строго возрастает и непрерывна на  $[\alpha, \beta)$ , то обратная функция строго возрастает и непрерывна на  $[a, b)$ . Поэтому если существует конечный предел при  $\tau \rightarrow \beta - 0$  в правой части равенства (16), то существует конечный предел при  $\xi \rightarrow b - 0$  в левой части (и наоборот), и при этом справедлива формула (16). ●

Замечание 4. Формула (15) остается справедливой и в случае, когда  $\alpha > \beta$ , если функция  $\varphi(t)$  непрерывно дифференцируема на промежутке  $(\beta, \alpha)$ , строго убывает, причем  $a = \lim_{t \rightarrow \alpha - 0} \varphi(t)$ ,  $b = \lim_{t \rightarrow \beta + 0} \varphi(t)$ . При этом по

аналогии с интегралом Римана по определению полагают, что  $\int_\alpha^\beta g(t) dt = -\int_\beta^\alpha g(t) dt$  при  $\alpha > \beta$ , если интеграл  $\int_\alpha^\beta g(t) dt$  сходится.

Пример 7. Вычислить интеграл  $J = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^{3/2}}$ .

△ Положим  $x = \operatorname{tg} t$ , где  $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$ . Тогда  $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$ ,  $x^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}$ ,  $(x^2 + 1)^{-3/2} = \cos^3 t$ , поэтому  $J = \int_0^{\pi/2} \cos t dt = 1$ . ▲

Пример 8. Вычислить интеграл  $J = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$ .

△ Преобразуем интеграл (см. § 33, пример 5, в))  $J = \int_0^{+\infty} \frac{(1 + 1/x^2) dx}{(x - 1/x)^2 + 2}$  и положим  $x - \frac{1}{x} = t$ ; тогда

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \quad \blacktriangle$$

Пример 9. Вычислить интеграл  $J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$ .

△ Для вычисления интеграла можно использовать первообразную для подынтегральной функции  $f(x) = \frac{1}{x^4 + 1}$  (см. § 33, пример 4). Рассмотрим другой способ вычисления, не требующий нахождения первообразной для функции  $f(x)$ . Полагая  $x = \frac{1}{t}$ , получаем

$$J_1 = -\int_{+\infty}^0 \frac{dt}{t^2 \left(1 + \frac{1}{t^4}\right)} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1 + t^4} dt = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1 + x^4} dx.$$

Таким образом,  $J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx$ , откуда, используя пример 8, находим  $J_1 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \frac{1}{2} J = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ . Итак,  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ . ▲

д) *Интегрирование неравенств.*

Утверждение 5. Если сходятся интегралы  $\int_a^b f(x) dx$  и  $\int_a^b g(x) dx$  и для всех  $x \in [a, b]$  выполняется неравенство

$$f(x) \leq g(x),$$

то

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx. \quad (17)$$

○ Неравенство (17) получается из неравенства

$$\int_a^\xi f(x) dx \leq \int_a^\xi g(x) dx, \quad a \leq \xi < b,$$

с помощью перехода к пределу при  $\xi \rightarrow b - 0$ . ●

**3. Несобственные интегралы от неотрицательных функций.** В пп. 3–5 все утверждения формулируются и доказываются для интегралов того же типа, что и в п. 2.

Теорема 1. Если для всех  $x \in [a, b)$  выполняется неравенство

$$f(x) \geq 0, \quad (18)$$

то для сходимости несобственного интеграла  $\int_a^b f(x) dx$  необходимо и достаточно, чтобы функция  $\int_a^\xi f(x) dx$  была ограничена сверху, т. е.

$$\exists C: \forall \xi \in [a, b) \rightarrow \int_a^\xi f(x) dx \leq C. \quad (19)$$

○ Заметим, что  $F(\xi) = \int_a^\xi f(x) dx$  — возрастающая функция. В самом деле, из условия (18) и свойств интеграла Римана следует, что

$$\forall \xi_1, \xi_2 \in [a, b): \xi_2 > \xi_1 \rightarrow F(\xi_2) - F(\xi_1) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x) dx \geq 0.$$

Если интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  сходится, т. е. существует конечный  $\lim_{\xi \rightarrow b-0} F(\xi) = \int_a^b f(x) dx = J$ , то по теореме о пределе монотонной функции (§ 10)  $J = \sup_{a \leq \xi < b} F(\xi)$ , откуда согласно определению точной верхней грани следует, что для всех  $\xi \in [a, b)$  справедливо неравенство

$$\int_a^{\xi} f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx,$$

т. е. выполняется условие (19).

Обратно: если выполняется условие (19), то в силу теоремы о пределе монотонной функции ( $F$  — возрастающая функция) существует конечный

$$\lim_{\xi \rightarrow b-0} F(\xi) = F(b-0) = \sup_{a \leq \xi < b} F(\xi),$$

т. е. интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  сходится. ●

**Теорема 2 (теорема сравнения).** Если для всех  $x \in [a, b)$  выполняется условие

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \quad (20)$$

то:

а) из сходимости интеграла  $J_2 = \int_a^b g(x) dx$  следует сходимость интеграла  $J_1 = \int_a^b f(x) dx$ ;

б) из расходимости интеграла  $J_1$  следует расходимость интеграла  $J_2$ .

○ а) Из условия (20) в силу правила оценки интеграла Римана следует, что

$$\int_a^{\xi} f(x) dx \leq \int_a^{\xi} g(x) dx, \quad \xi \in [a, b). \quad (21)$$

Если сходится интеграл  $\int_a^b g(x) dx$ , т. е. существует конечный  $\lim_{\xi \rightarrow b-0} \int_a^{\xi} g(x) dx = J_2$ , где  $J_2 = \sup_{a \leq \xi < b} \int_a^{\xi} g(x) dx$  (теорема 1), то из (21)

следует, что для любого  $\xi \in [a, b)$  выполняется неравенство  $\int_a^{\xi} f(x) dx \leq$



$\leq J_2$ . Таким образом, для неотрицательной функции  $f(x)$  выполняется условие (19), и по теореме 1 интеграл  $J_1$  сходится.

б) Если интеграл  $J_1$  расходится, то интеграл  $J_2$  тоже должен расходиться: в случае сходимости интеграла  $J_2$  сошелся бы по доказанному выше интеграл  $J_1$ . ●

Пример 10. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos^4 3x}{\sqrt[5]{1+x^6}} dx.$$

△ Так как  $0 \leq \frac{\cos^4 3x}{\sqrt[5]{1+x^6}} \leq \frac{1}{x^{6/5}}$  при  $x \geq 1$ , то по теореме 2 из сходимости интеграла  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{6/5}}$  (пример 3) следует сходимость интеграла  $J$ . ▲

Следствие. Если для всех  $x \in [a, b)$  выполняются условия

$$f(x) > 0, \quad g(x) > 0, \quad (22)$$

и, кроме того,

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{при} \quad x \rightarrow b - 0, \quad (23)$$

то интегралы  $J_1 = \int_a^b f(x) dx$  и  $J_2 = \int_a^b g(x) dx$  сходятся или расходятся одновременно.

○ Если выполнены условия (22) и (23), то  $\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ , т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) \in [a, b): \quad \forall x \in [\delta(\varepsilon), b) \rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Полагая здесь  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , найдем число  $\delta\left(\frac{1}{2}\right) = c$  такое, что

$$\frac{1}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}, \quad x \in [c, b), \quad a \leq c < b. \quad (24)$$

Неравенство (24) в силу условия  $g(x) > 0$  равносильно неравенству

$$\frac{1}{2} g(x) < f(x) < \frac{3}{2} g(x), \quad x \in [c, b). \quad (25)$$

Так как функции  $f$  и  $g$  не имеют особых точек на промежутке  $[a, b)$ , то интегралы  $J_1$  и  $J_2$  сходятся тогда и только тогда, когда сходятся интегралы соответственно от функций  $f$  и  $g$  на промежутке  $[c, b)$ , где  $a \leq c < b$  (см. замечание 3).

Если сходится интеграл  $J_2$  (а значит, и интеграл  $\int_c^b g(x) dx$ ), то из правого неравенства (25) по теореме 2 следует сходимость интеграла

от  $f$  на промежутке  $[c, b)$ , а это равносильно сходимости интеграла  $J_1$ . Аналогично из левого неравенства (25) заключаем, что из сходимости интеграла  $J_1$  следует сходимость интеграла  $J_2$ .

Если же один из интегралов  $J_1$  или  $J_2$  расходится, то расходится и другой (это доказывается методом от противного на основе теоремы 2). ●

В частности, если функция  $f(x)$  интегрируема на отрезке  $[a, \xi]$  при любом  $\xi \geq a$  и если

$$f(x) \sim \frac{A}{x^\alpha} \quad \text{при } x \rightarrow +\infty, \quad \text{где } A \neq 0,$$

то интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  сходится при  $\alpha > 1$  и расходится при  $\alpha \leq 1$ .

Пример 11. Исследовать на сходимость интеграл

$$J = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}. \quad (26)$$

△ Рассмотрим три возможных случая:  $\alpha > 1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\alpha < 1$ .

а) Первый случай:  $\alpha > 1$ .

Если  $\alpha > 1$ , то  $\alpha = 1 + 2\delta$ , где  $\delta > 0$ . Представим подынтегральную функцию  $f(x)$  в следующем виде:

$$f(x) = \frac{1}{x^{1+\delta}} g(x), \quad \text{где } g(x) = \frac{1}{x^\delta \ln^\beta x}.$$

Так как  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\delta \ln^\beta x = +\infty$  при  $\alpha > 0$  и любом  $\beta$  (см. § 19, пример 5),

то существует число  $x_0 > 2$  такое, что  $0 < g(x) < 1$  при всех  $x \geq x_0$ .

Поэтому  $0 < f(x) < \frac{1}{x^{1+\delta}}$  при  $x \in [x_0, +\infty)$ , и из сходимости интеграла

$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\delta}}$ , где  $x_0 > 2$ ,  $\delta > 0$ , по теореме 2 следует сходимость интеграла

от  $f$  на промежутке  $[x_0, +\infty)$ , а это равносильно сходимости интеграла  $J$ . Итак, если  $\alpha > 1$ , то интеграл  $f$  сходится при любом  $\beta$ .

б) Второй случай:  $\alpha = 1$ .

В этом случае  $J = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^\beta x} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta}$ . Поэтому при  $\alpha = 1$  интеграл  $J$  сходится, если  $\beta > 1$ , и расходится при  $\beta \leq 1$  (пример 3).

в) Третий случай:  $\alpha < 1$ .

Если  $\alpha < 1$ , то  $\alpha = 1 - 2\delta$ , где  $\delta > 0$ . Запишем подынтегральную функцию  $f(x)$  в виде  $f(x) = \frac{g(x)}{x^{1-\delta}}$ , где  $g(x) = x^\delta (\ln x)^{-\beta} \rightarrow +\infty$  при  $x \rightarrow +\infty$ , откуда следует, что  $g(x) > 1$  при  $x \geq x_0 > 2$ . Поэтому  $f(x) > \frac{1}{x^{1-\delta}}$  при  $x \geq x_0$ , и по теореме 2 из расходимости интеграла

$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{x^{1-\delta}} dx$ , где  $\delta > 0$ , следует расходимость интеграла от  $f$  на промежутке  $[x_0, +\infty)$ , откуда заключаем, что интеграл  $J$  расходится.

Итак, интеграл расходится, если  $\alpha < 1$ .

Таким образом, интеграл (26) сходится при  $\alpha > 1$  ( $\beta$  любое) и при  $\alpha = 1$ , если  $\beta > 1$ , и расходится при других значениях  $\alpha$  и  $\beta$ . ▲

Упражнение 3. Показать, что несобственный интеграл

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^\alpha |\ln x|^\beta}$$

сходится при  $\alpha < 1$  ( $\beta$  любое) и при  $\alpha = 1$ , если  $\beta > 1$ , и расходится при других значениях  $\alpha$  и  $\beta$ .

Пример 12. Исследовать на сходимость интеграл

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(e^x - x)}{x^\alpha} dx.$$

△ Подынтегральная функция  $f(x) = \frac{\ln(e^x - x)}{x^\alpha}$  неотрицательна при  $x > 0$ , так как  $e^x > 1 + x$  при  $x > 0$ , и непрерывна на промежутке  $(0, +\infty)$ . Интеграл  $J$  сходится тогда и только тогда, когда сходятся

интегралы  $J_1 = \int_0^1 f(x) dx$  и  $J_2 = \int_1^{+\infty} f(x) dx$ .

а) Исследуем поведение функции при  $x \rightarrow +0$ .

Так как  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$  при  $x \rightarrow 0$ ,  $\ln(1 + t) = t + o(t)$  при  $t \rightarrow 0$ , то  $\ln(e^x - x) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ , и поэтому  $f(x) \sim \frac{1}{2x^{\alpha-2}}$  при  $x \rightarrow 0$ . Следовательно, интеграл  $J_1$  сходится тогда и только тогда, когда  $\alpha - 2 < 1$ , т. е. при  $\alpha < 3$ .

б) Пусть  $x \rightarrow +\infty$ . Тогда  $e^x - x = e^x(1 - xe^{-x}) = e^x(1 + o(1))$ , откуда  $\ln(e^x - x) = x + \ln(1 + o(1)) = x + o(1)$  при  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \sim \frac{1}{x^{\alpha-1}}$

при  $x \rightarrow +\infty$ . Так как интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\beta}$  сходится при  $\beta > 1$  и расхо-

дится при  $\beta \leq 1$ , то интеграл  $J_2$  сходится тогда и только тогда, когда  $\alpha - 1 > 1$ , т. е. при  $\alpha > 2$ . Таким образом, интеграл  $J$  сходится в том и только том случае, когда выполняются условия  $\alpha < 3$  и  $\alpha > 2$ , т. е. при  $2 < \alpha < 3$ . ▲

Пример 13. Исследовать на сходимость интеграл

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} dx.$$

$\Delta$  Подынтегральная функция  $f(x)$  положительна и непрерывна на интервале  $(0, 1)$ . Интеграл  $J$  сходится тогда и только тогда, когда сходятся интегралы от  $f(x)$  по промежуткам  $(0, 1)$  и  $(1, +\infty)$ . Обозначим эти интегралы  $J_1$  и  $J_2$  соответственно.

а) Если  $x \rightarrow +0$ , то  $\sqrt{x+\sqrt{x}} = \sqrt{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} = \sqrt[4]{x}(1+\sqrt{x})^{1/2} \sim \sqrt[4]{x}$ . Учитывая, что  $\ln(1+t) \sim t$  при  $t \rightarrow 0$ ,  $\ln(1+u) \sim \ln u$  при  $u \rightarrow +\infty$ , получаем следующие асимптотические формулы для  $f(x)$  при  $x \rightarrow +0$ :

$$f(x) \sim \begin{cases} x^{\alpha-1/4} & \text{при } \alpha > 0, \\ x^{-1/4} \ln 2 & \text{при } \alpha = 0, \\ \alpha x^{-1/4} \ln x & \text{при } \alpha < 0. \end{cases}$$

Используя результат упр. 3, получаем: интеграл  $J_1$  сходится при всех значениях  $\alpha$ .

б) Если  $x \rightarrow +\infty$ , то  $\sqrt{x+\sqrt{x}} = \sqrt{x(1+x^{-1/2})} \sim \sqrt{x}$ , и поэтому

$$f(x) \sim \begin{cases} \alpha x^{-1/2} \ln x & \text{при } \alpha > 0, \\ x^{-1/2} \ln 2 & \text{при } \alpha = 0, \\ x^{\alpha-1/2} & \text{при } \alpha < 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что интеграл  $J_2$  сходится, если  $\frac{1}{2} - \alpha > 1$ , т. е. при  $\alpha < -\frac{1}{2}$ . Таким образом, интеграл  $J$  сходится при  $\alpha < -\frac{1}{2}$  и расходится при прочих значениях  $\alpha$ .  $\blacktriangle$

**4. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов.** Будем рассматривать несобственные интегралы того же вида, что и в пп. 2, 3.

Теорема 3. Для сходимости несобственного интеграла

$$J = \int_a^b f(x) dx$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon \in (a, b): \forall \xi', \xi'' \in (\delta_\varepsilon, b) \rightarrow \left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x) dx \right| < \varepsilon. \quad (27)$$

○ Обозначим

$$F(\xi) = \int_a^\xi f(x) dx, \quad a \leq \xi < b. \quad (28)$$

Тогда сходимость интеграла  $J$  означает существование конечного предела функции  $F(\xi)$  при  $\xi \rightarrow b - 0$ , а этот предел, согласно критерию Коши для функций (§ 10), существует в том и только том случае, когда функция  $F$  удовлетворяет условию

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{\delta}_\varepsilon \in (a, b): \forall \xi', \xi'' \in (\tilde{\delta}_\varepsilon, b) \rightarrow |F(\xi'') - F(\xi')| < \varepsilon. \quad (29)$$

Из формулы (28) в силу свойств интеграла следует, что

$$F(\xi'') - F(\xi') = \int_{\xi'}^{\xi''} f(x) dx.$$

Поэтому условие (29), являясь необходимым и достаточным для сходимости интеграла  $J$ , выполняется тогда и только тогда, когда выполняется условие (27), если взять  $\tilde{\delta}_\varepsilon = \delta_\varepsilon$ . ●

Замечание 5. Если условие Коши (27) не выполняется, т. е.

$$\exists \varepsilon_0 > 0: \forall \delta \in (a, b) \exists \xi'_\delta, \xi''_\delta \in (\delta, b): \left| \int_{\xi'_\delta}^{\xi''_\delta} f(x) dx \right| \geq \varepsilon_0, \quad (30)$$

то интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  расходится.

Пример 14. Исследовать на сходимость интеграл

$$J(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx. \quad (31)$$

Δ а) Если  $\alpha > 1$ , то интеграл  $J$  сходится, так как  $0 \leq \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha}$ .

б) Докажем, что при  $\alpha \leq 1$  интеграл расходится. Достаточно показать, что для этого интеграла выполняется условие (30). Для  $\delta > 1$  выберем число  $n \in \mathbb{N}$  таким, чтобы выполнялось неравенство  $\pi n > \delta$ , и возьмем  $\xi'_\delta = \pi n$ ,  $\xi''_\delta = 2\pi n$ , тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_{\xi'_\delta}^{\xi''_\delta} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx \right| &= \int_{\pi n}^{2\pi n} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx \geq \int_{\pi n}^{2\pi n} \frac{\sin^2 x}{x} dx \geq \\ &\geq \frac{1}{2\pi n} \int_{\pi n}^{2\pi n} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{4\pi n} \pi n = \frac{1}{4} = \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Таким образом, условие (30) выполняется, и поэтому при  $\alpha \leq 1$  интеграл (31) расходится. ▲

Замечание 6. Так как  $|\sin x| \geq \sin^2 x$ , то по теореме сравнения из расходимости интеграла (31) при  $\alpha \leq 1$  следует, что интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx$  расходится при  $\alpha \leq 1$ .

**5. Абсолютно и условно сходящиеся интегралы.** Несобственный интеграл  $J = \int_a^b f(x) dx$  называется:

а) *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл  $\tilde{J} = \int_a^b |f(x)| dx$ ;

в этом случае говорят, что функция  $f$  *абсолютно интегрируема* на промежутке  $[a, b]$ ;

б) *условно сходящимся*, если интеграл  $J$  сходится, а интеграл  $\tilde{J}$  расходится.

**Теорема 4.** Если несобственный интеграл  $\tilde{J}$  сходится, то интеграл  $J$  также сходится и выполняется неравенство

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad (32)$$

○ Из сходимости интеграла  $\tilde{J}$  по теореме 3 (необходимое условие) следует, что для него выполняется условие Коши (27), т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon \in (a, b): \forall \xi', \xi'' \in (\delta_\varepsilon, b) \rightarrow \left| \int_{\xi'}^{\xi''} |f(x)| dx \right| < \varepsilon. \quad (33)$$

По определению несобственного интеграла  $J$  функция  $f(x)$  интегрируема по Риману на отрезке с концами  $\xi'$ ,  $\xi''$ , и поэтому функция  $|f(x)|$  также интегрируема по Риману на этом отрезке. Применяя правило оценки интеграла (см. § 35, (18)), получаем

$$\left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x) dx \right| \leq \left| \int_{\xi'}^{\xi''} |f(x)| dx \right|,$$

откуда в силу (33) следует, что функция  $f$  удовлетворяет условию Коши (27), и по теореме 2 (достаточное условие) сходится интеграл  $J$ .

Для доказательства неравенства (32) воспользуемся неравенством

$$\left| \int_a^\xi f(x) dx \right| \leq \int_a^\xi |f(x)| dx, \quad (34)$$

справедливым при любом  $\xi \in [a, b]$ . В силу сходимости интегралов  $J$  и  $\tilde{J}$  существуют пределы при  $\xi \rightarrow b - 0$  левой и правой частей (34), равные соответственно  $J$  и  $\tilde{J}$ . Переходя в (34) к пределу при  $\xi \rightarrow b - 0$ , получаем неравенство (32). ●

**Упражнение 4.** Пусть несобственные интегралы от функций  $f(x)$  и  $g(x)$  на промежутке  $[a, b]$  сходятся. Следует ли отсюда сходимость интеграла от их произведения на промежутке  $[a, b]$ ?

Пример 15. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость интеграл

$$J = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx. \quad (35)$$

а) Пусть  $\alpha > 1$ . Так как  $\left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| \leq \frac{1}{x^\alpha}$ , то в силу сходимости интеграла  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$  по теореме сравнения 2 сходится интеграл  $\tilde{J} = \int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| dx$ , т. е. интеграл  $J$  сходится абсолютно (откуда следует сходимость самого интеграла  $J$  по теореме 4).

б) Пусть  $0 < \alpha \leq 1$ . Тогда, интегрируя по частям, получаем

$$J = -\frac{\cos x}{x^\alpha} \Big|_1^{+\infty} - \alpha \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}} dx,$$

где  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} = 0$ , а интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}} dx$  абсолютно сходится и, следовательно, сходится. Поэтому интеграл  $J$  сходится, если  $\alpha \in (0, 1]$ .

Так как интеграл  $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| dx$  при  $\alpha \in (0, 1]$  расходится (замечание 6), то при  $\alpha \in (0, 1]$  интеграл  $J$  сходится условно.

в) Пусть  $\alpha \leq 0$ . Докажем, что интеграл  $J$  расходится, используя критерий Коши. Для  $\delta > 1$  выберем число  $n \in \mathbb{N}$  таким, чтобы выполнялось условие  $2\pi n > \delta$ , и возьмем  $\xi'_\delta = 2\pi n + \frac{\pi}{6}$ ,  $\xi''_\delta = 2\pi n + \frac{5}{6}\pi$ . Так как при  $x \in [\xi'_\delta, \xi''_\delta]$  выполняется неравенство  $\sin x \geq \frac{1}{2}$  и, кроме того,  $\frac{1}{x^\alpha} \geq 1$  при  $x \geq 1$  и  $\alpha \leq 0$ , то

$$\left| \int_{\xi'_\delta}^{\xi''_\delta} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \right| = \int_{\pi/6+2\pi n}^{5\pi/6+2\pi n} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \geq \frac{1}{2} \int_{\pi/6+2\pi n}^{5\pi/6+2\pi n} dx = \frac{\pi}{3},$$

т. е. выполняется условие (30), и поэтому при  $\alpha \leq 0$  интеграл (35) расходится.

Итак, интеграл (35):

- а) абсолютно сходится при  $\alpha > 1$ ;
- б) условно сходится при  $0 < \alpha \leq 1$ ;
- в) расходится при  $\alpha \leq 0$ . ▲

Замечание 7. Аналогично можно показать, что интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$$

абсолютно сходится при  $\alpha > 1$ , условно сходится при  $\alpha \in (0, 1]$  и расходится при  $\alpha \leq 0$ .

При исследовании сходимости интегралов часто может оказаться полезным следующее утверждение.

**Теорема 5.** Если функция  $g(x)$  абсолютно интегрируема на промежутке  $[a, b)$ , т. е. несобственный интеграл  $\tilde{J} = \int_a^b |g(x)| dx$  сходится, то несобственные интегралы  $J_1 = \int_a^b f(x) dx$  и  $J_2 = \int_a^b (f(x) + g(x)) dx$  либо оба абсолютно сходятся, либо оба условно сходятся, либо оба расходятся.

○ Обозначим  $J = \int_a^b g(x) dx$ ,  $\tilde{J}_1 = \int_a^b |f(x)| dx$ ,  $\tilde{J}_2 = \int_a^b |f(x) + g(x)| dx$ .

а) Из неравенства  $|f + g| \leq |f| + |g|$  и критерия Коши (теорема 3) следует, что если интегралы  $\tilde{J}_1$  и  $\tilde{J}$  сходятся, то интеграл  $\tilde{J}_2$  также сходится.

Аналогично, используя неравенство  $|f| \leq |f + g| + |g|$ , докажем, что из сходимости интегралов  $\tilde{J}$  и  $\tilde{J}_2$  следует сходимость интеграла  $\tilde{J}_1$ .

б) Пусть интеграл  $J_1$  сходится, а интеграл  $\tilde{J}_1$  расходится.

Тогда интеграл  $J_2$  сходится (это следует из сходимости интегралов  $J_1$  и  $J$ ), а интеграл  $\tilde{J}_2$  расходится, так как в противном случае из неравенства  $|f| \leq |f + g| + |g|$  и сходимости интеграла  $\tilde{J}$  следовала бы сходимость интеграла  $\tilde{J}_1$ . Аналогично доказывается, что из условной сходимости интеграла  $\tilde{J}_2$  следует условная сходимость интеграла  $J_1$ .

в) Из расходимости интеграла  $J_1$  следует расходимость интеграла  $J_2$  (в противном случае из равенства  $f = (f + g) - g$  и сходимости интеграла  $J$  следовала бы сходимость интеграла  $J_1$ ).

Аналогично из расходимости интеграла  $J_2$  следует расходимость интеграла  $J_1$ . ●

Теорему 5 коротко можно сформулировать так: прибавление (вычитание) под знаком интеграла абсолютно интегрируемой функции не влияет ни на сходимость интеграла, ни на характер сходимости (абсолютная, условная сходимость).

## 6. Признаки Дирихле и Абеля сходимости интегралов.

**Теорема 6** (признак Дирихле). Пусть функция  $f$  непрерывна, а функция  $g$  имеет непрерывную производную на промежутке  $[a, +\infty)$  и выполняются следующие условия:

1) функция  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  (первообразная для  $f$ ) ограничена на  $[a, +\infty)$ , т. е.

$$\exists M > 0: \forall x \in [a, +\infty) \rightarrow |F(x)| \leq M; \quad (36)$$



2) функция  $g'(x)$  не меняет знака на промежутке  $[a, +\infty)$ , т. е.

$$g'(x) \leq 0 \quad (37)$$

или

$$g'(x) \geq 0; \quad (38)$$

3)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0. \quad (39)$$

Тогда интеграл

$$J = \int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx \quad (40)$$

сходится.

○ Покажем, что функция  $fg$  удовлетворяет на промежутке  $[a, +\infty)$  условию Коши (27). Согласно формуле интегрирования по частям для  $\xi' > a$ ,  $\xi'' > a$  получаем

$$\int_{\xi'}^{\xi''} f(x)g(x) dx = F(x)g(x) \Big|_{\xi'}^{\xi''} - \int_{\xi'}^{\xi''} F(x)g'(x) dx. \quad (41)$$

Из условия (36) следует, что

$$\left| (Fg) \Big|_{\xi'}^{\xi''} \right| \leq M(|g(\xi')| + |g(\xi'')|), \quad (42)$$

$$\left| \int_{\xi'}^{\xi''} F(x)g'(x) dx \right| \leq M \left| \int_{\xi'}^{\xi''} |g'(x)| dx \right|. \quad (43)$$

Заметим, что  $|g'(x)| = -g'(x)$ , если выполнено условие (37), и  $|g'(x)| = g'(x)$ , если выполнено условие (38). Поэтому в первом случае

$J_1 = \int_{\xi'}^{\xi''} |g'(x)| dx = - \int_{\xi'}^{\xi''} g'(x) dx = g(\xi') - g(\xi'')$ , а во втором случае  $J_1 = g(\xi'') - g(\xi')$ . Следовательно,

$$|J_1| = \left| \int_{\xi'}^{\xi''} |g'(x)| dx \right| = |g(\xi'') - g(\xi')| \leq |g(\xi')| + |g(\xi'')|. \quad (44)$$

Поэтому из равенства (41), используя оценки (42)–(44), получаем неравенство

$$\left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x)g(x) dx \right| \leq 2M(|g(\xi')| + |g(\xi'')|). \quad (45)$$

Согласно условию (39)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > a: \forall x \in [\delta_\varepsilon, +\infty) \rightarrow |g(x)| < \frac{\varepsilon}{4M}. \quad (46)$$

Поэтому для  $\xi', \xi'' \in [\delta_\varepsilon, +\infty)$  из (45) и (46) следует, что

$$\left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x) g(x) dx \right| < 2M \left( \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{4M} \right) = \varepsilon,$$

т. е. функция  $fg$  удовлетворяет на промежутке  $[a, +\infty)$  условию Коши (27), и по теореме 3 интеграл (40) сходится. ●

**Замечание 8.** Условия (37)–(39) означают, что функция  $g(x)$  монотонно стремится к нулю при  $x \rightarrow +\infty$ .

**Следствие (признак Абеля).** Если функция  $f$  непрерывна на промежутке  $\Delta = [a, +\infty)$ , интеграл  $J = \int_a^{+\infty} f(x) dx$  сходится, а функция  $g(x)$  ограничена на  $\Delta$  и ее производная  $g'(x)$  не меняет знака на  $\Delta$  (удовлетворяет условию (37) или (38)), то интеграл (40) сходится.

○ По теореме о пределе монотонной функции существует конечный  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = g(+\infty)$ , и поэтому функция  $g_1(x) = g(x) - g(+\infty)$  монотонно стремится к нулю при  $x \rightarrow +\infty$ . Из сходимости интеграла  $J$  следует, что функция  $f$  имеет ограниченную первообразную. По теореме 6 интеграл от функции  $f(x)g_1(x)$  по промежутку  $\Delta$  сходится. Так как  $f(x)g(x) = f(x)g(+\infty) + f(x)g_1(x)$ , то интеграл (40) сходится. ●

**Пример 16.** Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость интеграл

$$J = \int_0^{+\infty} (e^x + x) \cos e^{2x} dx.$$

△ Положим  $e^{2x} = t$ . Тогда  $x = \frac{1}{2} \ln t$ ,  $dx = \frac{dt}{2t}$ , и поэтому

$$J = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt + \frac{1}{4} \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t} \cos t dt. \quad (47)$$

Оба интеграла в формуле (47) сходятся по признаку Дирихле, так как функция  $\cos t$  имеет ограниченную первообразную  $\left( \left| \int_1^\xi \cos t dt \right| \leq \leq 2 \right)$ , а функции  $\frac{1}{\sqrt{t}}$  и  $\frac{\ln t}{t}$  монотонно стремятся к нулю при  $t \rightarrow +\infty$ .

Покажем, что  $\tilde{J} = \int_1^{+\infty} \varphi(t) |\cos t| dt$ , где  $\varphi(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{\ln t}{2t} \right)$ , расходится. В самом деле,  $\varphi(t) \geq \frac{1}{2t}$  при  $t \geq 1$ ,  $|\cos t| \geq \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$ , откуда следует неравенство  $\varphi(t) |\cos t| \geq \frac{1 + \cos 2t}{4t}$ . Так как интеграл

$\int_1^{+\infty} \frac{1 + \cos 2t}{4t} dt$  расходится (это следует из сходимости по признаку Дирихле интеграла  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{4t} dt$  и расходимости интеграла  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{4t}$ ), то

по теореме 2 интеграл  $\tilde{J}$  расходится. Таким образом, интеграл  $J$  сходится условно. ▲

Пример 17. Исследовать на сходимость интеграл

$$J = \int_4^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} dx.$$

△ Теорему 6 применить нельзя, так как  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - \sin x}$  не является монотонной при  $x \geq 4$ . Запишем функцию  $g(x)$  в следующем виде:  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(1 - \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)^{-1}$ , где  $\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{2}$ , так как  $x \geq 4$ . Положим  $\varphi(t) = (1 - t)^{-1}$ ,  $|t| \leq \frac{1}{2}$ . По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа получаем

$$\varphi(t) = 1 + t + \frac{\varphi''(\xi)}{2!} t^2,$$

где  $|\xi| \leq |t| \leq \frac{1}{2}$ ,  $\varphi''(\xi) = 2(1 - \xi)^{-3}$ ,  $|\varphi''(\xi)| \leq 2^4$ .

Отсюда следует, что если  $x \geq 4$ , то

$$\left(1 - \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)^{-1} = 1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + h(x),$$

где  $|h(x)| \leq 2^3 \left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right|^2 \leq \frac{8}{x}$ . Поэтому  $\frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2 x}{x} + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} h(x)$ , где функция  $\psi(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} h(x)$  не влияет на сходимость интеграла  $J$  (теорема 5), так как  $|\psi(x)| \leq \frac{8}{x^{3/2}}$ , а интеграл  $\int_4^{+\infty} \frac{8}{x^{3/2}} dx$  сходится. Из сходимости интеграла  $\int_4^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$  (пример 15) и расходимости интеграла  $\int_4^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$  (пример 14) следует, что интеграл  $J$  расходится. ▲

## УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ VII

1. Доказать, что если функция  $\varphi(x)$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$  и для всех  $x \in [a, b]$  выполняется условие  $c \leq \varphi(x) \leq d$ , а функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[c, d]$ , то сложная функция  $f(\varphi(x))$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ .

2. Пусть функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и выполняется неравенство  $\int_a^b f(x) dx > 0$ . Доказать, что существует отрезок  $\Delta \subset [a, b]$  такой, что  $f(x) > 0$  для всех  $x \in \Delta$ .

3. Доказать, что если функция  $f$  непрерывна при  $x \geq 0$  и существует конечный  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ , то

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = a.$$

4. Доказать, что для любых функций  $f$  и  $g$ , интегрируемых на отрезке  $[a, b]$ , выполняется неравенство Коши–Буняковского

$$\int_a^b f(x) g(x) dx \leq \left( \int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2} \left( \int_a^b g^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

5. Доказать, что при любом  $n \in \mathbb{N}$  справедливы равенства:

$$\text{а) } \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2}; \quad \text{б) } \int_0^{\pi/2} \left( \frac{\sin nx}{\sin x} \right)^2 dx = \frac{n\pi}{2}.$$

6. Найти  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left( \int_0^x e^{t^2} dt \right)^2 \left( \int_0^x e^{2t^2} dt \right)^{-1} \right]$ .

7. Доказать, что для любой функции  $f$ , непрерывной на отрезке  $[0, 1]$ , выполняются равенства:

$$\text{а) } \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx; \quad \text{б) } \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

8. Доказать, что если функция  $f$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ , то

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_a^b |f(x+t) - f(x)| dx = 0, \quad \text{где } f(x) = 0 \text{ для всех } x \notin [a, b].$$

9. Доказать, что если функция  $f$  интегрируема на любом отрезке действительной оси, то функция

$$F_\delta(x) = \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t) dt, \quad \text{где } \delta > 0,$$

непрерывна на  $\mathbb{R}$ , а если функция  $f$  непрерывна на  $\mathbb{R}$ , то функция  $F_\delta(x)$  дифференцируема на  $\mathbb{R}$ .

10. Доказать, что равенство  $\int_a^b f^2(x) dx = 0$  для интегрируемой на отрезке  $[a, b]$  функции выполняется тогда и только тогда, когда  $f(x) = 0$  во всех точках непрерывности функции  $f$ .

11. Доказать, что если функция  $f$  дважды непрерывно дифференцируема на отрезке  $[0, 1]$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right] = \frac{f(1) - f(0)}{2}.$$

**12.** Доказать, что если функция  $F(x)$  дифференцируема во всех точках отрезка  $[a, b]$ , кроме точек  $x_k$  ( $k = \overline{1, m}$ ),  $F'(x) = f(x)$  для всех  $x \in [a, b]$ ,  $x \neq x_k$  ( $k = \overline{1, m}$ ), причем  $x_k$  — точки разрыва первого рода функции  $F$ , а функция  $f$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ , то справедлива формула

$$\int_a^b f(x) dx = F(b-0) - F(a+0) - \sum_{k=1}^m (F(x_k+0) - F(x_k-0)).$$

**13.** Пусть  $f(x) = ax^2 + bx + c > 0$  для всех  $x \in [x_1, x_2]$ . Доказать, что площадь  $S$  фигуры  $G = \{(x, y) : x_1 \leq x \leq x_2, 0 \leq y \leq f(x)\}$  выражается формулой Симпсона

$$S = \frac{1}{6}(x_2 - x_1)(f(x_1) + f(x_2) + 4f(x_0)), \quad \text{где } x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

**14.** Показать, что длина  $S$  плоской кривой, заданной в полярных координатах уравнением  $\rho = \rho(\varphi)$ ,  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ , где  $\rho(\varphi)$  — функция, непрерывно дифференцируемая на отрезке  $[\alpha, \beta]$ , выражается формулой

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi.$$

**15.** Пусть функция  $y = f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , где  $0 \leq a \leq b$  и  $f(x) \geq 0$  для всех  $x \in [a, b]$ . Доказать, что объем  $V$  тела, образованного при вращении вокруг оси  $Oy$  фигуры  $G = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ , равен

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

**16.** Доказать, что если функция  $f$  ограничена на отрезке  $[a, b]$  и непрерывна во всех точках этого отрезка, кроме конечного числа точек, то эта функция интегрируема на отрезке  $[a, b]$ .

ГЛАВА VIII  
ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

§ 39. Определение и свойства сходящихся рядов

**1. Сходящийся числовой ряд и его сумма.** Выражение  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ , где  $\{a_n\}$  — заданная числовая последовательность, будем называть *числовым рядом* и обозначать символом  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , а числа  $a_n$  будем называть *членами ряда*. Сумму  $n$  первых членов ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  будем называть  *$n$ -й частичной суммой* этого ряда и обозначать  $S_n$ , т. е.

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k. \quad (1)$$

Определение. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (2)$$

называется *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм  $\{S_n\}$  имеет конечный предел  $S$ , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S. \quad (3)$$

Число  $S$ , определяемое условиями (1) и (3), называют *суммой ряда* (2) и пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S. \quad (4)$$

Если последовательность  $\{S_n\}$  не имеет конечного предела (предел не существует или бесконечен), то говорят, что ряд (2) *расходится* (является *расходящимся*).

Пример 1. Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}, \quad \text{где } |q| < 1, \quad (5)$$

сходится, и найти его сумму  $S$ .

Δ Используя формулу для суммы  $n$  первых членов геометрической

прогрессии, получаем

$$S_n = \sum_{k=1}^n q^{k-1} = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}.$$

Так как  $q^n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , если  $|q| < 1$ , то последовательность  $\{S_n\}$  имеет конечный предел, равный  $\frac{1}{1-q}$ , т. е. ряд (5) сходится и его сумма  $S = \frac{1}{1-q}$ . ▲

**Пример 2.** Доказать, что если при всех  $n \in \mathbb{N}$  выполняется равенство

$$a_n = b_n - b_{n+1} \quad (6)$$

и существует конечный

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b, \quad (7)$$

то ряд (2) сходится, а его сумма  $S = b_1 - b$ , т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b. \quad (8)$$

△ Используя условие (6), получаем  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_2 + b_2 - b_3 + \dots + b_{n-1} - b_n + b_n - b_{n+1} = b_1 - b_{n+1}$ , откуда в силу (7) следует сходимость ряда (2) и равенство (8). ▲

**Пример 3.** Найти сумму ряда (2), если  $a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ .

△ Так как

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{(n+2) - n}{2n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n(n+1)} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)},$$

то последовательность  $\{a_n\}$  удовлетворяет условиям (6) и (7), где  $b_n = \frac{1}{2n(n+1)}$ ,  $b = 0$ , и по формуле (8) получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}. \quad \blacktriangle$$

**2. Необходимое условие сходимости ряда.** Если ряд (2) сходится, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \quad (9)$$

○ Так как ряд (2) сходится, то существует конечный предел  $S$  последовательности  $\{S_n\}$ , где  $S_n$  —  $n$ -я частичная сумма ряда (формула (1)). Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$ , откуда следует, что  $S_n - S_{n-1} = a_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . ●

Таким образом, соотношение (9) выражает *необходимое условие сходимости ряда*.

**Пример 4.** Доказать, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  расходится.

△ Так как  $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$  при  $k = 1, 2, \dots, n$ , то  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq n \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$ ,

откуда следует, что  $S_n \rightarrow +\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , т. е. ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  расходится. ▲

**Замечание 1.** Условие (9) не является достаточным для сходимости ряда (2): ряд, рассмотренный в примере 4, удовлетворяет условию (9), но расходится.

**Пример 5.** Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\alpha, \quad \text{где } \alpha \neq \pi m \quad (m \in \mathbb{Z}), \quad (10)$$

расходится.

△ Докажем, что

$$\sin n\alpha \not\rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Предположим, что  $\sin n\alpha \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда  $\sin(n+1)\alpha \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , т. е.  $\sin n\alpha \cos \alpha + \cos n\alpha \sin \alpha \rightarrow 0$ , откуда следует, что  $\cos n\alpha \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , так как  $\sin \alpha \neq 0$ . Итак, если  $\sin n\alpha \rightarrow 0$ , то  $\cos n\alpha \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , что невозможно, так как  $\sin^2 n\alpha + \cos^2 n\alpha = 1$ .

Таким образом, для ряда (10) должно выполняться условие (11), и поэтому ряд (10) расходится. ▲

### 3. Свойства сходящихся рядов.

**Свойство 1.** Если ряды (2) и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (12)$$

сходятся, а их суммы равны соответственно  $S$  и  $\sigma$ , то при любых  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n), \quad (13)$$

а его сумма равна

$$\tau = \lambda S + \mu \sigma. \quad (14)$$

○ Пусть  $S_n, \sigma_n$  и  $\tau_n$  —  $n$ -е частичные суммы рядов (2), (12) и (13) соответственно. Тогда  $\tau_n = \lambda S_n + \mu \sigma_n$ . Так как  $S_n \rightarrow S$  и  $\sigma_n \rightarrow \sigma$  при  $n \rightarrow \infty$ , то последовательность  $\{\tau_n\}$  имеет конечный предел, т. е. ряд (13) сходится, и справедливо равенство (14). ●



Свойство 2. Если сходится ряд (2), то при каждом  $m \in \mathbb{N}$  сходится ряд

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n, \quad (15)$$

который называют  $m$ -м остатком ряда (2). Обратное: если при фиксированном  $m$  ряд (15) сходится, то и ряд (2) также сходится.

○ Пусть  $S_n = a_1 + \dots + a_n$  и  $\sigma_k^{(m)} = a_{m+1} + \dots + a_{m+k}$  — соответственно  $n$ -я частичная сумма ряда (2) и  $k$ -я частичная сумма ряда (15). Тогда

$$S_n = S_m + \sigma_k^{(m)}, \quad \text{где } n = m + k. \quad (16)$$

Если ряд (2) сходится, то последовательность  $\{S_n\}$  имеет конечный предел при  $n \rightarrow \infty$ , и поэтому из равенства (16) следует, что последовательность  $\{\sigma_k^{(m)}\}$ , где  $m$  фиксировано, имеет конечный предел при  $k \rightarrow \infty$ , т. е. ряд (15) сходится.

Обратно: если  $m$  фиксировано и существует конечный  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k^{(m)}$ , то существует конечный  $\lim_{k \rightarrow \infty} S_n$ . ●

Замечание 2. Согласно свойству 2 отбрасывание конечного числа членов ряда или добавление конечного числа членов к данному ряду не влияет на его сходимость.

Свойство 3. Если ряд (2) сходится, то и ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_j, \quad (17)$$

полученный группировкой членов ряда (2) без изменения порядка их расположения, также сходится и имеет ту же сумму, что и ряд (2).

○ Пусть  $b_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_{k_1}$ ,  $b_2 = a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \dots + a_{k_2}$ , ...

...,  $b_j = a_{k_{j-1}+1} + \dots + a_{k_j}$ , где  $j \in \mathbb{N}$ ,  $\{k_j\}$  — строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Обозначим  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ,

$\sigma_m = \sum_{j=1}^m b_j$ ; тогда  $\sigma_m = S_{k_m}$ . Так как  $\{\sigma_m\}$  — подпоследовательность

сходящейся последовательности  $S_1, S_2, \dots$ , то существует  $\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m = S$ , где  $S$  — сумма ряда (2). ●

Упражнение. Показать, что утверждение, обратное к свойству 2, неверно: из сходимости ряда (17) не следует сходимость ряда (2).

#### 4. Критерий Коши сходимости ряда.

Теорема. Для сходимости ряда (2) необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N} \rightarrow |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon. \quad (18)$$

○ Так как  $a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p} = S_{n+p} - S_n$ , где  $S_n$  —  $n$ -я частичная сумма ряда (2), то условие (18) означает, что последовательность  $\{S_n\}$  является фундаментальной (§ 8). В силу критерия Коши для последовательности (§ 8) условие (18) равносильно существованию конечного предела последовательности  $\{S_n\}$ , т. е. равносильно сходимости ряда (2). ●

Замечание 3. Если условие (18) не выполняется, т. е.

$$\exists \varepsilon_0 > 0: \forall k \in \mathbb{N} \exists n \geq k \exists p \in \mathbb{N}: |a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| \geq \varepsilon_0, \quad (19)$$

то ряд (2) расходится.

Пример 6. Доказать, что гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad (20)$$

расходится.

△ Для любого  $k \in \mathbb{N}$  возьмем  $n = k, p = k$ . Тогда  $\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k = \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{2k} > \frac{1}{2k} > \frac{1}{2} > \frac{1}{2} = \varepsilon_0$ , и в силу условия (19) ряд (20) расходится. ▲

**5. Ряды с комплексными членами.** Последовательность комплексных чисел  $\{z_n\}$  называют *сходящейся*, если существует такое комплексное число  $z$ , что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z| = 0,$$

где  $|z|$  — модуль комплексного числа  $z$  (§ 31). В этом случае пишут  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$  или  $z_n \rightarrow z$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Если  $z_n = x_n + iy_n, z = x + iy$ , то условие  $z_n \rightarrow z$  при  $n \rightarrow \infty$  эквивалентно выполнению условий  $x_n \rightarrow x$  и  $y_n \rightarrow y$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Ряд с комплексными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \quad (21)$$

называют *сходящимся*, если существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n z_k = S,$$

где  $S \in \mathbb{C}$ . В этом случае пишут  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$ , а комплексное число  $S$  называют *суммой ряда* (21).

Упражнение 2. Показать, что ряд (21), где  $z_n = x_n + iy_n$ , сходится к сумме  $S = a + ib$  тогда и только тогда, когда сходятся ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ , причем суммы этих рядов равны  $a$  и  $b$  соответственно.

## § 40. Ряды с неотрицательными членами

### 1. Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами.

Теорема 1. Если члены ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1)$$

неотрицательны, т. е.

$$\forall n \in N \rightarrow a_n \geq 0, \quad (2)$$

то для сходимости этого ряда необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм  $\{S_n\}$  была ограничена сверху, т. е.

$$\exists M > 0: \forall n \in N \rightarrow S_n = \sum_{k=1}^n a_k \leq M. \quad (3)$$

○ Заметим, что  $\{S_n\}$  — возрастающая последовательность, так как  $S_n - S_{n-1} = a_n \geq 0$  при  $n \geq 2$  в силу условия (2).

Если ряд (1) с неотрицательными членами сходится, т. е. существует конечный  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , то согласно теореме о пределе возрастающей последовательности

$$\forall n \in N \rightarrow S_n \leq S,$$

т. е. выполняется условие (3).

Обратно, если ряд (1) с неотрицательными членами удовлетворяет условию (3), то возрастающая последовательность  $\{S_n\}$  ограничена сверху. Следовательно, она имеет конечный предел, т. е. ряд (1) сходится. ●

### 2. Интегральный признак сходимости ряда.

Теорема 2. Если функция  $f$  неотрицательна и убывает на промежутке  $[1, +\infty)$ , то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \quad (4)$$

и интеграл

$$J = \int_1^{+\infty} f(x) dx \quad (5)$$

либо оба сходятся, либо оба расходятся.

○ Обозначим  $\Delta_k = [k, k+1]$ , где  $k \in N$ , и пусть  $S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$ .

Так как  $f$  — убывающая при  $x > 1$  функция, то она интегрируема на каждом из отрезков  $\Delta_k$  и для всех  $x \in \Delta_k$  удовлетворяет условию

$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$ , откуда в силу свойств интеграла получаем

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k). \quad (6)$$

Полагая в (6)  $k = 1, 2, \dots, n$  и складывая соответствующие неравенства, находим

$$\sum_{k=1}^n f(k+1) \leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(k),$$

или

$$S_{n+1} - f(1) \leq \int_1^{n+1} f(x) dx \leq S_n. \quad (7)$$

а) Пусть сходится интеграл (5), т. е. существует конечный

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \int_1^{\xi} f(x) dx = J.$$

Так как  $f$  — неотрицательная функция, то по теореме 1 из § 38 для всех  $\xi \in [1, +\infty)$  выполняется неравенство  $\int_1^{\xi} f(x) dx \leq J$ , и поэтому

$$\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow \int_1^{n+1} f(x) dx \leq J. \quad (8)$$

Из (7) и (8) следует, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow S_{n+1} \leq f(1) + J,$$

т. е. последовательность частичных сумм ряда (4) с неотрицательными членами ограничена сверху. По теореме 1 ряд (4) сходится.

б) Обратное: если ряд (4) с неотрицательными членами сходится, а его сумма равна  $S$ , то

$$\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow S_n \leq S. \quad (9)$$

Из (7) и (9) следует, то

$$\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow \int_1^{n+1} f(x) dx \leq S. \quad (10)$$

Для любого  $\xi \geq 1$  выберем  $n \in \mathbb{N}$  таким, чтобы выполнялось условие  $n+1 \geq \xi$ . Тогда из неравенства (10) и условия  $f(x) \geq 0$  при  $x \geq 1$  следует, что

$$\int_1^{\xi} f(x) dx \leq \int_1^{n+1} f(x) dx \leq S,$$

и поэтому (теорема 1 из § 38) интеграл (5) сходится.

Если интеграл (5) расходится, то ряд (4) должен расходиться, так как в случае сходимости ряда (4) сошел бы по доказанному выше и интеграл (5). Аналогично, из расходимости ряда (4) следует расходимость интеграла (5). ●

**Пример 1.** Доказать, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$  сходится при  $\alpha > 1$  и расходится при  $\alpha \leq 1$ .

△ Пусть  $\alpha > 0$ . Рассмотрим функцию  $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ . Эта функция положительна и убывает, а интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$  сходится при  $\alpha > 1$  и расходится при  $\alpha \leq 1$  (§ 38, пример 3). По теореме 2 ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$  сходится при  $\alpha > 1$  и расходится при  $\alpha \leq 1$ .

Если  $\alpha \leq 0$ , то ряд расходится, так как  $\frac{1}{n^{\alpha}} \not\rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . ▲

**Упражнение 1.** Используя теорему 2 и пример 11 из § 38, показать, что ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta} n}$$

сходится при  $\alpha > 1$  ( $\beta$  любое), а также при  $\alpha = 1$ , если  $\beta > 1$ , и расходится при других значениях  $\alpha$  и  $\beta$ .

### 3. Признак сравнения.

**Теорема 3.** Если для всех  $n \in \mathbb{N}$  выполняется условие

$$0 \leq a_n \leq b_n, \quad (11)$$

то из сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (12)$$

следует сходимость ряда (1), а из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (12).

○ Из сходимости ряда (12) с неотрицательными членами (условие (11)) по теореме 1 следует ограниченность сверху последовательности его частичных сумм, т. е.

$$\exists M: \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow \sum_{k=1}^n b_k \leq M,$$

откуда, используя условие (11), получаем

$$\sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n b_k \leq M \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, последовательность частичных сумм ряда (1) ограничена сверху, и в силу теоремы 1 ряд (1) сходится.

Если ряд (1) расходится, то ряд (12) также должен расходиться, так как в случае сходимости ряда (12) сошелся бы ряд (1). ●

**Замечание 1.** Теорема 3 остается в силе, если условие (11) выполняется при всех  $n \geq m$ , где  $m$  — заданный номер.

**Пример 2.** Доказать, что ряд (1), где  $a_n = \frac{(3 + 2(-1)^n)(1 + \sin^3 n)}{n\sqrt{n}}$ , сходится.

△ Так как  $1 \leq 3 + 2(-1)^n \leq 5$ ,  $0 \leq 1 + \sin^3 n \leq 2$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ , то  $0 \leq a_n \leq \frac{10}{n^{3/2}}$ , и из сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n^{3/2}}$  по теореме 3 следует сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . ▲

**Следствие 1.** Если  $a_n > 0$  и  $b_n > 0$  для всех  $n \geq n_0$  и  $a_n \sim b_n$  при  $n \rightarrow \infty$ , т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ , то ряды (1) и (12) либо оба сходятся, либо оба расходятся.

○ Это утверждение доказывается по аналогии с соответствующим утверждением для несобственного интеграла (§ 38, следствие из теоремы 2). ●

**Пример 3.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , если:

$$\text{а) } a_n = \left( e^{\arcsin(1/n)} - 1 \right)^\alpha; \quad \text{б) } a_n = \sqrt[3]{\frac{2n+1}{2n-1}} - \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}.$$

△ а) Так как  $\arcsin t = t + o(t^2)$ ,  $e^t - 1 = t + o(t)$ ,  $e^{\arcsin t} - 1 = t + o(t)$  при  $t \rightarrow 0$ , то  $a_n \sim \frac{1}{n^\alpha}$  при  $n \rightarrow \infty$ . Поэтому ряд сходится при  $\alpha > 1$  и расходится при  $\alpha \leq 1$ .

б) Используя асимптотическую формулу  $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t)$  при  $t \rightarrow 0$ , получаем

$$\sqrt[3]{\frac{2n+1}{2n-1}} = \left( 1 + \frac{2}{2n-1} \right)^{1/3} = 1 + \frac{2}{3(2n-1)} + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\sqrt{\frac{n-1}{n+1}} = \left( 1 - \frac{2}{n+1} \right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} \left( -\frac{2}{n+1} \right) + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

при  $n \rightarrow \infty$ , откуда  $a_n \sim \frac{4}{3n}$  при  $n \rightarrow \infty$ . Поэтому ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится. ▲

Следствие 2. Если члены рядов (1) и (12) удовлетворяют при всех  $k \geq t$  условиям

$$a_k > 0, \quad b_k > 0, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k}, \quad (13)$$

то из сходимости ряда (12) следует сходимость ряда (1), а из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (12).

○ Полагая в (13)  $k = t, t+1, \dots, n-1$  и перемножая соответствующие неравенства, получаем

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} \frac{a_{m+2}}{a_{m+1}} \dots \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_{m+1}}{b_m} \frac{b_{m+2}}{b_{m+1}} \dots \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \frac{b_n}{b_{n-1}},$$

или  $\frac{a_n}{a_m} \leq \frac{b_n}{b_m}$ , откуда следует, что при всех  $n \geq t+1$  выполняется неравенство  $a_n \leq A b_n$ , где  $A = \frac{a_m}{b_m} > 0$ . Для завершения доказательства следует применить теорему 3. ●

#### 4. Признак Д'Аламбера.

Теорема 4. Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \text{где } a_n > 0 \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}. \quad (14)$$

Тогда:

а) если существует число  $q \in (0, 1)$  и номер  $t$  такие, что для всех  $n \geq t$  выполняется неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q, \quad (15)$$

то ряд (14) сходится;

б) если существует номер  $t$  такой, что для всех  $n \geq t$  выполняется неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \quad (16)$$

то ряд (14) расходится.

○ а) Из условия (15) следует, что  $a_{m+1} \leq q a_m$ ,  $a_{m+2} \leq q a_{m+1} \leq q^2 a_m$ , и поэтому

$$a_{m+p} \leq q^p a_m \quad \text{для любого } p \in \mathbb{N}. \quad (17)$$

Так как ряд  $\sum_{p=1}^{\infty} a_m q^p$ , где  $0 < q < 1$ , сходится (§ 39, пример 1) и  $a_n > 0$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ , то по теореме 3 сходится ряд

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_{m+p}, \quad (18)$$

откуда следует сходимость ряда (14), получаемого из ряда (18) добавлением конечного числа членов  $a_1, \dots, a_m$  (§ 39, п. 3, свойство 2).

б) Из условия (16) следует, что  $a_{m+1} \geq a_m$ ,  $a_{m+2} \geq a_{m+1} \geq a_m$ ,  $a_{m+3} \geq a_m$  и т. д. Следовательно,

$$a_{m+p} \geq a_m > 0 \quad \text{для всех } p \in \mathbb{N}. \quad (19)$$

Поэтому ряд (18), а вместе с ним и ряд (14) расходятся, так как в силу условия (19)  $a_n \not\rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  (не выполняется необходимое условие сходимости ряда). ●

Следствие (признак Д'Аламбера "в предельной форме"). Если существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda, \quad (20)$$

то ряд (14) с положительными членами сходится при  $\lambda < 1$  и расходится при  $\lambda > 1$ .

Пример 4. Используя признак Д'Аламбера, исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , где:

$$\text{а) } a_n = \frac{a^n}{n!}, \quad a > 0; \quad \text{б) } a_n = \frac{n!}{n^n}.$$

Δ а) Ряд сходится, так как  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{n+1} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , т. е. выполняется условие (20) при  $\lambda = 0$ .

б) Так как  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \rightarrow e^{-1}$  при  $n \rightarrow \infty$ , то выполняется условие (20) при  $\lambda = e^{-1} < 1$ . Поэтому ряд сходится. ▲

### 5. Признак Коши.

Теорема 5. Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (21)$$

где  $a_n \geq 0$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ .

Тогда:

а) если существуют число  $q \in (0, 1)$  и номер  $t$  такие, что для всех  $n \geq t$  выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q, \quad (22)$$

то ряд (21) сходится;

б) если существует номер  $t$  такой, что для всех  $n \geq t$  выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1,$$

то ряд (21) расходится.

○ а) Из условия (22) следует, что при всех  $n \geq t$  выполняется неравенство  $a_n \leq q^n$ , где  $0 < q < 1$ . По теореме 3 из сходимости ряда



$\sum_{n=m}^{\infty} q^n$  следует сходимость ряда  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ . Поэтому ряд (21) также сходится (§ 39, п. 3, свойство 2).

б) Если  $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ , то  $a_n \geq 1$  при всех  $n \geq m$ , и поэтому ряд (21) расходится. ●

Следствие (признак Коши “в предельной форме”). Если  $a_n \geq 0$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) и существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda, \quad (23)$$

то при  $\lambda < 1$  ряд (21) сходится, а при  $\lambda > 1$  расходится.

Замечание 2. Если условие (20) или условие (23) выполняется при  $\lambda = 1$ , то ряд (14) может как сходиться, так и расходиться, т. е. признак Д’Аламбера (Коши) при  $\lambda = 1$  не решает вопроса о сходимости ряда (14).

Замечание 3. Из существования предела (20) следует, что существует предел (23) и эти пределы равны (см. [10, § 5, пример 8]), а обратное утверждение является неверным. Поэтому говорят, что признак Коши при исследовании сходимости рядов с положительными членами сильнее признака Д’Аламбера.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , где  $a_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$ .

△ Так как  $\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e}$ , то условие (23) выпол-

няется при  $\lambda = \frac{1}{e} < 1$ , и поэтому ряд сходится. ▲

## 6. Признак Раабе.

Теорема 6. Если  $a_n > 0$  для всех  $N$  и существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lambda, \quad (24)$$

то ряд (14) сходится при  $\lambda > 1$  и расходится при  $\lambda < 1$ .

Доказательство теоремы 6 содержится, например, в книге [10, с. 417, 418].

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , где  $a_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ .

△ Признак Д’Аламбера не позволяет решить вопрос о сходимости ряда, так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ . Воспользуемся признаком Раабе. В данном примере

$$\sigma_n = n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = n \left( \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} - 1 \right).$$

Так как  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e(1+x)^{-1/x} - 1}{x} = \frac{1}{2}$  (§ 18, пример 9), то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \frac{1}{2}$ , и согласно признаку Раабе (теорема 6) ряд расходится. ▲

Замечание 4. Расходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n$  легко доказать с помощью формулы Стирлинга  $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$  (см § 77, (12)).

## § 41. Абсолютно и условно сходящиеся ряды

**1. Абсолютно сходящиеся ряды.** Ряд с действительными или комплексными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1)$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \quad (2)$$

Рассмотрим свойства абсолютно сходящихся рядов.

Свойство 1. *Если ряд абсолютно сходится, то он сходится.*

○ Пусть ряд (2) сходится. Тогда для него выполняется условие Коши (§ 39), т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N} \rightarrow \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon.$$

Так как  $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|$ , то и для ряда (1) выполняется условие

Коши, и в силу критерия Коши этот ряд сходится. ●

Свойство 2. *Если ряд (1) абсолютно сходится, а последовательность  $\{b_n\}$  ограничена, т. е.*

$$\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow |b_n| \leq M, \quad (3)$$

то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  абсолютно сходится.

○ Для доказательства свойства 2 следует воспользоваться критерием Коши сходимости ряда и неравенством

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k b_k| \leq M \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|,$$

которое выполняется в силу условия (3). ●

Свойство 3. Если ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  абсолютно сходятся, то при любых  $\lambda$  и  $\mu$  абсолютно сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n).$$

○ Для доказательства свойства 3 следует применить критерий Коши. ●

Свойство 4. Если ряд (1) абсолютно сходится, то и ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j, \quad (4)$$

полученный перестановкой членов ряда (1), абсолютно сходится, причём сумма  $\tilde{S}$  ряда (4) равна сумме  $S$  ряда (1).

○ Докажем, что ряд (4) абсолютно сходится, т. е. сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\tilde{a}_j|. \quad (5)$$

Так как ряд (4) отличается от ряда (1) только порядком расположения членов, то

$$\forall j \in N \quad \exists k_j \in N: a_{k_j} = \tilde{a}_j.$$

Обозначим  $\tilde{\sigma}_n = \sum_{j=1}^n |\tilde{a}_j|$ ,  $\tilde{n} = \max_{1 \leq j \leq n} k_j$ . Тогда  $n \leq \tilde{n}$  и для всех  $n \in N$  выполняется неравенство

$$\tilde{\sigma}_n \leq \sum_{k=1}^{\tilde{n}} |a_k| \leq A,$$

где  $A$  — сумма ряда (2). Отсюда по теореме 1 из § 40 следует сходимость ряда (5). Заметим, что сходится и ряд (4) в силу свойства 1.

б) Докажем, что

$$S = \tilde{S}. \quad (6)$$

Из сходимости рядов (1) и (2) следует, что для любого  $\varepsilon > 0$  найдется номер  $N = N_\varepsilon$  такой, что для всех  $n \geq N_\varepsilon$  и для всех  $p \in N$  выполняются неравенства

$$\left| S - \sum_{k=1}^n a_k \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (7)$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (8)$$

Пусть  $\tilde{N}$  — наибольший из номеров, которые члены  $a_1, a_2, \dots, a_N$  ряда (1) имеют в ряде (4), т. е.  $\tilde{N} = \max(j_1, \dots, j_N)$ , где  $a_k = \tilde{a}_{j_k}$  ( $k = \overline{1, N}$ ). Тогда

$$N \leq \tilde{N}. \quad (9)$$

Обозначим  $n$ -ю частную сумму ряда (4) через  $\tilde{S}_n$  и покажем, что для всех  $n > \tilde{N}$  выполняется неравенство

$$|S - \tilde{S}_n| < \varepsilon. \quad (10)$$

Так как для любого  $n > \tilde{N}$  сумма  $\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^n \tilde{a}_k$  содержит члены  $a_1, a_2, \dots, a_N$  ряда (1) согласно выбору числа  $\tilde{N}$  (неравенство (9)), то разность

$$\Delta = \tilde{S}_n - S_N = \sum_{k=1}^n \tilde{a}_k - \sum_{k=1}^N a_k, \quad (11)$$

где  $n > \tilde{N}$ , может содержать лишь такие члены ряда (1), номера которых больше  $N$ .

Пусть  $N'$  — наибольший из номеров, которые имеют в ряде (1) члены ряда (4), входящие в  $\tilde{S}_n$  при  $n > N$ , т. е.  $N' = \max(k_1, \dots, k_n)$ , где  $a_{k_j} = \tilde{a}_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ). Тогда

$$N' = N + p, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Поэтому разность  $\Delta$  (равенство (11)) представляет собой сумму таких членов (не обязательно всех) ряда (1), номера которых больше  $N$ , но не превосходят  $N' = N + p$ . Следовательно,

$$|\Delta| \leq \sum_{k=N+1}^{N+p} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (12)$$

в силу условия (8).

Из равенства  $S - \tilde{S}_n = S - S_N - (\tilde{S}_n - S_N) = S - S_N - \Delta$  в силу (7) и (12) следует, что для всех  $n \geq \tilde{N}$  выполняется неравенство (10). Это означает, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{S}_n = S$ , т. е. справедливо равенство (6). ●

Свойство 5. Если ряды (1) и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (13)$$

абсолютно сходятся, то и ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_{i_s} b_{j_s}, \quad (14)$$

составленный из всевозможных попарных произведений членов рядов (1) и (13), абсолютно сходится, причем сумма ряда (14) равна произведению сумм рядов (1) и (13).

○ а) Докажем, что сходится ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} |a_{i_s} b_{j_s}|. \quad (15)$$

Пусть  $\tilde{\tau}_m$  —  $m$ -я частичная сумма ряда (15),  $A$  и  $B$  — суммы рядов  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$  соответственно. Тогда

$$\tilde{\tau}_m = \sum_{s=1}^m |a_{i_s} b_{j_s}| \leq \sum_{s=1}^m |a_{i_s}| \sum_{s=1}^m |b_{j_s}| \leq AB,$$

т. е. частичные суммы ряда (15) ограничены сверху и по теореме 1 из § 40 ряд (15) сходится.

б) Докажем, что

$$\tau = S\sigma, \quad (16)$$

где  $\tau$ ,  $S$ , и  $\sigma$  — суммы рядов (14), (1) и (13) соответственно. Заметим, что все члены ряда (14) содержатся в следующей таблице:

1	2	5	10	...
$a_1 b_1$	$a_2 b_1$	$a_3 b_1$	$a_4 b_1$	...
4	3	6	11	...
$a_1 b_2$	$a_2 b_2$	$a_3 b_2$	$a_4 b_2$	...
9	8	7	12	...
$a_1 b_3$	$a_2 b_3$	$a_3 b_3$	$a_4 b_3$	...
16	15	14	13	...
$a_1 b_4$	$a_2 b_4$	$a_3 b_4$	$a_4 b_4$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Занумеруем элементы этой таблицы, присваивая им номера, указанные в таблице (такой метод перечисления называют “методом квадратов”). В этом случае получается ряд

$$a_1 b_1 + (a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_2) + (a_3 b_1 + a_3 b_2 + a_3 b_3 + a_2 b_3 + a_1 b_3) + \\ + (a_4 b_1 + a_4 b_2 + a_4 b_3 + a_4 b_4 + a_3 b_4 + a_2 b_4 + a_1 b_4) + \dots, \quad (17)$$

образованный из всевозможных попарных произведений членов рядов (1) и (13), т. е. ряд вида (14).

По доказанному выше всякий ряд вида (14) и, в частности, ряд (17), абсолютно сходится и, значит, сходится (свойство 1), а сумма ряда (14) не зависит от порядка расположения его членов (свойство 4). Поэтому ряд (17) сходится, а его сумма равна  $\tau$ .

Пусть  $S_n$ ,  $\sigma_n$ ,  $\tau_n$  —  $n$ -е частичные суммы рядов (1), (13) и (17) соответственно; тогда  $\tau_{n^2} = S_n \sigma_n$ . Так как  $S_n \rightarrow S$  и  $\sigma_n \rightarrow \sigma$  при  $n \rightarrow \infty$ ,

то  $\tau_{n^2} \rightarrow S\sigma$  при  $n \rightarrow \infty$ . С другой стороны,  $\{\tau_{n^2}\}$  — подпоследовательность сходящейся к числу  $\tau$  последовательности  $\{\tau_n\}$ , и поэтому  $\tau_{n^2} \rightarrow \tau$  при  $n \rightarrow \infty$ . Отсюда следует, что  $\tau = S\sigma$ . Равенство (16) доказано. ●

## 2. Знакопередающиеся ряды. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, \quad \text{где } a_n > 0 \quad \text{при всех } n \in \mathbb{N}, \quad (18)$$

называют *знакопередающимся*.

**Теорема 1 (Лейбница).** *Если последовательность  $\{a_n\}$  монотонно стремится к нулю, т. е.*

$$a_n \geq a_{n+1} \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}, \quad (19)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \quad (20)$$

то *знакопередающийся ряд (18) сходится.*

○ Пусть  $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_k$ . Тогда  $S_{2(n+1)} - S_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq 0$  в силу условия (19), т. е.  $\{S_{2n}\}$  — возрастающая последовательность. Кроме того,

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1,$$

так как  $a_n > 0$  для всех  $n \in \mathbb{N}$  и  $\{a_n\}$  — убывающая последовательность (условие (19)). По теореме о пределе возрастающей и ограниченной сверху последовательности существует конечный  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$ . Отсюда и из условия (20) следует, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , т. е. ряд (18) сходится. ●

**Следствие.** *Для знакопередающегося ряда (1) при всех  $n \in \mathbb{N}$  справедливы неравенства*

$$S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1}, \quad (21)$$

$$|S - S_n| \leq a_{n+1}. \quad (22)$$

○ Заметим, что  $S_{2n+1} = S_{2n-1} - (a_{2n} - a_{2n+1})$ . Откуда в силу условия (19) следует, что  $S_{2n+1} \leq S_{2n-1}$ , т. е.  $\{S_{2n-1}\}$  — убывающая последовательность. Так как  $S$  является пределом возрастающей последовательности  $\{S_{2n}\}$  и пределом убывающей последовательности  $\{S_{2n-1}\}$ , то справедливо неравенство (21), которое можно записать в виде

$$S_{2n-1} - a_{2n} \leq S \leq S_{2n} + a_{2n+1}.$$

Отсюда следует, что  $S_{2n-1} - S \leq a_{2n}$ ,  $S - S_{2n} \leq a_{2n+1}$ . Это означает, что при всех  $n \in \mathbb{N}$  выполняется неравенство (22). ●

Пример 1. Доказать, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$ , где  $\alpha > 0$ , сходится.

△ Так как последовательность  $\left\{\frac{1}{n^\alpha}\right\}$ , где  $\alpha > 0$ , монотонно стремится к нулю, то по теореме 1 ряд сходится. В частности, сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots,$$

а для его суммы  $S$  из неравенства (21) при  $n = 1$  следует оценка  $\frac{1}{2} \leq S \leq \frac{5}{6}$ . В дальнейшем (§ 44) будет показано, что  $S = \ln 2$ . ▲

### 3. Признаки Дирихле и Абеля сходимости рядов.

Теорема 2 (признак Дирихле). Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \quad (23)$$

сходится, если последовательность частичных сумм ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  ограничена, т. е.

$$\exists M > 0: \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow \left| \sum_{k=1}^n b_k \right| \leq M, \quad (24)$$

а последовательность  $\{a_n\}$  монотонно стремится к нулю, т. е.

$$a_{n+1} \leq a_n \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N} \quad (25)$$

или

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N} \quad (25')$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \quad (26)$$

○ Покажем, что для ряда (23) выполняется условие Коши. Введем следующие обозначения:

$$B_n = \sum_{k=1}^n b_k, \quad (27)$$

$$\sigma = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k, \quad n \in \mathbb{N}, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (28)$$

Преобразуем  $\sigma$ , учитывая, что  $b_k = B_k - B_{k-1}$  при  $k > 1$ , согласно формуле (27). Получим

$$\sigma = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k B_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k B_{k-1},$$

где

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k B_{k-1} = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} a_{k+1} B_k + a_{n+1} B_n.$$

Поэтому

$$\sigma = a_{n+p}B_{n+p} - a_{n+1}B_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1})B_k. \quad (29)$$

Если справедливо неравенство (25), то из формулы (29) и условия (24) следует, что

$$|\sigma| \leq M(|a_{n+p}| + |a_{n+1}|) + M \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}),$$

где

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) = a_{n+1} - a_{n+p} \leq |a_{n+1}| + |a_{n+p}|.$$

Таким образом, для всех  $n \in \mathbb{N}$  и для всех  $p \in \mathbb{N}$  выполняется неравенство

$$|\sigma| \leq 2M(|a_{n+1}| + |a_{n+p}|). \quad (30)$$

Нетрудно показать, что неравенство (30) остается в силе, если заменить условие (25) условием (25'). Условие (26) означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon: \forall n \geq N_\varepsilon \rightarrow |a_n| < \frac{\varepsilon}{4M}, \quad (31)$$

а из (28), (30) и (31) следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon: \forall n \geq N_\varepsilon \forall p \in \mathbb{N} \rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| < \varepsilon,$$

т. е. ряд (23) удовлетворяет условию Коши. Следовательно, этот ряд сходится. ●

**Замечание 1.** Признак Лейбница можно получить из признака Дирихле, полагая  $b_n = (-1)^{n+1}$ . Прием, использованный при преобразовании суммы (28) к виду (29), называют *преобразованием Абеля*, которое можно рассматривать как дискретный аналог метода интегрирования по частям.

**Упражнение 1.** Доказать, что если ряд (23) удовлетворяет условиям (25) и (26), а  $S$  и  $S_n$  — соответственно сумма и  $n$ -я частичная сумма этого ряда, то для всех  $n \in \mathbb{N}$  выполняются неравенства  $a_n \geq 0$  и  $|S - S_n| \leq 2Ma_{n+1}$ , если  $a_{n+1} \neq 0$ .

**Пример 2.** Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \quad (32)$$

сходится при всех  $x \in \mathbb{R}$ , если последовательность  $\{a_n\}$  удовлетворяет условиям (25), (26).

△ Если  $x = 2\pi t$ , где  $t \in \mathbb{Z}$ , то все члены ряда (32) — нули, и поэтому ряд (32) сходится.

Пусть  $x \neq 2\pi t$ , где  $t \in \mathbb{Z}$ . Обозначим  $B_n(x) = \sum_{k=1}^n \sin kx$ . В § 3



(пример 2, формула (50)) было доказано, что  $B_n(x) = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$ ,

откуда  $|B_n(x)| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ , т. е. последовательность

$\{B_n(x)\}$  ограничена. По теореме 2 ряд (32) для каждого  $x \neq 2\pi m$ , где  $m \in \mathbb{Z}$ , сходится. Следовательно, ряд (32) сходится при любом  $x \in \mathbb{R}$ . В частности, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

сходится при любом  $x \in \mathbb{R}$ . ▲

Пример 3. Доказать, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ , где последовательность  $\{a_n\}$  удовлетворяет условиям (25), (26), сходится при любом  $x \neq 2\pi m$ , где  $m \in \mathbb{Z}$ .

△ Воспользуемся формулой

$$\sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}, \quad x \neq 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z},$$

которую можно получить способом, указанным в § 3 (пример 2, б)).

Так как  $\left| \sum_{k=1}^n \cos kx \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}$  при  $x \neq 2\pi m$ , где  $m \in \mathbb{Z}$ , а последо-

вательность  $\{a_n\}$  монотонно стремится к нулю, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$  при  $x \neq 2\pi m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , сходится (теорема 2). ▲

В частности, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n^\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

сходится при любом  $x \neq \pi m$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ).

Теорема 3 (признак Абеля). Ряд (23) сходится, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad (33)$$

а последовательность  $\{a_n\}$  монотонна, т. е. удовлетворяет условию (25) или (25'), и ограничена.

○ По теореме о пределе монотонной последовательности существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , откуда следует, что  $\{a_n - a\}$  — последовательность, монотонно стремящаяся к нулю. Из сходимости ряда (33) следует,

что последовательность  $\{B_n\}$  его частичных сумм ограничена. Поэтому ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a)b_n$  сходится по признаку Дирихле. Отсюда и из сходимости ряда (33) заключаем, что ряд (23) сходится, так как

$$a_n b_n = (a_n - a)b_n + ab_n. \bullet$$

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , где

$$a_n = \frac{\cos \frac{\pi n}{5}}{\sqrt{n} \ln(n+1)} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

△ Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi n}{5}}{\sqrt{n} \ln(n+1)}$  сходится (пример 3), а последовательность  $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}\right\}$  монотонна и ограничена. Поэтому ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится (признак Абеля). ▲

**4. Условно сходящиеся ряды.** Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{34}$$

называется *условно сходящимся*, если этот ряд сходится, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{35}$$

расходится.

При исследовании ряда на сходимость и абсолютную сходимость иногда оказывается полезным следующее утверждение.

**Теорема 4.** Если ряд (34) абсолютно сходится, то ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  одновременно либо абсолютно сходятся, либо условно сходятся, либо расходятся.

○ Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 5 из § 38. ●

Пример 5. Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad x \neq \pi m \quad (m \in \mathbb{Z}), \tag{36}$$

сходится условно.

△ Ряд (36) сходится (пример 2). Докажем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin nx|}{n^\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad x \neq \pi m \quad (m \in \mathbb{Z}), \quad (37)$$

расходится. Воспользуемся неравенством

$$\frac{|\sin nx|}{n^\alpha} \geq \frac{\sin^2 nx}{n^\alpha}. \quad (38)$$

Так как  $\sin^2 nx = \frac{1 - 2 \cos 2nx}{2}$ , то из сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{2n^\alpha}$  (пример 3) и расходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^\alpha}$ , где  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $x \neq \pi m$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ),

следует расходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^\alpha}$ , откуда в силу условия (38) следует расходимость ряда (37) по теореме сравнения (§ 40, теорема 3). Это означает, что ряд (36) сходится условно. ▲

Пример 6. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , если:

$$\text{а) } a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n} + (-1)^{n+1}}; \quad \text{б) } a_n = e^{\sin n/n^{2/3}} - \cos \frac{1}{n}.$$

△ а) Запишем  $a_n$  в следующем виде:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \left( 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \right)^{-1}.$$

Используя асимптотическую формулу  $(1+t)^{-1} = 1 - t + t^2 + o(t^2)$  при  $t \rightarrow 0$ , получаем  $\left( 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \right)^{-1} = 1 - \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}(1 + \alpha_n)$ , где  $\alpha_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , и поэтому  $|\alpha_n| \leq 1$  при  $n \geq n_0$ . Тогда  $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + b_n$ , где  $|b_n| \leq \frac{2}{n^{3/2}}$ , и поэтому слагаемое  $b_n$  не влияет на сходимость исходного ряда (теорема 4). Так как ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

сходится условно, а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  расходится, то и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится.

б) Так как  $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ ,  $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)$ , то  $e^{\sin n/n^{2/3}} = 1 + \frac{\sin n}{n^{2/3}} + \frac{\alpha_n}{n^{4/3}}$ , где  $|\alpha_n| \leq c_1$ ,  $\cos \frac{1}{n} = 1 + \frac{\beta_n}{n^2}$ , где  $|\beta_n| \leq c_2$ ,  $a_n = \frac{\sin n}{n^{2/3}} + b_n$ , где  $|b_n| \leq \frac{c_1}{n^{4/3}} + \frac{c_2}{n^2}$ . Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходится абсолютно, а

ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^{2/3}}$  сходится условно (пример 5). Поэтому ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится условно (теорема 4). ▲

Замечание 2. Если члены ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  меняют знак и выполняется условие  $a_n \sim b_n$  при  $n \rightarrow \infty$ , то отсюда не следует, что ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  эквивалентны в смысле сходимости, т. е. сходятся или расходятся одновременно. Так, если  $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n} + (-1)^{n+1}}$  (пример 6, а), то  $a_n \sim \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$  при  $n \rightarrow \infty$ , однако ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$  сходится, а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится.

В заключение рассмотрим свойства условно сходящихся рядов с действительными членами. Итак, пусть ряд (34) сходится условно, т. е. этот ряд сходится, а ряд (35) расходится. Обозначим

$$\alpha_k = \frac{a_k + |a_k|}{2}, \quad \beta_k = \frac{|a_k| - a_k}{2}. \quad (39)$$

Тогда из равенств (39) следует, что для всех  $k \in N$

$$\alpha_k \geq 0, \quad \beta_k \geq 0, \quad (40)$$

$$\alpha_k = \begin{cases} a_k, & \text{если } a_k > 0, \\ 0, & \text{если } a_k \leq 0, \end{cases} \quad \beta_k = \begin{cases} -a_k, & \text{если } a_k < 0, \\ 0, & \text{если } a_k \geq 0, \end{cases} \quad (41)$$

и

$$a_k = \alpha_k - \beta_k. \quad (42)$$

Теорема 5. Если ряд (34) сходится условно, то ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n, \quad (43)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n, \quad (44)$$

где числа  $\alpha_n, \beta_n$  определяются формулами (39) или (41), расходятся, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0. \quad (45)$$

○ Предположим, что сходится ряд (43). Тогда из сходимости ряда (43) и ряда (34), т. е. ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \beta_n)$ , следует сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n)$ , так как  $\alpha_n + \beta_n = 2\alpha_n - (\alpha_n - \beta_n)$ .

С другой стороны, из равенства (39) следует, что  $|a_n| = \alpha_n + \beta_n$ , где  $\alpha_n \geq 0$ ,  $\beta_n \geq 0$ . Поэтому должен сходиться ряд (35). Это противоречит тому, что ряд (34) сходится условно. Итак, ряд (43) не может сходиться. Аналогично доказывается расходямость ряда (44).

Соотношения (45) выполняются, так как последовательности  $\{\alpha_n\}$  и  $\{\beta_n\}$  определяются формулами (41) и  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . ●

**Теорема 6 (Римана).** *Если ряд (34) сходится условно, то каким бы ни было  $L$  (числом или одним из символов  $+\infty$ ,  $-\infty$ ), можно так переставить члены этого ряда, что последовательность частичных сумм получившегося ряда будет иметь  $L$  своим пределом при  $n \rightarrow \infty$ .*

Доказательство этой теоремы содержится, например, в книге [10, с. 430–433].

#### УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ VIII

1. Доказать, что если ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ , где  $a_n \in R$ ,  $b_n \in R$  ( $n \in N$ ), сходятся, то и ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$  также сходятся.

2. Доказать, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится, если последовательность  $\{na_n\}$  имеет отличный от нуля предел.

3. Доказать, что если  $a_n > 0$  и  $a_{n+1} \leq a_n$  для всех  $n \geq n_0$ , то из сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  следует, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$ .

4. Доказать, что если  $a_n \geq 0$  при  $n \geq n_0$  и последовательность  $\{na_n\}$  ограничена, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  сходится.

5. Доказать, что если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , где  $a_n \geq 0$  для всех  $n$ , сходится, то ряды

$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n + a_{n+1} + \dots + a_{2n-1})$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_n a_{n+1} \dots a_{2n-1}}$  также сходятся.

6. Пусть  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = \frac{na_n}{n + a_n}$  ( $n \in N$ ). Доказать, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{n}$  сходится.

7. Доказать, что если  $a_n > 0$  для всех  $n \in N$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ , то существует последовательность  $\{b_n\}$ , где  $b_n \geq 0$  для всех  $n \in N$ , такая, что

ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходится, а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  расходится.

8. Доказать, что если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится условно и  $\sigma_n = \sum_{k=1}^n \frac{|a_k| + a_k}{2}$ ,  $\tau_n = \sum_{k=1}^n \frac{|a_k| - a_k}{2}$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tau_n}{\sigma_n} = 1$ .

9. Доказать, что если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится условно, то существует такая бесконечно малая последовательность  $\{b_n\}$ , что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  расходится.

10. Доказать, что ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}(a_n - a_{n-1})$  сходится, если последовательность  $\{a_n\}$  ограничена.

11. Доказать, что из сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  и абсолютной сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$  следует сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ .

12. Доказать, что если  $a_n > 0$  для всех  $n \in \mathbb{N}$  и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ , где  $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ , сходится.

ГЛАВА IX  
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

**§ 42. Равномерная сходимость  
функциональных последовательностей и рядов**

**1. Сходимость функциональной последовательности и ряда.**

а) *Сходимость последовательности функций.* Пусть функции  $f_n(x)$ ,  $n \in N$ , определены на множестве  $E$  и пусть  $x_0 \in E$ . Если числовая последовательность  $\{f_n(x_0)\}$  сходится, то говорят, что последовательность функций  $\{f_n(x)\}$  *сходится в точке*  $x_0$ .

Последовательность  $\{f_n(x)\}$ , сходящаяся в каждой точке  $x \in E$ , называют *сходящейся на множестве*  $E$ . В этом случае на множестве  $E$  определена функция  $f(x)$ , значение которой в любой точке  $x \in E$  равно пределу последовательности  $\{f_n(x)\}$ . Эту функцию называют *предельной функцией последовательности*  $\{f_n(x)\}$  на множестве  $E$  и пишут

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in E, \quad (1)$$

или

$$f_n(x) \rightarrow f(x), \quad x \in E,$$

или, короче,

$$f_n \xrightarrow{E} f.$$

По определению предела запись (1) означает, что

$$\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N_\varepsilon(x): \quad \forall n \geq N \rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

**Пример 1.** Найти предельную функцию  $f(x)$  последовательности  $\{f_n(x)\}$  на множестве  $E$ , если:

а)  $f_n(x) = \frac{n+1}{n+x^2}$ ,  $E = R$ ;    б)  $f_n(x) = n \sin \frac{1}{nx}$ ,  $E = (0, +\infty)$ .

$\Delta$  а) Так как  $f_n(x) = \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{x^2}{n}}$ , то  $f(x) = 1$ .

б) Используя асимптотическую формулу  $\sin t \sim t$  при  $t \rightarrow 0$ , получаем  $n \sin \frac{1}{nx} \sim n \frac{1}{nx}$  при  $n \rightarrow \infty$ , если  $x \neq 0$ .

Поэтому  $f(x) = \frac{1}{x}$ .  $\blacktriangle$

б) *Сходимость функционального ряда.* Пусть функции  $u_n(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , определены на множестве  $E$  и пусть для каждого  $x \in E$  существует конечный предел последовательности  $\{S_n(x)\}$ , где  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ . Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{2}$$

называют *сходящимся на множестве  $E$ .*

Если  $S(x)$  — предельная функция последовательности  $\{S_n(x)\}$  на множестве  $E$ , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x), \quad x \in E,$$

то функцию называют  $S(x)$  *суммой ряда (2)* и пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x), \quad x \in E.$$

Например, если  $u_n(x) = x^{n-1}$ ,  $E = (-1, 1)$ , то  $S_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$ ,  $S(x) = \frac{1}{1-x}$ . Если в каждой точке  $x \in E$  сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ , то ряд (2) называют *абсолютно сходящимся на множестве  $E$ .*

## 2. Равномерная сходимость функциональной последовательности.

а) *Понятие равномерной сходимости последовательности функций.*

Определение. Последовательность функций

$$\{f_n(x)\}$$

называется *равномерно сходящейся на множестве  $E$  к функции  $f(x)$* , если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon \quad \forall x \in E \rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{3}$$

В этом определении существенно, что номер  $N_\varepsilon$  не зависит от  $x$ . Если справедливо утверждение (3), то пишут

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x), \quad x \in E,$$

или

$$f_n \rightrightarrows_E f.$$

Говорят, что последовательность  $\{f_n(x)\}$  *равномерно сходится на множестве  $E$* , если существует функция  $f$ , удовлетворяющая условию (3).

Если существуют числовая последовательность  $\{a_n\}$  и номер  $n_0$  такие, что

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall x \in E \rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq a_n,$$



причем  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , то

$$f_n(x) \Rightarrow f(x), \quad x \in E.$$

Пример 2. Доказать, что последовательность  $\{f_n(x)\}$  равномерно сходится на множестве  $E$ , и найти ее предельную функцию  $f(x)$ , если:

$$\text{а) } f_n(x) = \frac{n+1}{n+x^2}, \quad E = [-1, 1]; \quad \text{б) } f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}, \quad E = R;$$

$$\text{в) } f_n(x) = \frac{\operatorname{arctg} n^2 x}{\sqrt[3]{n+x}}, \quad E = [0, +\infty);$$

$$\text{г) } f_n(x) = n \sin \frac{1}{nx}, \quad E = [1, +\infty).$$

$\Delta$  а) В этом случае  $f(x) = 1$  (пример 1, а)) и  $|f_n(x) - f(x)| = \frac{1-x^2}{n+x^2} \leq \frac{1}{n}$ , так как  $|x| \leq 1$ . Следовательно,

$$\frac{n+1}{n+x^2} \Rightarrow 1, \quad x \in [-1, 1].$$

б) Используя неравенство  $x^2 + \frac{1}{n} \leq \left(|x| + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2$ , получаем  $0 \leq \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} \leq |x| + \frac{1}{\sqrt{n}} - |x| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ , откуда следует, что

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \Rightarrow |x|, \quad x \in R.$$

в) Так как  $0 \leq \operatorname{arctg} n^2 x \leq \frac{\pi}{2}$  и  $\sqrt[3]{n+x} \geq \sqrt[3]{n}$  при  $x > 0$ , то  $0 \leq f_n(x) \leq \frac{\pi}{2\sqrt[3]{n}}$ , откуда получаем  $f_n(x) \Rightarrow 0$ ,  $x \in E$ .

г) В этом случае  $f(x) = \frac{1}{x}$  (пример 1, б)). Используя неравенство  $|\sin t - t| \leq \frac{t^2}{2}$ ,  $t \in R$  (§ 18, пример 1, а)), получаем

$$|f_n(x) - f(x)| = n \left| \sin \frac{1}{nx} - \frac{1}{nx} \right| \leq \frac{n}{2(nx)^2} \leq \frac{1}{2n},$$

так как  $x \geq 1$ . Следовательно,

$$n \sin \frac{1}{nx} \Rightarrow \frac{1}{x}, \quad x \in [1, +\infty). \quad \blacktriangle$$

б) *Критерии равномерной сходимости последовательности функций.*

**Теорема 1.** Для того чтобы последовательность функций  $\{f_n(x)\}$ , определенных на множестве  $E$ , сходилась равномерно на этом множестве к функции  $f(x)$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0. \quad (4)$$

○ Обозначим  $\sigma_n = \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|$ . Тогда условие (4) означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon: \forall n \geq n_\varepsilon \rightarrow \sigma_n < \varepsilon. \quad (5)$$

Если  $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ ,  $x \in E$ , то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon: \forall n \geq N_\varepsilon \rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда следует, что  $\sigma_n \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$  для  $n \geq N_\varepsilon$ . Поэтому неравенство  $\sigma_n < \varepsilon$  выполняется при всех  $n \geq N_\varepsilon$ , где  $n_\varepsilon = N_\varepsilon$ . Обратно, если выполняется условие (4) или равносильное ему условие (5), то, используя неравенство  $|f_n(x) - f(x)| \leq \sigma_n$  для  $x \in E$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , получаем  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  для  $x \in E$ ,  $n \geq n_\varepsilon$ , т. е.  $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ ,  $x \in E$ . ●

Пример 3. Доказать, что последовательность  $\{f_n(x)\}$  сходится равномерно на множестве  $E$ , и найти предельную функцию  $f(x)$ , если:

а)  $f_n(x) = \frac{2n^2 x}{1 + n^\alpha x^2}$ ,  $\alpha > 4$ ,  $E = \mathbb{R}$ ;

б)  $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ ,  $E = [0, 1]$ ;

в)  $f_n(x) = nx^2 e^{-nx}$ ,  $E = [2, +\infty)$ .

△ а) Если  $x = 0$ , то  $f_n(0) = 0$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ , и поэтому  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = f(0) = 0$ . Если  $x \neq 0$ , то  $|f_n(x)| \leq \frac{2n^2|x|}{n^\alpha x^2} = \frac{2}{|x|n^{\alpha-2}}$ , откуда следует, что  $f_n(x) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , так как  $\alpha > 4$ . Таким образом, предельная функция  $f(x) = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Так как при  $x \neq 0$  справедливо неравенство  $1 + n^\alpha x^2 \geq 2n^{\alpha/2}|x|$ , причем это неравенство обращается в равенство лишь в случае, когда  $n^\alpha x^2 = 1$ , т. е.  $|x| = n^{-\alpha/2}$ , то

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{2n^2|x|}{2n^{\alpha/2}|x|} = \frac{1}{n^{\alpha/2-2}}, \quad x \neq 0.$$

Следовательно,  $\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n^{\alpha/2-2}} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , если  $\alpha > 4$ , и поэтому  $f_n(x) \rightrightarrows 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

б) Если  $x \in [0, 1)$ , то  $x^n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , и поэтому  $f_n(x) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Если  $x = 1$ , то  $f_n(1) = 0$ , и поэтому  $f(1) = 0$ . Следовательно,  $f(x) = 0$ ,  $x \in [0, 1]$ .

Чтобы вычислить  $\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in E} |f_n(x)|$ , найдем точки экстремума функции  $f_n(x)$ .

Уравнение  $f'_n(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = x^{n-1}(n - x(n+1)) = 0$  имеет внутри отрезка  $[0, 1]$  единственный корень  $x_n = \frac{n}{n+1}$ , причем  $f_n(x_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n}$ . Заметим, что  $f'_n(x) > 0$  при  $x \in (0, x_n)$  и  $f'_n(x) < 0$

при  $x \in (x_n, 1)$ . Поэтому  $\sup_{x \in E} f_n(x) = \max_{x \in E} f_n(x) = f_n(x_n) < \frac{1}{n}$  для всех  $n \in \mathbb{N}$  и, согласно теореме 1,  $f_n(x) \Rightarrow 0$ ,  $x \in [0, 1]$ .

в) Учитывая, что  $te^{-\alpha t} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$  (если  $\alpha > 0$ ), находим  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = 0$ ,  $x \in [0, +\infty)$ .

Так как  $f'_n(x) = nxe^{-nx}(2 - xn) < 0$  при  $x > \frac{2}{n}$ , то функция  $f_n(x)$  является убывающей на промежутке  $\left[\frac{2}{n}, +\infty\right)$ , и поэтому

$$\sup_{x \in E} f_n(x) \leq f_n\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{4}{n} e^{-2} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

По теореме 1 последовательность  $\{f_n(x)\}$  равномерно сходится к  $f(x) = 0$  на множестве  $E = [2, +\infty)$ .  $\blacktriangle$

Теорема 2 (критерий Коши равномерной сходимости последовательности). *Для того чтобы последовательность функций  $\{f_n(x)\}$  сходилась равномерно на множестве  $E$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Коши*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon: \forall n \geq N_\varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in E \rightarrow |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon. \quad (6)$$

○ Необходимость. Пусть  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ ,  $x \in E$ . Тогда по определению равномерной сходимости

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon: \forall k \geq N_\varepsilon \quad \forall x \in E \rightarrow |f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (7)$$

В частности, (7) выполняется при  $k = n$ , если  $n \geq N_\varepsilon$ , и при  $k = n + p$  для  $p \in \mathbb{N}$ , т. е.

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f_{n+p}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| &= |(f_{n+p}(x) - f(x)) - (f_n(x) - f(x))| \leq \\ &\leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

т. е. выполняется условие (6).

Достаточность. Заметим, что числовая последовательность  $\{f_n(x_0)\}$ , где  $x_0$  — фиксированная точка множества  $E$ , удовлетворяет условию Коши (6) и в силу критерия Коши для числовой последовательности (§ 8) существует конечный

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0). \quad (8)$$

Так как предел (8) существует для каждого  $x_0 \in E$ , то на множестве  $E$  определена функция (обозначим ее  $f(x)$ ), которая является предельной функцией для последовательности  $\{f_n(x)\}$  на множестве  $E$ .

Запишем условие Коши (6) в виде

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon: \quad \forall n \geq N_\varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in E \rightarrow |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (9)$$

Переходя в неравенстве (9) к пределу при  $p \rightarrow \infty$  (при каждом фиксированном  $n \geq N_\varepsilon$  и фиксированном  $x \in E$ ) и учитывая, что существует  $\lim_{p \rightarrow \infty} f_{n+p}(x) = f(x)$ , получаем неравенство

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

справедливое при всех  $n \geq N_\varepsilon$  и для всех  $x \in E$ . Это означает, что

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x), \quad x \in E. \quad \bullet$$

в) *Неравномерная сходимость последовательности функций.* Последовательность  $\{f_n(x)\}$  не является равномерно сходящейся на множестве  $E$ , если условие Коши (6) не выполняется, т. е.

$$\exists \varepsilon_0 > 0: \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \exists \tilde{x} \in E: \quad |f_{n+p}(\tilde{x}) - f_n(\tilde{x})| \geq \varepsilon_0. \quad (10)$$

Пример 4. Доказать, что последовательность  $\{f_n(x)\}$ , где  $f_n(x) = \frac{\ln nx}{\sqrt{nx}}$ , не является равномерно сходящейся на множестве  $E = (0, 1)$ .

Δ Для любого  $k \in \mathbb{N}$  возьмем  $p = k = n$ ,  $\tilde{x} = 1/k = 1/n$ . Тогда

$$|f_{n+p}(\tilde{x}) - f_n(\tilde{x})| = \left| f_{2n}\left(\frac{1}{n}\right) - f_n\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \left| \frac{\ln 2}{\sqrt{2}} - \ln 1 \right| = \frac{\ln 2}{\sqrt{2}} = \varepsilon_0,$$

т. е. выполняется условие (10), и поэтому последовательность  $\{f_n(x)\}$  не является равномерно сходящейся на  $E$ . ▲

Если существует предельная функция  $f(x)$  последовательности  $\{f_n(x)\}$  на множестве  $E$ , но не выполняется условие (3), т. е.

$$\exists \varepsilon_0 > 0: \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad \exists \tilde{x} \in E: \quad |f_n(\tilde{x}) - f(\tilde{x})| \geq \varepsilon_0, \quad (11)$$

то говорят, что *последовательность  $\{f_n(x)\}$  сходится неравномерно на множестве  $E$  к функции  $f(x)$ .*

Пример 5. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множестве  $E$  последовательность  $\{f_n(x)\}$ , если:

$$\text{а) } f_n(x) = x^n - x^{2n}, \quad E = [0, 1]; \quad \text{б) } f_n(x) = n \sin \frac{1}{nx}, \quad E = (0, 1].$$

Δ а) В этом случае предельная функция  $f(x) = 0$ ,  $x \in E$ . Для любого  $k \in \mathbb{N}$  возьмем  $n = k$ ,  $\tilde{x} = 1/\sqrt[k]{2}$ . Тогда  $\tilde{x} \in E$  при любом  $n \in \mathbb{N}$  и  $|f_n(\tilde{x}) - f(\tilde{x})| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \varepsilon_0$ , т. е. выполняется условие (11), и поэтому последовательность  $\{f_n(x)\}$  сходится неравномерно на множестве  $E$  к  $f(x) = 0$ .

б) Здесь предельная функция  $f(x) = x^{-1}$  на множестве  $x > 0$  (пример 1, б)). Возьмем  $\tilde{x} = 1/n$ . Тогда  $|f_n(\tilde{x}) - f(\tilde{x})| = |n \sin 1 - n| \geq$

$\geq 1 - \sin 1 = \varepsilon_0$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ , и поэтому  $\{f_n(x)\}$  сходится неравномерно на множестве  $E$  к  $x^{-1}$ .  $\blacktriangle$

Неравномерную сходимость последовательности можно установить, используя теорему 1. Если условие (4) не выполняется, т. е.

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \not\rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (12)$$

то  $\{f_n(x)\}$  сходится неравномерно на множестве  $E$  к  $f(x)$ .

**Пример 6.** Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность  $f_n(x) = n^2 x^2 e^{-nx}$ ,  $E = (0, 2)$ .

$\Delta$  Предельная функция  $f(x) = 0$ ,  $x \in E$ . Так как уравнение  $f'_n(x) = n^2 x e^{-nx} (2 - xn)$  имеет на интервале  $(0, 2)$  единственный корень  $x_n = 2/n$ , причем  $f'_n(x) > 0$  при  $x \in (0, x_n)$  и  $f'_n(x) < 0$  при  $x \in (x_n, 2)$ , то  $\sup_{x \in E} f_n(x) = f_n(x_n) = 4e^{-1}$ . Таким образом, выполняется условие (12), и поэтому  $\{f_n(x)\}$  сходится неравномерно на множестве  $E$  к 0.  $\blacktriangle$

**3. Определение и критерий равномерной сходимости функционального ряда.** Пусть функции  $u_n(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , определены на множестве  $E$ . Обозначим

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x). \quad (13)$$

Определение. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (14)$$

называется *равномерно сходящимся на множестве  $E$* , если на этом множестве определена функция  $S(x)$  такая, что

$$S_n(x) \Rightarrow S(x), \quad x \in E. \quad (15)$$

Согласно определению равномерной сходимости последовательности функций запись (15) означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon: \forall n \geq N_\varepsilon \forall x \in E \rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon, \quad (16)$$

где  $S(x)$  — сумма ряда (14), а  $S_n(x)$  определяется формулой (13).

Пусть  $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$ , т.е.  $r_n(x)$  —  $n$ -й остаток ряда (14). Тогда условие (15) примет вид

$$r_n(x) \Rightarrow 0, \quad x \in E.$$

Это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon: \forall n \geq N_\varepsilon \forall x \in E \rightarrow |r_n(x)| < \varepsilon. \quad (17)$$

В силу теоремы 1 для равномерной сходимости ряда (14) на множестве  $E$  необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_{x \in E} |r_n(x)| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Если ряд (14) сходится на множестве  $E$ , но не выполняется условие (17) или равносильное ему условие (18), то говорят, что ряд (14) *сходится неравномерно на множестве  $E$* .

Следовательно, если

$$\exists \varepsilon_0 > 0: \forall k \in \mathbf{N} \exists n \geq k \exists \tilde{x} \in E: |r_n(\tilde{x})| \geq \varepsilon_0, \quad (19)$$

или

$$\sup_{x \in E} |r_n(x)| \not\rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty, \quad (20)$$

то ряд (14) сходится неравномерно на множестве  $E$ .

**Пример 7.** Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на указанных множествах ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ , если:

а)  $u_n(x) = x^{n-1}$ ,  $E_1 = (-q, q)$ , где  $0 < q < 1$ ,  $E_2 = (-1, 1)$ ;

б)  $u_n(x) = \frac{x}{(1+nx)(1+(n+1)x)}$ ,  $E_1 = (\delta, +\infty)$ , где  $\delta > 0$ ,  $E_2 = (0, +\infty)$ ;

в)  $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}$ ,  $E = [0, +\infty)$ .

$\Delta$  а) В этом случае  $S_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$ ,  $S(x) = \frac{1}{1-x}$  для любого  $x \in E_2$ , т. е. ряд сходится на множестве  $E_2$ , а значит, и на  $E_1$ .

Для любого  $x \in E_1$  выполняется неравенство  $|r_n(x)| = \left| \frac{x^n}{1-x} \right| \leq \frac{|x|^n}{1-|x|}$ , откуда следует, что  $\sup_{x \in E_1} |r_n(x)| \leq \frac{q^n}{1-q}$ , и поэтому выполняется условие (18). Следовательно, ряд сходится равномерно на множестве  $E_1$ .

На множестве  $E_2$  ряд сходится неравномерно. В самом деле, возьмем  $\tilde{x} = 1 - \frac{1}{n}$ . Тогда  $\tilde{x} \in E$  для любого  $n \in \mathbf{N}$  и  $r_n(\tilde{x}) = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow +\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , откуда следует, что выполняется условие (20).

б) Так как  $u_n(x) = \frac{1}{1+nx} - \frac{1}{1+(n+1)x}$ , то  $S_n(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+(n+1)x}$ . Если  $x \in E_2$ , то  $S_n(x) \rightarrow S(x)$  при  $n \rightarrow \infty$ , где  $S(x) = \frac{1}{1+x}$ , и поэтому  $r_n(x) = \frac{1}{1+(n+1)x}$ .

На множестве  $E_1$  ряд сходится равномерно, так как  $|r_n(x)| \leq \frac{1}{1+(n+1)\delta}$ , и поэтому выполняется условие (18), а на множестве  $E_2$  — неравномерно, так как  $r_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}$ , и поэтому выполняется условие (20).

в) При каждом  $x \geq 0$  последовательность  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n+x}} \right\}$  монотонно стремится к нулю, и поэтому по признаку Лейбница (§ 41, теорема 1) ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}$  сходится на множестве  $E$ , причем  $|r_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| = \frac{1}{\sqrt{n+1+x}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ , откуда следует, что выполняется условие (18). Следовательно, ряд сходится равномерно на множестве  $E$ .  $\blacktriangle$

**Теорема 3** (критерий Коши равномерной сходимости ряда). *Для того чтобы ряд (14) равномерно сходиллся на множестве  $E$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Коши, т. е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon: \forall n \geq N_\varepsilon \quad \forall p \in \mathbf{N} \quad \forall x \in E \rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon. \quad (21)$$

○ По определению равномерная сходимость ряда (14) на множестве  $E$  означает равномерную сходимость последовательности  $\{S_n(x)\}$  на  $E$ .

Согласно теореме 2  $S_n(x) \Rightarrow S(x)$  на  $E$  тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon: \forall n \geq N_\varepsilon \quad \forall p \in \mathbf{N} \quad \forall x \in E \rightarrow |S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon. \quad (22)$$

Так как  $S_{n+p}(x) - S_n(x) = u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)$ , то условие (22) равносильно условию (21).  $\bullet$

Если условие (21) не выполняется, т. е.

$$\exists \varepsilon_0 > 0: \forall m \in \mathbf{N} \quad \exists n \geq m \quad \exists p \in \mathbf{N} \quad \exists \tilde{x} \in E: \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(\tilde{x}) \right| \geq \varepsilon_0, \quad (23)$$

то ряд (14) не является равномерно сходящимся на множестве  $E$ . В частности, если

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbf{N}: \forall n \geq n_0 \quad \exists x_n \in E: |u_n(x_n)| \geq \varepsilon_0, \quad (24)$$

то ряд (14) не является равномерно сходящимся на множестве  $E$ .

**Пример 8.** Доказать, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  не является равномерно сходящимся на множестве  $E$ , если:

а)  $u_n(x) = \frac{n^2}{x} e^{-n^2/x}$ ,  $E = (0, +\infty)$ ;

б)  $u_n(x) = \frac{n}{1+n^2x^2} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{x}{n}}$ ,  $E = (0, 1)$ ;

в)  $u_n(x) = \frac{\sin nx}{n^\alpha}$ ,  $E = [0, 2\pi]$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ .

$\Delta$  а) Пусть  $x_n = n^2$ ; тогда  $u_n(x_n) = e^{-1}$ , т. е. выполняется условие (24).

б) Возьмем  $x_n = \frac{1}{n}$  и воспользуемся тем, что  $\operatorname{tg} x > x$  при  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  (§ 12, (3)). Тогда  $u_n(x_n) = \frac{n}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ , т. е. выполняется условие (24).

в) Возьмем  $x_n = \frac{\pi}{4(n+1)}$ ; тогда  $x_n \in E$  при любом  $n \in \mathbb{N}$ . Если  $n+1 \leq k \leq 2n$ , то  $\frac{\pi}{4} \leq kx_n \leq \frac{\pi}{4} \frac{2n}{n+1} < \frac{\pi}{2}$ , и поэтому  $\sin kx_n \geq \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , откуда следует, что

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin kx_n}{k^\alpha} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} > \frac{1}{\sqrt{2}} n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

так как  $0 < \alpha \leq 1$ . Следовательно, выполняется условие (23), и поэтому ряд не является равномерно сходящимся на множестве  $[0, 2\pi]$  при  $\alpha \in (0, 1]$ . ▲

#### 4. Признаки равномерной сходимости функциональных рядов.

а) *Признак Вейерштрасса.*

Теорема 4. Если для функционального ряда (14) можно указать такой сходящийся числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , что для всех  $n \geq n_0$  и для всех  $x \in E$  выполняется условие

$$|u_n(x)| \leq a_n, \tag{25}$$

то ряд (14) сходится абсолютно и равномерно на множестве  $E$ .

○ Согласно условию (25) для любого  $n \geq n_0$ , любого  $p \in \mathbb{N}$  и для каждого  $x \in E$  выполняется неравенство

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k. \tag{26}$$

Из сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  следует (§ 39), что для него выполняется условие Коши, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon: \forall n \geq N_\varepsilon \forall p \in \mathbb{N} \rightarrow \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon, \tag{27}$$

а из (26) и (27) следует, что для ряда (14) выполняется на множестве  $E$  условие Коши (21), и в силу теоремы 3 этот ряд сходится равномерно на множестве  $E$ .

Абсолютная сходимость ряда (14) для каждого  $x \in E$  следует из правого неравенства (26). ●



Следствие. Если сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , где  $a_n = \sup_{x \in E} |u_n(x)|$ , то ряд (14) сходится абсолютно и равномерно на множестве  $E$ .

Пример 9. Доказать, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  сходится равномерно на множестве  $E$ , если:

а)  $u_n(x) = \ln \left( 1 + \frac{x}{n\sqrt[3]{n+1}} \right)$ ,  $E = [0, 3]$ ;

б)  $u_n(x) = \frac{nx}{n^2 + x^2} \arctg \frac{x}{n}$ ,  $E = [-1, 1]$ ;

в)  $u_n(x) = \frac{\sin \frac{1}{n} \cos nx}{4 + \ln^2(n+1)x}$ ,  $E = [1, +\infty)$ ;

г)  $u_n(x) = x^2 e^{-nx}$ ,  $E = (0, +\infty)$ .

$\Delta$  а) Так как при  $t \geq 0$  справедливо неравенство  $\ln(1+t) \leq t$  (§ 17, пример 1, а)), то  $|u_n(x)| \leq \frac{x}{n\sqrt[3]{n+1}} \leq \frac{3}{n^{3/2}}$  при всех  $x \in [0, 3]$ , и из сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^{3/2}}$  по теореме 4 следует равномерная сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  на множестве  $[0, 3]$ .

б) Используя неравенство  $|\arctg t| \leq t$  для всех  $t \in R$  (§ 17, (19)) и учитывая, что  $|x| \leq 1$  и  $n^2 + x^2 \geq n^2$ , получаем  $|u_n(x)| \leq \frac{|nx|}{n^2 + x^2} \left| \frac{x}{n} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ , откуда следует равномерная сходимость ряда на множестве  $[-1, 1]$ .

в) Так как  $|\sin t| \leq |t|$  и  $|\cos t| \leq 1$  для всех  $t \in R$ , а  $x \geq 1$ , то  $|u_n(x)| \leq \frac{1}{nx \ln^2(n+1)x} \leq \frac{1}{n \ln^2(n+1)}$ . Из сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(n+1)}$  следует равномерная сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  на множестве  $[1, +\infty)$ .

г) На промежутке  $(0, +\infty)$  уравнение  $u'_n(x) = xe^{-nx}(2-nx) = 0$  имеет единственный корень  $x = x_n = \frac{2}{n}$ , причем  $u'_n(x) > 0$  при  $x \in (0, x_n)$  и  $u'_n(x) < 0$  при  $x > x_n$ . Поэтому  $\sup_{x \in E} |u_n(x)| = u_n(x_n) = \frac{4}{n^2} e^{-2}$ ,

и из сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} e^{-2}$  следует равномерная сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  на множестве  $(0, +\infty)$ .  $\blacktriangle$

б) *Признак Дирихле.*

Теорема 5. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)b_k(x) \quad (28)$$

сходится равномерно на множестве  $E$ , если выполняются условия:

а) последовательность  $\{B_n(x)\}$ , где  $B_n(x) = \sum_{k=1}^n b_k(x)$ , равномерно ограничена на множестве  $E$ , т. е.

$$\exists M > 0: \forall x \in E \quad \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow |B_n(x)| \leq M; \quad (29)$$

б) последовательность  $\{a_n(x)\}$  монотонна на множестве  $E$ , т. е.

$$\forall x \in E \quad \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow a_{n+1}(x) \leq a_n(x), \quad (30)$$

и равномерно стремится к нулю, т. е.

$$a_n(x) \Rightarrow 0, \quad x \in E. \quad (31)$$

○ Воспользуемся оценкой

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x) \right| \leq 2M(|a_{n+1}(x)| + |a_{n+p}(x)|), \quad (32)$$

полученной при доказательстве признака Дирихле для числовых рядов (§ 41).

Условие (31) означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon: \forall k \geq N_\varepsilon \quad \forall x \in E \rightarrow |a_k(x)| < \frac{\varepsilon}{4M}. \quad (33)$$

Из (29), (32) и (33) следует, что для всех  $n \geq N_\varepsilon$ , для всех  $p \in \mathbb{N}$  и

для всех  $x \in E$  выполняется неравенство  $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x) \right| < \varepsilon$ , и в силу критерия Коши (теорема 3) ряд (28) сходится равномерно на множестве  $E$ . ●

Пример 10. Доказать, что при  $\alpha > 0$  ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha} \quad (34)$$

сходится равномерно на множестве  $E = [\delta, 2\pi - \delta]$ , где  $0 < \delta < 2\pi - \delta < 2\pi$ .

△ Если  $\alpha > 1$ , то по признаку Вейерштрасса ряд (34) сходится абсолютно и равномерно на  $R$ , так как  $|\sin x| \leq 1$ , а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ , где  $\alpha > 1$ , сходится.

Пусть  $0 < \alpha < 1$ . Тогда последовательность  $\{a_n\}$ , где  $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ , удовлетворяет условиям (30), (31). Полагая  $B_n(x) = \sum_{k=1}^n \sin kx$  и используя неравенство  $|B_n(x)| \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}$ , справедливое при  $x \neq \pi m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  (§ 41, пример 2), получаем  $|B_n(x)| \leq \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}$  для всех  $x \in E$ . По теореме 5 ряд (34) сходится равномерно на множестве  $E$ .

Заметим, что на множестве  $[0, 2\pi]$  ряд (34) при  $\alpha \in (0, 1]$  сходится неравномерно (пример 8, в). ▲

в) *Признак Абеля.*

Теорема 6. Ряд (28) сходится равномерно на множестве  $E$ , если выполняются условия:

а) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \quad (35)$$

сходится равномерно на множестве  $E$ ;

б) последовательность  $\{a_n(x)\}$  монотонна на множестве  $E$ , т. е.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in E \rightarrow a_{n+1}(x) \leq a_n(x), \quad (36)$$

и равномерно ограничена, т. е.

$$\exists M > 0: \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in E \rightarrow |a_n(x)| \leq M. \quad (37)$$

○ Обозначим  $B_j^{(n)}(x) = \sum_{k=n+1}^{n+j} b_k(x)$ . Тогда ряд (35) в силу теоремы 3 удовлетворяет условию Коши, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon: \forall n \geq N_\varepsilon \quad \forall j \in \mathbb{N} \rightarrow |B_j^{(n)}(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}. \quad (38)$$

Используя преобразование Абеля (§ 41), преобразуем сумму:

$$\sigma = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x) = \sum_{j=1}^p a_{n+j}(x)b_{n+j}(x).$$

Так как  $b_{n+j}(x) = B_j^{(n)}(x) - B_{j-1}^{(n)}(x)$ , где  $j = \overline{1, p}$ ,  $B_0^{(n)}(x) = 0$ , то

$$\sigma = \sum_{j=1}^{p-1} (a_{n+j}(x) - a_{n+j+1}(x))B_j^{(n)}(x) + a_{n+p}(x)B_p^{(n)}(x),$$

откуда, используя условия (36)–(38), получаем

$$\begin{aligned} |\sigma| &< \frac{\varepsilon}{3M} \sum_{j=1}^{p-1} (a_{n+j}(x) - a_{n+j+1}(x)) + \frac{\varepsilon}{3M} |a_{n+p}(x)| = \\ &= \frac{\varepsilon}{3M} (a_{n+1}(x) - a_{n+p}(x) + |a_{n+p}(x)|) \leq \frac{\varepsilon}{3M} (2|a_{n+p}(x)| + |a_{n+1}(x)|) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in E \rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x) \right| < \varepsilon,$$

и по теореме 3 ряд (28) сходится равномерно на множестве  $E$ . ●

### 5. Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов.

а) *Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда.*

Теорема 7. Если все члены ряда (14) — непрерывные на отрезке  $[a, b]$  функции, а ряд (14) сходится равномерно на  $[a, b]$ , то его сумма  $S(x)$  также непрерывна на отрезке  $[a, b]$ .

○ Пусть  $x_0$  — произвольная точка отрезка  $[a, b]$ . Для определенности будем считать, что  $x_0 \in (a, b)$ .

Нужно доказать, что функция

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

непрерывна в точке  $x_0$ , т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) \rightarrow |S(x) - S(x_0)| < \varepsilon, \quad (39)$$

где  $U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [a, b]$ .

По условию  $S_n(x) \Rightarrow S(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , где  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ , т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon \quad \forall x \in [a, b] \rightarrow |S(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (40)$$

Фиксируем номер  $n_0 \geq N_\varepsilon$ . Тогда из (40) при  $n = n_0$  получаем

$$|S(x) - S_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (41)$$

и, в частности, при  $x = x_0$  находим

$$|S(x_0) - S_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (42)$$

Функция  $S_{n_0}(x)$  непрерывна в точке  $x_0$  как сумма конечного числа непрерывных функций  $u_k(x)$ ,  $k = \overline{1, n_0}$ . По определению непрерывности

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) \subset [a, b] \rightarrow |S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (43)$$

Воспользуемся равенством

$$\begin{aligned} S(x) - S(x_0) &= \\ &= (S(x) - S_{n_0}(x)) + (S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)) + (S_{n_0}(x_0) - S(x_0)). \end{aligned}$$

Из этого равенства, используя оценки (41)–(43), получаем

$$\begin{aligned} |S(x) - S(x_0)| &\leq \\ &\leq |S(x) - S_{n_0}(x)| + |S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)| + |S_{n_0}(x_0) - S(x_0)| < \varepsilon \end{aligned}$$

для любого  $x \in U_\delta(x_0) \subset [a, b]$ , т. е. справедливо утверждение (39).

Так как  $x_0$  — произвольная точка отрезка  $[a, b]$ , то функция  $S(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ . ●

Замечание 1. Согласно теореме 7

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x),$$

т. е. при условиях теоремы 7 возможен почленный предельный переход.

Теорема 8. Если последовательность  $\{S_n(x)\}$  непрерывных на отрезке  $[a, b]$  функций равномерно сходится на  $[a, b]$ , то ее предельная функция  $S(x)$  также непрерывна на отрезке  $[a, b]$ .

○ Доказательство этого утверждения следует из теоремы 7. ●

б) Почленное интегрирование функционального ряда.

Теорема 9. Если все члены ряда (14) — непрерывные на отрезке  $[a, b]$  функции, а ряд (14) сходится равномерно на  $[a, b]$ , то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t) dt \quad (44)$$

также равномерно сходится на  $[a, b]$ , и если

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad (45)$$

то

$$\int_a^x S(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t) dt, \quad x \in [a, b], \quad (46)$$

т. е. ряд (45) можно почленно интегрировать.

○ По условию ряд (45) сходится равномерно к  $S(x)$  на отрезке  $[a, b]$ ,

т. е.  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x) \Rightarrow S(x)$ ,  $x \in [a, b]$ . Это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon: \forall n \geq N_\varepsilon \forall t \in [a, b] \rightarrow |S(t) - S_n(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \quad (47)$$

Пусть  $\sigma(x) = \int_a^x S(t) dt$ , а  $\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^n \int_a^x u_k(t) dt$  —  $n$ -я частичная сум-

ма ряда (44).

Функции  $u_k(x)$ ,  $k \in N$ , по условию непрерывны на отрезке  $[a, b]$ , и поэтому они интегрируемы на  $[a, b]$ . Функция  $S(x)$  также интегрируема на  $[a, b]$ , так как она непрерывна на этом отрезке (теорема 7). Используя свойства интеграла, получаем

$$\sigma_n(x) = \int_a^x \sum_{k=1}^n u_k(t) dt = \int_a^x S_n(t) dt.$$

Следовательно,

$$\sigma(x) - \sigma_n(x) = \int_a^x (S(t) - S_n(t)) dt,$$

откуда в силу условия (47) получаем

$$|\sigma(x) - \sigma_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \int_a^x dt = \frac{\varepsilon}{b-a} (x-a) \leq \varepsilon,$$

причем это неравенство выполняется для всех  $n \geq N_\varepsilon$  и для всех  $x \in [a, b]$ . Это означает, что ряд (44) сходится равномерно на отрезке  $[a, b]$ , и выполняется равенство (46). ●

*Замечание 2.* Равенство (46) остается в силе, если заменить  $a$  на  $c$ ,  $x$  на  $d$ , где  $a \leq c \leq d \leq b$ , т. е. ряд (45) можно при условиях теоремы 9 почленно интегрировать на любом отрезке  $[c, d] \subset [a, b]$ .

*Теорема 10.* Если  $S_n(t) \Rightarrow S(t)$ ,  $x \in [a, b]$ , а каждая из функций  $S_n(t)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то

$$\int_{x_0}^x S_n(t) dt \Rightarrow \int_{x_0}^x S(t) dt, \quad x \in [a, b],$$

для любой точки  $x_0 \in [a, b]$ .

○ Доказательство этого утверждения получено при доказательстве теоремы 9. ●

в) Почленное дифференцирование функционального ряда.

*Теорема 11.* Если функции  $u_n(x)$ ,  $n \in N$ , имеют непрерывные производные на отрезке  $[a, b]$ , ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \tag{48}$$

сходится равномерно на отрезке  $[a, b]$ , а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{49}$$

сходится хотя бы в одной точке  $x_0 \in [a, b]$ , т. е. сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0), \quad (50)$$

то ряд (49) сходится равномерно на отрезке  $[a, b]$ , и его можно почленно дифференцировать, т. е.

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x), \quad (51)$$

где

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x). \quad (52)$$

○ Обозначим через  $\tau(x)$  сумму ряда (48), т. е.

$$\tau(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x). \quad (53)$$

По теореме 9 ряд (53) можно почленно интегрировать, т. е.

$$\int_{x_0}^x \tau(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x u'_n(t) dt, \quad (54)$$

где  $x_0, x \in [a, b]$ , причем ряд (54) сходится равномерно на отрезке  $[a, b]$ . Так как  $\int_{x_0}^x u'_n(t) dt = u_n(x) - u_n(x_0)$ , то равенство (54) можно записать в виде

$$\int_{x_0}^x \tau(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x), \quad (55)$$

где

$$v_n(x) = u_n(x) - u_n(x_0). \quad (56)$$

Ряд (55) сходится равномерно, а ряд (50) сходится (а значит, и равномерно сходится на отрезке  $[a, b]$ ). Поэтому ряд (49) сходится равномерно на  $[a, b]$  как разность равномерно сходящихся рядов.

Из равенств (55), (56) и (52) следует, что

$$\int_{x_0}^x \tau(t) dt = S(x) - S(x_0). \quad (57)$$

Так как функция  $\tau(t)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  по теореме 7, то в силу свойств интеграла с переменным верхним пределом (§ 36) левая часть равенства (57) имеет производную, которая равна  $\tau(x)$ . Следовательно, правая часть (57) — дифференцируемая функция, а ее производная равна  $S'(x)$ . Итак, доказано, что  $\tau(x) = S'(x)$ , т. е. справедливо равенство (51) для всех  $x \in [a, b]$ . ●

**Замечание 3.** При условиях теоремы 11 функция  $S'(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , т. е.  $S(x)$  — непрерывно дифференцируемая на  $[a, b]$  функция.

**Теорема 12.** Если последовательность  $\{S_n(x)\}$  непрерывно дифференцируемых на  $[a, b]$  функций сходится хотя бы в одной точке  $x_0 \in [a, b]$ , а последовательность  $\{S'_n(x)\}$  сходится равномерно на  $[a, b]$ , то последовательность  $\{S_n(x)\}$  также сходится равномерно на  $[a, b]$  к некоторой функции  $S(x)$  и

$$S'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n(x), \quad x \in [a, b].$$

○ Доказательство этого утверждения получено при доказательстве теоремы 11. ●

### § 43. Степенные ряды

**1. Радиус и круг сходимости степенного ряда.** Функциональные ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (\zeta - a)^n, \quad (1)$$

где  $c_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) и  $a$  — заданные комплексные числа,  $\zeta$  — комплексное переменное, называют *степенными рядами*, а числа  $c_n$  — *коэффициентами степенного ряда* (1).

Полагая в (1)  $z = \zeta - a$ , получим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad (2)$$

исследование сходимости которого эквивалентно исследованию сходимости ряда (1).

**Теорема 1 (Абея).** Если степенной ряд (2) сходится при  $z = z_0 \neq 0$ , то он сходится, и притом абсолютно, при любом  $z$  таком, что  $|z| < |z_0|$ ; а если этот ряд расходится при  $z = z_1 \neq 0$ , то он расходится при всяком  $z$ , для которого  $|z| > |z_1|$ .

○ а) Пусть  $K_0 = \{z: |z| < |z_0|\}$  — круг на комплексной плоскости с центром в точке  $O$  (рис. 43.1) радиуса  $|z_0|$ , и пусть  $z$  — произвольная точка круга  $K_0$ , т. е.  $|z| < |z_0|$ , и поэтому

$$q = \left| \frac{z}{z_0} \right| < 1. \quad (3)$$

Так как ряд (2) сходится в точке  $z_0$ , то должно выполняться условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n z_0^n = 0,$$

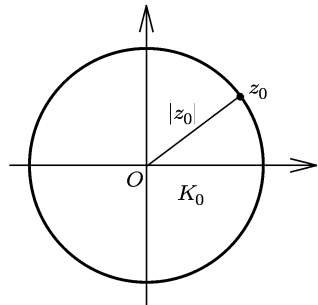


Рис. 43.1



откуда следует ограниченность последовательности  $\{c_n z_0^n\}$ , т. е.

$$\exists M > 0: \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow |c_n z_0^n| \leq M. \quad (4)$$

Используя неравенства (3) и (4), получаем

$$|c_n z^n| = |c_n z_0^n| \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \leq M q^n, \quad \text{где } 0 \leq q < 1. \quad (5)$$

Так как ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} M q^n$ , где  $0 \leq q < 1$ , сходится, то по признаку сравнения сходится ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n|$ , т. е. ряд (2) сходится абсолютно в каждой точке круга  $K_0$ .

б) Пусть ряд (2) расходится в точке  $z_1 \neq 0$ . Тогда он должен расходиться в любой точке  $\tilde{z}$  такой, что  $|z_1| < |\tilde{z}|$ , так как в противном случае по доказанному выше ряд (2) сошелся бы в точке  $z_1$  ●.

Следствие 1. Если ряд (2) сходится в точке  $z_0 \neq 0$ , то в круге  $K_1 = \{z: |z| \leq \rho\}$ , где  $\rho < |z_0|$ , этот ряд сходится абсолютно и равномерно.

○ Если  $z \in K_1$ , то  $|c_n z^n| \leq M q_1^n$ , где  $q_1 = \frac{\rho}{|z_0|}$ , и поэтому  $0 \leq q_1 < 1$ , причем  $q_1$  не зависит от  $z$ . По признаку Вейерштрасса ряд (2) сходится абсолютно и равномерно в круге  $K_1$ . ●

Следствие 2. Если ряд (2) сходится в точке  $z_0 \neq 0$ , то ряды

$$\sum_{n=m}^{\infty} c_n z^{n-m}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1} \quad (7)$$

сходятся абсолютно в круге  $K_0$ , а в круге  $K_1$  — абсолютно и равномерно.

○ Для ряда (6) в круге  $K_0$  выполняется неравенство

$$|c_n z^{n-m}| \leq \frac{M}{|z_0|^m} q^{n-m}, \quad 0 \leq q < 1,$$

в круге  $K_1$  — неравенство

$$|c_n z^{n-m}| \leq \frac{M}{|z_0|^m} q_1^{n-m}, \quad 0 \leq q_1 < 1$$

и  $q_1 = \frac{\rho}{|z_0|}$  не зависит от  $z$ . Для ряда (7) в кругах  $K_0$  и  $K_1$  справедливы соответственно неравенства

$$|n c_n z^{n-1}| \leq \frac{M}{|z_0|} n q^{n-1} \quad \text{и} \quad |n c_n z^{n-1}| \leq \frac{M}{|z_0|} n q_1^{n-1}.$$

Далее следует использовать сходимость рядов  $\sum_{n=1}^{\infty} Aq^n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} Bnq^{n-1}$ ,

где  $A > 0$ ,  $B > 0$ ,  $0 \leq q < 1$ . ●

**Теорема 2.** Для всякого степенного ряда (2) существует  $R$  ( $R \geq 0$  — число или  $+\infty$ ) такое, что:

а) если  $R \neq 0$  и  $R \neq +\infty$ , то ряд (2) абсолютно сходится в круге  $K = \{z: |z| < R\}$  и расходится вне круга  $K$ ; этот круг называют кругом сходимости ряда (2), а  $R$  — радиусом сходимости ряда;

б) если  $R = 0$ , то ряд (2) сходится в одной точке  $z = 0$ ;

в) если  $R = +\infty$ , то этот ряд сходится во всей комплексной плоскости.

○ Пусть  $D$  — множество всех точек сходимости ряда (2). Это непустое множество, так как в точке  $z = 0$  ряд (2) сходится.

Если  $D$  — неограниченное множество, то ряд (2) сходится в произвольной точке  $\tilde{z}$  комплексной плоскости. В самом деле, возьмем точку  $z_0 \in D$  такую, что  $|\tilde{z}| < |z_0|$ . Тогда по теореме Абеля ряд (2) будет сходиться в точке  $\tilde{z}$ .

Пусть  $D$  — ограниченное множество. Если  $D$  состоит из одной точки  $z = 0$ , то ряд (2) сходится при  $z = 0$  и расходится при  $z \neq 0$ . В этом случае  $R = 0$ . Если  $D$  содержит хотя бы одну точку, отличную от  $z = 0$ , то, обозначив  $R = \sup_{z \in D} |z|$ , докажем, что ряд (2) сходится в

круге  $K = \{z: |z| < R\}$  и расходится в каждой точке, лежащей вне этого круга. Пусть  $\tilde{z}$  — произвольная точка круга  $K$ , тогда  $|\tilde{z}| < R$ . По определению точной верхней грани

$$\exists z_1 \in D: |\tilde{z}| < |z_1| < R.$$

Так как ряд (2) сходится в точке  $z_1$ , то по теореме Абеля он абсолютно сходится в точке  $\tilde{z}$ . Итак, в каждой точке, лежащей внутри круга  $K$ , ряд (2) абсолютно сходится.

Пусть точка  $z'$  лежит вне круга  $K$ , т. е.  $|z'| > R$ . Тогда  $z' \notin D$  (по определению точной верхней грани), и поэтому ряд (2) расходится в точке  $z'$ . ●

**Замечание 1.** На границе круга  $K$  ряд (2) может как сходиться, так и расходиться. В любом меньшем круге  $K_1 = \{z: |z| \leq \rho < R\}$  ряд (2) сходится абсолютно и равномерно.

**Теорема 3 (Абеля).** Если  $R$  — радиус сходимости степенного ряда (2), причем  $0 < R < +\infty$ , и если этот ряд сходится при  $z = R$ , то он сходится равномерно на отрезке  $[0, R]$ , а его сумма непрерывна на этом отрезке.

○ Доказательство этой теоремы приводится, например, в [2]. ●

**Теорема 4.** Если существует конечный или бесконечный  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ , то для радиуса  $R$  сходимости ряда (2) справедлива

формула

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}, \quad (8)$$

а если существует конечный или бесконечный  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ , то

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|. \quad (9)$$

○ Докажем формулу (8). Обозначим  $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ .

а) Пусть  $0 < \rho < +\infty$  и пусть  $z_0$  — произвольная точка круга  $K = \{z: |z| < 1/\rho\}$ , тогда  $|z_0| < 1/\rho$  и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n z_0^n|} = |z_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = |z_0| \rho < 1.$$

По признаку Коши (§ 40) ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$  абсолютно сходится. Так как  $z_0$  — произвольная точка круга  $K$ , то ряд (2) абсолютно сходится в этом круге.

Пусть точка  $\tilde{z}$  лежит вне круга  $K$ . Тогда  $|\tilde{z}| > 1/\rho$ , и поэтому  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n \tilde{z}^n|} = |\tilde{z}| \rho > 1$ . Следовательно, ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \tilde{z}^n$  расходится при  $|\tilde{z}| > 1/\rho$ .

Таким образом, если правая часть равенства (8) — положительное число, то ряд (2) сходится в круге  $K$  и расходится вне этого круга. Следовательно,  $1/\rho$  — радиус сходимости ряда (2).

б) Если  $\rho = 0$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n z^n|} = |z| \rho = 0$  для любой точки  $z$  комплексной плоскости, и поэтому ряд (2) сходится при любом  $z$ . Это означает, что радиус сходимости ряда  $R = +\infty$ . И в этом случае формула (8) верна, если считать, что  $1/\infty = 0$ .

в) Если  $\rho = +\infty$ , то для любой точки  $z \neq 0$  имеем  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n z^n|} = |z| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = +\infty$ , и поэтому ряд (2) при  $z \neq 0$  расходится. Это означает, что  $R = 0$ .

Аналогично можно доказать формулу (9), используя признак Д'Аламбера сходимости рядов (§ 40). ●

З а м е ч а н и е 2. Пределы (8) и (9) могут не существовать. Однако имеется универсальная формула для вычисления радиуса сходимости  $R$  степенного ряда (2), а именно формула

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}, \quad (10)$$

которую называют формулой Коши-Адамара (доказательство формулы (10) содержится, например, в [2]).

Напомним, что символом  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$  обозначается точная верхняя грань множества всех частичных пределов (см. § 7) последовательности  $\{x_n\}$ .

Например, если  $x_n = 1 + (-1)^n$ , то  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ .

**Пример 1.** Найти радиус сходимости  $R$  степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ , если:

а)  $c_n = \frac{a^n}{n!}$ ,  $a > 0$ ;    б)  $c_n = \frac{(1+i)^n}{n3^n}$ ;    в)  $c_n = \frac{n^n}{e^n n!}$ .

$\Delta$  а) Так как  $\frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{n+1}{a} \rightarrow +\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , то по формуле (9) находим  $R = +\infty$ .

б) В этом случае  $|c_n| = \frac{(\sqrt{2})^n}{n3^n}$ , и поэтому  $\sqrt[n]{|c_n|} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{3}$  при  $n \rightarrow \infty$ , так как  $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ . По формуле (8) находим  $R = \frac{3}{\sqrt{2}}$ .

в) Так как  $c_{n+1} = c_n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{e}$ , то  $\frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ ,

и по формуле (9) находим  $R = 1$ .  $\blacktriangle$

**Пример 2.** Найти радиус сходимости  $R$  степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{5n}$ .

$\Delta$  Обозначим  $2z^5 = t$ . Тогда  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{5n} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$ , причем ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$  сходится, если  $|t| < 1$ , и расходится, если  $|t| > 1$ . Поэтому ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{5n}$  сходится, если  $2|z|^5 < 1$ , т. е. при  $|z| < \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$ , и расходится при  $|z| > \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$ . Итак, радиус сходимости  $R = \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$ . Тот же результат следует из формулы (10), так как

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[5n]{2^n} = \sqrt[5]{2}. \quad \blacktriangle$$

Для степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$  круг сходимости  $K$  имеет вид  $K = \{z: |z-a| < R\}$ . Например, степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 (z-1)^n$  сходится в круге  $K = \{z: |z-1| < 1\}$  и расходится вне этого круга.

Для степенного ряда вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \quad (11)$$

где  $a_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ),  $x_0$  — заданные действительные числа,  $x$  — действительное переменное, существует, согласно теореме 2, та-

кое  $R$  ( $R \geq 0$  — число или  $+\infty$ ), что при  $R \neq 0, +\infty$  ряд (11) сходится, если  $|x - x_0| < R$ , и расходится, если  $|x - x_0| > R$ . Интервал  $(x_0 - R, x_0 + R)$  называют *интервалом сходимости*, а  $R$  — *радиусом сходимости* ряда (11). Радиус сходимости ряда (11) совпадает с радиусом сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - x_0)^n$ , где  $z$  — комплексное переменное. При  $R = 0$  ряд (11) сходится лишь в точке  $x = x_0$ , а при  $R = +\infty$  — на всей числовой прямой.

**2. Регулярные функции.** Введем понятие функции комплексного переменного. Пусть каждой точке  $z \in E$ , где  $E$  — множество точек комплексной плоскости, поставлено в соответствие комплексное число  $w$ . Тогда говорят, что на множестве  $E$  определена *функция комплексного переменного*, и пишут  $w = f(z)$ , где символом  $f$  обозначено правило (закон), определяющее это соответствие.

Понятия предела, непрерывности, производной для функции комплексного переменного вводятся по аналогии с соответствующими понятиями для функции действительного переменного. Если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0: \quad \forall z: \quad |z - a| < \delta_\varepsilon \rightarrow |f(z) - f(a)| < \varepsilon,$$

то функцию  $f(z)$  называют *непрерывной в точке  $a$* .

Отметим еще, что понятие равномерной сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$  с комплексными членами формально вводится так же, как и для рядов с действительными членами, а сумма равномерно сходящегося ряда, составленного из непрерывных функций комплексного переменного, есть непрерывная функция.

Введем важное для функций комплексного переменного понятие регулярности.

Функция комплексного переменного  $f(z)$  называется *регулярной* (*однозначной аналитической, голоморфной*) в точке  $a$ , если она определена в некоторой окрестности точки  $a$  и представима в некотором круге  $|z - a| < \rho$ ,  $\rho > 0$ , сходящимся к  $f(z)$  степенным рядом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n. \quad (12)$$

Отметим, что любой многочлен, т. е. функция вида  $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ , является регулярной функцией в каждой точке комплексной плоскости.

Рациональная функция  $f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ , где  $P_n$  и  $Q_m$  — многочлены степени  $n$  и  $m$  соответственно, регулярна в каждой точке  $a$ , в которой  $Q_m(a) \neq 0$ . Если многочлены  $P_n$  и  $Q_m$  не имеют общих корней и если

$z = z_0$  — корень многочлена  $Q_m(z)$ , то  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ , а точку  $z_0$  называют *полюсом функции*  $f(z)$ . Полюсы — один из типов *особых точек* функций комплексного переменного (см. [6]).

В теории функций комплексного переменного доказывается, что на границе круга сходимости степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$  лежит хотя бы одна особая точка его суммы  $f(z)$  и что радиус сходимости этого ряда равен расстоянию от точки  $a$  до ближайшей к  $a$  особой точки функции  $f(z)$ .

В частности, если  $f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ , причем многочлены  $P_n$  и  $Q_m$  не имеют общих корней, то радиус сходимости  $R$  степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$  равен расстоянию от точки  $a$  до ближайшего к этой точке корня многочлена  $Q_m(z)$ , т. е.

$$R = \min_{1 \leq k \leq m} |z_k - a|,$$

где  $z_k$  ( $k = \overline{1, m}$ ) — корни многочлена  $Q_m(z)$  (предполагается, что  $a \neq z_k$ ,  $k = \overline{1, m}$ ).

Например, если  $f(z) = \frac{2z}{(z-3)(z^2+1)}$ , то корнями многочлена  $(z-3)(z^2+1)$  являются числа  $z_1 = 3$ ,  $z_2 = i$ ,  $z_3 = -i$ . Поэтому радиус сходимости  $R$  степенного ряда  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-1)^2$  равен наименьшему из чисел  $|3-1|$ ,  $|i-1|$ ,  $|i+1|$ , т. е. равен  $\sqrt{2}$ .

**Теорема 5.** *Функция  $f(z)$ , регулярная в точке  $a$ , единственным образом представляется рядом (12).*

○ Пусть функция  $f(z)$  имеет два представления в виде степенного ряда (12) в круге  $K = \{z: |z-a| < \rho\}$ , где  $\rho > 0$ , т. е.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n(z-a)^n. \quad (13)$$

Докажем, что  $c_n = \tilde{c}_n$  для  $n = 0, 1, 2, \dots$

По условию ряды  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$  и  $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n(z-a)^n$  сходятся в круге  $K$ , и поэтому (см. следствие 1 из теоремы 1) эти ряды сходятся равномерно в круге  $K_1 = \{z: |z-a| \leq \rho_1 < \rho\}$ , а их общая сумма — непрерывная в круге  $K_1$  функция. В частности, функция  $f(z)$  непрерывна в точке  $a$ . Подходя к пределу при  $z \rightarrow a$  в равенстве (13), получаем  $c_0 = \tilde{c}_0$ . Отбрасывая одинаковые слагаемые  $c_0$  и  $\tilde{c}_0$  в равен-

стве (13), получаем после деления на  $z - a$  равенство

$$c_1 + c_2(z - a) + c_3(z - a)^2 + \dots = \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2(z - a) + \tilde{c}_3(z - a)^2 + \dots, \quad (14)$$

которое справедливо в круге  $K$  с выколотой точкой  $a$ . Ряды в левой и правой частях (14) сходятся равномерно в круге  $K_1$  (следствие 2 из теоремы 1), а их общая сумма непрерывна в круге  $K_1$ . Переходя в равенстве (14) к пределу при  $z \rightarrow a$ , получаем  $c_1 = \tilde{c}_1$ . Справедливость равенства  $c_n = \tilde{c}_n$  при любом  $n$  устанавливается с помощью индукции. ●

### 3. Свойства степенных рядов.

Теорема 6. *Степенные ряды*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad (15)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}, \quad (16)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1} \quad (17)$$

имеют один и тот же радиус сходимости.

○ Пусть  $R, R_1$  и  $R_2$  — радиусы сходимости рядов (15), (16) и (17) соответственно,  $K, K_1$  и  $K_2$  — круги сходимости этих рядов. Докажем, что

$$R_1 = R = R_2. \quad (18)$$

Так как  $\frac{1}{n+1} \leq 1 \leq n$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ , то

$$\left| \frac{c_n}{n+1} z^{n+1} \right| \leq |z| \cdot |c_n z^n| \leq |z|^2 \cdot |n c_n z^{n-1}|. \quad (19)$$

Неравенства (19) справедливы при любом  $n \in \mathbb{N}$  и при любом  $z$ .

а) Пусть  $z = z_0 \in K_2$  и  $z_0 \neq 0$ . Тогда по теореме 2 ряд (17) сходится абсолютно в точке  $z_0$ , а из правого неравенства (19) в силу теоремы сравнения следует абсолютная сходимость ряда (15) в точке  $z_0$ . Итак, если  $z_0 \in K_2$ , то  $z_0 \in K$ , и поэтому

$$R_2 \leq R. \quad (20)$$

б) Аналогично, если  $z = z_0 \neq 0$  и  $z_0 \in K$ , то из левого неравенства (19) следует, что ряд (16) абсолютно сходится в точке  $z_0$ . Таким образом, если  $z_0 \in K$ , то  $z_0 \in K_1$ , и поэтому

$$R \leq R_1. \quad (21)$$

Из (20) и (21) получаем двойное неравенство

$$R_2 \leq R \leq R_1. \quad (22)$$

в) Докажем, что

$$R_1 \leq R_2. \quad (23)$$

Пусть  $z_0 \in K_1$  и  $z_0 \neq 0$ . Тогда  $|z_0| < R_1$ , и ряд (16) абсолютно сходится в точке  $z_0$  (теорема 2). Выберем  $\rho$  так, чтобы выполнялись неравенства

$$|z_0| < \rho < R_1. \quad (24)$$

Запишем следующее равенство:

$$|nc_n z_0^{n-1}| = \left| \frac{c_n \rho^{n+1}}{n+1} \left( \frac{|z_0|}{\rho} \right)^{n+1} \frac{n(n+1)}{|z_0|^2} \right|. \quad (25)$$

Так как  $\rho \in K_1$  в силу условия (24), то ряд (16) сходится при  $z = \rho$ , и поэтому

$$\exists M > 0: \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow \left| \frac{c_n \rho^{n+1}}{n+1} \right| \leq M. \quad (26)$$

Обозначим  $\frac{|z_0|}{\rho} = q$ . Тогда  $0 < q < 1$ , так как  $z_0 \neq 0$ , и выполняется условие (24). Из равенства (25) в силу условия (26) следует, что

$$|nc_n z_0^{n-1}| \leq \frac{M}{|z_0|^2} n(n+1)q^{n+1}, \quad 0 < q < 1. \quad (27)$$

Так как ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{|z_0|^2} n(n+1)q^{n+1}$ , где  $0 < q < 1$ , сходится по признаку

Д'Аламбера, то из (27) следует абсолютная сходимость ряда (17) в точке  $z_0$ . Итак, если  $z_0 \in K_1$ , то  $z_0 \in K_2$ , откуда получаем

$$R_1 \leq R_2. \quad (28)$$

Из неравенств (22) и (28) следует равенство (18). ●

Обратимся теперь к степенным рядам вида (11), где коэффициенты ряда — действительные числа, а переменное  $x$  принимает действительные значения.

**Теорема 7.** Если ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = f(x) \quad (29)$$

имеет радиус сходимости  $R > 0$ , то:

1) в интервале сходимости  $(x_0 - R, x_0 + R)$  функция  $f$  имеет производные любого порядка, получаемые почленным дифференцированием ряда (29);

2) внутри интервала сходимости этот ряд можно почленно интегрировать, т. е. для любого  $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$  справедливо



равенство

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(x - x_0)^{k+1}}{k+1}. \quad (30)$$

○ Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}, \quad (31)$$

составленный из производных членов ряда (29). По теореме 6 ряд (31) имеет тот же радиус сходимости, что и ряд (29), а по следствию 1 из теоремы 1 ряд (31) сходится равномерно на отрезке  $\Delta_\rho = [x_0 - \rho, x_0 + \rho]$ , где  $\rho$  — произвольное число такое, что  $0 < \rho < R$ .

В силу теоремы 11 из § 42 ряд (29) можно почленно дифференцировать на  $\Delta_\rho$ , а значит, и в любой точке  $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ , т. е. справедливо равенство

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}, \quad x \in (x_0 - R, x_0 + R). \quad (32)$$

По индукции доказывается, что

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k k(k-1)\dots(k-(n-1))(x - x_0)^{k-n}, \quad (33)$$

где  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ , т. е. ряд (29) можно почленно дифференцировать любое число раз.

Справедливость равенства (30) следует из теоремы 9 из § 42. ●

Следствие. Коэффициенты ряда (29), имеющего радиус сходимости  $R > 0$ , выражаются формулами

$$a_0 = f(x_0), \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (34)$$

○ Формулы (34) получаются из равенств (29) и (33) при  $x = x_0$ . ●

Замечание 3. Из формул (34) следует единственность разложения функции  $f(x)$  в степенной ряд вида (29).

## § 44. Ряд Тейлора

**1. Понятие ряда Тейлора.** Если функция  $f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$  и имеет в точке  $x_0$  производные всех порядков, то степенной ряд

$$f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (1)$$

называется *рядом Тейлора функции  $f$  в точке  $x_0$* .

Пусть функция  $f$  регулярна в точке  $x_0$ , т. е. представляется в некоторой окрестности точки  $x_0$  сходящимся к этой функции степенным рядом

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \quad |x-x_0| < \rho, \quad \rho > 0. \quad (2)$$

Тогда по теореме 7 из § 43 функция  $f$  бесконечно дифференцируема в окрестности точки  $x_0$ , причем коэффициенты ряда (2) выражаются формулами

$$a_0 = f(x_0), \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Таким образом, степенной ряд для функции  $f(x)$ , регулярной в данной точке  $a$ , совпадает с рядом Тейлора функции  $f$  в точке  $a$ .

Если известно, что функция  $f(x)$  бесконечно дифференцируема в точке  $a$  (и даже в некоторой окрестности этой точки), то нельзя утверждать, что составленный для этой функции ряд Тейлора (1) сходится при  $x \neq x_0$  к функции  $f(x)$ .

Рассмотрим функцию  $f(x) = e^{-1/x^2}$ ,  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 0$ . Эта функция определена на  $\mathbb{R}$ ,

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}, \quad f''(x) = \left( \frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4} \right) e^{-1/x^2} \quad \text{при } x \neq 0,$$

откуда с помощью индукции легко показать, что

$$f^{(n)}(x) = e^{-1/x^2} Q_{3n} \left( \frac{1}{x} \right) \quad \text{при } x \neq 0,$$

где  $Q_{3n}(t)$  — многочлен степени  $3n$  от  $t$ . Воспользуемся тем, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|^k} e^{-1/x^2} = 0$  для любого  $k \in \mathbb{N}$  (§ 19, пример 7), и докажем, что

$$f^{(k)}(0) = 0 \quad \text{для любого } k \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Утверждение (4) верно при  $k = 1$ , так как  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = 0$ , откуда, предположив, что формула (4) справедлива при  $k = n$ , находим

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} Q_{3n} \left( \frac{1}{x} \right) e^{-1/x^2} = 0.$$

Таким образом, по индукции доказано равенство (4), и поэтому все коэффициенты ряда Тейлора (1) в точке  $x_0 = 0$  для рассматриваемой функции равны нулю.

Так как  $e^{-1/x^2} \neq 0$  при  $x \neq 0$ , то сумма ряда Тейлора для функции  $f$  не совпадает с  $f(x)$  при  $x \neq 0$ . Иначе говоря, эту функцию нельзя представить рядом Тейлора, сходящимся к ней в окрестности точки  $x_0 = 0$ .

Причина этого явления становится понятной, если функцию  $f$  рассматривать в комплексной плоскости. В самом деле, функция  $f(z) = e^{-1/z^2}$  не является непрерывной в точке  $z = 0$ , так как  $f(x) = e^{-1/x^2} \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$ , а  $f(iy) = e^{1/y^2} \rightarrow +\infty$  при  $y \rightarrow 0$ .

**2. Остаточный член формулы Тейлора.** Пусть функция  $f(x)$  бесконечно дифференцируема в точке  $x_0$ . Тогда ей можно поставить в соответствие ряд (1). Обозначим

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad (5)$$

$$r_n(x) = f(x) - S_n(x) \quad (6)$$

и назовем  $r_n(x)$  *остаточным членом формулы Тейлора для функции  $f$  в точке  $x_0$*  (см. § 18). Если существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0, \quad (7)$$

то согласно определению сходимости ряда ряд (1) сходится к функции  $f(x)$  в точке  $x$ , т. е.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \quad (8)$$

**Теорема 1.** Если функции  $f(x)$ ,  $f'(x)$ , ...,  $f^{(n+1)}(x)$  непрерывны на интервале  $\Delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , где  $\delta > 0$ , то для любого  $x \in \Delta$  остаточный член формулы Тейлора для функции  $f$  в точке  $x_0$  можно представить:

а) в интегральной форме

$$r_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt; \quad (9)$$

б) в форме Лагранжа

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad (10)$$

где  $\xi$  принадлежит интервалу с концами  $x_0$  и  $x$ .

○ Формула (10) была доказана в § 18. Докажем формулу (9) методом индукции. В силу равенств (5) и (6) нужно показать, что

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt. \quad (11)$$

Воспользуемся равенством  $\int_{x_0}^x f'(t) dt = f(x) - f(x_0)$  и преобразуем его левую часть с помощью формулы интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x f'(t) dt &= - \int_{x_0}^x f'(t) d(x-t) = [-f'(x)(x-t)] \Big|_{t=x_0}^{t=x} + \int_{x_0}^x (x-t)f''(t) dt = \\ &= f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^x (x-t)f''(t) dt. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^x (x-t)f''(t) dt,$$

т. е. формула (11) верна при  $n = 1$ . Предположим, что формула (11) является верной для номера  $n - 1$ , т. е.

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt. \quad (12)$$

Преобразуем интеграл в правой части формулы (12), применив формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt &= -\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n)}(t) d((x-t)^n) = \\ &= \left( -\frac{1}{n!} f^{(n)}(t)(x-t)^n \right) \Big|_{t=x_0}^{t=x} + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt = \\ &= \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что равенство (12) можно записать в виде (11). Формула (9) доказана. ●

**Теорема 2.** Если функция  $f$  и все ее производные ограничены в совокупности на интервале  $\Delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , т. е.

$$\exists M > 0: \forall x \in \Delta \rightarrow |f^{(n)}(x)| \leq M, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (13)$$

то функция  $f$  представляется сходящимся к ней в каждой точке интервала  $\Delta$  рядом Тейлора (8).

○ Пусть  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ . Тогда, используя формулу (10) и условие (13), получаем

$$|r_n(x)| \leq M \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (14)$$

Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$  для любого  $a > 0$  (§ 40, пример 4, а), то из (14) следует, что выполняется условие (7), т. е. в точке  $x$  справедливо равенство (8). ●

Упражнение. Доказать, что теорема 2 остается в силе, если условие (13) заменить следующим условием:

$$\exists M > 0 \quad \exists C > 0: \forall x \in \Delta \rightarrow |f^{(n)}(x)| \leq MC^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

**3. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора.** Найдем разложение основных элементарных функций в ряд Тейлора в окрестности точки  $x_0 = 0$ , т. е. в ряд вида

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \quad (15)$$

который называют *рядом Маклорена*. Заметим, что коэффициенты  $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$  разложения (15) для основных элементарных функций (показательной, гиперболических, тригонометрических и других) были найдены в § 18.

а) *Показательная и гиперболические функции.* Пусть  $f(x) = e^x$ . Тогда для любого  $x \in (-\rho, \rho)$ , где  $\rho > 0$ , выполняются неравенства

$$0 < f(x) < e^\rho, \quad 0 < f^{(n)}(x) < e^\rho, \quad n \in \mathbb{N}.$$

По теореме 2 ряд (15) для функции  $f(x) = e^x$  сходится к этой функции на интервале  $(-\rho, \rho)$  при любом  $\rho > 0$ , т. е. радиус сходимости этого ряда  $R = +\infty$ . Так как для функции  $f(x) = e^x$  выполняются равенства  $f(0) = 1$ ,  $f^{(n)}(0) = 1$  для любого  $n$ , то по формуле (15) получаем разложение в ряд Маклорена показательной функции

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (16)$$

Используя разложение (16) и формулы

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

находим разложения в ряд Маклорена гиперболического косинуса и гиперболического синуса:

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad (17)$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (18)$$

Радиус сходимости каждого из рядов (17), (18)  $R = +\infty$ .

б) *Тригонометрические функции.* Пусть  $f(x) = \sin x$ . Тогда  $|f(x)| \leq 1$  и  $|f^{(n)}(x)| \leq 1$  для всех  $n \in \mathbb{N}$  и для всех  $x \in \mathbb{R}$ . По теореме 2 ряд (15) для функции  $f(x) = \sin x$  сходится для любого  $x \in (-\infty, +\infty)$ , т. е. радиус сходимости этого ряда  $R = +\infty$ .

Если  $f(x) = \sin x$ , то  $f(0) = 0$ ,  $f^{(2n)}(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$ ,  $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$  для любого  $n$ , и по формуле (15) получаем разложение синуса в ряд Маклорена:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \quad (19)$$

Пусть  $f(x) = \cos x$ . Тогда  $|f(x)| \leq 1$ ,  $|f^{(n)}(x)| \leq 1$  для всех  $n$  и для всех  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 0$ ,  $f^{(2n)}(0) = (-1)^n$ ,  $f^{(2n+1)}(0) = 0$  для всех  $n$ . По формуле (15) получаем

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}. \quad (20)$$

Радиус сходимости каждого из рядов (19) и (20)  $R = +\infty$ .

в) *Логарифмическая функция.* Пусть  $f(x) = \ln(1+x)$ . Тогда

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad (21)$$

откуда находим

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}. \quad (22)$$

○ Оценим остаточный член  $r_n(x)$ , пользуясь формулой (9) при  $x_0 = 0$ . Преобразуем эту формулу, полагая  $t = \tau x$ . Тогда  $dt = x d\tau$ ,  $1 - x = x(1 - \tau)$  и формула (9) примет вид

$$r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-\tau) f^{(n+1)}(\tau x) d\tau. \quad (23)$$

Если  $f(x) = \ln(1+x)$ , то по формуле (23), используя равенство (21), получаем

$$r_n(x) = (-1)^n x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-\tau)^n}{(1+\tau x)^{n+1}} d\tau. \quad (24)$$

Пусть  $|x| < 1$ . Тогда справедливы неравенства

$$|1 + \tau x| \geq 1 - \tau|x| \geq 1 - \tau, \quad (25)$$

$$|1 + \tau x| \geq 1 - |x|, \quad (26)$$

так как  $0 \leq \tau \leq 1$ . Отсюда следует, что при любом  $n \in \mathbb{N}$  выполняется неравенство

$$|1 + \tau x|^{n+1} \geq (1 - \tau)^n (1 - |x|). \quad (27)$$

Используя неравенство (27), из формулы (24) получаем следующую оценку остаточного члена:

$$|r_n(x)| \leq |x|^{n+1} \int_0^1 \frac{d\tau}{1-|\tau x|} = \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|},$$

откуда следует, что  $r_n(x) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , если  $|x| < 1$ .

Пусть  $x = 1$ . Тогда  $1 + \tau x = 1 + \tau$ ,  $(1 + \tau)^{n+1} \geq 1$ ,  $1 - \tau \geq 0$ , так как  $0 \leq \tau \leq 1$ . Поэтому из формулы (24) следует, что  $|r_n(1)| \leq \int_0^1 (1 - \tau)^n d\tau = \frac{1}{n+1}$ , откуда получаем:  $r_n(1) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Итак, если  $x \in (-1, 1]$ , то остаточный член  $r_n(x)$  для функции  $f(x) = \ln(1+x)$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , т. е. ряд Маклорена сходится к  $f(x)$ . ●

Из формул (15) и (22) получаем разложение функции  $\ln(1+x)$  в ряд Маклорена

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad (28)$$

радиус сходимости которого  $R = 1$ .

Формула (28) справедлива при  $x = 1$ , и поэтому

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots$$

Заменяя в формуле (28)  $x$  на  $-x$ , получаем

$$\ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}. \quad (29)$$

г) *Степенная функция.* Пусть  $f(x) = (1+x)^\alpha$ . Если  $\alpha = 0$ , то  $f(x) = 1$ , а если  $\alpha = n$ , где  $n \in \mathbf{N}$ , то  $f(x)$  — многочлен степени  $n$ , который можно записать по формуле бинома Ньютона в виде конечной суммы:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k.$$

Покажем, что если  $\alpha \notin \mathbf{N}$  и  $\alpha \neq 0$ , то функция  $f(x) = (1+x)^\alpha$  представляется при каждом  $x \in (-1, 1)$  сходящимся к ней рядом Маклорена

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n, \quad (30)$$

где

$$C_\alpha^0 = 1, \quad C_\alpha^n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}. \quad (31)$$

○ Так как

$$f^{(n+1)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-(n+1)}, \quad (32)$$

то по формуле (23) получаем

$$r_n(x) = A_n x^{n+1} \int_0^1 \left( \frac{1-\tau}{1+\tau x} \right)^n (1+\tau x)^{\alpha-1} d\tau, \quad (33)$$

где

$$A_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}.$$

Выберем число  $m \in \mathbf{N}$  таким, чтобы выполнялось условие  $|\alpha| \leq m$ . Тогда при всех  $n \geq m$  справедливы неравенства

$$|A_n| \leq \frac{m(m+1)\dots(m+n)}{n!} \leq \frac{(m+n)!}{n!} = (n+1)\dots(n+m) \leq (2n)^m. \quad (34)$$

Используя неравенства (25) и (26), а также неравенство  $|1+\tau x| \leq 1+|x|$ , получаем

$$0 \leq \frac{1-\tau}{1+x\tau} \leq 1, \quad (35)$$

$$|1+\tau x|^{\alpha-1} \leq \beta(x) = \begin{cases} (1+|x|)^{\alpha-1}, & \text{если } \alpha \geq 1, \\ (1-|x|)^{\alpha-1}, & \text{если } \alpha < 1, \end{cases} \quad (36)$$

Из формулы (33) и оценок (34)–(36) следует неравенство

$$|r_n(x)| \leq \beta(x) 2^m n^m |x|^{n+1}, \quad (37)$$

которое справедливо при всех  $n \geq m$  и для каждого  $x \in (-1, 1)$ .

Так как  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^m}{a^t} = 0$  при  $a > 1$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^m}{(1/|x|)^{n+1}} = 0$ . Поэтому из соотношения (37) следует, что  $r_n(x) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  для каждого  $x \in (-1, 1)$ , т. е. справедливо равенство (30), причем радиус сходимости ряда (30) в случае, когда  $\alpha \neq 0$  и  $\alpha \notin \mathbf{N}$ , равен 1. ●

Отметим важные частные случаи формулы (30):

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad (38)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n. \quad (39)$$

В заключение заметим, что при разложении функций в ряд Тейлора обычно используют формулы (16)–(20), (28)–(30) и применяют такие приемы, как: представление данной функции в виде линейной комбинации функций, ряды Тейлора для которых известны; замена переменного; почленное дифференцирование и интегрирование ряда.

**Пример 1.** Разложить в ряд Маклорена функцию  $f(x)$  и найти радиус сходимости  $R$  ряда, если:

$$\text{а) } f(x) = \frac{1}{1+x^2}; \quad \text{б) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \quad \text{в) } f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-6}.$$



Δ а) Используя формулу (38), получаем ряд

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad (40)$$

радиус сходимости которого  $R = 1$ .

б) Из равенства (30) следует, что  $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{-1/2}^n x^{2n}$ , где

$$\begin{aligned} C_{-1/2}^n &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!} = \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n n!} = \\ &= \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n}, \quad R = 1. \quad (41)$$

в) Так как  $f(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3} = \frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{3\left(1-\frac{x}{3}\right)}$ , то, применяя формулы (38) и (39), получаем ряд

$$\frac{2x-1}{x^2-x-6} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) x^n, \quad R = 2. \quad \blacktriangle$$

Пример 2. Разложить в ряд Маклорена функции  $\operatorname{arctg} x$ ,  $\arcsin x$ ,  $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$  и найти радиусы сходимости  $R$  рядов.

Δ а) Почленно интегрируя ряд (40), получаем

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad R = 1.$$

б) Заменяя в формуле (41)  $x^2$  на  $-x^2$ , получаем

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n}, \quad R = 1,$$

откуда следует, что

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n! (2n+1)} x^{2n+1}, \quad R = 1.$$

в) Почленно интегрируя ряд (41), получаем

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n! (2n+1)} x^{2n+1}, \quad R = 1. \quad \blacktriangle$$

Пример 3. Разложить в ряд Тейлора в точке  $x_0 = 2$  функцию  $f(x) = \ln(4 + 3x - x^2)$ .

△ Так как  $4 + 3x - x^2 = -(x - 4)(x + 1)$ , то, полагая  $t = x - 2$ , получаем

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(4 - x)(x + 1) = \\ &= g(t) = \ln(2 - t)(3 + t) = \ln 6 + \ln\left(1 - \frac{t}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{t}{3}\right). \end{aligned}$$

Используя формулы (28) и (29), отсюда находим

$$g(t) = \ln 6 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}t^n}{n3^n}, \quad |t| < 2.$$

Следовательно,

$$\ln(4 + 3x - x^2) = \ln 6 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{n-1}}{3^n} - \frac{1}{2^n} \right) \frac{(x-2)^n}{n}, \quad R = 2. \quad \blacktriangle$$

**4. Элементарные функции комплексного переменного.** Показательная, гиперболические и тригонометрические функции комплексного переменного  $z$  определяются соответственно формулами

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad (42)$$

$$\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad (43)$$

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (44)$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad (45)$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (46)$$

Радиус сходимости  $R$  каждого из рядов (42)–(46) равен  $+\infty$ . Заменяя в равенстве (42)  $z$  на  $iz$  и  $-iz$ , получаем

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!}, \quad e^{-iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i^n z^n}{n!}. \quad (47)$$

Используя равенства (47) и формулы (45), (46), находим

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z, \quad \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z, \quad (48)$$

откуда следует, что

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \quad (49)$$

Полагая в формуле (42)  $z = z_1$  и  $z = z_2$  и перемножая соответствующие ряды, можно показать, что

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}. \quad (50)$$

Пусть  $z = x + iy$ , где  $x \in R$ ,  $y \in R$ . Тогда из равенства (50) и формулы (49) находим

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (51)$$

Из формулы (51) следует, что

$$e^{z+2\pi i} = e^z,$$

т. е.  $e^z$  — периодическая функция с периодом  $2\pi i$ . Поэтому для каждого комплексного  $z \neq 0$  уравнение

$$e^w = z \quad (52)$$

имеет бесконечное множество решений вида  $w + i2\pi n$ , где  $w$  — одно из решений уравнения (52),  $n \in Z$ .

Если  $w = u + iv$ , то  $z = e^w = e^u (\cos v + i \sin v)$ , откуда получаем

$$|z| = e^u, \quad u = \ln |z|, \quad v = \arg z.$$

Пусть  $\varphi$  — какое-нибудь значение аргумента числа  $z$ . Тогда

$$v = \varphi + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

Таким образом, все решения уравнения (52), если их обозначить символом  $\text{Ln } z$ , задаются формулой

$$\text{Ln } z = \ln |z| + i(\varphi + 2\pi n), \quad (53)$$

где  $\varphi$  — одно из значений аргумента числа  $z$  ( $z \neq 0$ ),  $n \in Z$ .

По заданному значению  $z$  значение  $w$  из уравнения (52) определяется, согласно формуле (53), неоднозначно (говорят, что логарифмическая функция  $\text{Ln } z$  является многозначной).

**Пример 4.** Разложить в степенной ряд в окрестности точки  $z = 0$  функцию  $f(z) = e^z \sin z$ .

$\Delta$  Используя формулы (48) и (50), получаем

$$f(z) = e^z \left( \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right) = \frac{1}{2i} (e^{z(1+i)} - e^{z(1-i)}).$$

Так как  $1 + i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$ ,  $1 - i = \sqrt{2} e^{-i\pi/4}$ , то по формуле (42) находим

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2}}{n!} \left( \frac{e^{i\pi n/4} - e^{-i\pi n/4}}{2i} \right) z^n,$$

откуда в силу второго из равенств (48) следует, что

$$e^z \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2}}{n!} \sin \frac{\pi n}{4} z^n.$$

Радиус сходимости ряда  $R = +\infty$ . ▲

### УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ IX

1. Доказать, что если функции  $u_n(x)$  непрерывны на отрезке  $[a, b]$ , а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  сходится равномерно на промежутке  $[a, b]$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(b)$  сходится.

2. Доказать, что если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  сходится равномерно на множестве  $E$ , а функция  $\varphi(x)$  ограничена на  $E$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x)u_n(x)$  сходится равномерно на множестве  $E$ .

3. Пусть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(x)$  сходится на множестве  $E$ , а его сумма  $S(x)$  такова, что  $\sup_{x \in E} S(x) = M$ , где  $M \neq +\infty$ . Доказать, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x)$  сходится равномерно на множестве  $E$ , если сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ .

4. Пусть функция  $f(x)$  имеет непрерывную производную на интервале  $(a, b)$  и пусть  $f_n(x) = n \left( f \left( x + \frac{1}{n} \right) - f(x) \right)$ . Доказать, что последовательность  $\{f_n(x)\}$  сходится равномерно к  $f'(x)$  на отрезке  $[a_1, b_1] \subset (a, b)$ .

5. Доказать, что если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}(x) - a_n(x)|$  сходится равномерно на множестве  $E$ ,  $\sup_{x \in E} |a_n(x)| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , а последовательность  $\left\{ \sum_{k=1}^n b_k(x) \right\}$  равномерно ограничена на  $E$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$  сходится равномерно на множестве  $E$ .

6. Пусть радиус сходимости степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  равен  $R$ . Найти радиус сходимости степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ , если:

а)  $b_n = a_n^k, \quad k \in \mathbb{N};$       б)  $b_n = \frac{a_n}{1 + |a_n|}.$

7. Доказать, что если ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  сходится и его сумма равна  $S$ , то существует

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S.$$

ГЛАВА X  
КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 45. Мера Жордана в  $R^n$

**1. Клеточное множество в  $R^n$ .** Множества  $A$  и  $B$  называют *непересекающимися*, если  $A \cap B = \emptyset$ . Говорят, что множества  $A_1, \dots, A_n$  *попарно не пересекаются*, если для любых  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  множества  $A_i$  и  $A_j$  непересекающиеся. Совокупность множеств  $\{A_1, \dots, A_n\}$  будем называть *разбиением множества  $A$* , если  $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$  и множества  $A_1, \dots, A_n$  попарно не пересекаются.

Множество

$$\Pi = \{(x_1, \dots, x_n): a_i \leq x_i < b_i, i = \overline{1, n}\} \quad (1)$$

будем называть *клеткой* в  $R^n$ . Пустое множество также считается клеткой.

Полуинтервал  $[a, b)$  является клеткой в  $R$ . Клетками в  $R^2$  и  $R^3$  являются прямоугольники и прямоугольные параллелепипеды, у которых удалены соответствующие стороны или грани.

Множество  $A \in R^n$  будем называть *клеточным*, если оно является объединением конечного числа попарно непересекающихся клеток.

Клеточное множество может быть разбито на клетки бесконечным множеством способов.

**2. Свойства клеточных множеств.**

Свойство 1. *Пересечение двух клеток есть клетка.*

○ Для доказательства достаточно заметить, что пересечение двух полуинтервалов  $[a, b)$  и  $[c, d)$  является либо пустым множеством, либо полуинтервалом такого же вида. ●

Свойство 2. *Объединение конечного числа непересекающихся клеточных множеств является клеточным множеством.*

Свойство 3. *Пересечение двух клеточных множеств есть клеточное множество.*

○ Если клетки  $\Pi_1, \dots, \Pi_p$  образуют разбиение клеточного множества  $A$ , а клетки  $\Pi'_1, \dots, \Pi'_q$  образуют разбиение клеточного множества  $B$ , то клетки  $\Pi_{ij} = \Pi_i \cap \Pi'_j$  при  $i = \overline{1, p}, j = \overline{1, q}$  образуют разбиение множества  $A \cap B$ . ●

Свойство 4. *Разность двух клеток есть клеточное множество.*

○ Если клетка  $R$  является пересечением клеток  $\Pi$  и  $Q$ , то  $\Pi \setminus Q = \Pi \setminus R$  и существует такое разбиение клетки  $\Pi$ , что клетка  $R$  является одной

из клеток разбиения. Для того чтобы в этом убедиться в плоском случае (в  $R^2$ ), достаточно провести через вершины прямоугольника  $R$  прямые, параллельные сторонам  $\Pi$ . Удаляя из разбиения  $\Pi$  клетку  $R$ , получаем, что  $\Pi \setminus R$  — клеточное множество. ●

Свойство 5. *Разность двух клеточных множеств есть клеточное множество.*

○ Пусть клеточное множество  $A$  разбито на клетки  $\Pi_1, \dots, \Pi_p$  и  $Q$  — некоторая клетка. В силу свойства 4 множества  $K_i = \Pi_i \setminus Q$  являются попарно непересекающимися клеточными множествами. Множество  $A \setminus Q$  совпадает с объединением всех  $K_i$  и является клеточным множеством в силу свойства 3. Если клетки  $\Pi'_1, \dots, \Pi'_m$  образуют разбиение клеточного множества  $B$ , то множество  $A \setminus B$  можно получить, последовательно вычитая из  $A$  клетки  $\Pi'_1, \dots, \Pi'_m$ . Так как на каждом шаге этого процесса получается клеточное множество, то и множество  $A \setminus B$ , образуемое за конечное число таких шагов, является клеточным. ●

Свойство 6. *Объединение конечного числа клеточных множеств есть клеточное множество.*

○ Если  $A$  и  $B$  — клеточные множества, то в силу свойств 3 и 5 непересекающиеся множества  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$  и  $A \cap B$  являются клеточными. В силу свойства 2 их объединение, совпадающее с  $A \cup B$ , является клеточным множеством. ●

**3. Мера клеточного множества.** *Мерой  $m(\Pi)$  клетки (1) назовем число*

$$m(\Pi) = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n). \quad (2)$$

Мера пустого множества равна нулю по определению.

В частности, мера полуинтервала равна его длине, мера прямоугольника равна его площади, мера параллелепипеда равна его объему.

Если клетки  $\Pi_1, \dots, \Pi_p$  образуют разбиение клеточного множества  $A$ , то *мерой  $m(A)$  множества  $A$  назовем число*

$$m(A) = \sum_{i=1}^p m(\Pi_i). \quad (3)$$

Корректность определения 3 доказывает следующая лемма.

*Лемма 1. Мера клеточного множества не зависит от способа разбиения этого множества на клетки.*

○ Можно показать, что каким бы способом клетку  $\Pi$  не разбивали на клетки  $\Pi_1, \dots, \Pi_p$ , мера  $\Pi$  как клеточного множества всегда равна мере клетки  $\Pi$ , определяемой формулой (2). Для разбиений клетки, порождаемых одномерными разбиениями всех полуинтервалов  $[a_i, b_i]$  в (1), это утверждение доказывается прямым подсчетом. В общем случае можно сделать дополнительные разбиения.

Пусть клетки  $\Pi_1, \dots, \Pi_p$  и  $\Pi'_1, \dots, \Pi'_q$  образуют два различных разбиения клеточного множества  $A$  и пусть  $\Pi_{ij} = \Pi_i \cap \Pi'_j$ . Так как  $\Pi_i =$

$$= \bigcup_{j=1}^q \Pi'_{ij}, \quad \Pi'_j = \bigcup_{i=1}^p \Pi_{ij}, \quad \text{то}$$

$$\sum_{i=1}^p m(\Pi_i) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q m(\Pi_{ij}) = \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^p m(\Pi_{ij}) = \sum_{j=1}^q m(\Pi'_j),$$

что и доказывает утверждение леммы. ●

#### 4. Свойства меры клеточных множеств.

Свойство 1. Если клеточные множества  $A_1, \dots, A_p$  попарно не пересекаются, то

$$m\left(\bigcup_{i=1}^p A_i\right) = \sum_{i=1}^p m(A_i). \quad (4)$$

Свойство 2. Если  $A$  и  $B$  — клеточные множества и  $A \subset B$ , то

$$m(B) = m(A) + m(B \setminus A), \quad m(A) \leq m(B). \quad (5)$$

○ Так как клеточные множества  $A$  и  $B \setminus A$  не пересекаются и  $B = A \cup (B \setminus A)$ , то в силу свойства 1 справедливо равенство (5). ●

Свойство 3. Если  $A_1, \dots, A_p$  — клеточные множества, то

$$m\left(\bigcup_{i=1}^p A_i\right) \leq \sum_{i=1}^p m(A_i). \quad (6)$$

○ Достаточно доказать равенство (6) для  $p=2$ , так как общий случай доказывается по индукции. Замечая, что  $A_1 \subset A_1 \cup A_2 = B$  и  $B \setminus A_1 \subset A_2$ , в силу (5) получаем, что

$$m(A_1 \cup A_2) = m(B) = m(A_1) + m(B \setminus A_1) \leq m(A_1) + m(A_2). \quad \bullet$$

Свойство 4. Для любого клеточного множества  $A$  и любого  $\varepsilon > 0$  существует такое клеточное множество  $A_\varepsilon$ , что  $A_\varepsilon \subset \bar{A}_\varepsilon \subset A^0 \subset A$ , где  $\bar{A}_\varepsilon$  — замыкание множества  $A_\varepsilon$ ,  $A^0$  — внутренность множества  $A$  (совокупность всех внутренних точек множества  $A$ ).

○ Достаточно доказать свойство 4 для одной клетки  $\Pi$ . Из определения (1) клетки следует, что точка  $(x_1, \dots, x_n)$  принадлежит границе клетки, если существует такое значение индекса  $i$ , что выполнено равенство  $x_i = a_i$  или  $x_i = b_i$ . Сдвигая левые концы полуинтервалов  $[a_i, b_i]$  вправо, а правые влево, можно построить клетку  $\Pi_\varepsilon$ , не содержащую граничных точек  $\Pi$  и отличающуюся от  $\Pi$  по мере меньше, чем на  $\varepsilon$ . ●

#### 5. Множества, измеримые по Жордану. Мера Жордана.

Множество  $\Omega \subset R^n$  называется измеримым по Жордану, если для любого  $\varepsilon > 0$  найдутся два клеточных множества  $A$  и  $B$  такие, что  $A \subset \Omega \subset B$  и  $m(B) - m(A) < \varepsilon$ .

Если  $\Omega$  — измеримое по Жордану множество, то его *мерой*  $m(\Omega)$  называется такое число, что для любых двух клеточных множеств  $A$  и  $B$ , удовлетворяющих условию  $A \subset \Omega \subset B$ , выполнено неравенство  $m(A) \leq m(\Omega) \leq m(B)$ .

**Лемма 2.** *Определение меры измеримого по Жордану множества  $\Omega$  корректно: число  $m(\Omega)$  существует и единственно, причем*

$$m(\Omega) = \sup_{A \subset \Omega} m(A) = \inf_{B \supset \Omega} m(B).$$

○ Пусть  $A$  и  $B$  произвольные клеточные множества такие, что  $A \subset \Omega \subset B$ . Тогда  $m(A) \leq m(B)$  (свойство 2, п. 4). Существует число  $\gamma$ , разделяющее числовые множества  $\{m(A)\}$  и  $\{m(B)\}$ , порождаемые клеточными множествами  $A \subset \Omega$  и клеточными множествами  $B \supset \Omega$  (§ 2, теорема 2), т. е.

$$m(A) \leq \sup_{A \subset \Omega} m(A) \leq \gamma \leq \inf_{B \supset \Omega} m(B) \leq m(B).$$

Из определения меры множества  $\Omega$  следует, что в качестве  $m(\Omega)$  можно взять число  $\gamma$ . Существование числа  $m(\Omega)$  доказано. Докажем его единственность. Пусть есть два числа  $\alpha$  и  $\beta$  таких, что для любых клеточных множеств  $A$  и  $B$  из  $A \subset \Omega \subset B$  следует

$$m(A) \leq \alpha \leq \beta \leq m(B). \quad (7)$$

Так как множество  $\Omega$  измеримо по Жордану, то для любого  $\varepsilon > 0$  найдутся клеточные множества  $A_\varepsilon$  и  $B_\varepsilon$  такие, что

$$A_\varepsilon \subset \Omega \subset B_\varepsilon, \quad m(B_\varepsilon) - m(A_\varepsilon) < \varepsilon. \quad (8)$$

Из (7) и (8) тогда следует, что

$$0 \leq \beta - \alpha \leq m(B_\varepsilon) - m(A_\varepsilon) < \varepsilon.$$

В силу произвольности  $\varepsilon$  имеем  $\alpha = \beta$ . ●

### 6. Свойства множества жордановой меры нуль.

**Свойство 1.** *Если  $E \subset R^n$  и для любого  $\varepsilon > 0$  найдется клеточное множество  $B = B_\varepsilon$  такое, что  $E \subset B$  и  $mB < \varepsilon$ , то  $mE = 0$ .*

○ Пусть  $A = \emptyset$ ; тогда  $A \subset E \subset B$ ,  $mB - mA = mB < \varepsilon$ . Следовательно,  $E$  — измеримое множество и  $mE = 0$ , так как  $\varepsilon$  — произвольное положительное число. ●

**Замечание.** Множество, удовлетворяющее условиям, указанным в свойстве 1, будем называть *множеством меры нуль*.

**Свойство 2.** *Объединение двух множеств (конечного числа множеств) меры нуль есть множество меры нуль.*

○ Если  $m(E_1) = m(E_2) = 0$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  найдутся клеточные множества  $B_1$  и  $B_2$  такие, что

$$E_1 \subset B_1, \quad E_2 \subset B_2, \quad m(B_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad m(B_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$



Тогда  $B = B_1 \cup B_2$  есть клеточное множество и

$$E_1 \cup E_2 \subset B_1 \cup B_2, \quad m(B) \leq m(B_1) + m(B_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно,  $m(E_1 \cup E_2) = 0$ . ●

*Свойство 3. Подмножество множества меры нуль есть множество меры нуль.*

○ Пусть  $E' \subset E$  и  $E$  — множество меры нуль. Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое клеточное множество  $A$ , что  $E' \subset E \subset A$  и  $m(A) < \varepsilon$ . В силу свойства 1 множество  $E'$  имеет меру нуль. ●

Сформулируем вспомогательную лемму геометрического характера.

*Лемма 3. Если связное множество  $A \subset R^n$  не имеет общих точек с границей множества  $B \subset R^n$ , то  $A$  лежит либо внутри  $B$ , либо внутри его дополнения.*

○ Опуская подробное доказательство этой интуитивно очевидной леммы, поясним его идею. Предполагая противное, получаем, что существуют точки  $a$  и  $b$  множества  $A$  такие, что  $a$  принадлежит внутренности  $B$ ,  $b$  принадлежит внутренности дополнения  $B$ . Пользуясь связностью множества  $A$ , соединим эти точки кривой  $\Gamma$ , лежащей в множестве  $A$ . Точки кривой можно разбить на два класса. Точка  $c$  принадлежит первому классу, если дуга кривой  $\Gamma$  с концами  $a$  и  $c$  лежит в множестве  $B$ . Все остальные точки кривой  $\Gamma$  отнесем ко второму классу. На кривой  $\Gamma$  существует точка, разделяющая эти два непустых класса, что следует из теоремы об отделимости (§ 2, теорема 2). Нетрудно показать, что эта точка не может лежать ни во внутренности множества  $B$ , ни во внутренности его дополнения и, следовательно, является граничной точкой  $B$ . Так как эта точка одновременно принадлежит и множеству  $A$ , то получаем противоречие с условием леммы. ●

*Теорема 1 (критерий измеримости множества в  $R^n$ ). Для того чтобы множество  $\Omega \subset R^n$  было измеримым по Жордану, необходимо и достаточно чтобы оно было ограниченным, а его граница  $\partial\Omega$  имела жорданову меру нуль.*

○ Необходимость. Из измеримости  $\Omega$  следует, что для любого  $\varepsilon > 0$  найдутся такие клеточные множества  $A$  и  $B$ , что  $A \subset \Omega \subset B$  и  $m(B) - m(A) < \varepsilon$ . В силу свойства 4 меры клеточных множеств (п. 4) без ограничения общности можно считать, что множество  $A$  не содержит граничных точек множества  $\Omega$ , а множество  $B$  содержит все граничные точки  $\Omega$ . Клеточное множество  $B \setminus A$  содержит  $\partial\Omega$ , и мера его меньше  $\varepsilon$ . В силу свойства 1 множество  $\partial\Omega$  имеет жорданову меру нуль.

*Достаточность.* Пусть  $m(\partial\Omega) = 0$  и  $\Omega$  — ограниченное множество в  $R^n$ . Заклучим множество  $\Omega$  в клетку  $\Pi$ . Возьмем произвольное  $\varepsilon > 0$  и построим клеточное множество  $C$  такое, что  $\partial\Omega \subset C$

и  $m(C) < \varepsilon$ . Тогда  $\Pi \setminus C$  — клеточное множество, не содержащее граничных точек множества  $\Omega$ . Пусть  $\Pi \setminus C = \bigcup_{i=1}^N \Pi_i$ . Так как клетка  $\Pi_i$  не содержит граничных точек множества  $\Omega$ , то в силу леммы 3 либо  $\Pi_i \cap \Omega = \emptyset$ , либо  $\Pi_i \subset \Omega$ . Занумеруем клетки  $\Pi_i$  в таком порядке, что  $\Pi_1, \dots, \Pi_l \subset \Omega$ , а  $\Pi_{l+1}, \dots, \Pi_N$  имеют с  $\Omega$  пустое пересечение. Пусть  $A = \bigcup_{i=1}^l \Pi_i$  и  $B = A \cup C = \Pi \setminus \left( \bigcup_{i=l+1}^N \Pi_i \right)$ . Тогда  $A \subset \Omega \subset B$  и  $m(B) - m(A) = m(C) < \varepsilon$ . Следовательно, множество  $\Omega$  измеримо по Жордану. ●

### 7. Свойства множеств, измеримых по Жордану.

Свойство 1. Если множества  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  измеримы по Жордану, то  $\Omega_1 \cap \Omega_2$ ,  $\Omega_1 \setminus \Omega_2$  и  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  измеримы по Жордану.

○ Измеримые по Жордану множества  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  ограничены и в силу теоремы 1  $m(\partial\Omega_1) = m(\partial\Omega_2) = 0$ , поэтому и  $m(\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2) = 0$ . Но

$$\begin{aligned} \partial(\Omega_1 \cap \Omega_2) &\subset \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2, & \partial(\Omega_1 \setminus \Omega_2) &\subset \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2, \\ \partial(\Omega_1 \cup \Omega_2) &\subset \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2. \end{aligned}$$

Поэтому

$$m(\partial(\Omega_1 \cap \Omega_2)) = m(\partial(\Omega_1 \setminus \Omega_2)) = m(\partial(\Omega_1 \cup \Omega_2)) = 0.$$

В силу теоремы 1 множества  $\Omega_1 \cap \Omega_2$ ,  $\Omega_1 \setminus \Omega_2$ ,  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  измеримы по Жордану. ●

Свойство 2. Если множества  $\Omega_i$  при  $i = \overline{1, n}$  измеримы по Жордану, то и множество  $\bigcup_{i=1}^n \Omega_i$  измеримо по Жордану и

$$m\left(\bigcup_{i=1}^n \Omega_i\right) \leq \sum_{i=1}^n m(\Omega_i). \quad (9)$$

Если множества  $\Omega_1, \dots, \Omega_n$  попарно не пересекаются, то

$$m\left(\bigcup_{i=1}^n \Omega_i\right) = \sum_{i=1}^n m(\Omega_i). \quad (10)$$

○ Рассмотрим случай  $n = 2$ . Если  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  — измеримые по Жордану множества, то в силу свойства 1 множество  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  измеримо по Жордану. Из леммы 2 следует, что для любого  $\varepsilon > 0$  найдутся клеточные множества  $B_1$  и  $B_2$  такие, что

$$\Omega_1 \subset B_1, \quad \Omega_2 \subset B_2, \quad m(\Omega_1) > m(B_1) - \frac{\varepsilon}{2}, \quad m(\Omega_2) > m(B_2) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда  $B_1 \cup B_2$  есть клеточное множество, содержащее множество  $\Omega_1 \cup \Omega_2$ . Используя свойство 3 клеточных множеств (п. 4), получаем, что

$$m(\Omega_1 \cup \Omega_2) \leq m(B_1 \cup B_2) \leq m(B_1) + m(B_2) < m(\Omega_1) + m(\Omega_2) + \varepsilon.$$

Так как  $\varepsilon > 0$  произвольно, то

$$m(\Omega_1 \cup \Omega_2) \leq m(\Omega_1) + m(\Omega_2). \quad (11)$$

Пусть  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ . В силу леммы 2 найдутся клеточные множества  $A_1$  и  $A_2$  такие, что

$$A_1 \subset \Omega_1, \quad m(A_1) > m(\Omega_1) - \frac{\varepsilon}{2}, \quad A_2 \subset \Omega_2, \quad m(A_2) > m(\Omega_2) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда  $A_1 \cup A_2$  есть клеточное множество, содержащееся в множестве  $\Omega_1 \cup \Omega_2$ . Так как множества  $A_1$  и  $A_2$  не пересекаются, то

$$m(\Omega_1 \cup \Omega_2) \geq m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2) > m(\Omega_1) + m(\Omega_2) - \varepsilon.$$

В силу произвольности  $\varepsilon$  отсюда следует, что

$$m(\Omega_1 \cup \Omega_2) \geq m(\Omega_1) + m(\Omega_2). \quad (12)$$

Из (11) и (12) заключаем, что при  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$  должно быть выполнено равенство  $m(\Omega_1 \cup \Omega_2) = m(\Omega_1) + m(\Omega_2)$ .

Применяя метод математической индукции, из неравенства (11) легко вывести справедливость неравенства (9) для любого  $n \in \mathcal{N}$ . При помощи аналогичных рассуждений из справедливости равенства (10) для  $n = 2$  выводится справедливость этого равенства для любого  $n \in \mathcal{N}$ . ●

Говорят, что равенство (10) выражает свойство конечной аддитивности меры Жордана.

**У п р а ж н е н и е 1.** Доказать, что множество всех рациональных точек отрезка  $[0, 1]$  неизмеримо по Жордану в  $R$ .

**У п р а ж н е н и е 2.** Пусть  $Q$  — измеримое по Жордану множество в  $R^n$ , а  $T_h$  — преобразование подобия

$$T_h x = (hx_1, hx_2, \dots, hx_n), \quad x \in R^n, \quad h > 0.$$

Доказать, что  $m(T_h \Omega) = h^n m(\Omega)$ .

**У к а з а н и е.** Воспользоваться тем, что при преобразовании подобия мера каждой клетки изменится в  $h^n$  раз.

**У п р а ж н е н и е 3.** Показать, что спрямляемая кривая на плоскости имеет жорданову меру нуль.

**У к а з а н и е.** Точками  $P_0, \dots, P_n$  разбить кривую на дуги равной длины  $S/n$ , где  $S$  — длина кривой. В каждой из точек  $P_i$  взять квадрат со стороной  $2S/n$ . Оценить сумму площадей всех квадратов.

## § 46. Определение и свойства кратного интеграла Римана

**1. Разбиения.** Пусть множество  $G$  измеримо по Жордану в  $R^n$ . Совокупность измеримых по Жордану в  $R^n$  и попарно непересекающихся множеств  $G_1, \dots, G_N$  называется *разбиением*  $G$ , если  $G = \bigcup_{i=1}^N G_i$ .

Разбиение будем обозначать буквой  $T$ .

Пусть  $d(G_i)$  есть диаметр множества  $G_i$ , т. е.

$$d(G_i) = \sup_{x \in G_i, y \in G_i} \rho(x, y).$$

Число  $l(T) = \max_{i=1, \overline{N}} d(G_i)$  будем называть *мелкостью разбиения*  $T$ .

Разбиение  $T = \{G_i\}, i = \overline{1, \overline{N}}$ , будем называть *продолжением разбиения*  $T' = \{G'_i\}, i = \overline{1, \overline{N}}$ , и писать  $T \prec T'$ , если каждое из множеств  $G_i$  является подмножеством некоторого множества  $G'_k$ . Очевидно, что из  $T \prec T'$  следует, что  $l(T) \leq l(T')$ .

**2. Интегральные суммы Римана. Суммы Дарбу.** Пусть функция  $f(x)$  определена на измеримом по Жордану множестве  $G$ , а  $T$  есть разбиение множества  $G$ :  $T = \{G_i\}, i = \overline{1, \overline{N}}$ . Возьмем в каждом из множеств  $G_i$  по точке  $\xi_i$ . Выражение

$$\sigma_T(f, \xi, G) = \sum_{i=1}^N f(\xi_i) m(G_i)$$

называется *интегральной суммой Римана* функции  $f(x)$  на множестве  $G$ , соответствующей разбиению  $T$  и выборке  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ . Иногда для краткости будем обозначать сумму Римана просто через  $\sigma_T$ .

Если функция  $f(x)$  ограничена на множестве  $G$ , то для любого разбиения  $T = \{G_i\}, i = \overline{1, \overline{N}}$ , определены числа

$$m_i = \inf_{x \in G_i} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in G_i} f(x).$$

Выражения

$$S_T = \sum_{i=1}^N M_i m(G_i), \quad s_T = \sum_{i=1}^N m_i m(G_i) \quad (1)$$

называются *верхней и нижней суммами Дарбу*, соответствующими разбиению  $T$ .

### 3. Интеграл Римана как предел интегральной суммы.

Определение. Число  $I$  называется *пределом интегральной суммы*  $\sigma_T$  при мелкости разбиения  $l(T) \rightarrow 0$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta > 0$  такое, что для любого разбиения  $T$  с мелкостью  $l(T) < \delta$  и для любой выборки выполняется неравенство

$$|I - \sigma_T(f, \xi, G)| < \varepsilon. \quad (2)$$

Если число  $I$  есть предел интегральной суммы при  $l(T) \rightarrow 0$ , то будем писать  $I = \lim_{l(T) \rightarrow 0} \sigma_T$ , само число  $I$  будем называть

*кратным интегралом Римана* от функции  $f(x)$  по множеству  $G$ , а функцию  $f(x)$  — *интегрируемой* на множестве  $G$ . Для краткого интеграла Римана используются следующие обозначения:

$$\int_G f(x) dx, \quad \underbrace{\int \dots \int_G f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n}_{n \text{ раз}}$$

В случае  $n = 2$  интеграл называется *двойным*, а в случае  $n = 3$  — *тройным*. Обозначения для двойного и тройного интеграла:

$$\iint_G f(x, y) dx dy, \quad \iiint_G f(x, y, z) dx dy dz.$$

Упражнение 1. Показать, что неограниченная функция  $f(x, y)$ , равная  $\frac{1}{2-x}$  на множестве  $G_1 = \{(x, y): y = 0, 1 \leq x < 2\}$  и равная нулю на  $R^2 \setminus G_1$ , интегрируема на множестве  $G$ , являющемся объединением круга  $\{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$  и множества  $G_1$ .

Назовем функцию  $f(x)$  *существенно неограниченной* на измеримом по Жордану множестве  $G \subset R^n$ , если она неограниченна на любом подмножестве  $G' \subset G$  таком, что  $m(G \setminus G') = 0$ .

Упражнение 2. Доказать, что существенно неограниченная на измеримом по Жордану множестве  $G$  функция  $f(x)$  не будет интегрируемой на этом множестве.

Указание. См. доказательство теоремы 1, § 34.

В дальнейшем рассматриваются только ограниченные функции.

Теорема 1 (критерий интегрируемости). *Для того чтобы ограниченная функция  $f(x)$  была интегрируема на измеримом по Жордану множестве  $G \subset R^n$ , необходимо и достаточно, чтобы для любого  $\varepsilon > 0$  нашлось такое  $\delta > 0$ , что для любого разбиения  $T$  с мелкостью  $l(T) < \delta$  разность верхней и нижней сумм Дарбу была меньше  $\varepsilon$ , т. е.  $S_T - s_T \rightarrow 0$  при  $l(T) \rightarrow 0$ .*

Доказательство теоремы 1 ничем не отличается от соответствующего доказательства для определенного интеграла (см. § 34).

Справедлива более сильная теорема.

Теорема 2. *Для того чтобы функция  $f(x)$ , ограниченная на измеримом по Жордану множестве  $G \in R^n$ , была интегрируемой на множестве  $G$ , необходимо и достаточно, чтобы для любого  $\varepsilon > 0$  нашлось такое разбиение  $T$  множества  $G$ , что  $S_T - s_T < \varepsilon$ .*

Сформулируем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1. *Если измеримые множества  $G$  и  $\Omega$  принадлежат пространству  $R^n$  и  $m(\Omega) < \varepsilon$ , то найдется число  $\delta > 0$  такое, что для любого разбиения  $T$  множества  $G$  с мелкостью  $l(T) < \delta$  сумма мер множеств  $G_i$ , имеющих с  $\Omega$  непустое пересечение, будет меньше  $4\varepsilon$ .*  
 ○ Поскольку измеримое множество  $\Omega$ , мера которого меньше  $\varepsilon$ , содержится в клеточном множестве, мера которого меньше, чем  $2\varepsilon$ , а клеточное множество состоит из конечного числа клеток, то достаточно доказать лемму для случая, когда множество  $\Omega$  есть клет-

ка  $\Pi$ . Ограничимся случаем клетки в  $R^2$ . Построим для прямоугольника  $\Pi$  рамку (рис. 46.1). Можно так подобрать  $\delta$ , что площадь прямоугольника  $\Pi_\delta$ , получающегося из  $\Pi$  добавлением рамки, не будет превышать  $2\varepsilon$ . Если мелкость разбиения множества  $G$  меньше  $\delta$ , то все элементы разбиения  $G_i$  имеющие непустое пересечение с  $\Pi$ , лежат в прямоугольнике  $\Pi_\delta$ , и, следовательно, сумма их мер не превышает меры  $\Pi_\delta$ . ●

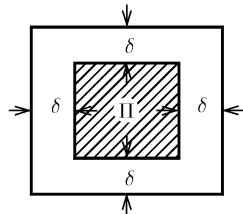


Рис. 46.1

Доказательство следующих двух лемм предоставляем читателю в качестве упражнения.

**Лемма 2.** Если  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  — непересекающиеся замкнутые множества в  $R^n$  и хотя бы одно из этих двух множеств ограничено, то  $\rho(\Omega_1, \Omega_2) > 0$ .

Напомним, что расстояние между двумя множествами равно точной нижней грани расстояний между точками этих двух множеств.

**Лемма 3.** Если  $\rho(\Omega_1, \Omega_2) = \delta > 0$ , множество  $G \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$  и диаметр множества  $G$  меньше  $\delta$ , то либо  $G \subset \Omega_1$ , либо  $G \subset \Omega_2$ .

Заметим, что диаметр множества равен точной верхней грани расстояний между точками этого множества.

Переходим к доказательству теоремы 2.

○ Необходимость следует из теоремы 1.

**Достаточность.** Пусть  $|f(x)| < M$  и пусть для произвольного  $\varepsilon > 0$  нашлось разбиение  $T_0$  множества  $G$ , для которого разность сумм Дарбу меньше  $\varepsilon/2$ . Без ограничения общности можно считать, что  $T_0 = \{G_1^0, \tilde{G}_1^0, \dots, G_p^0, \tilde{G}_p^0\}$ , где множества  $G_i^0$  являются компактами, а сумма мер множеств  $\{\tilde{G}_1^0, \dots, \tilde{G}_p^0\}$  не превышает  $\varepsilon/(8M)$ . Это следует из того, что в каждое измеримое множество можно вложить компакт, сколь угодно мало отличающийся от этого множества по мере (§ 45, свойство 4, п. 4), а при измельчении разбиения разность сумм Дарбу может только уменьшиться. Обозначим объединение множеств  $\tilde{G}_i^0$  через  $A$ . В силу леммы 2 существует число  $\delta > 0$  такое, что расстояние между любыми двумя компактами  $G_i^0$  превышает  $\delta$ . Пусть  $T$  — произвольное разбиение множества  $G$  с мелкостью, не превышающей  $\delta$ . В силу леммы 3 множества, составляющие это разбиение, можно разделить на две группы. Множества, входящие в первую группу, целиком лежат в одном из множеств  $G_i^0$ , а множества, входящие во вторую группу, имеют непустое пересечение со множеством  $A$ . В силу леммы 1 сумма мер множеств второй группы не превышает  $\varepsilon/(2M)$ . Та часть суммы  $S_T - s_T$ , которая соответствует первой группе, не превышает  $\varepsilon/2$ , поскольку при измельчении разбиения разность сумм Дарбу не увеличивается, а часть, соответствующая второй группе, не превышает  $\varepsilon/2$  в силу того, что  $|f(x)| < M$ , и сумма мер множеств

второй группы не превышает  $\varepsilon/(2M)$ . Таким образом,  $S_T - s_T < \varepsilon$  и функция  $f(x)$  интегрируема вследствие теоремы 1. ●

#### 4. Классы интегрируемых функций.

**Теорема 3.** *Непрерывная на измеримом по Жордану компакте функция  $f(x)$  интегрируема на этом компакте.*

Напомним, что компакт в  $R^n$  — это ограниченное и замкнутое множество и что функция  $f(x)$ , непрерывная на компакте, равномерно непрерывна на этом компакте (теорема Кантора).

Доказательство теоремы 3 ничем не отличается от соответствующего доказательства теоремы об интегрируемости функции одной переменной, непрерывной на отрезке. Докажем более общую теорему.

**Теорема 4.** *Пусть функция  $f(x)$  ограничена на измеримом компакте  $G \subset R^n$  и множество ее точек разрыва имеет жорданову меру нуль. Тогда функция  $f(x)$  интегрируема на  $G$ .*

○ Пусть  $E$  есть множество точек разрыва функции  $f(x)$  и  $m(E) = 0$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое открытое измеримое множество  $A$ , что  $E \subset A$  и

$$m(A) < \frac{\varepsilon}{4M}, \quad \text{где } M = \sup_{x \in G} |f(x)|.$$

На замкнутом ограниченном множестве  $G \setminus A$  функция  $f(x)$  непрерывна, а поэтому интегрируема (теорема 3).

Для любого  $\varepsilon > 0$  найдется разбиение  $\{G_2, \dots, G_N\} = T'$  множества  $G \setminus A$  такое, что

$$S_{T'} - s_{T'} = \sum_{k=2}^N (M_k - m_k) m(G_k) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3)$$

Пусть  $G_1 = A \cap G$ . Тогда множества  $\{G_1, G_2, \dots, G_N\}$  образуют разбиение  $T$  множества  $G$ , причем

$$m(G_1) \leq m(A) < \frac{\varepsilon}{4M}. \quad (4)$$

Используя неравенства (3) и (4), получаем

$$S_T - s_T = (M_1 - m_1) m(G_1) + \sum_{k=2}^N (M_k - m_k) m(G_k) < 2M \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Так как  $\varepsilon$  — произвольное положительное число, то вследствие теоремы 2 функция  $f(x)$  интегрируема на множестве  $G$ . ●

**Замечание.** В условиях теоремы 4 можно отказаться от требования, чтобы измеримое множество  $G$  было компактом. Согласно теореме 1 из § 45 измеримое множество  $G$  ограничено и  $m(\partial G) = 0$ . Так как  $G$  и  $\partial G$  — измеримые множества, то замкнутое множество  $\overline{G} = G \cup \partial G$  измеримо по Жордану, т. е.  $\overline{G}$  — измеримый компакт в  $R^n$ . Если доопределить функцию  $f(x)$  нулем на  $\partial G$ , то она останется ограниченной, а множество ее точек

разрыва будет иметь жорданову меру нуль, так как оно содержится во множестве  $E \cup \partial G$  меры нуль. В силу теоремы 4 функция  $f(x)$  интегрируема на множестве  $\overline{G}$ , а следовательно, и на измеримом подмножестве  $G$ .

**5. Свойства кратного интеграла.** Поскольку все перечисленные свойства доказываются так же, как и соответствующие свойства определенного интеграла, то большая часть этих свойств не будет обосновываться подробными доказательствами.

Свойство 1. *Справедливо равенство* 
$$\int_G 1 \cdot dx = m(G).$$

○ Для любого разбиения  $T$  выполнено равенство

$$\sigma_T(1, \xi, G) = \sum_{i=1}^N m(G_i) = m(G). \quad \bullet$$

Свойство 2. *Если  $f(x) > 0$  и  $f(x)$  — интегрируемая на измеримом по Жордану множестве  $G$  функция, то* 
$$\int_G f(x) dx \geq 0.$$

Свойство 3. *Если  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  — интегрируемые на множестве  $G$  функции, а  $\alpha$  и  $\beta$  — произвольные вещественные числа, то и функция  $\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)$  интегрируема на  $G$ , причем*

$$\int_G (\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)) dx = \alpha \int_G f_1(x) dx + \beta \int_G f_2(x) dx.$$

Свойство 4. *Если  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  — интегрируемые на множестве  $G$  функции и  $f_1(x) \leq f_2(x)$  при  $x \in G$ , то*

$$\int_G f_1(x) dx \leq \int_G f_2(x) dx.$$

Свойство 5. *Если функция  $f(x)$  непрерывна на измеримом связном компакте  $G$ , то найдется точка  $\xi \in G$  такая, что*

$$\int_G f(x) dx = f(\xi) m(G). \quad (5)$$

○ Если  $m(G) = 0$ , то равенство (5) очевидно. Пусть  $m(G) > 0$ ,  $\mu = \min_{x \in G} f$ ,  $M = \max_{x \in G} f$ . Тогда  $\mu \leq f(x) \leq M$  при  $x \in G$ ,  $\mu m(G) \leq \int_G f(x) dx \leq M m(G)$ .

Следовательно,

$$\mu \leq \frac{1}{m(G)} \int_G f(x) dx \leq M.$$



Функция, непрерывная на связном множестве и принимающая на нем значения  $\mu$  и  $M$ , принимает и все промежуточные значения, а поэтому существует точка  $\xi \in G$  такая, что

$$f(\xi) = \frac{1}{m(G)} \int_G f(x) dx. \quad \bullet$$

Свойство 6. Если  $\{G_k\}$ ,  $k = \overline{1, m}$ , есть разбиение множества  $G$ , то функция  $f(x)$  интегрируема на множестве  $G$  в том и только том случае, когда она интегрируема на каждом из множеств  $G_k$ , причем

$$\int_G f(x) dx = \sum_{k=1}^m \int_{G_k} f(x) dx. \quad (6)$$

Говорят, что формула (6) выражает свойство конечной аддитивности интеграла по области интегрирования.

Свойство 7. Произведение интегрируемых на измеримом множестве  $G$  функций есть интегрируемая на множестве  $G$  функция.

Свойство 8. Если функция  $f(x)$  интегрируема на измеримом множестве  $G$ , то функция  $|f(x)|$  также интегрируема и

$$\left| \int_G f(x) dx \right| \leq \int_G |f(x)| dx. \quad (7)$$

В дальнейшем будем часто пользоваться свойством кратного интеграла, выраженным в следующей лемме.

Лемма 4. Пусть функция  $f(x)$  ограничена на измеримом по Жордану множестве  $G$ , а  $E$  есть множество жордановой меры нуль. Если для любого разбиения  $T = \{G_k\}$ ,  $k = \overline{1, N}$ , отбрасывать в интегральной сумме  $\sigma_T$  слагаемые, соответствующие тем множествам  $G_i$ , которые имеют непустое пересечение с  $E$ , то это не повлияет ни на существование предела интегральной суммы при мелкости  $l(T) \rightarrow 0$ , ни на величину этого предела.

○ Если  $m(G) = 0$ , то лемма, очевидно, справедлива, так как для любого разбиения  $\sigma_T = 0$ . Пусть  $m(G) > 0$  и  $|f(x)| \leq c_0$  на множестве  $G$ . Для любого  $\varepsilon > 0$  найдется клеточное множество  $A$  такое, что  $m(A) \leq \frac{\varepsilon}{4c_0}$  и  $E \subset A$ . Будем множества разбиения  $T$  нумеровать таким образом, чтобы  $G_1, \dots, G_m$  имели непустое пересечение с  $A$ , а  $G_{m+1}, \dots, G_N$  не пересекались с  $A$ . В силу леммы 1 найдется такое  $\delta > 0$ , что при  $l(T) < \delta$  выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^m m(G_i) < \frac{\varepsilon}{c_0}.$$

Тогда для любого разбиения  $T$  с мелкостью  $l(T) < \delta$  имеем

$$\sigma_T = \sigma'_T + \sigma''_T, \quad \sigma'_T = \sum_{i=1}^m f(\xi_i) m(G_i), \quad \sigma''_T = \sum_{i=m+1}^N f(\xi_i) m(G_i),$$

$$|\sigma'_T| \leq \sum_{i=1}^m |f(\xi_i)| m(G_i) \leq c_0 \sum_{i=1}^m m(G_i) < c_0 \frac{\varepsilon}{c_0} = \varepsilon.$$

Следовательно,  $\sigma'_T \rightarrow 0$  при  $l(T) \rightarrow 0$ . Поэтому  $\sigma_T \rightarrow I$  при  $l(T) \rightarrow 0$  в том и только том случае, когда  $\sigma''_T \rightarrow I$  при  $l(T) \rightarrow 0$ . ●

### 6. Достаточное условие измеримости множества в $R^n$ по Жордану.

Лемма 5. Пусть  $G$  — измеримое множество в  $R^n$ . Тогда цилиндр

$$G_h = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) : (x_1, \dots, x_n) \in G, \quad 0 \leq x_{n+1} \leq h\}$$

есть измеримое множество в  $R^{n+1}$  и  $m(G_h) = hm(G)$ .

○ Так как основание  $G$  есть измеримое множество в  $R^n$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  найдутся клеточные множества  $A$  и  $B$  такие, что

$$A \subset G \subset B, \quad m(B) - m(A) < \frac{\varepsilon}{h}.$$

Если на  $n$ -мерной клетке  $\Pi$  как на основании построить цилиндр с высотой  $h$ , то получим  $n+1$ -мерную клетку  $\Pi_h$  и  $m(\Pi_h) = hm(\Pi)$ . Следовательно, если на клеточном множестве  $A$  построить цилиндр  $A_h$ , то его мера в  $R^{n+1}$  равна  $hm(A)$ , причем  $A_h$  есть клеточное множество в  $R^{n+1}$ .

Очевидно, что  $A_h \subset G_h \subset B_h$  и что

$$m(B_h) - m(A_h) = hm(B) - hm(A) < h \frac{\varepsilon}{h} = \varepsilon.$$

Следовательно, цилиндр  $G_h$  есть измеримое в  $R^{n+1}$  множество и

$$m(A_h) \leq m(G_h) \leq m(B_h), \quad \text{или} \quad hm(A) \leq m(G_h) \leq hm(B).$$

Так как  $hm(A) \leq hm(G) \leq hm(B)$ , то

$$|m(G_h) - hm(G)| \leq h(m(B) - m(A)) < \varepsilon;$$

в силу произвольности  $\varepsilon$  должно выполняться  $m(G_h) = hm(G)$ . ●

Теорема 5. Пусть  $G$  — измеримое множество в  $R^n$  и функция  $f(x)$  интегрируема на  $G$ . Тогда график функции  $f(x)$  имеет в  $R^{n+1}$  жорданову меру нуль.

○ Так как функция  $f(x)$  интегрируема на множестве  $G$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  найдется разбиение  $T = \{G_i\}$ ,  $i = \overline{1, N}$ , множества  $G$  такое, что

$$S_T - s_T = \sum_{i=1}^N (M_i - m_i) m(G_i) < \varepsilon.$$

Построим на каждом из множеств  $G_i$  два цилиндра,  $\tilde{G}_i$  и  $\hat{G}_i$ , с высотами  $M_i$  и  $m_i$  соответственно, тогда

$$A = \bigcup_{i=1}^N (\tilde{G}_i \setminus \hat{G}_i)$$

есть измеримое множество, содержащее график функции  $f(x)$ . Так как

$$\begin{aligned} m(A) &= \sum_{i=1}^N (m(\tilde{G}_i) - m(\hat{G}_i)) = \sum_{i=1}^N (M_i m(G_i) - m_i m(G_i)) = \\ &= \sum_{i=1}^N (M_i - m_i) m(G_i) < \varepsilon, \end{aligned}$$

то в силу произвольности числа  $\varepsilon$  мера Жордана графика функции  $f(x)$  в  $R^{n+1}$  равна нулю. ●

*Следствие. Если функция  $f(x)$  непрерывна на измеримом компакте в  $R^n$ , то ее график в  $R^{n+1}$  имеет жорданову меру нуль. Если граница области состоит из конечного объединения таких графиков, то область измерима по Жордану.*

## § 47. Сведение кратных интегралов к повторным

### 1. Формула сведения двойного интеграла по прямоугольнику к повторному интегралу.

**Теорема 1.** Пусть:

а) функция  $f(x, y)$  интегрируема в прямоугольнике  $\Pi = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ ;

б) интеграл  $\int_c^d f(x, y) dy$  существует для любого  $x \in [a, b]$ .

Тогда  $\int_c^d f(x, y) dy$  есть интегрируемая функция  $x$  на отрезке  $[a, b]$

и справедлива следующая формула:

$$\iint_{\Pi} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (1)$$

○ Возьмем произвольные разбиения отрезков  $[a, b]$  и  $[c, d]$  точками  $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$  и  $y_0 = c < y_1 < \dots < y_m = d$ . Если  $\pi_1, \dots, \pi_n$  и  $\pi'_1, \dots, \pi'_m$  — соответствующие промежутки, образующие разбиения  $[a, b]$  и  $[c, d]$ , то  $\Pi = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m \Pi_{ij}$ , где  $\Pi_{ij} = \{(x, y) : x \in \pi_i, y \in \pi'_j\}$ .

Положим

$$M_{ij} = \sup_{(x,y) \in \Pi_{ij}} f(x,y), \quad m_{ij} = \inf_{(x,y) \in \Pi_{ij}} f(x,y).$$

Так как  $\int_c^d f(x,y) dy$  существует для любого  $x \in [a, b]$ , то при  $x \in \pi_i$  справедливы неравенства

$$m_{ij} \Delta y_j \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y) dy \leq M_{ij} \Delta y_j, \quad \text{где } \Delta y_j = y_j - y_{j-1}.$$

Суммируя эти неравенства по индексу  $j$ , получаем

$$\sum_{j=1}^m m_{ij} \Delta y_j \leq \int_c^d f(x,y) dy \leq \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta y_j. \quad (2)$$

Введем следующие обозначения:

$$F(x) = \int_c^d f(x,y) dy, \quad M_i = \sup_{x \in \pi_i} F(x), \quad m_i = \inf_{x \in \pi_i} F(x).$$

Тогда из (2) следует, что

$$\sum_{j=1}^m m_{ij} \Delta y_j \leq m_i \leq M_i \leq \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta y_j, \quad (3)$$

$$0 \leq M_i - m_i \leq \sum_{j=1}^m (M_{ij} - m_{ij}) \Delta y_j. \quad (4)$$

Умножая неравенство (4) на  $\Delta x_i$  и суммируя по  $i$  от 1 до  $n$ , получаем

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (M_{ij} - m_{ij}) m(\Pi_{ij}) = \\ &= S_T(f, \Pi) - s_T(f, \Pi) \rightarrow 0 \quad \text{при } l(T) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

так как функция  $f(x,y)$  интегрируема на прямоугольнике  $\Pi$ . Но тогда и  $\sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i \rightarrow 0$  при  $\max_i |\Delta x_i| \rightarrow 0$  и, следовательно, в силу критерия интегрируемости (§ 34) функция  $F(x)$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ , т. е. повторный интеграл

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y) dy$$

существует. Покажем, что он равен двойному интегралу.

Интегрируя неравенство (2), получаем

$$\sum_{j=1}^m m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_c^d f(x, y) dy \leq \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j.$$

Проведем суммирование по  $i$  от 1 до  $n$ . Получаем

$$s_T \leq \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \leq S_T.$$

Так как

$$s_T \leq \iint_{\Pi} f(x, y) dx dy \leq S_T,$$

а разность  $S_T - s_T$  может быть сделана сколь угодно малой, то

$$\iint_{\Pi} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad \bullet$$

**Следствие 1.** Пусть существует  $\iint_{\Pi} f(x, y) dx dy$ , при каждом  $x \in [a, b]$  существует  $\int_c^d f(x, y) dy$  и при каждом  $y \in [c, d]$  существует  $\int_a^b f(x, y) dx$ . Тогда справедлива формула

$$\iint_{\Pi} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx. \quad (5)$$

**Следствие 2.** Если функция  $f(x, y)$  непрерывна в прямоугольнике  $\Pi$ , то выполнены условия следствия 1 и справедлива формула (5). Если функция  $\psi(x)$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ , то формула (5) остается справедливой при замене функции  $f(x, y)$  на  $\psi(x)f(x, y)$ .

**2. Сведение двойного интеграла по элементарной области к повторному.** Пусть  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  — непрерывные на отрезке  $[a, b]$  функции и  $\varphi(x) < \psi(x)$  при  $x \in (a, b)$ . Область (рис. 47.1)

$$\Omega = \{(x, y) : \varphi(x) < y < \psi(x), a < x < b\} \quad (6)$$

будем называть *элементарной относительно оси  $y$* . Так как граница  $\partial\Omega$  состоит из графиков непрерывных функций, то  $\Omega$  — измеримая по Жордану область.

**Теорема 2.** Пусть  $\Omega$  — элементарная относительно оси  $y$  область, функция  $f(x, y)$  интегрируема на  $\bar{\Omega}$ , где  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ , и при любом  $x \in [a, b]$  существует  $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$ . Тогда справедлива следующая

формула:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy. \quad (7)$$

○ Пусть

$$c = \min_{x \in [a, b]} \varphi(x), \quad d = \max_{x \in [a, b]} \psi(x).$$

Область  $\Omega$  (рис. 47.2) лежит в прямоугольнике  $\Pi = [a, b] \times [c, d]$ . Положим

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ 0, & (x, y) \in \Pi \setminus \Omega. \end{cases} \quad (8)$$

Так как функция интегрируема на  $\bar{\Omega}$  и на множестве  $\Pi \setminus \bar{\Omega}$ , то существует двойной интеграл  $\iint_{\Pi} F(x, y) dx dy$  (свойство 6, § 46, п. 5).

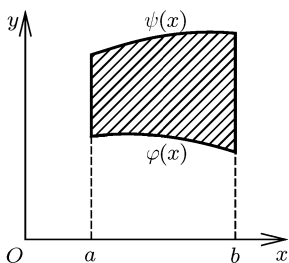


Рис. 47.1

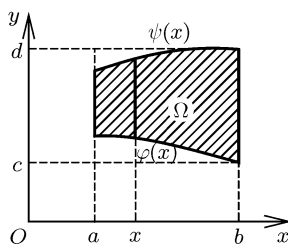


Рис. 47.2

Аналогично из существования при любом  $x \in [a, b]$  интегралов  $\int_c^{\varphi(x)} F(x, y) dy$ ,  $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} F(x, y) dy$  и  $\int_{\psi(x)}^d F(x, y) dy$  следует, что при любом  $x \in [a, b]$  существует интеграл  $\int_c^d F(x, y) dy$ .

Таким образом, выполнены все условия теоремы 1. Поэтому

$$\iint_{\Pi} F(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d F(x, y) dy.$$

Подставляя сюда выражение (8) для функции  $F(x, y)$ , получаем формулу (7). ●

*Следствие.* Для функции  $f(x, y)$ , непрерывной на  $\bar{\Omega}$ , справедлива формула (7).

Пример 1. Вычислить интеграл  $\iint_G x^2 dx dy$  по области  $G = \{(x, y): -1 < x < 1, x^2 < y < 1\}$ , изображенной на рис. 47.3.

△ Применяя формулу (7), получаем

$$\begin{aligned} \iint_G x^2 dx dy &= \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 x^2 dy = \int_{-1}^1 x^2 (1 - x^2) dx = \\ &= 2 \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = 2 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{4}{15}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Если область интегрирования не является элементарной относительно оси  $y$ , то иногда удастся разбить ее на конечное число областей, элементарных относительно оси  $y$ .

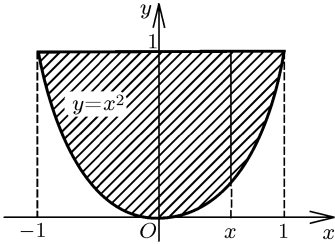


Рис. 47.3

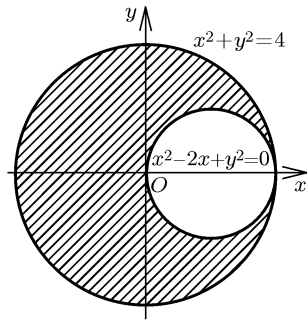


Рис. 47.4

Пример 2. Пусть  $G$  есть область, ограниченная окружностями  $x^2 + y^2 = 4$  и  $x^2 - 2x + y^2 = 0$  (рис. 47.4). Свести интеграл

$$\iint_G f(x, y) dx dy$$

к повторному.

△ Область  $G$  осью  $y$  разбивается на три элементарных относительно оси  $y$  области. Поэтому

$$\begin{aligned} \iint_G f(x, y) dx dy &= \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \\ &+ \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Можно, по аналогии с областью, элементарной относительно оси  $y$ , определить область, элементарную относительно оси  $x$ . Пусть функции  $\alpha(y)$  и  $\beta(y)$  непрерывны на  $[c, d]$  и  $\alpha(y) < \beta(y)$  при  $c < y < d$ .

Область

$$\Omega\{(x, y): \alpha(y) < x < \beta(y), c < y < d\}$$

будем называть элементарной относительно оси  $x$  (рис. 47.5).

Если функция  $f(x, y)$  непрерывна в замыкании области  $\Omega$ , элементарной относительно оси  $x$ , то аналогично (7) получаем следующую формулу:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx.$$

Если область  $\Omega$  элементарна и относительно оси  $x$ , и относительно оси  $y$ , то двойной интеграл по этой области от непрерывной на  $\Omega$

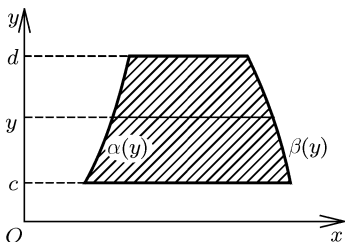


Рис. 47.5

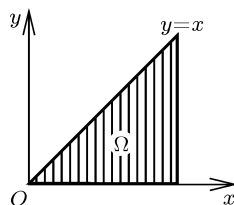


Рис. 47.6

функции  $f(x, y)$  может быть выражен двумя способами через повторные интегралы:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx. \quad (9)$$

Пример 3. Вычислить повторный интеграл

$$I = \int_0^{\pi/2} dy \int_y^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Δ Интеграл  $I$  равен двойному интегралу от функции  $f(x, y) = \frac{\sin x}{x}$  по области  $\Omega$ , изображенной на рис. 47.6. Эта область элементарна и относительно оси  $x$ , и относительно оси  $y$ .

Пользуясь формулой (9), получаем

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} dy \int_y^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi/2} dx \int_0^x \frac{\sin x}{x} dy = \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} \left( \int_0^x dy \right) dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} x dx = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = 1. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Теорема 3. Пусть функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  непрерывны на отрезке  $[a, b]$  и  $\varphi(x) < \psi(x)$  при  $a < x < b$ , а функция  $f(x, y)$  непрерывна в



замыкании области  $\Omega = \{(x, y) : a < x < b, \varphi(x) < y < \psi(x)\}$ . Тогда функция

$$\Phi(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$$

непрерывна на отрезке  $[a, b]$ .

○ а) Пусть сначала  $\varphi(x) \equiv c$ ,  $\psi(x) \equiv d$ , где  $c$  и  $d$  — постоянные, а функция  $f(x, y)$  непрерывна в прямоугольнике  $\Pi = [a, b] \times [c, d]$ . В силу теоремы Кантора  $f(x, y)$  равномерно непрерывна на  $\Pi$ . Поэтому для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для любого  $y \in [c, d]$  и любых  $x \in [a, b]$  и  $x + \Delta x \in [a, b]$  при  $|\Delta x| < \delta$  справедливо неравенство

$$|f(x + \Delta x, y) - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{d - c}.$$

Предполагая, что  $|\Delta x| < \delta$ , получаем

$$\begin{aligned} |\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)| &= \left| \int_c^d (f(x + \Delta x, y) - f(x, y)) dy \right| \leq \\ &\leq \int_c^d |f(x + \Delta x, y) - f(x, y)| dy < \frac{\varepsilon}{d - c} (d - c) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, функция  $\Phi(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ .

б) Пусть теперь  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  — произвольные непрерывные на отрезке  $[a, b]$  функции и  $\varphi(x) < \psi(x)$  при  $a < x < b$ .

Рассмотрим функцию

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{при } (x, y) \in \Omega; \\ f(x, \varphi(x)) & \text{при } (x, y) \in \Omega_1, \text{ где} \\ & \Omega_1 = \{(x, y) : a \leq x \leq b, y \leq \varphi(x)\}; \\ f(x, \psi(x)) & \text{при } (x, y) \in \Omega_2, \text{ где} \\ & \Omega_2 = \{(x, y) : a \leq x \leq b, y \geq \psi(x)\}. \end{cases}$$

Покажем, что функция  $F(x, y)$  непрерывна в полосе  $Q = \{(x, y) : a \leq x \leq b, y \in R\}$ . Достаточно показать, что функция  $F(x, y)$  непрерывна по множествам  $\Omega$ ,  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  (см. упр. 2, § 25), так как  $Q = \Omega \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$ . На  $\Omega$  функция  $F(x, y)$  совпадает с  $f(x, y)$  и непрерывна по условию теоремы. Функции  $f(x, \varphi(x))$  и  $f(x, \psi(x))$  непрерывны на отрезке  $[a, b]$  как суперпозиции непрерывных функций (см. упр. 1, § 25). Покажем, что функция  $F(x, y)$  непрерывна в области  $\Omega_1$ . Пусть произвольная последовательность точек  $(x_k, y_k) \in \Omega_1$  сходится к точке  $(x_0, y_0) \in \Omega_1$ . Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(x_k, y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} F(x_k, \varphi(x_k)) = f(x_0, \varphi(x_0)) = F(x_0, y_0)$$

и, следовательно, функция  $F(x, y)$  непрерывна на  $\Omega_1$ . Аналогично показывается, что функция  $F(x, y)$  непрерывна на множестве  $\Omega_2$ .

Таким образом, функция  $F(x, y)$  непрерывна в прямоугольнике  $\Pi = [a, b] \times [c, d]$ , где  $c = \min_{a \leq x \leq b} \varphi(x)$ , а  $d = \max_{a \leq x \leq b} \psi(x)$ , и поэтому функция  $\int_c^d F(x, y) dy$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ .

Пользуясь аддитивностью интеграла относительно отрезка интегрирования, получаем, что функция  $\Phi(x)$  представима в виде суммы непрерывных функций:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} F(x, y) dy = \int_c^d F(x, y) dy - \\ &- \int_c^{\varphi(x)} F(x, y) dy - \int_{\psi(x)}^d F(x, y) dy = \int_c^d F(x, y) dy - \\ &- f(x, \varphi(x))(\varphi(x) - c) - f(x, \psi(x))(d - \psi(x)). \quad \bullet \end{aligned}$$

**Упражнение 1.** Пусть функция  $f(x, y)$  непрерывна в прямоугольнике  $K = \{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ , а функция  $\varphi(x)$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ . Доказать, что функция

$$\Psi(y) = \int_a^b \varphi(x) f(x, y) dx$$

непрерывна на отрезке  $[c, d]$ .

**3. Сведение тройных интегралов к повторным.** Область  $\Omega \in R^3$  называется *элементарной относительно оси  $z$* , если

$$\Omega = \{(x, y, z): (x, y) \in G \subset R^2, \varphi(x, y) < z < \psi(x, y)\},$$

где  $G$  — ограниченная область в  $R^2$ , а функции  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$  непрерывны на  $\bar{G}$ , где  $\bar{G}$  — замыкание области  $G$ .

**Теорема 4.** Если функция  $f(x, y, z)$  непрерывна на  $\bar{\Omega}$ , где область  $\Omega$  элементарна относительно оси  $z$ , то

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_G dx dy \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (10)$$

○ Доказательство аналогично доказательству теоремы 2 для двойных интегралов. ●

**Пример 4.** Вычислить тройной интеграл  $\iiint_G z dx dy dz$  по области  $\Omega$ , ограниченной плоскостями  $x + y + z = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,

$z = 0$  (рис. 47.7).

$\Delta$  Область  $\Omega = \{(x, y, z): 0 < z < 1 - x - y, 0 < y < 1 - x, 0 < x < 1\}$  элементарна относительно оси  $z$ . Пусть  $G$  есть область на плоскости  $(x, y)$ , ограниченная прямыми  $x + y = 1$  и  $x = 0, y = 0$ .

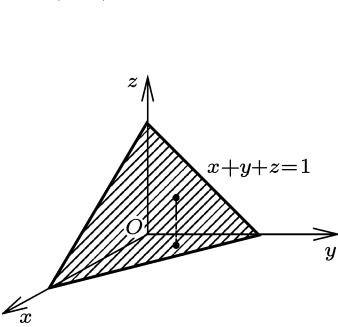


Рис. 47.7

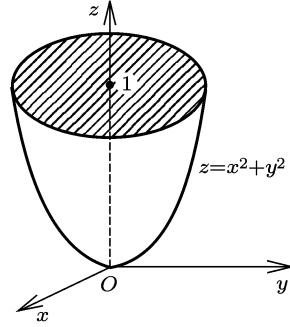


Рис. 47.8

Очевидно, что область  $G$  элементарна относительно оси  $y$ . Применяя теоремы 4 и 2, получаем

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz &= \iint_G dx \, dy \int_0^{1-x-y} z \, dz = \frac{1}{2} \iint_G (1-x-y)^2 \, dx \, dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (y+x-1)^2 \, dy = \frac{1}{6} \int_0^1 (y+x-1)^3 \Big|_0^{1-x} dx = \\ &= \frac{1}{6} \int_0^1 (1-x)^3 \, dx = -\frac{1}{24} (1-x)^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{24}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Пример 5. Свести трехкратный интеграл

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^1 f(z) \, dz$$

к однократному, если  $f(z)$  — непрерывная на отрезке  $[0, 1]$  функция.

$\Delta$  Интеграл  $I$  равен тройному интегралу

$$\iiint_{\Omega} f(z) \, dx \, dy \, dz$$

по области  $\Omega$ , ограниченной параболоидом  $z = x^2 + y^2$  и плоскостью  $z = 1$  (рис. 47.8). Область  $\Omega$  элементарна относительно оси  $y$ ,

$$\Omega = \{(x, y, z): -\sqrt{z-x^2} < y < \sqrt{z-x^2}, (x, z) \in G\},$$

где  $G = \{(x, z): -\sqrt{z} < x < \sqrt{z}, 0 < z < 1\}$ .

Сводя тройной интеграл по области  $\Omega$  к трехкратному, получаем

$$I = \int_0^1 f(z) dz \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} dx \int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} dy = 4 \int_0^1 f(z) dz \int_0^{\sqrt{z}} \sqrt{z-x^2} dx = \pi \int_0^1 z f(z) dz. \blacktriangle$$

Теорема 1 может быть распространена и на  $n$ -кратные интегралы.

Область  $\Omega \subset R^{n+1}$  называется *элементарной относительно оси  $x_{n+1}$* , если

$$\Omega = \{x: (x_1, \dots, x_n) \in G \subset R^n, \varphi(x_1, \dots, x_n) < x_{n+1} < \psi(x_1, \dots, x_n)\},$$

где  $G$  — ограниченная область в  $R^n$  и  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  — непрерывные на  $\bar{G}$  функции.

Теорема 5. Если  $\Omega$  — область, элементарная относительно оси  $x_{n+1}$ , а  $f(x_1, \dots, x_n)$  — непрерывная функция на  $\bar{\Omega}$ , то справедлива следующая формула:

$$\int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_{n+1} = \int_G dx_1 \dots dx_n \int_{\varphi(x_1, \dots, x_n)}^{\psi(x_1, \dots, x_n)} f(x_1, \dots, x_{n+1}) dx_{n+1}. \quad (11)$$

Пример 6. Найти в  $R^n$  меру симплекса

$$S_h^n = \{(x_1, \dots, x_n): x_1 + \dots + x_n < h, x_i > 0, i = \overline{1, n}\}. \quad (12)$$

$\Delta$  При  $h = 1$  будем симплекс (12) называть стандартным и обозначать через  $S^n$ . Симплекс (12) получается из стандартного симплекса  $S^n$  при помощи преобразования подобия:

$$T_h x = \{(y_1, \dots, y_n): y_1 = hx_1, \dots, y_n = hx_n\}.$$

Как следует из результата упр. 2, § 45, при преобразовании подобия мера изменяется в  $h^n$  раз, так что

$$m(S_h^n) = h^n m(S^n). \quad (13)$$

Представим теперь стандартный симплекс  $S^n$  как область, элементарную относительно оси  $x_n$ . Тогда

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_n): (x_1, \dots, x_{n-1}) \in S^{n-1}, 0 < x_n < 1 - x_1 - \dots - x_{n-1}\}.$$

Применяя формулу (11), получаем

$$\begin{aligned} m(S^n) &= \int_{S^n} dx_1 \dots dx_n = \int_{S^{n-1}} dx_1 \dots dx_{n-1} \int_0^{1-x_1-\dots-x_{n-1}} dx_n = \\ &= \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \dots \int_0^{1-x_1-\dots-x_{n-1}} dx_n. \quad (14) \end{aligned}$$

Внутренний интеграл в формуле (14) равен мере  $m(S_{1-x_1}^{n-1})$  симплекса  $S_{1-x_1}^{n-1}$ . Применяя (13) для ее вычисления, находим

$$\begin{aligned} m(S^n) &= \int_0^1 m(S_{1-x_1}^{n-1}) dx_1 = \int_0^1 (1-x_1)^{n-1} m(S^{n-1}) dx_1 = \\ &= m(S^{n-1}) \int_0^1 (1-x_1)^{n-1} dx_1 = \frac{m(S^{n-1})}{n}. \end{aligned} \quad (15)$$

Так как  $S^1$  есть отрезок единичной длины, то из формулы (15) и формулы (13) по индукции получаем

$$m(S^n) = \frac{1}{n!}, \quad m(S_h^n) = \frac{h^n}{n!}. \quad \blacktriangle \quad (16)$$

Упражнение 1. Показать, что при  $n = 3$  и  $n = 2$  формула (16) дает объем тетраэдра и площадь треугольника.

## § 48. Формула замены переменных в кратном интеграле

**1. Некоторые свойства гладких отображений.** Пусть  $G$  — ограниченная область в  $R^n$ , а  $F: G \rightarrow R^n$  есть взаимно однозначное и непрерывно дифференцируемое отображение.

Аналитически отображение  $F: G \rightarrow R^n$  задается при помощи непрерывно дифференцируемых функций

$$x_1 = \varphi_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_n = \varphi_n(u_1, \dots, u_n).$$

Будем считать выполненными следующие предположения:

- производные  $\partial\varphi_i/\partial u_j$  ограничены в  $G$ ;
- производные  $\partial\varphi_i/\partial u_j$  равномерно непрерывны в  $G$ ;
- якобиан отображения удовлетворяет при  $u \in G$  условию

$$|J(u)| \geq \alpha > 0.$$

Напомним, что якобиан  $J(u)$  есть определитель матрицы Якоби  $\|\partial\varphi_i/\partial u_j\|$ .

Отображение, удовлетворяющее условиям а)–в), обладает еще и следующими свойствами.

Свойство 1. Если  $\Gamma \subset G$  есть непрерывно дифференцируемая кривая, то ее образ  $\Gamma' = F(\Gamma)$  есть непрерывно дифференцируемая кривая.

Свойство 2. Если  $\Omega$  — область и  $\bar{\Omega} \subset G$ , то ее образ  $\Omega' = F(\Omega)$  будет областью. Образ границы  $\Omega$  есть граница  $\Omega'$ .

Свойство 1 есть простое следствие правила нахождения производной сложной функции, а свойство 2 есть следствие теоремы о неявных функциях и было доказано в § 28.

## 2. Лемма о геометрическом смысле модуля якобиана отображения.

**Лемма 1.** Пусть число  $h > 0$ , а  $\Pi$  — замкнутый квадрат в  $R^2$  с вершинами в точках  $A(u_0, v_0)$ ,  $B(u_0 + h, v_0)$ ,  $C(u_0 + h, v_0 + h)$ ,  $D(u_0, v_0 + h)$ . Тогда образ квадрата  $\Pi' = F(\Pi)$  при отображении  $F: G \rightarrow R^2$ , обладающем свойствами а)–в), описанными в п. 1, является измеримой по Жордану областью и

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(\Pi')}{h^2} = |J(u_0, v_0)|, \quad (1)$$

причем разность  $\frac{m(\Pi')}{h^2} - |J(u_0, v_0)|$  при  $h \rightarrow 0$  стремится к нулю равномерно по  $(u_0, v_0)$  на множестве  $G$ , т. е. для любого  $\varepsilon > 0$  найдется число  $\delta > 0$  такое, что при любом  $h < \delta$  и для любого квадрата  $\Pi \subset G$  со стороной длины  $h$  выполнено неравенство

$$\left| \frac{m(\Pi')}{h^2} - |J(u_0, v_0)| \right| < \varepsilon. \quad (2)$$

Доказательство леммы 1 не очень просто и приведено в [1, § 82]. Здесь же поясним геометрический смысл этой леммы (рис. 48.1).

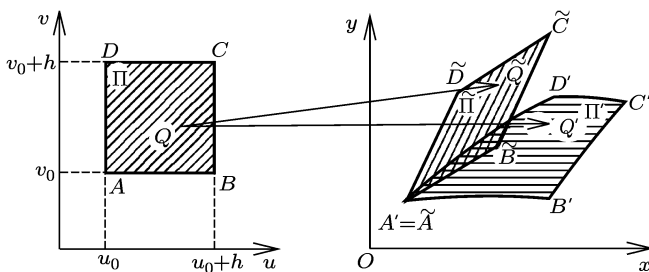


Рис. 48.1

○ Покажем, что  $\Pi' = F(\Pi)$  есть измеримая область. Стороны квадрата  $\Pi$  являются отрезками. Поэтому их образы при отображении  $F: G \rightarrow R^2$  будут гладкими кривыми. Так как образ границы есть граница образа, то  $\partial\Pi'$  есть кусочно гладкая кривая, а поэтому  $m(\partial\Pi') = 0$  (см. упр. 3, § 45). Следовательно,  $\Pi'$  есть измеримое множество (см. теорему 1, § 45). Будем в дальнейшем  $\Pi' = F(\Pi)$  называть криволинейным параллелограммом.

Если рассматривать точки  $Q(u, v)$ , достаточно близкие к вершине квадрата  $A(u_0, v_0)$ , то отображение  $F: G \rightarrow R^2$  можно приближенно задать как аффинное, т. е.

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0), \\ y &= y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} x_0 &= \varphi(u_0, v_0), & y_0 &= \psi(u_0, v_0), & a_{11} &= \frac{\partial \varphi(u_0, v_0)}{\partial u}, \\ a_{12} &= \frac{\partial \varphi(u_0, v_0)}{\partial v}, & a_{21} &= \frac{\partial \psi(u_0, v_0)}{\partial u}, & a_{22} &= \frac{\partial \psi(u_0, v_0)}{\partial v}. \end{aligned} \quad (3)$$

Формулы (3) получаются, если разложить функции  $\varphi(u, v)$  и  $\psi(u, v)$ , задающие отображение  $F$ , по формуле Тейлора в окрестности точки  $A(u_0, v_0)$  и отбросить члены, являющиеся  $o(\rho(A, Q))$ , когда расстояние  $\rho(A, Q)$  между точками  $A$  и  $Q$  стремится к нулю.

Будем аффинное отображение, определяемое формулами (3), обозначать  $\tilde{F}: R^2 \rightarrow R^2$ . Как известно из курса аналитической геометрии, образ квадрата  $\Pi$  при аффинном отображении есть параллелограмм  $\tilde{\Pi} = \tilde{F}(\Pi)$ , площадь (мера) которого  $m(\tilde{\Pi})$  равна площади квадрата  $m(\Pi) = h^2$ , умноженной на модуль определителя аффинного отображения, т. е.  $m(\tilde{\Pi}) = h^2 |\det \|a_{ij}\||$ .

Воспользовавшись выражениями (3) для коэффициентов, получаем, что

$$\frac{m(\tilde{\Pi})}{h^2} = |\det \|a_{ij}\|| = |J(u_0, v_0)|.$$

Идея доказательства леммы 1 основана на том, что при замене криволинейного параллелограмма  $\Pi'$  на параллелограмм  $\tilde{\Pi}$  (рис. 48.1) площадь изменится на величину, являющуюся  $o(h^2)$  при  $h \rightarrow 0$ .

Доказательство обобщается на  $R^n$ . ●

### 3. Формула замены переменных в кратном интеграле.

**Теорема 1.** Пусть отображение  $F: \Omega \rightarrow R^n$  (где  $\Omega \subset R^n$  — открытое множество) является взаимно однозначным и удовлетворяет условиям а)–в) п. 1, а  $G$  — измеримый компакт с кусочно гладкой границей, лежащий во множестве  $\Omega$ . Тогда если функция  $f(x)$  непрерывна на множестве  $G' = F(G)$ , то справедлива следующая формула замены переменных в кратном интеграле:

$$\int_{G'} f(x) dx = \int_G f(\varphi_1(u), \dots, \varphi_n(u)) |J(u)| du. \quad (4)$$

○ Рассмотрим плоский случай. Заметим, что в силу свойств непрерывных функций образ  $G'$  компакта  $G$  при непрерывном и взаимно однозначном отображении  $F$  является компактом, а в силу свойств 1, 2 отображения  $F$  граница компакта  $G'$  является кусочно гладкой кривой. Так как кусочно гладкая кривая имеет меру нуль, то компакт  $G'$  измерим. Оба интеграла в формуле (4) существуют как интегралы от функций, непрерывных на компактах.

Поскольку компакт  $G$  лежит в открытом множестве  $\Omega$ , то границы этих множеств не пересекаются. Так как граница любого множества замкнута и граница ограниченного множества ограничена, то в силу леммы 2, § 46 расстояние между  $\partial G$  и  $\partial \Omega$  есть положительное число  $\delta$ .

Пусть  $\Pi$  есть замкнутый квадрат, содержащий компакт  $G$ . Если разбить стороны квадрата  $\Pi$  на равные части длины  $h < \delta$ , то и сам квадрат  $\Pi$  разобьется на квадратные клетки с площадью  $h^2$ . Разбиение квадрата  $\Pi$  порождает разбиение  $T$  компакта  $G$ . Если малый квадрат со стороной  $h$  целиком лежит внутри компакта  $G$ , то он является элементом разбиения  $T$ , а если малый квадрат содержит граничные точки  $G$ , то соответствующим элементом разбиения является пересечение этого квадрата с компактом  $G$ . Отображение  $F$  порождает разбиение  $T'$  компакта  $G' = F(G)$ , причем элементами разбиения  $T'$  являются образы элементов разбиения  $T$ . Из леммы 4 следует, что при написании интегральных сумм можно учитывать только слагаемые, соответствующие целым квадратам и их образам при отображении  $F$ . Из равномерной непрерывности отображения  $F$  следует, что мелкость разбиения  $T'$  стремится к нулю, когда стремится к нулю мелкость разбиения  $T$ .

Если малые квадраты  $\Pi_1, \dots, \Pi_N$  лежат внутри компакта  $G$ , то их образы  $\Pi'_1, \dots, \Pi'_N$  лежат внутри  $G'$ . Пусть  $(u_i, v_i)$  — координаты точки, лежащей в левом нижнем углу квадрата  $\Pi_i$ , а  $(x_i, y_i)$  — образ этой точки при отображении  $F$ .

Запишем интегралы, входящие в формулу (4), как пределы интегральных сумм:

$$\begin{aligned} \iint_{G'} f(x, y) dx dy &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N f(x_i, y_i) m(\Pi'_i), \\ \iint_G f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |J(u, v)| du dv &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N f(\varphi(u_i, v_i), \psi(u_i, v_i)) |J(u_i, v_i)| m(\Pi_i). \end{aligned}$$

Для доказательства формулы (4) достаточно показать, что разность этих интегральных сумм стремится к нулю при  $h \rightarrow 0$ . В силу леммы 1

$$|m(\Pi'_i) - |J(u_i, v_i)| m(\Pi_i)| \leq \alpha(h) m(\Pi_i), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0.$$

Принимая во внимание, что  $\varphi(u_i, v_i) = x_i$ ,  $\psi(u_i, v_i) = y_i$ ,  $|f(x, y)| < M$ , получаем оценку для разности интегральных сумм

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^N f(x_i, y_i) m(\Pi'_i) - \sum_{i=1}^N f(\varphi(u_i, v_i), \psi(u_i, v_i)) |J(u_i, v_i)| m(\Pi_i) \right| &\leq \\ &\leq \sum_{i=1}^N |f(x_i, y_i) \cdot (m(\Pi'_i) - |J(u_i, v_i)| m(\Pi_i))| \leq \\ &\leq M \alpha(h) \sum_{i=1}^N m(\Pi_i) \leq M \alpha(h) m(G), \end{aligned}$$



из которой следует, что эта разность стремится к нулю при  $h \rightarrow 0$ . ●

**Замечание.** Нарушение условия взаимной однозначности на множестве меры нуль и обращение якобиана отображения в нуль на множестве меры нуль не влияют на справедливость формулы (4) замены переменных в кратном интеграле. Такое множество  $E$  меры нуль всегда можно накрыть клеточным множеством  $A \subset G$  сколь угодно малой меры, разбиваемым на квадраты. Из доказательства теоремы следует, что при отображении  $F: G \rightarrow R^n$  мера множества  $A$  возрастает не более чем в  $c\varepsilon$  раз. Поэтому найдутся такие постоянные  $c_1$  и  $c_2$ , что

$$\left| \int_{A'} f(x) dx \right| < c_1 \varepsilon, \quad \text{где } A' = F(A), \quad (6)$$

$$\left| \int_A f(\varphi_1(u), \dots, \varphi_n(u)) |J(u)| du \right| < c_2 \varepsilon. \quad (7)$$

На множестве же  $G \setminus A$  выполнены все условия теоремы и формула замены переменной справедлива. Так как интегралы  $\int_{G'} f(x) dx$  и

$$\int_G f(\varphi_1(u), \dots, \varphi_n(u)) |J(u)| du$$

отличаются на произвольно малое число в силу (6) и (7), то они совпадают.

**Пример 1.** Вычислить интеграл  $\iint_{\Omega} y^3 dx dy$  по области  $\Omega$ , ограни-

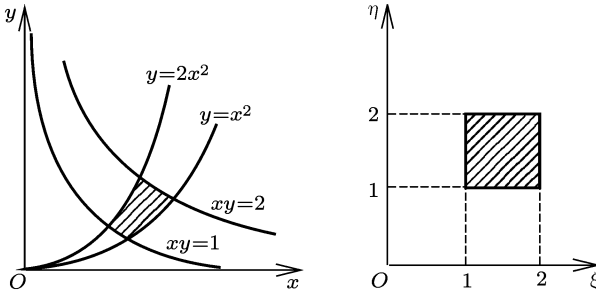


Рис. 48.2

ченной двумя параболлами,  $y = x^2$ ,  $y = 2x^2$ , и двумя гиперболлами,  $xy = 1$ ,  $xy = 2$  (рис. 48.2).

△ Рассмотрим непрерывно дифференцируемое при  $x \geq 0$  отображение следующего вида:

$$\xi = \frac{y}{x^2}, \quad \eta = xy. \quad (8)$$

Образом  $\bar{\Omega}$  при отображении (8) является квадрат  $\omega = \{(\xi, \eta): 1 \leq \xi \leq 2, 1 \leq \eta \leq 2\}$ . Отображение (8) взаимно однозначно: уравне-

ния (8) однозначно разрешимы относительно  $x$  и  $y$ ,

$$x = \xi^{-1/3} \eta^{1/3}, \quad y = \xi^{1/3} \eta^{2/3}. \quad (9)$$

Найдем якобиан отображения (8). Используя формулы (9), получаем

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3}\xi^{-4/3}\eta^{1/3} & \frac{1}{3}\xi^{1/3}\eta^{-2/3} \\ \frac{1}{3}\xi^{-2/3}\eta^{2/3} & \frac{2}{3}\xi^{1/3}\eta^{-1/3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3\xi}, \quad |J| = \frac{1}{3|\xi|}.$$

Так как  $y^3 = \xi\eta^2$ , то делая в интеграле  $\iint_{\Omega} y^3 dx dy$  замену переменных (8), получаем

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} y^3 dx dy &= \iint_{\omega} \xi \eta^2 |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta = \frac{1}{3} \iint_{\omega} \eta^2 d\xi d\eta = \\ &= \frac{1}{3} \int_1^2 d\xi \int_1^2 \eta^2 d\eta = \frac{1}{3} \left( \frac{2^3}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{7}{9}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

**4. Использование полярных координат для вычисления двойных интегралов.** Из курса аналитической геометрии известно, что декартовы и полярные координаты точки плоскости связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \\ r &\geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  есть полярный радиус, а  $\varphi$  — полярный угол (рис. 48.3). Геометрическое место точек, для которых  $r = \text{const}$ , есть окружность радиуса  $r$  с центром в точке  $O$ . Геометрическое место точек, для которых полярный угол  $\varphi = \text{const}$ , есть луч, выходящий из точки  $O$  в направлении точки  $P$ . Точка  $P$  есть пересечение окружности  $r = \text{const}$  и луча  $\varphi = \text{const}$ . Для точки  $O$  полярный радиус равен нулю, а полярный угол  $\varphi$  не определен.

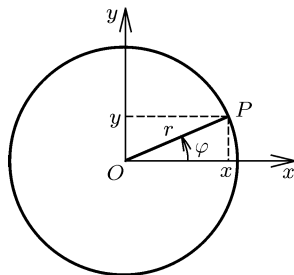


Рис. 48.3

Введем в рассмотрение вспомогательную плоскость  $E_{r\varphi}$ , в которой  $r$  и  $\varphi$  являются декартовыми координатами, и рассмотрим в этой плоскости полуполосу  $T$ , определяемую неравенствами (рис. 48.4)

$$r > 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (11)$$

Тогда формулы (10) определяют непрерывно дифференцируемое взаимно однозначное отображение  $F: T \rightarrow \dot{E}_{xy}$ , где  $\dot{E}_{xy}$  есть плос-

кость  $E_{xy}$ , проколота в точке  $O$  (рис. 48.4). Взаимную однозначность отображения проще всего проверить геометрически. Каждая точка  $P$

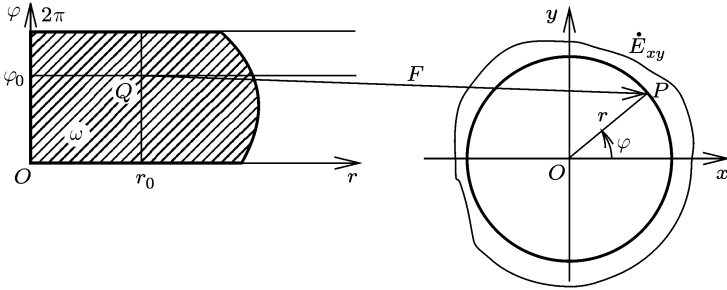


Рис. 48.4

проколота плоскости  $E_{xy}$  однозначно определяется как пересечение окружности  $r = r_0$  и луча  $\varphi = \varphi_0$ . Поэтому у точки  $P(x, y)$  есть единственный прообраз  $Q(r_0, \varphi_0)$  в полулобосе  $T$ .

Якобиан отображения (10) равен  $r$ . Действительно,

$$J_F = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

Якобиан не обращается в нуль в полулобосе  $T$ .

Если к полулобосе  $T$  присоединить отрезок  $r = 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$ , то получим полулобосу

$$T_1 = \{(r, \varphi) : r \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi\}.$$

При отображении  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$  полулобоса  $T_1$  — прообраз всей плоскости  $E_{xy}$ , но взаимная однозначность отображения и условие  $J_F \neq 0$  будут нарушены на отрезке  $r = 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$ , плоская мера Жордана которого равна нулю.

Пусть область  $\Omega \subset E_{xy}$ . Ее прообраз при отображении  $F: x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, r \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$ , есть некоторая область  $\omega \subset T_1$ . Если область  $\Omega$  не содержит точки  $O$  (начало декартовой системы координат), то отображение  $\omega$  на  $\Omega$  является взаимно однозначным и якобиан отображения не обращается в нуль в области  $\omega$ . Если же область  $\Omega$  содержит начало координат  $O$ , то взаимная однозначность отображения и условие  $J_F \neq 0$  будут нарушены на множестве жордановой меры нуль, что не влияет на справедливость формулы замены переменных в двойном интеграле (см. замечание в конце п. 3). Поэтому справедлива формула

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_{\omega} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi, \quad (12)$$

дающая выражение для двойного интеграла в полярных координатах. Функция  $f(x, y)$  считается непрерывной на измеримом множестве  $\Omega$ .

Пусть область  $\Omega$  в плоскости  $E_{xy}$  ограничена двумя лучами,  $\varphi = \alpha$  и  $\varphi = \beta$ ,  $\alpha < \beta$ , и двумя кривыми, уравнения которых в полярных координатах имеют следующий вид:  $r = R_1(\varphi)$ ,  $r = R_2(\varphi)$ . Функции  $R_1(\varphi)$  и  $R_2(\varphi)$  непрерывны на отрезке  $[\alpha, \beta]$  и  $R_1(\varphi) < R_2(\varphi)$  при  $\alpha < \varphi < \beta$  (рис. 48.5). Тогда область  $\omega$ , являющаяся прообразом облас-

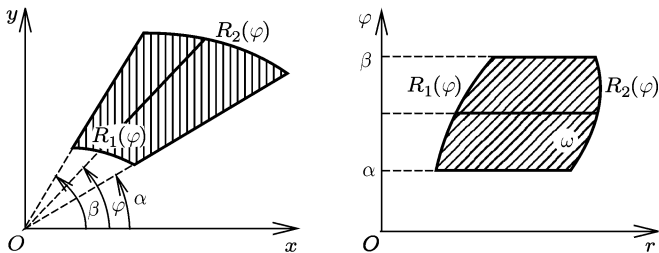


Рис. 48.5

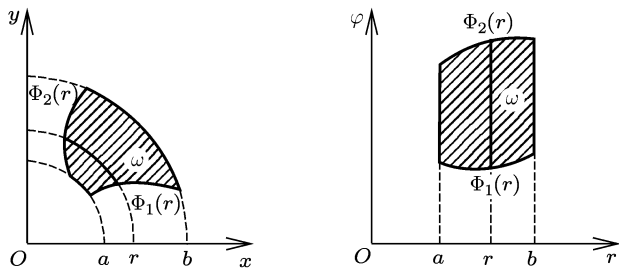


Рис. 48.6

ти  $\Omega$  в плоскости  $E_{r\varphi}$ , будет элементарной относительно оси  $r$  и двойной интеграл (12) по теореме 2, § 47 сведется к повторному:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{R_1(\varphi)}^{R_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr. \quad (13)$$

Если область  $\Omega$  в плоскости  $E_{xy}$  ограничена двумя концентрическими окружностями,  $r = a$  и  $r = b$ ,  $a < b$ , и двумя непрерывными кривыми, уравнения которых в полярных координатах имеют следующий вид:  $\varphi = \Phi_1(r)$ ,  $\varphi = \Phi_2(r)$ ,  $\Phi_1(r) < \Phi_2(r)$  при  $a < r < b$ , то прообраз области  $\Omega$  будет элементарной относительно оси  $\varphi$  областью в плоскости  $E_{r\varphi}$  (рис. 48.6). Сводя двойной интеграл в формуле (12) к повторному, получаем

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b dr \int_{\Phi_1(r)}^{\Phi_2(r)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi. \quad (14)$$

Области более сложного вида в плоскости  $E_{xy}$  нужно при помощи лучей  $\varphi = \text{const}$  и концентрических окружностей  $r = \text{const}$  разбивать на простейшие области рассмотренного выше типа.

Пример 2. Для полукруга  $\Omega: y \geq 0, x^2 + y^2 \leq a^2$  вычислить момент инерции относительно центра (рис. 48.7).

△ Как известно из механики,

$$I_0 = \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy. \quad (15)$$

В полярных координатах полукруг  $\Omega$  может быть задан неравен-

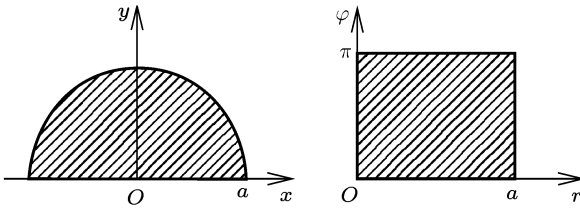


Рис. 48.7

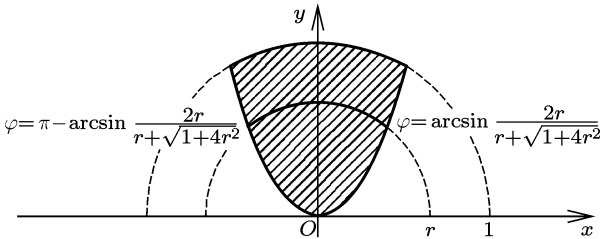


Рис. 48.8

ствами  $0 \leq r \leq a, 0 \leq \varphi \leq \pi$ . Применяя формулу (13), получаем

$$I_0 = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^a r^2 r dr = \frac{\pi a^4}{4}. \quad \blacktriangle$$

Пример 3. Пусть  $\Omega$  есть область, ограниченная параболой  $y = x^2$  и окружностью  $x^2 + y^2 = 1$ . Свести к определенному интегралу следующий двойной интеграл:

$$\iint_{\Omega} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy. \quad (16)$$

△ Область  $\Omega$  изображена на рис. 48.8. Уравнение параболы  $y = x^2$

в полярных координатах имеет вид

$$r = \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{\sin \varphi}{1 - \sin^2 \varphi}.$$

Решая это уравнение относительно  $\varphi$ , получаем, что область  $\Omega$  в полярных координатах задается следующими неравенствами:

$$0 < r < 1, \quad \arcsin \frac{2r}{1 + \sqrt{1 + 4r^2}} < \varphi < \pi - \arcsin \frac{2r}{1 + \sqrt{1 + 4r^2}}.$$

Применяя формулу (14), получаем

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} f(x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^1 dr \int_{\arcsin \frac{2r}{1 + \sqrt{1 + 4r^2}}}^{\pi - \arcsin \frac{2r}{1 + \sqrt{1 + 4r^2}}} f(r) r d\varphi = \\ &= \int_0^1 r f(r) \left( \pi - 2 \arcsin \frac{2r}{1 + \sqrt{1 + 4r^2}} \right) dr. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Пример 4. Область  $\Omega$  является внутренностью треугольника, изображенного на рис. 48.9. В интеграле  $\iint_G f(x, y) dx dy$  перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования двумя возможными способами.

$\Delta$  Треугольная область  $\Omega$  ограничена прямыми  $y = x$ ,  $y = -x$  и  $y = 1$ . В полярных координатах уравнения этих прямых имеют следующий вид:  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ,  $\varphi = \frac{3\pi}{4}$  и  $r \sin \varphi = 1$ . Область  $\Omega$  можно задать при помощи неравенств

$$\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}, \quad 0 < r < \frac{1}{\sin \varphi}.$$

Применяя формулу (13), получаем

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int_0^{1/\sin \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

Чтобы расставить пределы интегрирования в другом порядке, разобьем область  $\Omega$  дугой окружности  $r = 1$  на круговой сектор  $OCD$  и два криволинейных треугольника,  $CAE$  и  $BED$ . Каждая из этих трех

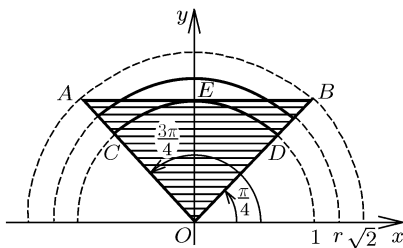


Рис. 48.9

областей будет уже элементарной относительно оси  $\varphi$ , и формула (14) может быть применена к этим областям. Получаем

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy &= \int_0^1 dr \int_{\pi/4}^{3\pi/4} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi + \\ &+ \int_1^{\sqrt{2}} dr \int_{\pi/4}^{\arcsin 1/r} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi + \\ &+ \int_1^{\sqrt{2}} dr \int_{\pi - \arcsin 1/r}^{3\pi/4} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Пример 5. Найти объем тела, вырезаемого из шара  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  цилиндром  $x^2 + y^2 = x$  (рис. 48.10).

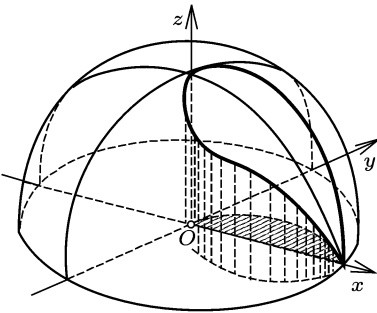


Рис. 48.10

$\Delta$  Обозначим через  $\Omega$  плоскую область, являющуюся внутренностью круга  $x^2 + y^2 \leq x$ . Тело  $G$ , объем которого предлагается вычислить, есть трехмерная область, элементарная относительно оси  $z$ :

$$G = \{(x, y, z) : (x, y) \in \Omega, -\sqrt{1-x^2-y^2} < z < \sqrt{1-x^2-y^2}\}.$$

Объем области  $G$  можно выразить через двойной интеграл, применяя формулу сведения тройного интеграла к повторным:

$$m(G) = \iiint_G dx dy dz = \iint_{\Omega} dx dy \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz = 2 \iint_{\Omega} \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy. \quad (17)$$

Область  $\Omega$  в полярных координатах задается неравенствами  $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ,  $0 < r < \cos \varphi$ . Применяя для вычисления интеграла (17) формулу (13), получаем, что

$$\begin{aligned} m(G) &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} r \sqrt{1-r^2} dr = - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2}{3} (1-r^2)^{3/2} \Big|_0^{\cos \varphi} d\varphi = \\ &= \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^3 \varphi) d\varphi = \frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

**5. Использование цилиндрических и сферических координат для вычисления тройных интегралов.** Пусть в трехмерном пространстве задана прямоугольная декартова система координат  $Oxyz$  (рис. 48.11). Задавая положение проекции  $P'$  точки  $P$  на плоскость  $Oxy$  при помощи полярных координат  $r, \varphi$ , можно положение точки  $P$  задать при помощи трех чисел  $(r, \varphi, \zeta)$ , которые называются *цилиндрическими координатами точки  $P$* . Цилиндрические координаты связаны с декартовыми координатами следующими формулами:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & y &= r \sin \varphi, & z &= \zeta, \\ 0 &\leq \varphi < 2\pi, & r &\geq 0, & -\infty &< \zeta < +\infty. \end{aligned} \quad (18)$$

Геометрическое место точек пространства  $E_{xyz}$ , для которых  $r = \text{const}$ , есть прямой круговой цилиндр радиуса  $r$  с осью  $Oz$ . На плоскостях, параллельных плоскости  $Oxy$ , координата  $\zeta = \text{const}$ . На полуплоскостях, проходящих через ось  $Oz$ , координата  $\varphi = \text{const}$ .

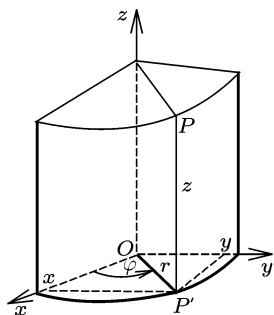


Рис. 48.11

Введем вспомогательное пространство  $E_{r\varphi\zeta}$ , в котором  $r, \varphi, \zeta$  являются декартовыми координатами, и рассмотрим в пространстве  $E_{r\varphi\zeta}$  множество

$$T = \{(r, \varphi, \zeta) : r \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi, -\infty < \zeta < +\infty\}. \quad (19)$$

Отображение  $F: T \rightarrow E_{xyz}$ , определяемое формулами (18), является непрерывно дифференцируемым. Якобиан отображения  $J_F = r$ . Взаимная однозначность отображения и условие неравенства нулю якобиана нарушаются только на множестве  $A = \{(r, \varphi, \zeta) : r = 0, 0 \leq \varphi < 2\pi, \zeta \in \mathbb{R}\}$ , образом которого при отображении (18) является ось  $Oz$ . Пересечение любого ограниченного множества с множеством  $A$  есть некоторое ограниченное линейное множество, и поэтому мера Жордана пересечения равна нулю.

Если  $G \subset E_{xyz}$  есть область, измеримая по Жордану, а  $g$  — ее прообраз при отображении (18), то справедлива формула замены переменных при отображении (18):

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_g f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, \zeta) r dr d\varphi d\zeta. \quad (20)$$

Если в цилиндрических координатах область  $G \subset E_{xyz}$  может быть задана неравенствами  $Z_1(r, \varphi) < \zeta < Z_2(r, \varphi)$ ,  $R_1(\varphi) < r < R_2(\varphi)$ ,  $\alpha < \varphi < \beta$ , то, сводя интеграл (20) к повторным интегралам, полу-



чим следующую формулу:

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{R_1(\varphi)}^{R_2(\varphi)} dr \int_{Z_1(r, \varphi)}^{Z_2(r, \varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, \zeta) r d\zeta. \quad (21)$$

**Пример 6.** Найти объем области  $G$ , граница которой задана уравнением  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 + y^2$ .

$\Delta$  В цилиндрических координатах уравнение границы области имеет

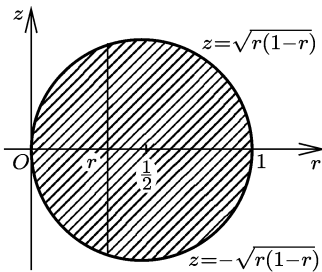


Рис. 48.12

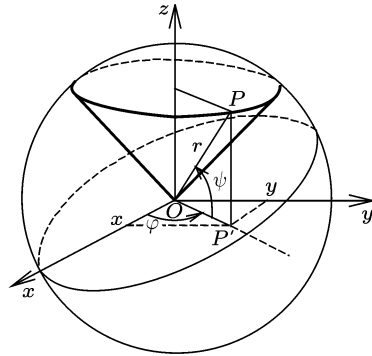


Рис. 48.13

вид  $r = r^2 + \zeta^2$  (рис. 48.12). Область  $G$  задается неравенствами  $-\sqrt{r(1-r)} < \zeta < \sqrt{r(1-r)}$ ,  $0 < r < 1$ ,  $0 < \varphi < 2\pi$ .

Применяя формулу (21), получаем

$$\begin{aligned} m(G) &= \iiint_G dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{-\sqrt{r(1-r)}}^{\sqrt{r(1-r)}} r d\zeta = \\ &= 2\pi \int_0^1 2r^{3/2}(1-r)^{1/2} dr = 8\pi \int_0^{\pi/2} \sin^3 t \cos t \sin t \cos t dt = \\ &= \pi \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t) \sin^2 2t dt = \frac{\pi^2}{4}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Сферические координаты связаны с декартовыми следующими формулами:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \cos \psi, & y &= r \sin \varphi \cos \psi, & z &= r \sin \psi, \\ r &\geq 0, & -\frac{\pi}{2} &\leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, & 0 &\leq \varphi < 2\pi. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь  $r$  — расстояние от начала координат  $O$  до точки  $P(x, y, z)$ ,  $\psi$  — угол, который составляет луч  $OP$  с плоскостью  $Oxy$ ;  $\varphi$  — полярный угол проекции точки  $P$  на плоскость  $Oxy$  (рис. 48.13). Геометрические места точек  $r = \text{const}$  — сферы радиуса  $r$  с центром в начале координат  $O$ ;  $\psi = \text{const}$  — на конусах (прямых круговых) с осью  $Oz$ ;  $\varphi = \text{const}$  — на полуплоскостях, проходящих через ось  $Oz$  (рис. 48.13). Если взять фиксированную сферу  $r = r_0$ , то конусы  $\psi = \text{const}$  будут пересекаться со сферой по параллелям, а полуплоскости  $\varphi = \text{const}$  — по меридианам.

Введем вспомогательное пространство  $E_{r\varphi\psi}$ , в котором  $r, \varphi, \psi$  являются декартовыми координатами, и рассмотрим в пространстве  $E_{r\varphi\psi}$  область

$$T = \left\{ (r, \varphi, \psi): 0 < r < +\infty, -\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}, 0 < \varphi < 2\pi \right\}. \quad (23)$$

Отображение  $F: T \rightarrow E_{xyz}$ , определяемое формулами (22), непрерывно дифференцируемо. Найдем якобиан этого отображения:

$$J_F = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi & x_\psi \\ y_r & y_\varphi & y_\psi \\ z_r & z_\varphi & z_\psi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \psi & -r \sin \varphi \cos \psi & -r \cos \varphi \sin \psi \\ \sin \varphi \cos \psi & r \cos \varphi \cos \psi & -r \sin \varphi \sin \psi \\ \sin \psi & 0 & r \cos \psi \end{vmatrix} = r^2 \cos \psi.$$

Якобиан обращается в нуль при  $r = 0$ ,  $\psi = \frac{\pi}{2}$  и  $\psi = -\frac{\pi}{2}$ .

На соответствующей части границы области  $T$  будет нарушаться и взаимная однозначность отображения. Так как любая ограниченная часть плоскости имеет в  $E_{r\varphi\psi}$  жорданову меру нуль, то замена переменных (22) допустима (см. замечание, п. 3).

Если в сферических координатах область  $G \subset E_{xyz}$  может быть задана неравенствами

$$\alpha < \varphi < \beta, \quad \psi_1(\varphi) < \psi_2(\varphi), \quad R_1(\varphi, \psi) < r < R_2(\varphi, \psi), \quad (24)$$

то тройной интеграл от непрерывной функции по области  $G$  после замены переменных (22) может быть сведен к повторным интегралам. Пусть  $g$  — прообраз области  $G$  при отображении (22), тогда область  $g$  в пространстве  $E_{r\varphi\psi}$  определяется неравенствами (24) и, следовательно, элементарна относительно оси  $r$ , а проекция области  $g$  на плоскость  $E_{\varphi\psi}$  элементарна относительно оси  $\psi$ . Получаем следующую формулу:

$$\begin{aligned} \iiint_G f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_g f(r \cos \varphi \cos \psi, r \sin \varphi \cos \psi, r \sin \psi) r^2 \cos \psi dr d\varphi d\psi = \end{aligned}$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\psi_1(\varphi)}^{\psi_2(\varphi)} d\psi \int_{R_1(\varphi, \psi)}^{R_2(\varphi, \psi)} f(r \cos \varphi \cos \psi, r \sin \varphi \cos \psi, r \sin \psi) r^2 \cos \psi dr. \quad (25)$$

Пример 7. Вычислить массу шара  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ , если плотность  $\rho$  изменяется по закону  $\rho(r) = r$ .

△ Масса  $M$  шара равна следующему тройному интегралу:

$$\iiint_S \rho(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\psi \int_0^a r r^2 \cos \psi dr = \pi a^4. \quad \blacktriangle$$

Пример 8. Найти объем  $m(G)$  области  $G$ , граница которой задана уравнением

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 + y^2 - z^2.$$

△ Заметим, что сечение границы области  $G$  плоскостью  $x = 0$  есть лемниската Бернулли  $(y^2 + z^2)^2 = y^2 - z^2$  (рис. 48.14). Область  $G$

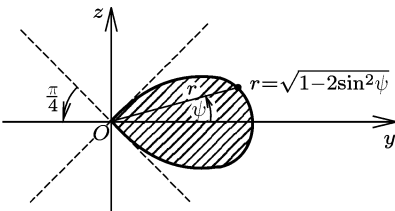


Рис. 48.14

получена вращением лемнискаты относительно оси  $z$ . В сферических координатах граница области  $G$  задается уравнением  $r = \sqrt{\cos^2 \psi - \sin^2 \psi} = \sqrt{1 - 2 \sin^2 \psi}$ . Область  $G$  может быть задана неравенствами

$$0 < \varphi < 2\pi, \quad -\frac{\pi}{4} < \psi < \frac{\pi}{4},$$

$$0 < r < \sqrt{1 - 2 \sin^2 \psi}.$$

Применяя формулу (25), получаем выражение для  $m(G)$ :

$$\begin{aligned} m(G) &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\psi \int_0^{\sqrt{1-2\sin^2\psi}} r^2 \cos \psi dr = \\ &= \frac{4\pi}{3} \int_0^{\pi/4} \cos \psi (1 - 2 \sin^2 \psi)^{3/2} d\psi = \frac{4\pi}{3} \int_0^{1/\sqrt{2}} (1 - 2t^2)^{3/2} dt = \\ &= \frac{4\pi}{3\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \cos^4 u du = \frac{\pi^2}{4\sqrt{2}}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

**6. Криволинейные координаты.** Пусть  $F: \omega \rightarrow \Omega$  есть непрерывно дифференцируемое отображение области  $\omega \subset E_{uv}$  на область  $G \subset E_{xy}$ , удовлетворяющее условиям а)–в), п. 1. Аналитически отображение задается при помощи пары функций

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad (u, v) \in \omega. \quad (26)$$

Предположим для простоты, что область  $\omega$  выпукла, т. е. вместе с любыми двумя точками  $A, B$  она содержит отрезок  $AB$ . Тогда произвольная прямая в плоскости  $E_{uv}$  или целиком лежит в области  $\omega$ , или пересекается с областью по отрезку или лучу. Положение каждой точки области  $\omega$  может быть задано как пересечение двух координатных прямых  $u = u_0$  и  $v = v_0$ . Эти прямые либо целиком лежат в области  $\omega$ , либо пересекают  $\omega$  по некоторым отрезкам или лучам. Предположим для определенности, что пересечения есть отрезки  $AB$  и  $CD$

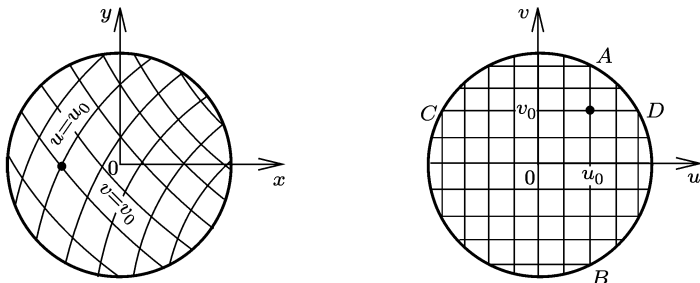


Рис. 48.15

(рис. 48.15). Образы этих отрезков при отображении (26) называют *координатными линиями*  $u = u_0$  и  $v = v_0$ .

Уравнение координатной линии  $u = u_0$ , например, имеет следующий вид:

$$x = \varphi(u_0, v), \quad y = \psi(u_0, v), \quad v_0 - \alpha \leq v \leq v_0 + \beta.$$

Если  $u_0$  пробегает все допустимые в области  $\omega$  значения, то в области  $\Omega$  получается семейство координатных линий  $u = \text{const}$ . Аналогично получается семейство координатных линий  $v = \text{const}$ . В силу взаимной однозначности отображения положение точки  $(x, y) \in \Omega$  однозначно определяется как пересечение координатных линий  $u = u_0$  и  $v = v_0$ . Например, при переходе к полярным координатам положение точки определяется как пересечение окружности  $r = r_0$  и луча  $\varphi = \varphi_0$ .

Если область  $G \subset \Omega$  может быть в криволинейных координатах задана неравенствами

$$a < u < b, \quad \alpha(u) < v < \beta(u),$$

где  $\alpha(u)$  и  $\beta(u)$  — непрерывные на отрезке  $[a, b]$  функции, то ее прообраз  $g = F^{-1}G$  — элементарная область, и после замены переменных двойной интеграл сводится к повторному интегралу:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b du \int_{\alpha(u)}^{\beta(u)} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |J(u, v)| dv.$$

Аналогично можно ввести криволинейные координаты и в пространственной области  $\Omega \subset E_{xyz}$ . Выше были рассмотрены примеры сферических и цилиндрических координат.

**Пример 9.** Вычислить момент инерции относительно начала координат плоской области, ограниченной эллипсом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$\Delta$  Введем обобщенные полярные координаты, связанные с декартовыми координатами следующими формулами:

$$x = ar \cos \varphi, \quad y = br \sin \varphi, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (27)$$

Якобиан отображения (27) равен  $abr$ . Область  $G$ , ограниченная эллипсом, задается неравенствами

$$0 < r < 1, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

Делая замену переменных (27) в двойном интеграле, получаем следующее выражение для центрального момента инерции области:

$$\begin{aligned} I_0 &= \iint_G (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (a^2 r^2 \cos^2 \varphi + b^2 r^2 \sin^2 \varphi) abr dr d\varphi = \\ &= \frac{\pi ab}{4} (a^2 + b^2). \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

## § 49. Несобственные кратные интегралы

**1. Исчерпывающие последовательности множеств.** Пусть  $G$  есть область в  $R^m$ . Последовательность открытых измеримых по Жордану множеств  $\{G_n\}$  будем называть *исчерпывающей множествами*  $G$ , если  $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_n$  и  $\overline{G}_n \subset G_{n+1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

**Лемма 1.** Если  $\{G_n\}$  и  $\{G'_n\}$  есть последовательности, исчерпывающие область  $G \subset R^m$ , то для любого номера  $n$  найдется номер  $k(n)$  такой, что  $\overline{G}_n \subset G'_{k(n)}$ .

$\circ$  Пусть для некоторого множества  $G_N$  не существует такого номера  $k$ , что  $\overline{G}_N \subset G'_k$ . Тогда найдется точка  $x_1 \in \overline{G}_N$  такая, что  $x_1 \notin G'_1$ , найдется точка  $x_2 \in \overline{G}_N$  такая, что  $x_2 \notin G'_2$ . Продолжая эти рассуждения, построим последовательность точек  $\{x_k\}$  такую, что  $x_k \in \overline{G}_N$ ,  $x_k \notin G'_k$ . Так как измеримое по Жордану множество  $\overline{G}_N$  ограничено, то из последовательности  $x_k$  можно в силу теоремы Больцано-Вейерштрасса выделить сходящуюся подпоследовательность. Без ограничения общности можно считать, что и последовательность  $x_k$  сходится, т. е.  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$ . В силу замкнутости множества  $\overline{G}_N$  точка  $x_0 \in \overline{G}_N \subset G_{N+1} \subset G$ .

Так как последовательность множеств  $\{G'_k\}$  исчерпывает множество  $G$ , то найдется такой номер  $r$ , что  $x_0 \in G'_r$ . Открытое множество  $G'_r$  есть окрестность точки  $x_0$ . Поэтому в  $G'_r$  лежит бесконечное множество членов последовательности  $\{x_k\}$ . Следовательно, найдется в этом бесконечном множестве точка  $x_s$  с номером  $s \geq r$ . Тогда  $x_s \in G'_r \subset G'_s$ , так как при  $r < s$  и  $G'_r \subset G'_s$ . Но по построению  $x_s \notin G'_s$ . Полученное противоречие доказывает, что для любого  $n$  существует номер  $k(n)$  такой, что  $G_n \subset G'_{k(n)}$ . •

**2. Несобственные интегралы от неотрицательных функций.** Пусть функция  $f(x)$  непрерывна и неотрицательна в области  $G \subset R^m$ , а последовательность множеств  $\{G_n\}$  исчерпывает множество  $G$ . Предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{G_n} f(x) dx \quad (1)$$

называют *несобственным интегралом от функции  $f(x)$  по множеству  $G$* . Несобственный интеграл обозначается символом  $\int_G f(x) dx$ .

Будем говорить, что несобственный интеграл  $\int_G f(x) dx$  *сходится*, если предел (1) конечен, и что несобственный интеграл *расходится*, если предел (1) равен  $+\infty$ .

**Теорема 1.** *Определение несобственного интеграла от непрерывной неотрицательной в области  $G$  функции корректно: предел (1) для любой исчерпывающей область  $G$  последовательности множеств  $\{G_n\}$  существует и не зависит от выбора исчерпывающей последовательности.*

○ Пусть  $\{G_n\}$  и  $\{G'_n\}$  — две исчерпывающие последовательности. Так как  $\bar{G}_n \subset G_{n+1} \subset G$  и  $\bar{G}'_n \subset G'_{n+1} \subset G$ , а на множестве  $G$  функция  $f(x)$  неотрицательна и непрерывна, то функция  $f(x)$  неотрицательна и непрерывна на любых множествах  $\bar{G}_n$  и  $\bar{G}'_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  Поэтому интегралы  $\int_{G_n} f(x) dx$  и  $\int_{G'_n} f(x) dx$  существуют и числовые последовательности  $\alpha_n = \int_{G_n} f(x) dx$  и  $\beta_n = \int_{G'_n} f(x) dx$  являются монотонно возрастающими. Монотонно возрастающая числовая последовательность всегда имеет конечный или бесконечный предел. Пусть  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$  и  $\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$ .

В силу леммы 1 для любого  $n$  найдется такой номер  $k(n)$ , что  $G_n \subset G'_{k(n)}$ . Так как  $f(x) \geq 0$ , то

$$\alpha_n = \int_{G_n} f(x) dx \leq \int_{G'_{k(n)}} f(x) dx = \beta_{k(n)} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = \beta.$$

Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получаем, что  $\alpha \leq \beta$ . Аналогично доказывается, что  $\beta \leq \alpha$ . Поэтому  $\alpha = \beta$ . ●

Пример 1. Интеграл

$$\int_{0 < x^2 + y^2 < R^2} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^\alpha} \quad (2)$$

сходится при  $\alpha < 1$  и расходится при  $\alpha \geq 1$ .

△ Положим

$$G = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 < R^2\}, \quad G_n = \left\{ (x, y) : \frac{R^2}{n^2} < x^2 + y^2 < R^2 \right\}.$$

Тогда последовательность колец  $G_n$  образует исчерпывающую последовательность для круга  $G$ . Переходя к полярным координатам, получаем

$$\begin{aligned} \iint_G \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^\alpha} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{G_n} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^\alpha} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R/n}^R \frac{r dr}{r^{2\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \int_{R/n}^R r^{1-2\alpha} dr = 2\pi \int_0^R r^{1-2\alpha} dr. \end{aligned}$$

Таким образом, несобственный интеграл (2) сходится в том и только том случае, когда сходится несобственный интеграл

$$\int_0^R r^{1-2\alpha} dr,$$

т. е. при  $1 - 2\alpha > -1$  или  $\alpha < 1$ . ▲

Упражнение 1. Исследовать на сходимость следующие интегралы:

$$\begin{aligned} &\iint_{x^2 + y^2 \geq R^2} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^\alpha}, & \iiint_{0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2} \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^\alpha}, \\ &\iiint_{x^2 + y^2 + z^2 \geq R^2} \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^\alpha}, & \int_{0 < x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2} \frac{dx_1 \dots dx_n}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^\alpha}. \end{aligned}$$

При исследовании кратных несобственных интегралов на сходимость применимы такие же признаки сравнения, как и в одномерном случае.

**3. Несобственные интегралы от знакопеременных функций.** Пусть функция  $f(x)$  непрерывна в области  $G \subset R^m$ ,  $m \geq 2$ . Будем говорить, что функция  $f(x)$  *интегрируема по области  $G$  в несобственном смысле*, если сходятся интегралы  $\int_G f^+(x) dx$  и  $\int_G f^-(x) dx$  от неотрицательных функций  $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$  и  $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$ .

Несобственным интегралом  $\int_G f(x) dx$  в этом случае будем называть число

$$\int_G f(x) dx = \int_G f^+(x) dx - \int_G f^-(x) dx. \quad (3)$$

В определении (3) не случайно оговорено, что  $m \geq 2$ . При  $m = 1$  это определение не совпадает с определением несобственного интеграла (§ 38)  $\int_a^b f(x) dx$  (с особой точкой  $b$ ) как предела  $\lim_{\xi \rightarrow b-0} \int_a^\xi f(x) dx$ .

Функции, интегрируемые в смысле определения § 38 на интервале  $(a, b)$ , могут оказаться неинтегрируемыми в смысле определения (3). Проще всего в этом убедиться, заметив, что функция  $f(x)$  интегрируема в смысле определения (3) в том и только том случае, когда интегрируем ее модуль, так что определение (3) не допускает существования условно сходящихся интегралов. Для функций одной переменной сохраним определение § 38, а для функций двух и большего числа переменных будем использовать определение (3).

Можно показать [2], что функция  $f(x)$  интегрируема в несобственном смысле на множестве  $G \subset R^m$ , где  $m \geq 2$ , в том и только том случае, когда для любой исчерпывающей множество  $G$  последовательности  $\{G_n\}$  существует конечный предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{G_n} f(x) dx$ , не зависящий от выбора исчерпывающей последовательности  $\{G_n\}$ .

## УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ X

1. Показать, что множество точек вида  $\left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}\right)$ ,  $n = 1, \dots$ , имеет в  $R^2$  жорданову меру нуль.

2. Пусть отображение  $T: R^n \rightarrow R^n$  имеет вид  $x_1 = h_1 u_1, \dots, x_n = h_n u_n$ ;  $h_i \geq 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Показать, что для любой измеримой области  $G \subset R^n$  выполнено равенство  $m(TG) = h_1 \dots h_n m(G)$ .

3. Изменить порядок интегрирования в следующих интегралах:

$$\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f(x, y) dy, \quad \int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy.$$

4. Показать, что для непрерывной на  $R$  функции  $f(x)$  при любых  $x \in R$  справедлива формула

$$\int_0^x dt \int_0^t f(u) du = \int_0^x (x-y) f(y) dy.$$

5. Переходя к полярным координатам, вычислить площадь, ограниченную кривой  $(x^2 + y^2)^2 = 3xy$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ .



6. Расставить пределы интегрирования различными способами в следующем интеграле:  $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz$ .

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностью  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 3xyz$ .

8. Найти координаты центра тяжести тела, ограниченного эллипсоидом  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  и плоскостью  $z = 0$ .

9. Вычислить несобственный интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ .

10. Найти ньютоновский потенциал шара  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  в его центре.

11. Пусть функция  $f(x, y)$  непрерывна в прямоугольнике

$$\Pi = \{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\},$$

а функция  $\varphi(x)$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ . Показать, что справедлива формула

$$\iint_{\Pi} \varphi(x) f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d \varphi(x) f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b \varphi(x) f(x, y) dx.$$

## ГЛАВА XI

# КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

### § 50. Криволинейные интегралы

**1. Евклидово пространство.** Из курса аналитической геометрии [7] известно, что в каждой паре точек  $A$  и  $B$  евклидова пространства ставится в соответствие вектор  $\overrightarrow{AB}$ . Для векторов определены операции сложения и умножения на вещественные числа, для любых двух векторов определено их скалярное произведение. Если расстояние между точками определить как  $\rho(A, B) = |\overrightarrow{AB}|$ , то будут удовлетворены все аксиомы метрического пространства и все введенные для метрического пространства понятия переносятся и на евклидово пространство.

Если в евклидовом пространстве фиксирована точка  $O$ , то положение любой точки  $A$  определяется вектором  $\overrightarrow{OA}$ , и евклидово пространство можно отождествить с векторным пространством  $E^3$ . Базис из трех линейно независимых векторов определяет координатную систему в евклидовом пространстве. Предполагается, что пространство ориентировано при помощи правой тройки векторов. Свойства объектов, не зависящие от выбора координатной системы, называются инвариантными.

Множество всех векторов, параллельных евклидовой плоскости, образует линейное двумерное пространство  $E^2$ . Базис из двух линейно независимых векторов определяет координатную систему в  $E^2$ . Правая пара векторов определяет ориентацию  $E^2$ .

**2. Гладкие и кусочно гладкие кривые.** Напомним, что гладкая кривая в  $R^3$  задается векторным уравнением (§ 22)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad (1)$$

где вектор-функция  $\mathbf{r}(t)$  является непрерывно дифференцируемой на отрезке  $[\alpha, \beta]$ , причем  $\mathbf{r}'(t) \neq 0$  на  $[\alpha, \beta]$ . В каждой точке гладкой кривой определена касательная.

Гладкую кривую можно задать и тремя скалярными уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

где функции  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  и  $\chi(t)$  непрерывно дифференцируемы на  $[\alpha, \beta]$  и  $(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2 > 0$  на  $[\alpha, \beta]$ .

В § 22 было определено, что уравнение

$$\rho = \rho(\tau), \quad a \leq \tau \leq b, \quad (2)$$

задает ту же самую гладкую кривую, что и уравнение (1), если оно получено из уравнения (1) при помощи допустимой замены параметра  $t = t(\tau)$ . *Допустимой* называлась такая замена параметра  $t = t(\tau)$ , что функция  $t(\tau)$  непрерывно дифференцируема на отрезке  $[a, b]$ , отображает этот отрезок на отрезок  $[\alpha, \beta]$  и  $t'(\tau) > 0$ .

**З а м е ч а н и е.** Иногда имеет смысл расширить класс допустимых замен параметров. Говорят, что замена параметра  $t = t(\tau)$ ,  $a \leq \tau \leq b$ , допустима, если:

а) найдется такое разбиение отрезка  $[a, b]$  точками  $a_1, \dots, a_{n-1}$ , что функция  $t(\tau)$  является непрерывно дифференцируемой на каждом из интервалов  $(a_{i-1}, a_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;

б)  $t'(\tau) > 0$  на каждом из интервалов  $(a_{i-1}, a_i)$ ;

в) функция  $t(\tau)$  непрерывна на  $[a, b]$ , причем  $t(a) = \alpha$ ,  $t(b) = \beta$ ,  $\mathbf{r}(t(\tau)) = \rho(\tau)$ .

Полезно заметить, что при наложенных ограничениях функция  $t(\tau)$  имеет на отрезке  $[a, b]$  обратную. Обратная замена параметра  $\tau = \tau(t)$  также удовлетворяет условиям а)–в).

Кривая  $\Gamma$  называется *гладкой*, если существует параметрическое уравнение этой кривой типа (1) с непрерывно дифференцируемой функцией  $\mathbf{r}(t)$ , удовлетворяющей условию  $|\mathbf{r}'(t)| > 0$  на  $[\alpha, \beta]$ .

При расширении класса допустимых замен параметра (а тем самым при расширении класса параметризаций) могут встретиться такие уравнения гладкой кривой, которые задаются функциями, не имеющими в некоторых точках производной. Например, уравнения

$$x = \tau, \quad y = \sqrt{1 - \tau^2}, \quad -1 \leq \tau \leq 1,$$

и уравнения

$$x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

определяют одну и ту же гладкую кривую (полуокружность). От второго уравнения к первому можно перейти при помощи допустимой замены параметра  $t = \arcsin \tau$ ,  $-1 \leq \tau \leq 1$ . Функция  $\sqrt{1 - \tau^2}$  не имеет производной при  $\tau = \pm 1$ .

В дальнейшем, как правило, уравнение гладкой кривой будем задавать при помощи непрерывно дифференцируемой вектор-функции  $\mathbf{r}(t)$ .

Если интерпретировать параметр  $t$  как время, то уравнение (1) задает закон движения материальной точки в пространстве  $R^3$ . Вектор скорости  $\mathbf{r}'(t)$  в каждой точке гладкой кривой коллинеарен вектору касательной. Единичный вектор касательной, заданный в некоторой точке гладкой кривой, определяет ориентацию кривой (направление движения точки по кривой).

Точка  $A(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$  называется *началом кривой*, точка  $B(x(\beta), y(\beta), z(\beta))$  — *концом кривой*. У замкнутой кривой начало

и конец совпадают. Если закон движения точки в пространстве задается формулой (1) и при движении по кривой точка проходит через заданную точку  $C \in R^3$  более одного раза, то точка  $C$  называется *точкой самопересечения кривой*. Замкнутую кривую, у которой нет других точек самопересечения, кроме концов, будем называть *простым контуром*.

Для плоской кривой можно считать  $z = 0$ , если выбрать оси  $Ox$  и  $Oy$  в плоскости кривой.

Кусочно гладкая кривая есть непрерывная кривая, распадающаяся на конечное число гладких кривых. Например, границу треугольника или квадрата можно рассматривать как кусочно гладкую кривую (рис. 50.1).

Кривую, начало которой есть точка  $A$ , а конец — точка  $B$ , будем обозначать через  $\Gamma_{AB}$ . Точку кривой, соответствующую значению  $t$  параметра, будем обозначать через  $A_t$ . Если  $t_1 < t_2$ , то будем говорить, что точка  $A_{t_1}$  *предшествует* точке  $A_{t_2}$ , и писать

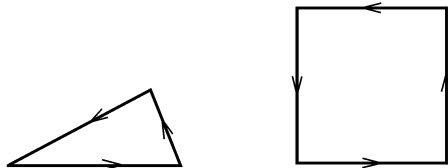


Рис. 50.1

$$A_{t_1} \prec A_{t_2}.$$

Уравнение

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\beta + \alpha - t), \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad (3)$$

определяют кривую  $\Gamma^-$ , *ориентированную противоположно кривой  $\Gamma$* , заданной уравнением (1). Ее начало совпадает с концом  $\Gamma$ , а конец — с началом  $\Gamma$ . Векторы касательных к кривым  $\Gamma$  и  $\Gamma^-$  в каждой точке имеют противоположные направления.

**3. Криволинейные интегралы первого рода.** Пусть на некотором множестве, содержащем кривую  $\Gamma$ , задана непрерывная функция  $R(x, y, z)$ . Если гладкая кривая  $\Gamma$  задана уравнением (1), то определенный интеграл

$$\int_{\alpha}^{\beta} R(x(t), y(t), z(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt$$

будем называть *криволинейным интегралом первого рода от функции  $R(x, y, z)$  по кривой  $\Gamma$*  и обозначать  $\int_{\Gamma} R(x, y, z) ds$ . Таким образом, по определению

$$\int_{\Gamma} R(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} R(x(t), y(t), z(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt. \quad (4)$$

Рассмотрим свойства криволинейного интеграла (4).

Свойство 1. *Криволинейный интеграл первого рода не зависит от параметризации кривой.*

○ Предположим, что совершен переход от уравнения кривой (1) к уравнению  $\rho = \rho(\tau)$ ,  $a \leq \tau \leq b$ , при помощи допустимой замены параметра  $t = t(\tau)$ , удовлетворяющей условиям а)–в). Делая в интеграле (4) замену переменной  $t = t(\tau)$ , получаем, учитывая, что на каждом из интервалов  $(a_{i-1}, a_i)$  функция  $t'(\tau) > 0$ :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} R(x(t), y(t), z(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt &= \\ &= \int_a^b R(x(t(\tau)), y(t(\tau)), z(t(\tau))) \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t(\tau)) \right| t'(\tau) d\tau = \\ &= \int_a^b R(\xi(\tau), \eta(\tau), \zeta(\tau)) |\rho'(\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

После замены параметра можно получить и несобственный интеграл с особыми точками  $a_0, \dots, a_n$ , но форма его такая же, как и у интеграла (4). Поэтому криволинейный интеграл первого рода не зависит от способа параметризации кривой. ●

Свойство 2. *Криволинейный интеграл первого рода не зависит от ориентации кривой  $\Gamma$ , т. е.*

$$\int_{\Gamma} R(x, y, z) ds = \int_{\Gamma^-} R(x, y, z) ds.$$

○ В самом деле, кривую  $\Gamma^-$  можно задать уравнением (3). Делая в интеграле (4) замену переменной  $\tau = \alpha + \beta - t$ , получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} R(x, y, z) ds &= \int_{\alpha}^{\beta} R(x(t), y(t), z(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} R(x(\alpha + \beta - \tau), y(\alpha + \beta - \tau), z(\alpha + \beta - \tau)) |\mathbf{r}'(\alpha + \beta - \tau)| d\tau = \\ &= \int_{\Gamma^-} R(x, y, z) ds. \quad \bullet \end{aligned}$$

Свойство 3. *Криволинейный интеграл аддитивен относительно кривой: если  $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_N)$ , то*

$$\int_{\Gamma} R(x, y, z) ds = \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} R(x, y, z) ds.$$

○ Свойство 3 следует из определения (4) криволинейного интеграла первого рода и свойства аддитивности определенного интеграла относительно области интегрирования. ●

Особенно простое выражение для криволинейного интеграла первого рода получается, если в качестве параметра взять переменную длину дуги кривой. Тогда уравнение кривой имеет вид  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ ,  $0 \leq s \leq S$ , и  $|\mathbf{r}'(s)| = 1$ . Из формулы (4) получаем, что в этом случае

$$\int_{\Gamma} R(x, y, z) ds = \int_0^S R(x(s), y(s), z(s)) ds. \quad (5)$$

**4. Геометрическая интерпретация криволинейных интегралов первого рода.** Запишем интеграл (5) как предел интегральной суммы. Если  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{n-1} < s_n = S$ , то

$$\int_{\Gamma} R(x, y, z) ds = \lim_{l(T) \rightarrow 0} \sum_{n=1}^n R(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i,$$

где  $x_i = x(s_i)$ ,  $y_i = y(s_i)$ ,  $z_i = z(s_i)$ ,  $l(T)$  — мелкость разбиения  $T$  отрезка  $[0, S]$ ,  $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$ .

Как видно из рис. 50.2, разбиению  $T$  отрезка  $[0, S]$  соответствует разбиение кривой  $\Gamma$  на дуги  $\Gamma_{s_{i-1}s_i}$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Если функция

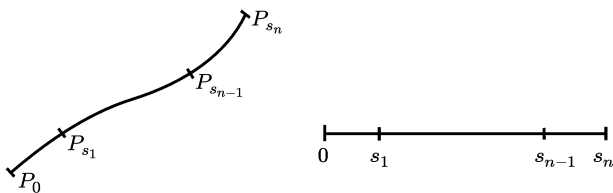


Рис. 50.2

$R(x, y, z)$  неотрицательна, то ее можно интерпретировать как линейную плотность материальной кривой  $\Gamma$ , а криволинейный интеграл  $\int_{\Gamma} R(x, y, z) ds$  — как массу этой кривой.

Аналогичным образом можно определить при помощи криволинейных интегралов координаты центра тяжести, осевые и центральные моменты инерции материальных кривых.

**Пример 1.** Найти момент инерции полуокружности  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $y \geq 0$ , относительно оси  $x$ , если линейная плотность  $R(x, y) = |x|$ .

$\Delta$  Параметризуем окружность, полагая  $x = \cos s$ ,  $y = \sin s$ ,  $0 \leq s \leq \pi$ . По определению осевой момент инерции  $I_x$  есть следующий криволинейный интеграл:

$$I_x = \int_{\Gamma} y^2 R(x, y) ds = \int_0^{\pi} \sin^2 s |\cos s| ds = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 s \cos s ds = \frac{2}{3}. \quad \blacktriangle$$

**5. Криволинейные интегралы второго рода.** Пусть  $\Omega$  — область трехмерного пространства, в каждой точке которой задан вектор. Тогда говорят, что в области  $\Omega$  задано *векторное поле*. Если фиксирована декартова прямоугольная система координат, то векторное поле можно задать при помощи трех скалярных функций:  $\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ . Если функции  $P, Q, R$  непрерывны в области  $\Omega$ , то и поле  $\mathbf{F}$  называется *непрерывным* в области  $\Omega$ . Если функции  $P, Q, R$  непрерывно дифференцируемы в области  $\Omega$ , то и поле  $\mathbf{F}$  называется *непрерывно дифференцируемым* в области  $\Omega$ . Если можно так выбрать декартову систему координат, что функция  $R \equiv 0$ , а функции  $P$  и  $Q$  не зависят от координаты  $z$ , то векторное поле  $\mathbf{F}$  называется *плоским*. В этом случае  $\mathbf{F} = (P(x, y), Q(x, y))$ .

Пусть в области  $\Omega \subset R^3$  определено непрерывное векторное поле  $\mathbf{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ , а  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ , есть уравнение гладкой (кусочно гладкой) кривой  $\Gamma$ , лежащей в области  $\Omega$ . Определенный интеграл

$$\int_{\alpha}^{\beta} (\mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)), \mathbf{r}'(t)) dt = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) z'(t)) dt$$

будем называть *криволинейным интегралом второго рода от векторного поля  $\mathbf{F}$  по кривой  $\Gamma$*  и обозначать  $\int_{\Gamma} (\mathbf{F}, d\mathbf{r})$  или  $\int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz$ . Таким образом, по определению

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = \int_{\alpha}^{\beta} (\mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)), \mathbf{r}'(t)) dt, \quad (6)$$

или

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) z'(t)) dt. \quad (7)$$

Если система декартовых координат фиксирована, то, полагая в формуле (7)  $Q = R = 0$ , получаем

$$\int_{\Gamma} P dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt. \quad (8)$$

Аналогично

$$\int_{\Gamma} Q dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) dt, \quad (9)$$

$$\int_{\Gamma} R dz = \int_{\alpha}^{\beta} R(x(t), y(t), z(t)) z'(t) dt. \quad (10)$$

Определенный интеграл, стоящий в правой части формулы (8), называют *криволинейным интегралом второго рода от функции*  $P(x, y, z)$  *по кривой*  $\Gamma$ , символ  $\int_{\Gamma} P dx$  служит обозначением для этого криволинейного интеграла. В отличие от криволинейного интеграла  $\int_{\Gamma} (\mathbf{F}, d\mathbf{r})$  интеграл  $\int_{\Gamma} P dx$  зависит от выбора декартовой системы координат.

Рассмотрим свойства криволинейного интеграла (6).

**Свойство 1.** *Криволинейный интеграл второго рода не зависит от способа параметризации кривой.*

○ Это свойство доказывается точно так же, как и соответствующее свойство для криволинейного интеграла первого рода. ●

**Свойство 2.** *Криволинейный интеграл второго рода при изменении ориентации кривой на противоположную меняет знак, т. е.*

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = - \int_{\Gamma^{-}} (\mathbf{F}, d\mathbf{r}).$$

○ Пусть кривая  $\Gamma$  задана векторным уравнением  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ , а кривая  $\Gamma^{-}$  задана уравнением  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}(\alpha + \beta - t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ . Тогда  $\boldsymbol{\rho}'(t) = -\mathbf{r}'(\alpha + \beta - t)$ . Для краткости положим  $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^{-}} (\mathbf{F}, d\boldsymbol{\rho}) &= \int_{\alpha}^{\beta} (\mathbf{F}(\boldsymbol{\rho}(t)), \boldsymbol{\rho}'(t)) dt = \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} (\mathbf{F}(\mathbf{r}(\alpha + \beta - t)), \mathbf{r}'(\alpha + \beta - t)) dt = \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} (\mathbf{F}(\mathbf{r}(\tau)), \mathbf{r}'(\tau)) d\tau = - \int_{\Gamma} (\mathbf{F}, d\mathbf{r}). \quad \bullet \end{aligned}$$

**Свойство 3.** *Криволинейный интеграл второго рода аддитивен относительно кривой.*

○ Это свойство доказывается так же, как и для криволинейных интегралов первого рода. ●

В плоском случае выражения (6)–(10) для криволинейных интегралов упрощаются:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) &= \int_{\Gamma} P dx + Q dy = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t)) dt, \quad (11) \end{aligned}$$



$$\int_{\Gamma} P dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t)) x'(t) dt, \quad (12)$$

$$\int_{\Gamma} Q dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(x(t), y(t)) y'(t) dt. \quad (13)$$

В том случае, когда плоская кривая  $\Gamma_{AB}$  задана как график

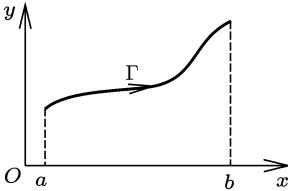


Рис. 50.3

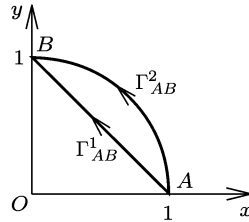


Рис. 50.4

непрерывно дифференцируемой на отрезке  $[a, b]$  функции  $y = f(x)$  (рис. 50.3), формула (12) приобретает особенно простой вид:

$$\int_{\Gamma_{AB}} P(x, y) dx = \int_a^b P(x, f(x)) dx. \quad (14)$$

**Замечание.** Определенный интеграл в правой части формулы (14) имеет смысл не только в том случае, когда функция  $f(x)$  непрерывно дифференцируема на  $[a, b]$ , но и в более общем случае, когда функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ . В этом последнем случае будем считать, что криволинейный интеграл  $\int_{\Gamma_{AB}} P dx$  есть по определению определенный интеграл, стоящий в правой части формулы (14).

**Пример 2.** Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{\Gamma_{AB}} y dx - x dy \quad (15)$$

по отрезку  $\Gamma_{AB}^1$  с концами  $A(0, 1)$  и  $B(1, 0)$  и по дуге окружности  $\Gamma_{AB}^2$  (рис. 50.4).

△ Зададим отрезок  $\Gamma_{AB}^1$  параметрическими уравнениями  $x = t, y = 1 - t, 0 \leq t \leq 1$ . Применяя формулу (11), получаем, что

$$\int_{\Gamma_{AB}^1} y dx - x dy = \int_0^1 [(1-t)(t)' - t(1-t)'] dt = \int_0^1 (1-t+t) dt = 1.$$

Зададим дугу окружности  $\Gamma_{AB}^2$  параметрическими уравнениями  $x = \sin t$ ,  $y = \cos t$ ,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{AB}^2} y dx - x dy &= \int_0^{\pi/2} [\cos t (\sin t)' - \sin t (\cos t)'] dt = \\ &= \int_0^{\pi/2} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \frac{\pi}{2} \neq 1. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Пример 3. По тем же кривым, что и в примере 2, вычислить  $\int_{\Gamma_{AB}} x dx + y dy$ ,  $A = (0, 1)$ ,  $B = (1, 0)$ .

△ Применяя формулу (11), получаем

$$\int_{\Gamma_{AB}^1} x dx + y dy = \int_0^1 [t t' + (1-t)(1-t)'] dt = \int_0^1 (2t - 1) dt = 0.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{AB}^2} x dx + y dy &= \int_0^{\pi/2} [\sin t (\sin t)' + \cos t (\cos t)'] dt = \\ &= \int_0^{\pi/2} (\sin t \cos t - \cos t \sin t) dt = 0. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

В примере 2 криволинейные интегралы по кривым с одинаковыми концами оказались неравными, а в примере 3 — равными.

Упражнение 1. Показать, что для любой кусочно гладкой кривой  $\Gamma_{AB}$  выполнено равенство

$$\int_{\Gamma_{AB}} x dx + y dy = \frac{x_B^2 - x_A^2}{2} + \frac{y_B^2 - y_A^2}{2}.$$

**6. Механический смысл криволинейного интеграла второго рода. Работа силы.** Пусть  $\mathbf{F}(x, y, z)$  — силовое поле в области  $\Omega \in R^3$  и пусть кусочно гладкая кривая  $\Gamma_{AB} \subset \Omega$  задана уравнением  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ . Если интерпретировать уравнение  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ , как закон движения материальной точки, то при таком движении сила, действующая на материальную точку, должна совершать работу. В том случае когда материальная точка движется в постоянном силовом поле с постоянной скоростью по прямой, параллельной вектору  $\mathbf{I}$ ,  $|\mathbf{I}| = 1$ , работа силы равна  $(\mathbf{F}, \mathbf{I}) \Delta s$ , где  $\Delta s$  — пройденный точкой путь.

Пусть теперь поле силы непостоянно и точка движется в силовом поле по произвольной кусочно гладкой кривой  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ .

Пусть  $T$  — произвольное разбиение отрезка  $[\alpha, \beta]$  точками  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ . Ему соответствует разбиение кривой  $\Gamma_{AB}$  точками  $A = A_0 < A_1 < \dots < A_n = B$ .

При движении по дуге  $\Gamma_{A_{i-1}A_i}$  заменим силу  $\mathbf{F}$  постоянной силой  $\mathbf{F}(x(t_i), y(t_i), z(t_i))$ , а движение по дуге  $\Gamma_{A_{i-1}A_i}$  — движением по касательной с постоянной скоростью  $\mathbf{r}'(t_i)$ . Тогда работа силы при движении по дуге  $\Gamma_{A_{i-1}A_i}$  приближенно равна  $(\mathbf{F}(x(t_i), y(t_i), z(t_i)), \mathbf{r}'(t_i) \Delta t_i)$ . Работа силы при движении материальной точки по кривой  $\Gamma_{AB}$  приближенно равна следующей сумме:

$$\mathcal{A}_T = \sum_{i=1}^n (\mathbf{F}(x(t_i), y(t_i), z(t_i)), \mathbf{r}'(t_i)) \Delta t_i,$$

где  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ .

Предел суммы  $\mathcal{A}_T$  при мелкости разбиения  $l(T)$ , стремящейся к нулю, естественно назвать *работой силы*  $\mathbf{F}$  при движении точки по кривой  $\Gamma_{AB}$ . Таким образом, работа силы

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \lim_{l(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\mathbf{F}(x(t_i), y(t_i), z(t_i)), \mathbf{r}'(t_i)) \Delta t_i = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (\mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)), \mathbf{r}'(t)) dt = \int_{\Gamma_{AB}} (\mathbf{F}, d\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (16)$$

**Пример 4.** Найти работу силы  $\mathbf{F} = -\mathbf{r}/r^3$ ,  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ , при движении точки по кривой  $\Gamma_{AB}$ . Кривая  $\Gamma_{AB}$  не проходит через начало координат.

$\Delta$  Пусть кусочно гладкая кривая  $\Gamma_{AB}$  задается параметрическим уравнением  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ . Работу силы найдем при помощи формулы (16):

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{\Gamma_{AB}} (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = - \int_{\alpha}^{\beta} \left( \frac{\mathbf{r}(t)}{r^3(t)}, \mathbf{r}'(t) \right) dt = - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{r^3(t)} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} r^2(t) dt = \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{r'(t)}{r^2(t)} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \left( \frac{1}{r(t)} \right)' dt = \frac{1}{r(\beta)} - \frac{1}{r(\alpha)} = \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

## § 51. Формула Грина на плоскости

**1. Ориентация границы плоской области.** Напомним, что областью в  $R^2$  называется открытое связное множество, а замыкание области получается присоединением к области ее границы.

Теорема Жордана утверждает, что любая простая (без точек самопересечения) замкнутая кривая разделяет плоскость на две области, ограниченную и неограниченную, общей границей которых она является.

Упражнение 1. Доказать теорему Жордана для простой замкнутой ломаной.

Указание. После удаления из плоскости простой замкнутой ломаной  $L$  возникает открытое множество, точки которого можно разбить на два непересекающихся класса. Точки первого класса обладают тем свойством, что проведенные из них лучи пересекают ломаную нечетное число раз (исключением могут быть лучи, параллельные звеньям ломаной). Точки

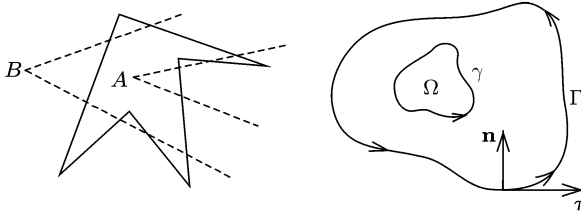


Рис. 51.1

второго класса отличаются тем, что проведенные из них лучи пересекают ломаную четное число раз (рис. 51.1).

Область  $\Omega \subset R^2$  называется *односвязной*, если для любого простого контура  $\gamma \subset \Omega$  ограничиваемая этим контуром область  $\Omega_1 \subset \Omega$ . В частности, область на рис. 51.1 односвязна.

Будем говорить, что простой контур  $\Gamma$  *ориентирован положительно*, если при обходе контура ограничиваемая им область остается слева (рис. 51.1). Противоположно ориентированный контур будем обозначать через  $\Gamma^-$ .

**2. Формула Грина.** Пусть функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  непрерывно дифференцируемы в односвязной области  $\Omega \subset R^2$ , а простой кусочно гладкий контур  $\Gamma \subset \Omega$  ограничивает область  $G \subset \Omega$ . Тогда справедлива формула Грина

$$\int_{\partial G} P dx + Q dy = \iint_G \left[ \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right] dx dy, \quad (1)$$

где  $\partial G$  есть положительно ориентированная граница области  $G$ .

○ Докажем сначала формулу (1) в наиболее простом случае, когда область  $G$  еще и элементарна относительно обеих координатных осей, т. е. существуют такие кусочно непрерывно дифференцируемые и непрерывные функции  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , и  $\alpha(y)$ ,  $\beta(y)$ ,  $y \in [c, d]$ , что (рис. 51.2)

$$\begin{aligned} \overline{G} &= \{(x, y): a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\} = \\ &= \{(x, y): c \leq y \leq d, \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\}. \end{aligned}$$

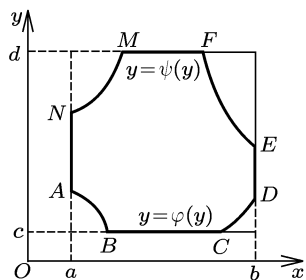


Рис. 51.2

Примерами таких областей являются внутренности круга, эллипса, треугольника.

Применяя формулу сведения двойного интеграла к повторному, получаем равенства

$$\begin{aligned}
 - \iint_G \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy &= \\
 &= - \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy = \int_a^b P(x, \varphi(x)) dx - \int_a^b P(x, \psi(x)) dx = \\
 &= \int_{ABCD} P dx + \int_{DE} P dx + \int_{EFMN} P dx + \int_{NA} P dx = \int_{\partial G} P dx. \quad (2)
 \end{aligned}$$

При выводе формулы (2) была использована формула (14), § 50 для криволинейного интеграла  $\int_{\Gamma} P dx$  по кривой  $\Gamma$ , являющейся графиком функции. Добавленные интегралы по вертикальным отрезкам  $DE$  и  $NA$  равны нулю, так как на этих отрезках  $x = \text{const}$  (см. (12) в § 50).

Аналогично доказывается формула

$$\iint_G \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy = \int_{\partial G} Q(x, y) dy. \quad (3)$$

Складывая равенства (2) и (3), получаем формулу Грина (1).

Пусть теперь область  $G$  по-прежнему ограничена кусочно гладкой замкнутой кривой  $\partial G$ . Предположим, что ее можно кусочно гладкой простой кривой  $\Gamma$  (перегородкой) разбить на две области простейшего

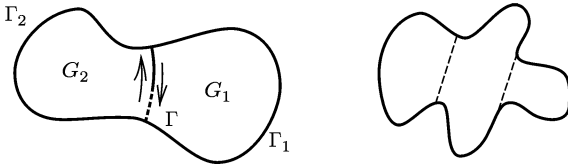


Рис. 51.3

вида, рассмотренные выше (рис. 51.3). Тогда

$$\partial G_1 = \Gamma \cup \Gamma_1, \quad \partial G_2 = \Gamma^- \cup \Gamma_2.$$

Применяя формулу Грина в каждой из областей  $G_1$  и  $G_2$ , получаем

$$\begin{aligned}
 \iint_{G_1} \left[ \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right] dx dy &= \int_{\partial G_1} P dx + Q dy = \\
 &= \int_{\Gamma_1} P dx + Q dy + \int_{\Gamma} P dx + Q dy, \\
 \iint_{G_2} \left[ \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right] dx dy &= \int_{\Gamma_2} P dx + Q dy + \int_{\Gamma^-} P dx + Q dy.
 \end{aligned}$$

Складывая эти два равенства и учитывая, что криволинейные интегралы по противоположно ориентированным кривым  $\Gamma$  и  $\Gamma^-$  взаимно уничтожаются, получаем, что формула Грина (1) верна для области  $G = G_1 \cup G_2$ .

При помощи математической индукции теперь легко обобщить формулу Грина на односвязную область, которая при помощи  $n - 1$  непересекающихся гладких перегородок разбивается на области  $G_1, \dots, G_n$  простейшего вида (рис. 51.3). В частности, формула Грина обобщается на многоугольные области, ограниченные простыми замкнутыми ломаными. В общем случае можно доказать формулу Грина, аппроксимируя область с кусочно гладкой границей многоугольной областью. ●

**3. Формула Грина для многосвязной области.** Формула Грина может быть обобщена и на случай многосвязной ( $n$ -связной) области, ограниченной внешним контуром  $\Gamma$  и непересекающимися

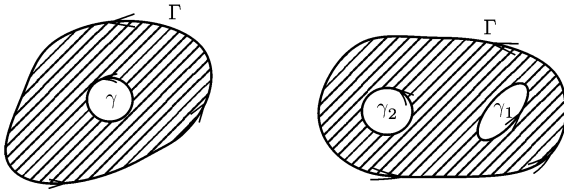


Рис. 51.4

внутренними контурами  $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ . Все контуры предполагаются кусочно гладкими. На рис. 51.4 изображены ограниченные двусвязная и трехсвязная области.

Внешний контур ориентируем так, чтобы при его обходе область оставалась слева. Так ориентированный контур будем обозначать  $\Gamma$ . А внутренние контуры ориентируем так, чтобы при их обходе область  $G$  оставалась справа. Будем писать

$$\partial G = \left( \bigcup_{i=1}^n \gamma_i^- \right) \cup \Gamma.$$

Пусть непрерывно дифференцируемое поле  $(P(x, y), Q(x, y))$  задано в двусвязной области  $G$ , ограниченной кусочно гладкими простыми контурами: внешним  $\Gamma$  и внутренним  $\gamma$  (рис. 51.4).

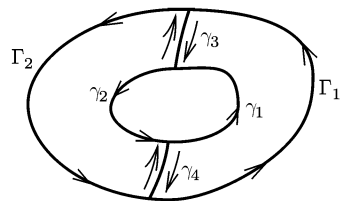


Рис. 51.5

При помощи гладких перегородок  $\gamma_3$  и  $\gamma_4$  (рис. 51.5) разделим двусвязную область  $G$  на две односвязных,  $G_1$  и  $G_2$ . Как видно из рис. 51.5,

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2.$$

Применяя к  $G_1$  и  $G_2$  формулу Грина для односвязной области, получаем (рис. 51.5)

$$\iint_{G_1} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial G_1} P dx + Q dy = \left( \int_{\Gamma_1} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_1^-} + \int_{\gamma_4} \right) (P dx + Q dy),$$

$$\iint_{G_2} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial G_2} P dx + Q dy = \left( \int_{\Gamma_2} + \int_{\gamma_4^-} + \int_{\gamma_2^-} + \int_{\gamma_3^-} \right) (P dx + Q dy),$$

где в правой части употреблено сокращенное обозначение для суммы четырех криволинейных интегралов по соответствующим кривым. Складывая эти равенства и учитывая, что криволинейные интегралы по противоположно ориентированным кривым взаимно уничтожаются, получаем

$$\iint_G \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} P dx + Q dy + \int_{\gamma^-} P dx + Q dy = \int_{\partial G} P dx + Q dy.$$

Формально формула Грина для двусвязной области имеет тот же вид, что и для односвязной, если  $\int_{\partial G} P dx + Q dy$  понимать как сумму криволинейных интегралов по  $\Gamma$  и  $\gamma^-$ .

Индукцией эта формула Грина обобщается и на  $n$ -связную область:

$$\iint_G \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial G} P dx + Q dy = \int_{\Gamma} P dx + Q dy + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\gamma_i^-} P dx + Q dy.$$

#### 4. Применение формулы Грина к вычислению площадей.

Полагая в формуле Грина (1)  $Q = x$ ,  $P = -y$ , получаем формулу для вычисления площади, ограниченной гладким контуром,

$$m(G) = \frac{1}{2} \int_{\partial G} x dy - y dx. \quad (4)$$

Иногда при практическом применении формулы (4) полезно воспользоваться тем, что

$$x dy - y dx = (x^2 + y^2) d\left(\arctg \frac{y}{x}\right).$$

Пример 1. Найти площадь, ограниченную кривой (рис. 51.6)

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}, \quad 0 \leq t < +\infty.$$

△ Эта кривая (декартов лист), как нетрудно показать, симметрична относительно прямой  $y = x$ . Поэтому можно ограничиться вычислением площади половинки листа, для которой  $0 \leq t \leq 1$ . Получаем

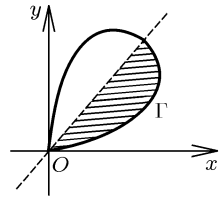


Рис. 51.6

$$\begin{aligned} x dy - y dx &= (x^2 + y^2) d\left(\arctg \frac{y}{x}\right) = \\ &= \frac{9a^2 t^2 (1+t^2)}{(1+t^3)^2} d(\arctg t) = \frac{9a^2 t^2}{(1+t^3)^2} dt = -3a^2 d\left(\frac{1}{1+t^3}\right). \end{aligned}$$

По формуле (4) площадь половинки листа Декарта равна

$$m(G) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} x dy - y dx = -\frac{3a^2}{2} \int_0^1 d\left(\frac{1}{1+t^3}\right) = \frac{3a^2}{4},$$

а искомая площадь равна  $\frac{3a^2}{2}$ . ▲

**5. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования (плоский случай).** Пусть в области  $G \subset R^2$  задано непрерывное векторное поле  $(P(x, y), Q(x, y))$ . Например, это может быть силовое поле. Возьмем в области  $G$  две произвольные точки,  $A(x_0, y_0)$  и  $B(x, y)$ . Соединим эти две точки кусочно гладкой кривой  $\Gamma_{AB}$ , лежащей в  $G$ . Вычислим интеграл  $\int_{\Gamma_{AB}} P dx + Q dy$ . Этот интеграл можно интерпретировать как работу силы при движении точки по кривой  $\Gamma_{AB}$ . Вообще говоря,  $\int_{\Gamma_{AB}} P dx + Q dy$  зависит как от точек  $A$  и  $B$ , так и от пути, по которому мы из точки  $A$  приходим в точку  $B$ . Наша цель — выяснить условия независимости величины этого интеграла (работы силы) от пути интегрирования.

**Теорема 1.** Следующие три условия эквивалентны:

а) для любой замкнутой ломаной  $L \subset G$

$$\int_L P dx + Q dy = 0; \quad (5)$$

б)  $\int_{L_{AB}} P dx + Q dy$  не зависит от ломаной  $L_{AB} \subset G$ , соединяющей точки  $A$  и  $B$ ;

в) поле  $(P(x, y), Q(x, y))$  потенциально, т. е. существует такая непрерывно дифференцируемая функция  $U(x, y)$  (потенциал поля), что

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = dU,$$



$$P(x, y) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial x}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial y}.$$

○ Доказательство проведем по круговой схеме: а)  $\Rightarrow$  б)  $\Rightarrow$  в)  $\Rightarrow$  а).

1) Докажем, что а)  $\Rightarrow$  б). Пусть выполнено условие а). Возьмем две произвольных точки,  $A$  и  $B$ , в области  $G$ . Соединим их ломаной  $L_{AB}$ . Пусть  $L'_{AB}$  — любая другая ломаная, соединяющая точки  $A$  и  $B$ . Тогда  $L = L_{AB} + L'_{BA}$  есть замкнутая ломаная. В силу условия а) имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \int_L P dx + Q dy = \int_{L_{AB}} P dx + Q dy + \int_{L'_{BA}} P dx + Q dy = \\ &= \int_{L_{AB}} P dx + Q dy - \int_{L'_{AB}} P dx + Q dy, \\ \int_{L_{AB}} P dx + Q dy &= \int_{L'_{AB}} P dx + Q dy, \end{aligned}$$

т. е. интеграл  $\int_{L_{AB}} P dx + Q dy$  не зависит от ломаной  $L_{AB}$ , соединяющей точки  $A$  и  $B$ .

2) Докажем, что б)  $\Rightarrow$  в). Пусть  $\int_{L_{AB}} P dx + Q dy$  не зависит от ломаной  $L_{AB}$ , соединяющей точки  $A$  и  $B$ . Фиксируем точку  $A(x_0, y_0)$ , а точку  $B(x, y)$  будем считать переменной. Тогда  $\int_{L_{AB}} P dx + Q dy$

зависит только от точки  $B$ , и, следовательно, в области  $G$  определена функция

$$U(x, y) = \int_{L_{AB}} P dx + Q dy.$$

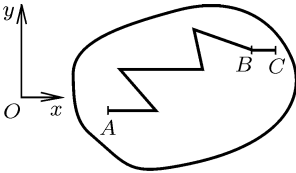


Рис. 51.7

Покажем, что функция  $U(x, y)$  — потенциал поля. Соединим точки  $B(x, y)$  и  $C(x + \Delta x, y)$  отрезком  $BC$ , лежащим в области  $G$  (рис. 51.7). Это всегда можно сделать при достаточно малом  $\Delta x$ , так как  $G$  — открытое множество. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} (u(x + \Delta x, y) - U(x, y)) &= \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left[ \int_{L_{ABC}} P dx + Q dy - \int_{L_{AB}} P dx + Q dy \right] = \\ &= \frac{1}{\Delta x} \int_{BC} P dx + Q dy = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} P(\xi, y) d\xi. \end{aligned}$$

Применяя при фиксированном  $y$  к непрерывной функции  $P(\xi, y)$  интегральную теорему о среднем, получаем

$$\frac{1}{\Delta x} (U(x + \Delta x, y) - U(x, y)) = P(x + \theta \Delta x, y), \quad \text{где } 0 < \theta < 1.$$

Воспользовавшись непрерывностью функции  $P(x, y)$  и переходя к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$ , получаем

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{U(x + \Delta x, y) - U(x, y)}{\Delta x} = P(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Аналогично доказывается, что  $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y)$ .

Так как  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  — непрерывные в области  $G$  функции, то функция  $U(x, y)$  непрерывно дифференцируема в области  $G$ .

3) Докажем, что  $\text{в}) \Rightarrow \text{а})$ . Это следует из более общего утверждения: если  $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = dU$ , то для любого кусочно гладкого контура  $\gamma$  справедливо равенство  $\int_{\gamma} P dx + Q dy = 0$ . Действительно, если  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ , есть уравнение кривой  $\gamma$ , то

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} P dx + Q dy &= \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t)] dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[ \frac{\partial U}{\partial x}(x(t), y(t)) x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}(x(t), y(t)) y'(t) \right] dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt} [U(x(t), y(t))] dt = U(x(\beta), y(\beta)) - U(x(\alpha), y(\alpha)) = 0, \end{aligned}$$

так как начало и конец замкнутой кривой совпадают. ●

*Следствие.* Если  $\int_{\gamma} P dx + Q dy$  равен нулю по любой замкнутой ломаной, то этот интеграл равен нулю и по любому кусочно гладкому контуру  $\gamma$ .

○ Пусть  $\int_L P dx + Q dy = 0$  для любой замкнутой ломаной  $L$ . Тогда существует потенциал  $U(x, y)$  и

$$P dx + Q dy = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) dx + \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) dy.$$

Следовательно,  $\int_{\gamma} P dx + Q dy = 0$ . ●

Теорема 1 не дает практического способа для выяснения вопроса о потенциальности поля  $(P, Q)$ . Для односвязной области  $G$  докажем эффективный критерий, основанный на использовании формулы Грина.

Теорема 2. Для того чтобы дифференцируемое в области  $G$  поле было потенциальным, необходимо, а в случае односвязной области и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}. \quad (6)$$

○ Необходимость. Пусть поле  $(P(x, y), Q(x, y))$  непрерывно дифференцируемо и потенциально. Тогда

$$P(x, y) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial x}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial y},$$

откуда

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y \partial x}.$$

Так как производные  $\partial P/\partial y$  и  $\partial Q/\partial x$  непрерывны, то смешанные производные  $U_{xy}$ ,  $U_{yx}$  также непрерывны, а следовательно, равны. Условие (6) выполнено в области  $G$ .

Достаточность. Пусть поле  $(P, Q)$  задано в односвязной области  $G \subset \mathbb{R}^2$  и выполнено условие (6).

Возьмем произвольную простую замкнутую ломаную  $L \subset G$ . Так как область  $G$  односвязна, то ограничиваемая ломаной  $L$  область  $\Omega \subset G$  и к ней применима формула Грина

$$\int_L P dx + Q dy = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0. \quad (7)$$

Таким образом, интеграл (7) равен нулю для любой простой замкнутой ломаной  $L$ .

Теперь нетрудно показать, что интеграл (7) равен нулю для любой замкнутой ломаной (даже имеющей точки самопересечения).

Для трехзвенной ломаной интеграл (7) всегда равен нулю, если эта ломаная замкнута. Если три ее вершины не лежат на одной прямой, то трехзвенная ломаная будет простой и по доказанному интеграл (7) равен нулю. Если же все три вершины лежат на одной прямой, то и в этом случае, как легко видеть, интеграл равен нулю (рис. 51.8).

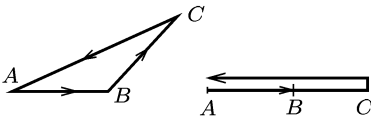


Рис. 51.8

То, что интеграл (7) равен нулю для любой  $n$ -звенной замкнутой ломаной, докажем индукцией по числу звеньев ломаной.

Пусть выполнено условие (6) и интеграл (7) равен нулю по любой замкнутой ломаной, число звеньев которой меньше, чем  $n$ . Покажем тогда, что криволинейный интеграл (7) равен нулю и по любой замкнутой  $n$ -звенной ломаной. Если ломаная  $L(A_1, A_2, \dots, A_n, A_1)$  простая, то это уже доказано. Пусть у  $L$  есть точки самопересечения. Предположим, что два звена,  $A_1A_2$  и  $A_kA_{k+1}$ , пересекаются. Тогда либо они пересекаются в единственной точке  $B$  (рис. 51.8), либо эти два звена

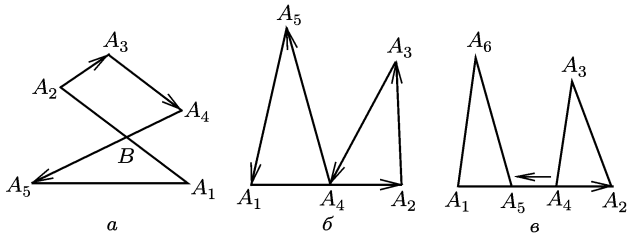


Рис. 51.9

пересекаются по целому отрезку. В этом случае точки  $A_1, A_2, A_k, A_{k+1}$  лежат на одной прямой (рис. 51.9).

Рассмотрим первый случай. За последующими рассуждениями проще следить по рис. 51.9. В случаях *a* и *б* ломаная  $L$  будет объединением замкнутых ломаных  $L_1(B, A_{k+1}, \dots, A_n, A_1, B)$  и  $L_2(B, A_2, \dots, A_k, B)$ . Количество звеньев  $L_1$  и  $L_2$  меньше  $n$ . По предположению индукции интеграл (7) по каждой из этих ломаных равен нулю. Следовательно, он равен нулю и по их объединению — ломаной  $L$ .

Аналогично рассматривается и второй случай, когда точки  $A_1, A_2, A_k, A_{k+1}$  лежат на одной прямой и отрезки  $A_1A_2$  и  $A_kA_{k+1}$  пересекаются. Без ограничения общности можно считать, что точка  $A_k$  лежит на отрезке  $A_1A_2$ . Тогда  $L$  есть объединение замкнутых ломаных  $L_1(A_k, A_{k+1}, \dots, A_n, A_1, A_k)$  и  $L_2(A_k, A_2, \dots, A_{k-1}, A_k)$ , имеющих меньше, чем  $n$  звеньев. Интеграл (7) по  $L_1$  и  $L_2$  равен нулю. Следовательно, он равен нулю и по ломаной  $L$ .

Так как интеграл (7) равен нулю по любой замкнутой ломаной  $L \subset G$ , то в силу теоремы 1 поле  $(P, Q)$  будет потенциальным. ●

Заметим, что условие односвязности области существенно для справедливости теоремы 2. Подтвердим это следующим примером.

**Пример 2.** Показать, что непрерывно дифференцируемое при  $x^2 + y^2 > 0$  плоское векторное поле

$$P(x, y) = -\frac{\omega}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{\omega}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (8)$$

удовлетворяет условию (6), но не является потенциальным при  $\omega \neq 0$ .

Δ Условие (6) выполняется, так как

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\omega}{2\pi} \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Рассмотрим окружность  $C_R$ , заданную уравнениями  $x = R \cos t$ ,  $y = R \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Тогда

$$\int_{C_R} P dx + Q dy = \frac{\omega}{2\pi} \int_{C_R} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = \omega$$

и в силу теоремы 1 поле  $(P, Q)$  не может быть потенциальным.

Теорема 2 неприменима, поскольку поле определено в неодносвязной области  $G = \{(x, y): x^2 + y^2 > 0\}$ . ▲

**Замечание.** В гидродинамике поле (8) интерпретируется как поле скоростей точечного вихря, расположенного в точке  $(0, 0)$  и имеющего интенсивность  $\omega$ . Если перейти к полярным координатам  $r, \varphi$ , то

$$v = (P, Q) = \frac{\omega}{2\pi r} (-\sin \varphi, \cos \varphi).$$

Жидкие частицы вращаются по концентрическим окружностям с постоянными скоростями, обратно пропорциональными расстоянию от точечного вихря (рис. 51.10).

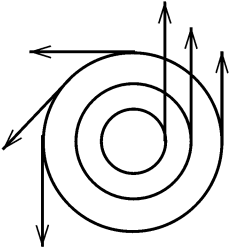


Рис. 51.10

**Упражнение 3.** Пусть в точке  $(0, 0)$  помещен точечный вихрь. Показать, что  $\int_{\gamma} P dx + Q dy$  равен

нулю, если простой гладкий контур  $\gamma$  не содержит вихрь внутри и  $\int_{\gamma} P dx + Q dy = \omega$ , если вихрь лежит внутри контура.

**Упражнение 4.** Пусть двусвязная область  $G \subset \mathbb{R}^2$  ограничена гладкими контурами: внешним  $\Gamma$  и внутренним  $\gamma^-$ , и пусть в  $G$  задано непрерывно дифференцируемое поле  $(P, Q)$  такое, что  $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ . Показать, что для любого простого гладкого контура  $C$ , содержащего  $\gamma$  внутри, выполнено равенство

$$\int_C P dx + Q dy = \int_{\gamma} P dx + Q dy.$$

**Упражнение 5.** Пусть выполнены условия упр. 4. Показать, что внутри контура  $\gamma$  можно поместить точечный вихрь такой, что поле  $(P, Q)$  будет суммой поля точечного вихря и потенциального поля.

**Упражнение 6.** Обобщить результаты упр. 4 и упр. 5 на  $n$ -связные области.

## § 52. Поверхности

**1. Простые поверхности.** Будем говорить, что функция  $f(u, v)$  непрерывно дифференцируема на замкнутом множестве  $E \subset \mathbb{R}^2$ , если она определена и имеет непрерывные частные производные  $\partial f/\partial u$  и  $\partial f/\partial v$  на открытом множестве  $G$ , содержащем замкнутое множество  $E$ .

Пусть  $\Omega$  — ограниченная область в  $R^2$ , а функции  $\varphi(u, v)$ ,  $\psi(u, v)$  и  $\chi(u, v)$  непрерывно дифференцируемы на замкнутом множестве  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ , где  $\partial\Omega$  — граница области  $\Omega$ . Тогда отображение  $F: \bar{\Omega} \rightarrow R^3$ , определяемое формулами

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v), \quad (u, v) \in \bar{\Omega}, \quad (1)$$

называется *непрерывно дифференцируемым*. Если при этом в каждой точке  $(u, v) \in \Omega$  ранг функциональной матрицы

$$\begin{vmatrix} \varphi_u(u, v) & \psi_u(u, v) & \chi_u(u, v) \\ \varphi_v(u, v) & \psi_v(u, v) & \chi_v(u, v) \end{vmatrix} \quad (2)$$

равен двум, то отображение  $F: \bar{\Omega} \rightarrow R^3$  называется *гладким*.

**Уп ра ж н е н и е 1.** Показать, что при непрерывно дифференцируемом отображении  $F: \bar{\Omega} \rightarrow R^3$  образ ограниченного плоского замкнутого множества  $\bar{\Omega}$  есть связное ограниченное и замкнутое множество в пространстве  $R^3$ .

Если  $\bar{\Omega}$  есть замкнутое ограниченное множество в  $R^2$ , а  $F: \bar{\Omega} \rightarrow R^3$  есть такое гладкое отображение, что соответствие между множествами  $\bar{\Omega}$  и  $\Sigma = F(\bar{\Omega})$  является взаимно однозначным, то будем множество  $\Sigma$  называть *простой поверхностью* в  $R^3$ , а уравнения (1) будем называть *параметрическими уравнениями простой поверхности*  $\Sigma$ .

Пусть область  $\Omega$  ограничена простым гладким или кусочно гладким контуром  $\gamma$ . Образ кривой  $\gamma$  при гладком отображении  $F: \bar{\Omega} \rightarrow R^3$  будем называть *краем простой поверхности*  $\Sigma$  и обозначать через  $\partial\Sigma$ .

Если уравнение кривой  $\gamma$  имеет вид

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

то уравнение  $\partial\Sigma$  задается следующими формулами:

$$x = \varphi(u(t), v(t)), \quad y = \psi(u(t), v(t)), \quad z = \chi(u(t), v(t)), \quad \alpha \leq t \leq \beta. \quad (3)$$

**Уп ра ж н е н и е 2.** Показать, что край простой поверхности есть гладкая (без особых точек) или кусочно гладкая кривая в  $R^3$ .

**У к а з а н и е.** Продифференцировав по параметру  $t$  уравнения (3), приравняв результат нулю. Воспользоваться тем, что ранг матрицы (2) равен двум.

График функции  $z = f(x, y)$ , непрерывно дифференцируемой на замкнутом ограниченном множестве  $\bar{\Omega} \subset R^2$ , есть простая поверхность, определяемая параметрическими уравнениями

$$x = u, \quad y = v, \quad z = f(u, v), \quad (u, v) \in \bar{\Omega}. \quad (4)$$

В этом случае матрица  $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$  является единичной, а поэтому ранг матрицы (2) равен двум.

Например, график функции  $z = x^2 + y^2$ ,  $(x, y) \in \bar{\Omega}$ , где  $\bar{\Omega} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ , есть простая поверхность. Окружность, получаемая при пересечении параболоида вращения  $z = x^2 + y^2$  и плоскости  $z = 1$ , является краем рассматриваемой простой поверхности.

Уравнения (1) простой поверхности можно записать и в векторной форме:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (u, v) \in \bar{\Omega},$$

$$\mathbf{r}(u, v) = \varphi(u, v) \mathbf{i} + \psi(u, v) \mathbf{j} + \chi(u, v) \mathbf{k}.$$

С механической точки зрения формулы (1) определяют гладкую (без разрывов и изломов) деформацию плоской области  $\Omega$  в множество  $\Sigma$  (простую поверхность в пространстве  $R^3$ ). Для практических целей только простых поверхностей недостаточно. Например, сфера  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  не является простой поверхностью в  $R^3$ . Интуитивно ясно, что сферу нельзя получить никакой гладкой деформацией плоской области.

Имея в виду приложения теории поверхностных интегралов, введем в рассмотрение класс почти простых поверхностей.

Пусть  $\Omega$  — плоская область и  $F: \bar{\Omega} \rightarrow R^3$  — непрерывно дифференцируемое отображение. Будем множество  $\Sigma = F(\bar{\Omega})$  называть *почти простой поверхностью* в  $R^3$ , если найдется расширяющаяся последовательность ограниченных областей  $\{\Omega_n\}$  таких, что  $\bar{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}$ ,  $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$  и поверхности  $\Sigma_n = F(\bar{\Omega}_n)$  простые.

Пример 1. Сфера  $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$  есть почти простая поверхность.

$\Delta$  Введем сферические координаты (см. § 48, п. 5). Тогда сфера  $S$  есть образ прямоугольника  $\bar{\Omega} = \{(\varphi, \psi) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}\}$  при непрерывно дифференцируемом отображении  $F: \bar{\Omega} \rightarrow S$ , определяемом формулами

$$x = a \cos \varphi \cos \psi,$$

$$y = a \sin \varphi \cos \psi,$$

$$z = a \sin \psi.$$

Образами отрезков  $\varphi = \varphi_0$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$  являются меридианы, а при  $|\psi_0| < \frac{\pi}{2}$  образами отрезков  $\psi = \psi_0$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  являются параллели на сфере  $S$ . Отображение  $F: \bar{\Omega} \rightarrow S$  не будет взаимно однозначным, так как меридианы  $\varphi = 0$  и  $\varphi = 2\pi$  совпадают, а

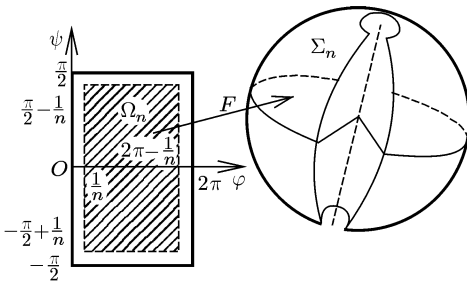


Рис. 52.1

именно однозначным, так как меридианы  $\varphi = 0$  и  $\varphi = 2\pi$  совпадают, а

отрезки  $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  переходят в северный и южный полюсы сферы  $S$ .

Положим

$$\Omega_n = \left\{ (\varphi, \psi) : \frac{1}{n} < \varphi < 2\pi - \frac{1}{n}, -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n} < \psi < \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} \right\}.$$

Легко проверить, что  $\overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}$ ,  $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$  и что поверхности  $\Sigma_n = F(\overline{\Omega}_n)$  являются простыми (рис. 52.1). Поэтому сфера  $S$  — почти простая поверхность. ▲

Пример 2. Конус  $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2\}$  есть почти простая поверхность.

△ Введем цилиндрические координаты (см. § 48, п. 5). Тогда конус  $K$  есть образ полуполосы

$$\overline{\Omega} = \{(r, \varphi) : 0 \leq r < +\infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

при непрерывно дифференцируемом отображении  $F: \overline{\Omega} \rightarrow K$  таком, что  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $z = r$ .

Это отображение не является взаимно однозначным, так как от-

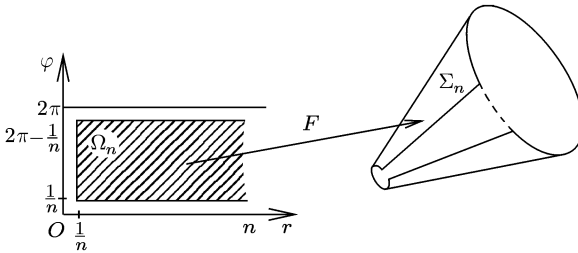


Рис. 52.2

резок  $r = 0$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  отображается в точку — вершину конуса  $K$ , а образы лучей  $\varphi = 0$  и  $\varphi = 2\pi$ ,  $r \geq 0$  совпадают.

Положим (рис. 52.2)

$$\Omega_n = \left\{ (r, \varphi) : \frac{1}{n} < r < n, \frac{1}{n} < \varphi < 2\pi - \frac{1}{n} \right\}.$$

Легко проверить, что  $\overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}$ ,  $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$  и что поверхности  $\Sigma_n = F(\overline{\Omega}_n)$  являются простыми. Поэтому конус  $K$  — почти простая поверхность. ▲

Упражнение 3. Показать, что поверхность  $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $0 \leq z \leq H$ , является почти простой.



Если  $\Sigma$  есть простая поверхность, заданная векторным уравнением (5), а непрерывно дифференцируемые функции

$$u = u(u', v'), \quad v = v(u', v'), \quad (u', v') \in \Omega'$$

задают взаимно однозначное отображение замыкания области  $\Omega'$  на замыкание ограниченной области  $\Omega$ , причем якобиан отображения

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(u', v')} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial u}{\partial v'} \\ \frac{\partial v}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля в  $\bar{\Omega}'$ , то уравнение

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(u', v'), v(u', v')) \equiv \boldsymbol{\rho}(u', v'); \quad (u', v') \in \Omega', \quad (6)$$

определяет ту же простую поверхность, что и уравнение (5). Уравнения (5) и (6) называют *различными параметризациями поверхности*  $\Sigma$ .

Как и в случае кривых, можно расширить класс параметризаций, допуская и такие замены параметров, при которых непрерывная дифференцируемость, взаимная однозначность и необращение в нуль якобиана отображения нарушаются на границе области. Тогда можно получить такие параметризации простой поверхности, задаваемые функциями, непрерывная дифференцируемость которых не имеет места на границе области  $\Omega$ .

**Пример 3.** Кусок сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $0 \leq z \leq \frac{a}{2}$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ , можно параметризовать двумя способами:

$$\begin{aligned} x &= a \cos \varphi \cos \psi, & y &= a \sin \varphi \cos \psi, & z &= a \sin \psi, \\ (\varphi, \psi) &\in \Omega', & \Omega' &= \left\{ (\varphi, \psi) : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{6} \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

и

$$\begin{aligned} x &= u, & y &= v, & z &= \sqrt{a^2 - u^2 - v^2}, \\ (u, v) &\in \Omega, & \Omega &= \left\{ (u, v) : \frac{3a^2}{4} \leq u^2 + v^2 \leq a^2, u \geq 0, v \geq 0 \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

$\Delta$  Переход от уравнений (7) к уравнениям (8) задается формулами

$$u = a \cos \varphi \cos \psi, \quad v = a \sin \varphi \cos \psi, \quad (\varphi, \psi) \in \Omega'. \quad (9)$$

Якобиан отображения (9) равен  $a^2 \sin \psi \cos \psi$  и обращается в нуль при  $\psi = 0$ , т. е. на части границы области  $\Omega'$ . Это приводит к тому, что при переходе к параметризации (8) частные производные функции  $z = \sqrt{a^2 - u^2 - v^2}$  стремятся к бесконечности при приближении точки  $(u, v)$  к окружности  $u^2 + v^2 = a^2$ .  $\blacktriangle$

Как правило, в дальнейшем для простых поверхностей будут рассматриваться только такие параметризации, которые задаются непрерывно дифференцируемыми на замкнутом ограниченном множестве функциями.

**2. Криволинейные координаты на поверхности.** Пусть простая поверхность  $\Sigma$  задана векторным уравнением (5). Предположим, что область  $\Omega$  выпукла,  $[a, b]$  есть проекция области  $\Omega$  на ось  $u$ . Если  $u_0 \in (a, b)$ , то прямая  $u = u_0$  будет пересекаться с областью  $\Omega$

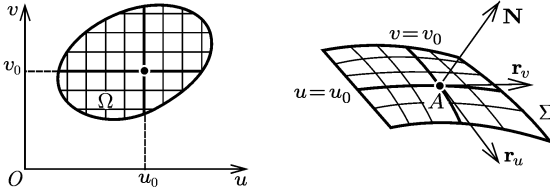


Рис. 52.3

по отрезку  $u = u_0$ ,  $\alpha \leq v \leq \beta$  (рис. 52.3). Образ этого отрезка при отображении (1) есть кривая

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v), \quad \alpha \leq v \leq \beta, \quad (10)$$

лежащая на поверхности  $\Sigma$ . Будем называть ее *координатной кривой*  $u = u_0$ . Придавая  $u_0$  все значения из отрезка  $[a, b]$ , получим семейство координатных кривых  $u = \text{const}$ . Аналогично строится и семейство координатных кривых  $v = \text{const}$ .

В силу взаимной однозначности отображения (1) каждая точка  $A$  поверхности  $S$  однозначно определяется как пересечение двух координатных кривых,  $u = u_0$  и  $v = v_0$ . Пара чисел  $(u_0, v_0)$  называется *криволинейными координатами точки A поверхности*. Запись  $A(u_0, v_0)$  означает, что точка  $A$  поверхности  $\Sigma$  задана криволинейными координатами  $(u_0, v_0)$ .

Например, в сферических координатах часть сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , ограниченная двумя меридианами и двумя параллелями, задается в криволинейных координатах  $\varphi, \psi$  следующим образом:

$$\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \quad \psi_1 \leq \psi \leq \psi_2.$$

На сфере координатные кривые  $\varphi = \text{const}$  — меридианы, а координатные кривые  $\psi = \text{const}$  — параллели.

На прямом круговом цилиндре координатными линиями будут образующие цилиндра и окружности, получающиеся при пересечении цилиндра плоскостями, перпендикулярными образующей.

Вектор-функция  $\mathbf{r}(u_0, v)$  есть непрерывно дифференцируемая функция параметра  $v$ , и, следовательно, координатная кривая  $u = u_0$ , определяемая равенством (10), является непрерывно дифференцируемой. Вектор  $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$  является касательным к этой кривой в точке  $A(u_0, v_0)$ . Аналогично, вектор  $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$  касателен к координатной кривой  $v = v_0$  в точке  $A(u_0, v_0)$ . Заметим, что векторы  $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$  и  $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$  не могут обратиться в нуль, так как в этом случае ранг

матрицы (2) будет меньше двух. Следовательно, для простой поверхности координатные кривые являются гладкими.

Если область  $\Omega$  не является выпуклой, а точка  $(u_0, v_0)$  лежит внутри  $\Omega$ , то нужно взять выпуклую окрестность точки  $(u_0, v_0)$ , лежащую внутри  $\Omega$ . Тогда образ этой выпуклой окрестности будет куском поверхности  $\Sigma$  и координатные кривые можно строить на этом куске поверхности (локально).

### 3. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Пусть  $\Sigma$  есть простая поверхность, заданная уравнениями (1) или векторным уравнением (5). Рассмотрим точку  $A(u, v)$  на поверхности  $\Sigma$ , где  $(u, v)$  — внутренняя точка области  $\Omega$ . Построим координатные линии  $u = \text{const}$  и  $v = \text{const}$ , проходящие через точку  $A(u, v)$ . Векторы  $\mathbf{r}_u(u, v)$  и  $\mathbf{r}_v(u, v)$  будут касательными к соответствующим координатным линиям.

*Лемма 1. В любой точке  $A(u, v)$  простой поверхности  $\Sigma$  векторы  $\mathbf{r}_u(u, v)$  и  $\mathbf{r}_v(u, v)$  неколлинеарны. Направление вектора  $\mathbf{N} = [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$  при изменении способа параметризации или не меняется, или изменяется на противоположное.*

○ Рассмотрим вектор  $\mathbf{N} = [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$  во всех точках поверхности  $\Sigma$ . Тогда

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \mathbf{k}.$$

Если  $\mathbf{N} = \mathbf{0}$ , то все компоненты вектора  $\mathbf{N}$  равны нулю, и ранг матрицы (2) будет меньше двух, что невозможно для простой поверхности. Пусть поверхность  $\Sigma$  параметризована двумя способами, (5) и (6). Тогда, воспользовавшись правилом нахождения частных производных сложной функции и аддитивностью и кососимметричностью векторного произведения, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{N}' &= [\boldsymbol{\rho}_{u'}, \boldsymbol{\rho}_{v'}] = \left[ \mathbf{r}_u \frac{\partial u}{\partial u'} + \mathbf{r}_v \frac{\partial v}{\partial u'}, \mathbf{r}_u \frac{\partial u}{\partial v'} + \mathbf{r}_v \frac{\partial v}{\partial v'} \right] = \\ &= [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] \left( \frac{\partial u}{\partial u'} \frac{\partial v}{\partial v'} - \frac{\partial u}{\partial v'} \frac{\partial v}{\partial u'} \right) = [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] \frac{\partial(u, v)}{\partial(u', v')}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\mathbf{N}' = \mathbf{N} \frac{\partial(u, v)}{\partial(u', v')}. \quad (11)$$

Так как якобиан  $J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(u', v')}$  не обращается в нуль в области  $\Omega'$ , то векторы  $\mathbf{N}'$  и  $\mathbf{N}$  коллинеарны. Эти векторы сонаправлены, если  $J > 0$ , и противоположно направлены, если  $J < 0$ . ●

**Упражнение 4.** Показать, что простая поверхность обладает тем свойством, что для каждой ее внутренней точки найдется такая окрестность, в которой поверхность совпадает с графиком некоторой дифференцируемой функции.

Указание. Воспользоваться теоремой о неявных функциях, определяемых системой двух уравнений.

Векторы  $\pm \mathbf{N} = \pm [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$  будем называть векторами *нормали к поверхности*  $\sigma$  в точке  $A(u, v)$ .

**Лемма 2.** *Вектор нормали к простой поверхности  $\Sigma$  в точке  $A(u_0, v_0)$  ортогонален ко всем гладким кривым, лежащим на поверхности и проходящим через точку  $A(u_0, v_0)$ .*

○ В самом деле, такая кривая есть образ при отображении (5) некоторой гладкой кривой, лежащей в области  $\Omega$  и задаваемой уравнениями  $u = u(t)$ ,  $v = v(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ .

Уравнение кривой на поверхности тогда имеет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(t), v(t)), \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad u(t_0) = u_0, \quad v(t_0) = v_0.$$

Касательный вектор  $\boldsymbol{\tau}$  к этой кривой в точке  $A$  есть

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r}(u(t_0), v(t_0))) = \mathbf{r}_u(u_0, v_0) \frac{du(t_0)}{dt} + \mathbf{r}_v(u_0, v_0) \frac{dv(t_0)}{dt}.$$

Итак,  $\boldsymbol{\tau}$  есть линейная комбинация векторов  $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$  и  $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$ . Так как вектор  $\mathbf{N}$  ортогонален  $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$  и  $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$ , то он ортогонален и вектору  $\boldsymbol{\tau}$ , т. е. вектор нормали к поверхности в точке  $A$  ортогонален к любой гладкой кривой, лежащей на поверхности и проходящей через точку  $A$ . ●

Плоскость, проходящая через точку  $A(u, v)$  поверхности и ортогональная вектору  $\mathbf{N}$ , называется *касательной плоскостью* к поверхности в точке  $A$ . Пусть  $(X, Y, Z)$  — декартовы координаты точки касательной плоскости и пусть  $\mathbf{R} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$ . Тогда векторы  $\mathbf{R} - \mathbf{r}(u, v)$ ,  $\mathbf{r}_u(u, v)$  и  $\mathbf{r}_v(u, v)$  параллельны касательной плоскости, следовательно, их смешанное произведение равно нулю. Поэтому векторное уравнение касательной плоскости имеет вид

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}(u, v), \mathbf{r}_u(u, v), \mathbf{r}_v(u, v)) = 0.$$

В силу равенства (11) форма этого уравнения не зависит от выбора параметризации поверхности. Уравнение касательной плоскости в координатах имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} X - x(u, v) & Y - y(u, v) & Z - z(u, v) \\ x_u(u, v) & y_u(u, v) & z_u(u, v) \\ x_v(u, v) & y_v(u, v) & z_v(u, v) \end{vmatrix} = 0.$$

*Нормалью* к поверхности в точке  $A(u, v)$  называется прямая, проходящая через точку  $A$  и параллельная вектору нормали в точке  $A$ . Так как при изменении параметризации вектор нормали не меняет своего направления или изменяет его на противоположное в каждой точке поверхности, то нормаль не зависит от параметризации. Ее векторное уравнение имеет вид

$$\mathbf{R} - \mathbf{r}(u, v) = k [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v], \quad -\infty < k < +\infty.$$

В декартовых координатах уравнение нормали можно записать следующим образом:

$$\frac{X - x(u, v)}{y_u z_v - y_v z_u} = \frac{Y - y(u, v)}{z_u x_v - z_v x_u} = \frac{X - z(u, v)}{x_u y_v - x_v y_u}.$$

**4. Кусочно гладкие поверхности.** Из определения простой поверхности, данного в п. 1, следует, что она есть гладких и взаимно однозначный образ некоторой плоской области, т. е. получается из этой области при помощи гладких (без изломов) деформаций (отображений). Ясно, что многие объекты, которые мы привыкли называть поверхностями, не будут простыми поверхностями. Так, сфера не может быть непрерывным образом деформирована в плоскую область. Коническая поверхность не может быть получена гладкой деформацией плоской области.

Попытки дать общую классификацию поверхностей увели бы нас далеко в область высшей геометрии. Замечательным классом поверхностей в  $R^3$  являются гладкие многообразия размерности 2, т. е. связные множества, которые локально (в окрестности каждой своей точки) устроены, как простая гладкая поверхность. Например, сфера будет гладким многообразием. Если  $A$  есть точка сферы радиуса  $a$ , то шар  $S_\varepsilon(A)$  при  $\varepsilon < a$  вырезает из сферы простой кусок.

Хотя локально гладкие многообразия устроены просто, но в целом, глобально, они могут иметь очень сложное строение. Представьте себе такие гладкие поверхности, как бублик (тор), бублик с двумя дырами или еще более причудливую поверхность, которая называется

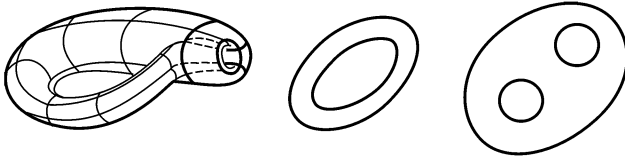


Рис. 52.4

бутылкой Клейна (рис. 52.4). Все эти многообразия можно разрезать на конечное число гладких простых поверхностей (или, что то же самое, их можно склеить из конечного числа простых гладких кусков).

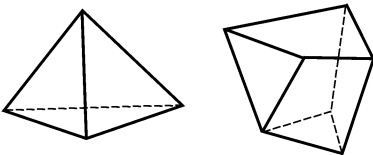


Рис. 52.5

Из гладких кусков можно склеивать не только гладкие многообразия, но и связные поверхности, имеющие ребра и вершины (например, поверхности многогранников) (рис. 52.5).

Мы не станем тут заниматься математической формализацией таких понятий, как разрезание и склеивание поверхностей, и тем

более основанной на этом классификации поверхностей. Заметим только, что трудности возникают при построении общих теорий. В любом разумном частном случае нет проблем с разрезанием поверхности на простые куски. Поверхность, которую можно разрезать на конечное число простых кусков, будем называть *кусочно гладкой*.

**5. Ориентируемые поверхности.** Будем говорить, что гладкая поверхность *ориентируема*, если можно построить на этой поверхности непрерывное поле единичных нормальных векторов. Говорят, что это поле единичных нормалей определяет *ориентацию* (или *сторону*) поверхности. Меняя направление всех единичных нормалей на противоположное, получим опять непрерывное поле единичных нормальных векторов. Говорят, что оно определяет *противоположную ориентацию* (*другую сторону*) поверхности. На простой гладкой поверхности всегда определено непрерывное поле единичных нормальных векторов

$$\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{||[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]||}. \quad (12)$$

Произвольные гладкие поверхности могут быть как *ориентируемыми* (*двусторонними*), так и *неориентируемыми* (*односторонними*).

Торы, изображенные на рис. 52.4, ориентируемы; бутылка Клейна — неориентируемая (односторонняя) поверхность. Легко построить лежащий на этой поверхности замкнутый гладкий контур такой, что, выбирая в какой-то точке контура вектор единичной нормали к поверхности и непрерывно изменяя его при движении по контуру, мы придем к начальной точке с противоположным направлением нормали. Следовательно, на бутылке Клейна построить непрерывное поле единичных нормальных векторов невозможно.

Заметим еще, что сфера, тор, тор с двумя дырами (рис. 52.4) делят пространство на ограниченную и неограниченную области, общей границей которых они являются. Бутылка Клейна таким свойством не обладает.

Можно доказать, что гладкая поверхность, являющаяся границей области в  $\mathcal{R}^3$ , ориентируема. Ее внутренняя сторона задается нормальными векторами, направленными внутрь области (*внутренними нормальными*), внешняя сторона определяется *внешними нормальными*. Очевидно, что для построения поля внутренних нормалей к границе области достаточно построить внутреннюю нормаль к какой-то одной точке границы.

Каждая плоскость делит пространство  $\mathcal{R}^3$  на два полупространства. Если плоскость рассматривать как границу полупространства, то внутренняя нормаль определяется естественным образом как направленная внутрь полупространства (рис. 52.6). Если  $\partial G$  есть гладкая

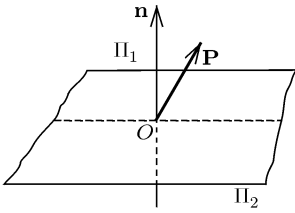


Рис. 52.6

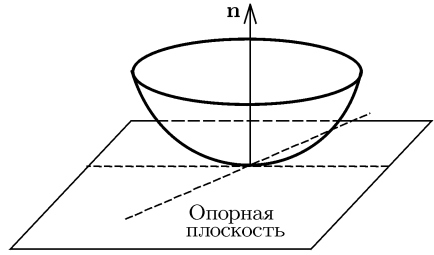


Рис. 52.7

граница области  $G$ , то касательная плоскость в точке  $x \in \partial G$  называется *опорной*, если область лежит по одну сторону от касательной плоскости, т. е. в одном из полупространств, определяемых этой плоскостью. В точке  $x \in \partial G$  определена внутренняя нормаль (рис. 52.7).

**Упражнение 4.** Доказать, что для ограниченной области  $G$  с гладкой границей хотя бы в одной точке границы существует опорная касательная плоскость.

**Указание.** Разбить множество всех полупространств  $z \geq a$  на два класса: класс полупространств  $K_1$ , содержащих  $G$ , и  $K_2$  — класс всех прочих полупространств вида  $z \geq a$ . Плоскость  $z = \sup a$ , где  $\sup$  берется по всем полупространствам первого класса, будет опорной.

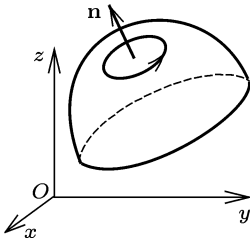


Рис. 52.8

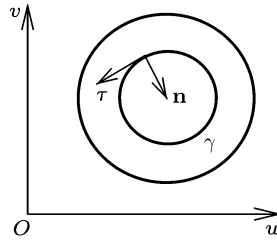


Рис. 52.9

Границу области  $G$ , ориентированную внешними нормальными, будем обозначать через  $\partial G$ , а внутренними — через  $\partial G^-$ .

Несколько более сложно определяется ориентация кусочно гладких поверхностей.

Пусть  $\Sigma$  — простая поверхность (рис. 52.8), т. е. гладкий и взаимно однозначный образ замыкания плоской области  $\Omega$ . В декартовых координатах отображение задается равенствами (1). Прообразом гладкого простого контура  $\Gamma \subset \Sigma$  будет простой гладкий контур  $\gamma \subset \Omega$ . Будем говорить, что контур  $\Gamma$  *ориентирован положительно*, если его прообраз  $\gamma$  ориентирован в плоскости  $(u, v)$  положительно (рис. 52.9), т. е. при обходе контура  $\gamma$  область, им ограничиваемая, остается слева (вектор касательной и вектор внутренней нормали образуют правую

пару векторов в ориентированной плоскости  $(u, v)$ . Будем говорить, что ориентация простой поверхности  $\Sigma$ , задаваемая полем единичных нормалей

$$\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{\|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]\|},$$

согласована с положительной ориентацией простых контуров, лежащих на поверхности  $\Sigma$ .

Покажем, что предложенное правило согласования ориентации поверхности с ориентациями простых контуров, лежащих на поверхности, совпадает с известным *правилом правого винта*. Пусть  $A(u_0, v_0) \in \Sigma$ , т. е.  $(u_0, v_0) \in \Omega$ . Без ограничения общности можно считать, что  $u_0 = 0, v_0 = 0$ . Построим в точке  $A(0, 0)$  касательную плоскость и ориентируем ее вектором нормали  $\mathbf{n}$  или, что то же самое, парой векторов  $(\mathbf{r}_u(0, 0), \mathbf{r}_v(0, 0))$ . Возьмем в плоскости переменных  $u, v$  окружность радиуса  $\varepsilon$  с центром в точке  $(0, 0)$ :

$$u = \varepsilon \cos t, \quad v = \varepsilon \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Ее образ на поверхности есть простой замкнутый контур  $\Gamma$ :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\varepsilon \cos t, \varepsilon \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

С точностью до  $\mathbf{o}(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  получаем, что

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(0, 0) + \varepsilon \mathbf{r}_u(0, 0) \cos t + \varepsilon \mathbf{r}_v(0, 0) \sin t + \mathbf{o}(\varepsilon).$$

С точностью до  $\mathbf{o}(\varepsilon)$  кривая  $\Gamma$  есть эллипс в касательной плоскости, ориентированной парой векторов  $(\mathbf{r}_u(0, 0), \mathbf{r}_v(0, 0))$ .

Ориентация эллипса положительна (рис. 52.10). Если смотреть на касательную плоскость со стороны вектора нормали  $\mathbf{n}$ , то движение

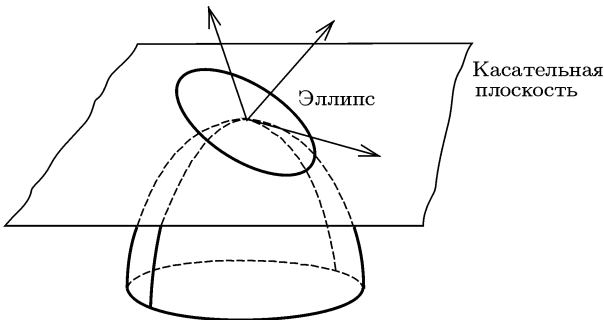


Рис. 52.10

по эллипсу происходит против часовой стрелки, от вектора  $\mathbf{r}_u(0, 0)$  к вектору  $\mathbf{r}_v(0, 0)$  (область, ограничиваемая эллипсом, остается слева).

Пусть кусочно гладкая поверхность  $\Sigma$  склеена из гладких простых кусков  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ . Если склеивание происходит вдоль кривой  $\gamma$ ,



то после удаления концов кривой  $\gamma$  она входит в края двух и только двух поверхностей  $\Sigma_i$ . Кусочно гладкая поверхность  $\Sigma$  называется *ориентируемой*, если можно так ориентировать гладкие куски  $\Sigma_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  что после согласования ориентации  $\Sigma_i$  с ориентациями  $\partial\Sigma_i$  любая кривая склейки будет входить в состав краев соответствующих

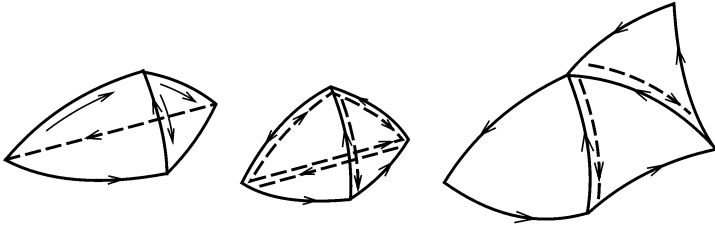


Рис. 52.11

двух поверхностей с противоположными ориентациями (рис. 52.11).

Можно показать, что кусочно гладкая поверхность, являющаяся границей ограниченной области, ориентируема, при этом каждый ее гладкий кусок можно ориентировать внутренними нормальми. В дальнейшем мы будем рассматривать только ориентируемые гладкие и кусочно гладкие поверхности.

### § 53. Площадь поверхности

**1. Первая квадратичная форма поверхности.** Пусть простая поверхность (см. § 52) задана векторным уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (u, v) \in \overline{\Omega}, \quad (1)$$

где  $\Omega$  — плоская область.

Найдем скалярный квадрат вектора

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u(u, v) du + \mathbf{r}_v(u, v) dv.$$

Полагая

$$E = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u), \quad F = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v), \quad G = (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v), \quad (2)$$

получаем, что справедлива формула

$$|d\mathbf{r}|^2 = (d\mathbf{r}, d\mathbf{r}) = E(u, v) du^2 + 2F(u, v) du dv + G(u, v) dv^2. \quad (3)$$

Выражение, стоящее в правой части равенства (3), называется *первой квадратичной формой поверхности*, числа  $E$ ,  $F$  и  $G$  называются *коэффициентами первой квадратичной формы поверхности*.

**Лемма 1.** *Первая квадратичная форма простой поверхности положительно определена, т. е.  $|d\mathbf{r}|^2 > 0$ , если  $(du)^2 + (dv)^2 > 0$ .*

○ Так как

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}}, \quad |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot |\sin \widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}}|,$$

то справедливо тождество

$$|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|^2 = |\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2 - |(\mathbf{a}, \mathbf{b})|^2.$$

Подставляя в это тождество  $\mathbf{a} = \mathbf{r}_u$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{r}_v$  и пользуясь тем, что в любой точке простой поверхности векторы  $\mathbf{r}_u$  и  $\mathbf{r}_v$  неколлинеарны, получаем

$$|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|^2 = EG - F^2 > 0.$$

Условия  $E > 0$ ,  $G > 0$ ,  $EG - F^2 > 0$  достаточны для положительной определенности первой квадратичной формы поверхности. ●

Говорят, что первая квадратичная форма задает на поверхности метрику. Зная коэффициенты первой квадратичной формы поверхности, можно вычислить длины кривых, лежащих на поверхности, определить площадь поверхности. Например, дифференциалы длин дуг координатных кривых, проходящих через точку  $A(u, v)$  поверхности, равны следующим величинам:

$$ds_1 = |\mathbf{r}_u du| = \sqrt{E} |du|, \quad ds_2 = |\mathbf{r}_v dv| = \sqrt{G} |dv|. \quad (4)$$

**2. Площадь простой поверхности.** Пусть простая поверхность задана уравнением (1). Рассмотрим на поверхности криволинейный параллелограмм, ограниченный координатными линиями  $u$ ,  $u + \Delta u$ ,  $v$ ,  $v + \Delta v$ . Векторы  $\mathbf{r}_u(u, v)\Delta u$  и  $\mathbf{r}_v(u, v)\Delta v$  будут касательными к

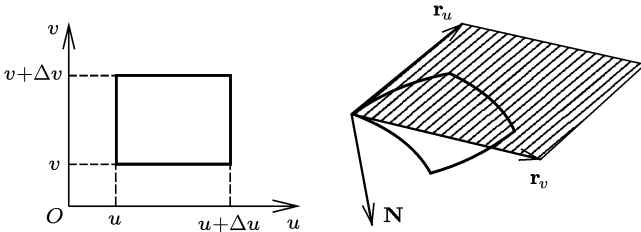


Рис. 53.1

координатным линиям, проходящим через точку  $A(u, v)$  поверхности (рис. 53.1), а длины этих векторов в силу формул (4) будут отличаться от длин сторон криволинейного параллелограмма на  $o(\Delta u)$  и  $o(\Delta v)$  соответственно при  $\Delta u \rightarrow 0$ ,  $\Delta v \rightarrow 0$ . Поэтому естественно считать, что площадь криволинейного параллелограмма приближенно равна площади  $dS$  параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{r}_u \Delta u$  и  $\mathbf{r}_v \Delta v$ . Таким образом, при  $\Delta u > 0$ ,  $\Delta v > 0$

$$dS = |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] \Delta u \Delta v| = \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (5)$$

Выражение (5) называется *элементом площади поверхности*.

Определим формально площадь простой поверхности  $\Sigma$  как следующий двойной интеграл (область  $\Omega$  предполагается измеримой по Жордану):

$$S(\Sigma) = \iint_{\Omega} |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]| \, du \, dv = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv. \quad (6)$$

Это определение оправдано приведенными выше эвристическими рассуждениями, а также перечисленными ниже свойствами площади поверхности.

Свойство 1. Число  $S(\Sigma)$  не зависит от способа параметризации поверхности.

○ Пусть переход от параметрического уравнения (1) к параметрическому уравнению

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(u', v'), \quad (u', v') \in \Omega',$$

совершается при помощи взаимно однозначного и непрерывно дифференцируемого отображения области  $\Omega'$  на область  $\Omega$  с якобианом, не равным нулю. Тогда, воспользовавшись формулой (11), § 52 и формулой замены переменных в двойном интеграле, получаем

$$\begin{aligned} S(\Sigma) &= \iint_{\Omega'} |[\boldsymbol{\rho}_{u'}, \boldsymbol{\rho}_{v'}]| \, du' \, dv' = \\ &= \iint_{\Omega'} |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]| \cdot \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(u', v')} \right| \, du' \, dv' = \iint_{\Omega} |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]| \, du \, dv. \quad \bullet \end{aligned}$$

Свойство 2. Если поверхность  $\Sigma$  есть плоская измеримая по Жордану область  $\Omega$ , заданная уравнениями

$$x = u, \quad y = v, \quad z = 0, \quad (u, v) \in \Omega,$$

то ее площадь, вычисленная при помощи формулы (6), совпадает с плоской мерой Жордана области  $\Omega$ .

○ Так как

$$\mathbf{r} = (u, v, 0), \quad \mathbf{r}_u = (1, 0, 0), \quad \mathbf{r}_v = (0, 1, 0), \quad E = G = 1, \quad F = 0,$$

то

$$S(\Sigma) = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv = \iint_{\Omega} du \, dv = m(\Omega). \quad \bullet$$

Свойство 3. Выражение  $S(\Sigma)$  аддитивно зависит от поверхности.

○ Если область  $\Omega$  гладкой перегородкой разбита на области  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , то и поверхность  $\Sigma$  разобьется на простые поверхности  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ . Из аддитивности двойного интеграла по области интегрирования следует, что

$$S(\Sigma) = S(\Sigma_1) + S(\Sigma_2). \quad \bullet$$

Свойство 4. Для поверхности, являющейся графиком непрерывно дифференцируемой функции на замыкании измеримой по Жордану

области  $\Omega$ , формула (6) для площади поверхности имеет следующий вид:

$$S(\Sigma) = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy. \quad (7)$$

○ Действительно, так как

$$\mathbf{r} = (x, y, f(x, y)), \quad \mathbf{r}_x = (1, 0, f_x(x, y)), \quad \mathbf{r}_y = (0, 1, f_y(x, y)),$$

то

$$E = \mathbf{r}_x^2 = 1 + f_x^2, \quad F = (\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y) = f_x f_y, \quad G = \mathbf{r}_y^2 = 1 + f_y^2, \\ EG - F^2 = (1 + f_x^2)(1 + f_y^2) - f_x^2 f_y^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2. \quad \bullet$$

Пример 1. Найти площадь части сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , вырезаемой из нее цилиндром  $x^2 - ax + y^2 = 0$  (см. рис. 48.10).

△ В силу симметрии достаточно ограничиться рассмотрением той части сферы, которая лежит в первом октанте. Цилиндр будет вырезать из нее множество точек, определяемое следующими неравенствами и равенствами:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 - ax + y^2 \leq 0, \quad (8) \\ x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0.$$

Если перейти к сферическим координатам, полагая

$$x = a \cos \psi \cos \varphi, \quad y = a \cos \psi \sin \varphi, \quad (9) \\ z = a \sin \psi,$$

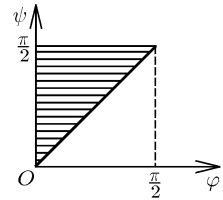


Рис. 53.2

то система равенств и неравенств (8) эквивалентна равенствам (9) и неравенствам

$$0 \leq \varphi \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad (10)$$

определяющим в плоскости параметров  $(\varphi, \psi)$  треугольную область  $\Omega$  (рис. 53.2). Интересующая нас простая поверхность есть образ треугольной области  $\Omega$  при отображении (9).

Вычислим коэффициенты первой квадратичной формы. Получаем

$$\mathbf{r} = (a \cos \psi \cos \varphi, a \cos \psi \sin \varphi, a \sin \psi), \\ \mathbf{r}_\varphi = (-a \sin \psi \cos \varphi, -a \sin \psi \sin \varphi, a \cos \psi), \\ \mathbf{r}_\psi = (-a \cos \psi \sin \varphi, a \cos \psi \cos \varphi, 0), \\ E = \mathbf{r}_\varphi^2 = a^2, \quad F = (\mathbf{r}_\varphi, \mathbf{r}_\psi) = 0, \quad G = \mathbf{r}_\psi^2 = a^2 \cos^2 \psi.$$

Площадь части сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , вырезаемой из нее цилиндром  $x^2 - ax + y^2 = 0$ , равна

$$S(\Sigma) = 4 \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} d\varphi d\psi = 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{\varphi}^{\pi/2} a^2 \cos \psi d\psi = 4a^2 \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right). \quad \blacktriangle$$

**3. Площадь почти простой поверхности.** Почти простая поверхность была определена в § 52. Она задается уравнением  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ ,  $(u, v) \in \bar{\Omega}$ , где  $\Omega$  — плоская область. По определению найдется последовательность ограниченных областей  $\{\Omega_n\}$  такая, что  $\bar{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}$ ,  $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ , а поверхности  $\Sigma_n$ , определяемые уравнениями  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ ,  $(u, v) \in \bar{\Omega}_n$ , являются простыми. Предположим дополнительно, что области  $\Omega_n$  измеримы по Жордану. Тогда под площадью  $S(\Sigma)$  почти простой поверхности будем понимать  $\lim_{n \rightarrow \infty} S(\Sigma_n)$ .

Так как числовая последовательность  $S(\Sigma_n)$  монотонно возрастает, то она всегда имеет конечный или бесконечный предел

$$S(\Sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(\Sigma_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega_n} \sqrt{EG - F^2} du dv = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (11)$$

Интеграл в формуле (11) нужно понимать как несобственный (см. § 49). Если область  $\Omega$  измерима по Жордану, а функция  $\sqrt{EG - F^2}$  ограничена на  $\bar{\Omega}$ , то интеграл в формуле (11) будет двойным интегралом Римана.

**Пример 2.** Найти площадь части боковой поверхности конуса  $z^2 = x^2 + y^2$ ,  $z \geq 0$ , вырезаемой из нее цилиндром  $x^2 - ax + y^2 = 0$ .  $\Delta$  Обозначим часть боковой поверхности конуса, вырезаемую из нее цилиндром, через  $\Sigma$ . Если перейти к цилиндрическим координатам, то  $\Sigma$  будет почти простой поверхностью, определяемой параметрическими уравнениями

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = r, \quad (r, \varphi) \in \Omega, \\ \Omega = \left\{ (r, \varphi) : r \leq a \cos \varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Найдем коэффициенты первой квадратичной формы этой поверхности:

$$\mathbf{r} = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, r), \quad \mathbf{r}_\varphi = (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0), \\ \mathbf{r}_r = (\cos \varphi, \sin \varphi, 1), \quad E = \mathbf{r}_\varphi^2 = r^2, \quad F = 0, \quad G = \mathbf{r}_r^2 = 2, \\ \sqrt{EG - F^2} dr d\varphi = r\sqrt{2} dr d\varphi.$$

Применяя формулу (11), получаем

$$S(\Sigma) = \iint_{\Omega} \sqrt{2} r dr d\varphi = \sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} r dr = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{4}. \quad \blacktriangle$$

Если поверхность  $\Sigma$  не является простой или почти простой, но может быть разрезана на конечное число простых кусков, то ее площадь называют суммой площадей всех простых кусков.

### § 54. Поверхностные интегралы

**1. Поверхностные интегралы первого рода.** Пусть  $\Sigma$  — простая (почти простая) поверхность, заданная векторным уравнением  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ ,  $(u, v) \in \Omega$ . Пусть на поверхности  $\Sigma$  определена непрерывная функция  $F(x, y, z)$ . Двойной интеграл (несобственный интеграл)

$$\iint_{\Omega} F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]| du dv$$

будем называть *поверхностным интегралом первого рода* от функции  $F(x, y, z)$  по поверхности  $\Sigma$  и обозначать символом  $\iint_{\Sigma} F dS$ . Таким образом, по определению

$$\iint_{\Sigma} F dS = \iint_{\Omega} F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]| du dv. \quad (1)$$

Интеграл (1) не зависит от выбора параметрического уравнения поверхности. Это доказывается так же, как и для интеграла (6), § 53, задающего площадь поверхности. Аддитивность интеграла (1) относительно поверхности следует из аддитивности двойного интеграла по области интегрирования.

Если функция  $F(x, y, z) \geq 0$ , то ее можно интерпретировать как плотность материальной поверхности. В этом случае интеграл (1) равен массе поверхности. В самом деле, произвольному разбиению области  $\Omega$  на области  $\Omega_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , соответствует разбиение поверхности  $\Sigma$  на простые поверхности  $\Sigma_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Применяя интегральную теорему о среднем, получаем, что

$$S(\Sigma_i) = \iint_{\Omega_i} |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]| du dv = |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|_i m(\Omega_i).$$

Символ  $|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|_i$  означает, что значение функции  $|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|$  вычислено в некоторой точке  $(u_i, v_i) \in \Omega$ . Масса поверхности приближенно равна следующей сумме:

$$\sum_{i=1}^n F(x_i, y_i, z_i) S(\Sigma_i) = \sum_{i=1}^n F(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i)) |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|_i m(\Omega_i).$$

Точное значение массы есть по определению предел этой суммы при мелкости разбиения, стремящейся к нулю, т. е. равняется интегралу (1).

В § 53 было дано выражение величины  $|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|$  через коэффициенты первой квадратичной формы поверхности. Подставляя это выражение в формулу (1), получаем следующее выражение для поверхностного интеграла первого рода:

$$\iint_{\Sigma} F dS = \iint_{\Omega} F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (2)$$

Пример 1. Найдём положение центра тяжести однородной полусферы  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ,  $z \geq 0$ .

$\Delta$  Без ограничения общности считаем, что плотность  $\rho = 1$ . Параметризуем полусферу

$$x = R \cos \varphi \cos \psi, \quad y = R \sin \varphi \cos \psi, \quad z = R \sin \psi, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}.$$

В примере 2, § 53 было вычислено, что  $\sqrt{EG - F^2} = R^2 \cos \psi$ . Масса полусферы равна числу

$$M = \iint_{\Sigma} dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sqrt{EG - F^2} d\psi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} R^2 \cos \psi d\psi = 2\pi R^2.$$

Координата  $z_c$  центра тяжести есть

$$z_c = \frac{1}{M} \iint_{\Sigma} z dS = \frac{1}{2\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sqrt{EG - F^2} z d\psi = \\ = \frac{1}{2\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} R^3 \cos \psi \sin \psi d\psi = \frac{R}{2}.$$

В силу симметрии полусферы  $x_c = y_c = 0$ .  $\blacktriangle$

Для поверхности  $\Sigma$ , являющейся графиком непрерывно дифференцируемой функции  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in \Omega$ , формула (2) принимает следующий вид:

$$\iint_{\Sigma} F dS = \iint_{\Omega} F(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy. \quad (3)$$

Для функции  $F(x, y, z)$ , непрерывной на кусочно гладкой поверхности  $\Sigma$ , поверхностный интеграл определяется как сумма поверхностных интегралов по всем гладким кускам.

Пример 2. Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint_{\Sigma} \frac{dS}{(1+x+y)^2} = I \quad (4)$$

по кусочно гладкой поверхности  $\Sigma$ , являющейся границей симплекса  $T = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$  (рис. 54.1).

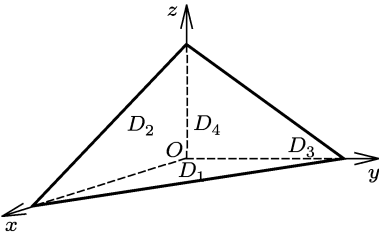


Рис. 54.1

$\Delta$  Граница  $\Sigma$  симплекса  $T$  состоит из четырех треугольных граней:

грань  $D_1$  лежит в плоскости  $z = 0$ , грань  $D_2$  лежит в плоскости  $y = 0$ , грань  $D_3$  лежит в плоскости  $x = 0$ , а грань  $D_4$  — в плоскости  $x + y + z = 1$ . Обозначим поверхностные интегралы по соответствующим граням через  $I_1, I_2, I_3$  и  $I_4$ .

Воспользовавшись формулой (3), получаем

$$I_1 = \iint_{D_1} \frac{dx dy}{(1+x+y)^2} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(1+x+y)^2} = \int_0^1 \left( \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} \right) dx = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

В силу симметрии подынтегрального выражения в формуле (4) относительно  $x$  и  $y$  получаем, что

$$I_2 = I_3 = \iint_{D_2} \frac{dz dy}{(1+y)^2} = \int_0^1 \frac{dy}{(1+y)^2} \int_0^{1-y} dz = \int_0^1 \frac{(1-y) dy}{(1+y)^2} = 1 - \ln 2.$$

Уравнение грани  $D_4$  можно записать в виде  $z = 1 - x - y$ ,  $(x, y) \in D_1$ . Применяя формулу (3), получаем

$$I_4 = \iint_{D_4} \frac{dS}{(1+x+y)^2} = \iint_{D_1} \frac{\sqrt{3} dS}{(1+x+y)^2} = \sqrt{3} I_1.$$

Складывая интегралы, находим значение интеграла (4):

$$\begin{aligned} I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 &= (1 + \sqrt{3})I_1 + 2I_2 = \\ &= (1 + \sqrt{3}) \left( \ln 2 - \frac{1}{2} \right) + 2(1 - \ln 2). \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

**2. Поверхностные интегралы второго рода.** Пусть в некоторой окрестности простой поверхности  $\Sigma$  задано непрерывное векторное поле, т. е. определена вектор-функция

$$\mathbf{a}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)), \quad (5)$$

компоненты  $P, Q, R$  которой есть непрерывные функции в некоторой области, содержащей поверхность  $\Sigma$ .

Ориентируем поверхность  $\Sigma$  единичными нормальными

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}, \quad \mathbf{N} = [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]. \quad (6)$$

Противоположная ориентация поверхности  $\Sigma$  возникает при замене в формуле (6) вектора  $\mathbf{N}$  на вектор  $-\mathbf{N}$ . Заметим еще, что для простой поверхности  $|\mathbf{N}| \neq 0$ .

Спроектируем в каждой точке поверхности  $\Sigma$  вектор  $\mathbf{a}$  на нормальный вектор. Тогда на поверхности  $\Sigma$  будет определена непрерывная функция  $F(x, y, z) = (\mathbf{a}, \mathbf{n})$ , знак которой зависит от ориентации поверхности.



Потоком вектор-функции  $\mathbf{a}(x, y, z)$  через ориентированную поверхность  $\Sigma$  назовем следующий поверхностный интеграл первого рода:

$$\iint_{\Sigma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) dS. \quad (7)$$

Подчеркнем то обстоятельство, что при изменении ориентации на противоположную интеграл (7) меняет знак. Интеграл (7) называют также *поверхностным интегралом второго рода*.

Для поверхностного интеграла второго рода используют еще и следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) dS &= \iint_{\Sigma} a_n dS = \iint_{\Sigma} (P \cos \widehat{nx} + Q \cos \widehat{ny} + R \cos \widehat{nz}) dS = \\ &= \iint_{\Sigma} (P dy dz + Q dz dx + R dx dy). \end{aligned} \quad (8)$$

Если  $\mathbf{a}(x, y, z)$  есть векторное поле скоростей движущейся жидкости, то абсолютная величина интеграла (7) равна массе жидкости единичной плотности, протекающей через поверхность за единицу времени. Отсюда и происходит слово “поток”.

Воспользовавшись формулой (1) для вычисления интеграла (7), выразим поток векторного поля  $\mathbf{a}$  через простую поверхность  $\Sigma$ , ориентированную нормалью (6), при помощи двойного интеграла по плоской области  $\Omega$  от смешанного произведения трех векторов  $(\mathbf{a}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)$ :

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) dS &= \iint_{\Omega} \left( \mathbf{a}, \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|} \right) |\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v| du dv = \\ &= \iint_{\Omega} (\mathbf{a}, \mathbf{N}) du dv = \iint_{\Omega} (\mathbf{a}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) du dv. \end{aligned} \quad (9)$$

При выводе формулы (9) была использована формула (6).

Запишем формулу (9) в координатной форме:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy &= \iint_{\Omega} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} du dv = \\ &= \iint_{\Omega} \left[ P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + \right. \\ &\quad \left. + Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + \right. \\ &\quad \left. + R(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] du dv. \end{aligned} \quad (10)$$

При выводе формулы (10) было применено разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки; определители второго порядка записаны через соответствующие якобианы.

Формула (10), несмотря на ее громоздкий вид, удобна для запоминания. При переходе от левой части к правой нужно произвести следующие замены символов:

$$dy dz \rightarrow \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} du dv, \quad dz dx \rightarrow \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} du dv, \quad dx dy \rightarrow \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv,$$

но при этом важно помнить, что левую часть нужно записывать в том виде, как в формуле (10), не допуская в символах типа  $dx dy$  перестановок. В левой части формулы (10) достаточно запомнить написание слагаемого  $R dx dy$ , так как остальные слагаемые получаются при помощи круговой перестановки символов.

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \nearrow & & \searrow \\ R & \leftarrow Q & \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} & dx & \\ \nearrow & & \searrow \\ dz & \leftarrow dy & \end{array}$$

Полагая в формуле (10)  $P = Q = 0$ , получаем

$$\iint_{\Sigma} R dx dy = \iint_{\Omega} R(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv. \quad (11)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} P dy dz &= \iint_{\Omega} P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} du dv, \\ \iint_{\Sigma} Q dz dx &= \iint_{\Omega} Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} du dv. \end{aligned}$$

Особенно просто вычисляется поверхностный интеграл (11), если поверхность  $\Sigma$  задается как график непрерывно дифференцируемой функции  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in \Omega$ . В этом случае

$$\iint_{\Sigma} R dx dy = \iint_{\Omega} R(x, y, f(x, y)) dx dy. \quad (12)$$

Ясно, что в формуле (12) выбрана такая ориентация поверхности  $\Sigma$ , при которой нормаль  $\mathbf{n}$  составляет острый угол с осью  $Oz$ , так как

$$\mathbf{N} = (-f_x, -f_y, 1), \quad \cos \widehat{\mathbf{n}\mathbf{z}} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} > 0.$$

Заметим, что формула (12) может иметь смысл и в том случае, когда частные производные  $f_x(x, y)$  и  $f_y(x, y)$  не определены на  $\Omega$ . В этом случае будем под поверхностным интегралом  $\iint_{\Sigma} R dx dy$  понимать двойной интеграл в правой части формулы (12).

Пример 3. Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint_{\Sigma} z^2 dx dy$$

по внешней стороне полусферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$  (внешняя сторона определяется нормальми, направленными от центра).

$\Delta$  Полусферу  $\Sigma$  можно задать как график функции  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ,  $(x, y) \in \Omega, \Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$  (рис. 54.2). Внешняя сторона

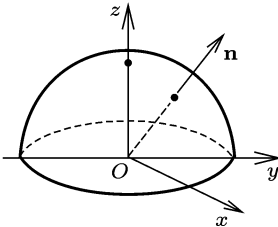


Рис. 54.2

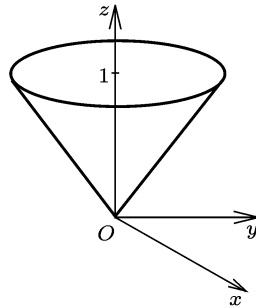


Рис. 54.3

полусферы в данном случае определяется нормальми, составляющими острый угол с осью  $Oz$ . Воспользовавшись формулой (12), получаем

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} z^2 dx dy &= \iint_{\Omega} (1 - x^2 - y^2) dx dy = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 - r^2) r dr = 2\pi \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{2}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Пример 4. Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint_{\Sigma} z dx dy$$

по внешней стороне конической поверхности  $z^2 = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 1$ , считая, что внешняя сторона определяется нормальми, составляющими с осью  $Oz$  тупой угол (рис. 54.3).

$\Delta$  Уравнение поверхности  $\Sigma$  можно задать в виде

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \Omega, \quad \Omega = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Воспользуемся формулой (12), но теперь двойной интеграл в этой формуле нужно взять со знаком минус, так как поверхность  $\Sigma$  ориентирована нормальми, составляющими с осью  $Oz$  тупой угол. Сводя поверхностный интеграл к двойному, а затем переходя к полярным

координатам, получаем

$$\iint_{\Sigma} z \, dx \, dy = - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{x^2+y^2} \, dx \, dy = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 \, dr = -\frac{2\pi}{3}. \quad \blacktriangle$$

Заметим, что для почти простой поверхности  $\Sigma$  интеграл в формуле (9) существует как несобственный или как интеграл Римана. По определению будем считать, что этот интеграл есть поток через почти простую поверхность.

**Пример 5.** Вычислить поток вектора  $\mathbf{a} = (x^3, y^3, z^3)$  через внутреннюю сторону конической поверхности  $z^2 = x^2 + y^2$ ,  $0 \leq z \leq 1$  (см. рис. 54.3).

$\Delta$  Поверхность конуса можно параметризовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r \cos \varphi \mathbf{i} + r \sin \varphi \mathbf{j} + r \mathbf{k}, \quad (r, \varphi) \in \Omega, \\ \Omega &= \{(r, \varphi) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Воспользовавшись формулой (10), получаем

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) \, dS &= \iint_{\Omega} \begin{vmatrix} r^3 \cos^3 \varphi & r^3 \sin^3 \varphi & r^3 \\ \cos \varphi & \sin \varphi & 1 \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} dr \, d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^4 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi - \cos^4 \varphi - \sin^4 \varphi) \, dr = \\ &= \frac{2}{5} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{1}{10} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{10}. \end{aligned}$$

Заметим еще, что при параметризации (13) для проекции вектора нормали  $\mathbf{N}$  на ось  $Oz$  справедливо неравенство

$$N_z = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r > 0.$$

Поэтому вектор нормали  $\mathbf{n} = \mathbf{N}/|\mathbf{N}|$  составляет с осью  $Oz$  острый угол и вектор  $\mathbf{n}$  определяет внутреннюю сторону конической поверхности.  $\blacktriangle$

**Пример 6.** Поле скоростей точечного источника массы, помещенного в начале координат, задается формулами

$$\mathbf{a} = \frac{Q}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{r} = (x, y, z), \quad r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Найти поток вектора  $\mathbf{a}$  через внешнюю сторону сферы радиуса  $R$  с центром в начале координат.

$\Delta$  Имеем

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{n}) = \frac{Q}{4\pi} \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \frac{Q}{4\pi r^2},$$

$$\iint_{\Sigma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) dS = \iint_{\Sigma} \frac{Q}{4\pi R^2} dS = \frac{Q}{4\pi R^2} \iint_{\Sigma} dS = Q. \quad \blacktriangle$$

Поток через кусочно гладкую ориентированную поверхность равен по определению сумме потоков через все гладкие куски.

**Пример 7.** Вычислить поверхностный интеграл

$$J = \iint_{\Sigma} xy \, dx \, dy$$

через внешнюю сторону поверхности  $\Sigma$ , являющейся границей симплекса  $T = \{(x, y, z): x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$  (см. рис. 54.1).

$\Delta$  Как и в примере 2, обозначим через  $J_1, J_2, J_3, J_4$  соответствующие поверхностные интегралы по граням симплекса. Получаем

$$J_1 = \iint_{D_1} xy \, dx \, dy = - \int_0^1 dx \int_0^x xy \, dy = -\frac{1}{8}, \quad J_2 = \iint_{D_2} xy \, dx \, dy = 0,$$

$$J_3 = \iint_{D_3} xy \, dx \, dy = 0, \quad J_4 = \iint_{D_4} xy \, dx \, dy = \int_0^1 dx \int_0^x xy \, dy = \frac{1}{8}.$$

Следовательно,

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = 0.$$

При вычислении поверхностных интегралов было использовано то обстоятельство, что внешняя нормаль к грани  $D_1$  составляет тупой угол с осью  $Oz$ , а поэтому поток через эту грань равен двойному интегралу по плоской области  $D_1$ , взятому со знаком минус. На грани  $D_4$  внешняя нормаль составляет с осью  $Oz$  острый угол, и поток равен соответствующему двойному интегралу, взятому со знаком плюс.  $\blacktriangle$

## УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ XI

**1.** Вычислить криволинейный интеграл первого рода  $\int_{\Gamma} x^2 \, ds$ , где кривая  $\Gamma$  есть окружность, получающаяся при пересечении сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  плоскостью  $x + y + z = 0$ .

**Указание.** Воспользоваться тем, что в силу симметрии

$$\int_{\Gamma} x^2 \, ds = \int_{\Gamma} y^2 \, ds = \int_{\Gamma} z^2 \, ds.$$

**2.** Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int_{\Gamma_{AB}} \frac{x \, dx + y \, dy}{x^2 + y^2}, \quad A = (x_0, y_0), \quad B = (x, y),$$

где  $\Gamma_{AB}$  — гладкая кривая, не проходящая через точку  $(0, 0)$ .

3. При помощи криволинейного интеграла вычислить площадь, ограниченную астроидой

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

4. Пусть  $u(x, y)$  — гармоническая в области  $G \subset \mathbb{R}^2$  функция, т. е. она имеет в этой области непрерывные частные производные первого и второго порядков и удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Показать, что для любой области  $\bar{\Omega} \subset G$ , ограниченной кусочно гладкой кривой, выполнено условие  $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$ , где  $\frac{\partial u}{\partial n}$  — производная в направлении внешней нормали

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \cos \widehat{nx} + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \cos \widehat{ny}.$$

5. В заданной точке  $(x_0, y_0, z_0)$  эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

записать уравнение касательной плоскости и нормали.

6. Пусть простая поверхность задана уравнением  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ ,  $(u, v) \in G \subset \mathbb{R}^2$  и вектор-функция  $\mathbf{r}(u, v)$  имеет непрерывные частные производные второго порядка в области  $G$ .

Показать, что выражение  $(d^2 \mathbf{r}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)$  есть квадратичная форма относительно дифференциалов  $du$  и  $dv$ , если  $u(t)$  и  $v(t)$  при  $t \in [\alpha, \beta]$  являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями.

7. Вычислить осевой момент инерции

$$I_z = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$$

части поверхности конуса

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \sin \alpha, & y &= r \sin \varphi \sin \alpha, & z &= r \cos \alpha, \\ 0 &\leq r \leq a, & 0 &\leq \varphi \leq 2\pi, & \alpha &= \text{const}, & 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

8. Пусть в  $\mathbb{R}^3$  задана область

$$\Omega = \{(x, y, z): -\varphi(x, y) < z < \varphi(x, y), (x, y) \in G \subset \mathbb{R}^2\},$$

где функция  $\varphi(x, y)$  непрерывно дифференцируема на  $\bar{G}$ .

Показать, что

$$\iint_{\partial\Omega} dx dy = 0, \quad \iint_{\partial\Omega} z dx dy = m(\Omega), \quad \iint_{\partial\Omega} z^2 dx dy = 0.$$

9. Воспользоваться результатом упр. 8 и вычислить

$$\iint_{\Sigma} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy,$$

где  $\Sigma$  — внешняя сторона сферы

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

# ГЛАВА XII

## ТЕОРИЯ ПОЛЯ

### § 55. Скалярные и векторные поля

**1. Производная скалярного и векторного поля.** Будем рассматривать пространство, подчиняющееся законам геометрии Евклида. Напомним, что каждой паре точек  $A$  и  $B$  пространства можно поставить в соответствие вектор  $\overrightarrow{AB}$ . Векторы складываются и умножаются на вещественные числа по известным из курса аналитической геометрии правилам, для любых двух векторов определено скалярное произведение [7].

Если выбрана декартова система координат, то каждая точка пространства определяется заданием трех чисел — координат точки, каждый вектор определяется заданием трех своих компонент по осям координат.

Если в некоторой области  $\Omega$  определена функция  $f: \Omega \rightarrow R$ , то говорят, что в области  $\Omega$  задано *скалярное поле*. Если выбрана координатная система, то положение точки  $M \in \Omega$  определяется заданием трех ее координат, и функция  $f: \Omega \rightarrow R$  будет функцией трех переменных  $f(x, y, z)$ . В физике рассматривают скалярные поля давлений, температур, плотностей и т. д.

Перефразируем некоторые известные понятия дифференциального исчисления на геометрическом языке.

Говорят, что *скалярное поле  $f$  дифференцируемо* в точке  $M_0$ , если найдется такой вектор  $\mathbf{c}$ , что

$$f(M) - f(M_0) = (\overrightarrow{M_0M}, \mathbf{c}) + o(|\overrightarrow{M_0M}|) \quad \text{при } M \rightarrow M_0. \quad (1)$$

Вектор  $\mathbf{c}$  будем называть *производной скалярного поля  $f$  в точке  $M_0$*  и обозначать  $\nabla f(M_0)$ .

Запись  $\nabla f$  читается как “набла эф”.

Если в пространстве задана декартова система координат, точки  $M(x, y, z)$ ,  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  и вектор  $\mathbf{c} = \mathbf{i}c_1 + \mathbf{j}c_2 + \mathbf{k}c_3$ , то

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_0M} &= (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}, \\ |\overrightarrow{M_0M}| &= [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{1/2}. \end{aligned}$$

Записывая формулу (1) в координатах, получаем

$$\begin{aligned} f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) &= c_1(x - x_0) + c_2(y - y_0) + \\ &+ c_3(z - z_0) + o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}) \quad (2) \end{aligned}$$

при  $(x, y, z) \rightarrow (x_0, y_0, z_0)$ .

Из (2) следует, что функция  $f(x, y, z)$  дифференцируема в точке  $(x_0, y_0, z_0)$  и что

$$c_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \quad c_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \quad c_3 = \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0),$$

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (3)$$

$$\nabla f(M_0) = \mathbf{c} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Будем в дальнейшем обращаться с  $\nabla$  как с символическим вектором (дифференциальным оператором), ставящим в соответствие скалярной функции ее производную. Тогда равенство (1) можно записать в следующем виде:

$$f(M) - f(M_0) = (\overrightarrow{M_0M}, \nabla f(M_0)) + o(|\overrightarrow{M_0M}|) \quad \text{при } M \rightarrow M_0. \quad (4)$$

С оператором  $\nabla$  можно обращаться, как с обычным вектором, если договориться, что он действует как дифференциальный оператор на функции, стоящие в записи справа от оператора  $\nabla$ , а с функциями и векторами, стоящими в записи слева, перемножается, как обычный вектор.

Пусть  $\mathbf{b} = b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}$  — произвольный вектор. Определим дифференциальный оператор  $\mathbf{b} \nabla$  равенством  $\mathbf{b} \nabla = (\mathbf{b}, \nabla)$ . Тогда

$$\mathbf{b} \nabla = (\mathbf{b}, \nabla) = b_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial y} + b_3 \frac{\partial}{\partial z}. \quad (5)$$

Используя этот оператор, можно формулу (4) переписать в следующем виде:

$$f(M) - f(M_0) = (\overrightarrow{M_0M}, \nabla) f(M_0) + o(|\overrightarrow{M_0M}|) \quad \text{при } M \rightarrow M_0. \quad (6)$$

Пусть  $\mathbf{l}$  — единичный вектор. Рассмотрим луч, состоящий из всех точек  $M$ , для которых  $\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{l}t$ ,  $t > 0$ .

Производной скалярного поля  $f$  по направлению  $\mathbf{l}$  в точке  $M_0$  будем называть следующий предел:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}(M_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(M) - f(M_0)}{t}, \quad \overrightarrow{M_0M} = \mathbf{l}t, \quad t > 0.$$

Из формулы (6) следует, что для дифференцируемой в точке  $M_0$  функции выполняется равенство

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}} = (\mathbf{l} \nabla) f(M_0).$$

Символический вектор  $\nabla$  называют также *оператором Гамильтона*.



Упражнение 1. Показать, что

$$\max_l \frac{\partial f}{\partial l}(M_0) = |\nabla f(M_0)|.$$

Упражнение 2. Пусть во всем пространстве задано дифференцируемое скалярное поле  $f(M)$ . Если  $\alpha$  — вещественное число, то множество точек  $M$  таких, что  $f(M) = \alpha$ , называется *поверхностью уровня скалярного поля*  $f(M)$ . Показать, что при  $\nabla f(M_0) \neq \mathbf{0}$  вектор  $\nabla f(M_0)$  направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через точку  $M_0$ .

Пусть в каждой точке области  $\Omega$  задан вектор  $\mathbf{a}$ . Будем говорить, что на  $\Omega$  задано *векторное поле*  $\mathbf{a}$ . В физике рассматривают векторные поля сил, скоростей, ускорений и т. д.

Будем говорить, что *векторное поле*  $\mathbf{a}(M)$  *дифференцируемо в точке*  $M_0$ , если существует такое линейное преобразование  $A$ , что

$$\mathbf{a}(M) - \mathbf{a}(M_0) = A(\overrightarrow{M_0M}) + o(|\overrightarrow{M_0M}|) \quad \text{при } M \rightarrow M_0. \quad (7)$$

Проектируя уравнение (7) на координатные оси, получаем равенства

$$a_i(M) - a_i(M_0) = A_{i1}(x - x_0) + A_{i2}(y - y_0) + A_{i3}(z - z_0) + o(|\overrightarrow{M_0M}|) \quad \text{при } M \rightarrow M_0, \quad i = \overline{1,3}, \quad (8)$$

где  $(A_{ij})$  — матрица линейного преобразования  $A$ . Из равенств (8) следует, что компоненты  $a_i(M)$ ,  $i = \overline{1,3}$ , дифференцируемы в точке  $M_0$ . Верно и обратное утверждение. Из дифференцируемости компонент  $a_i(M)$  следует и дифференцируемость векторного поля в точке  $M_0$ .

Используя формулу (6), запишем равенства (8) в следующем виде:

$$a_i(M) - a_i(M_0) = (\overrightarrow{M_0M} \nabla) a_i(M_0) + o(|\overrightarrow{M_0M}|) \quad \text{при } M \rightarrow M_0.$$

Это равенство можно записать и в векторном виде:

$$\mathbf{a}(M) - \mathbf{a}(M_0) = (\overrightarrow{M_0M} \nabla) \mathbf{a}(M_0) + o(|\overrightarrow{M_0M}|) \quad \text{при } M \rightarrow M_0. \quad (9)$$

Здесь дифференциальный оператор  $\overrightarrow{M_0M} \nabla$  применяется к вектору  $\mathbf{a}$ . Из (7) и (9) следует, что

$$A(\overrightarrow{M_0M}) = (\overrightarrow{M_0M} \nabla) \mathbf{a}(M_0).$$

Так как определение линейного преобразования  $A$  не зависит от выбора координатной системы, то и результат применения оператора  $\overrightarrow{M_0M} \nabla$  к  $\mathbf{a}(M_0)$  не зависит от выбора координатной системы.

*Лемма 1. Линейное преобразование  $A$  в формуле (7) определено однозначно.*

○ Допустим, что существуют два линейных преобразования  $A_1$  и  $A_2$

таких, что для них выполнено равенство (7). Тогда, вычитая соответствующие равенства, получим, что

$$(A_1 - A_2) \overrightarrow{M_0 M} = \mathbf{o}(|\overrightarrow{M_0 M}|) \quad \text{при } M \rightarrow M_0. \quad (10)$$

Пусть  $\mathbf{l}$  — произвольный вектор,  $t$  — произвольное положительное число и  $\overrightarrow{M_0 M} = t\mathbf{l}$ . Тогда равенство (10) принимает следующий вид:

$$t(A_1 - A_2)\mathbf{l} = \mathbf{o}(t) \quad \text{при } t \rightarrow +0. \quad (11)$$

Деля равенство (11) на  $t$  и переходя к пределу при  $t \rightarrow +0$ , получаем, что  $(A_1 - A_2)\mathbf{l} = \mathbf{0}$ . Так как вектор  $\mathbf{l}$  произвольный, то  $A_1 = A_2$ . ●

Если векторное поле  $\mathbf{a}(M)$  дифференцируемо в точке  $M_0$ , т. е. справедливо равенство (7), то будем линейное преобразование (7) называть *производной векторного поля* в точке  $M_0$  и обозначать через  $\mathbf{a}'(M_0)$ .

У п р а ж н е н и е 3. Найти матрицу линейного преобразования  $\mathbf{a}'(M_0)$  в декартовой системе координат.

Производная векторного поля по направлению  $\mathbf{l}$  в точке  $M_0$  определяется так же, как и производная по направлению для скалярного поля. Из формулы (9) получаем

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}(M_0) = (\mathbf{l} \nabla) \mathbf{a}(M_0). \quad (12)$$

П р и м е р 1. Найти производную векторного поля

$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\mathbf{j} + (x^3 + y^3 + z^3)\mathbf{k}$$

по направлению  $\mathbf{l} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$  в произвольной точке  $M(x, y, z)$ .

△ Воспользуемся формулой (12). Так как

$$\mathbf{l} \nabla = (\mathbf{l}, \nabla) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

то справедливо равенство

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} = (\mathbf{l} \nabla) \mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{i} + \frac{2x + 2y}{\sqrt{3}} \mathbf{j} + \frac{3x^2 + 3y^2 + 3z^2}{\sqrt{3}} \mathbf{k}. \quad \blacktriangle$$

**2. Дивергенция и вихрь векторного поля.** Пусть в области  $\Omega$  определено дифференцируемое векторное поле  $\mathbf{a}(M)$ . Выберем декартову систему координат  $Oxyz$ . Тогда

$$\mathbf{a}(M) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)).$$

*Дивергенцией* векторного поля называется следующая скалярная функция:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = (\nabla, \mathbf{a}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

В § 56 будет показано, что  $\operatorname{div} \mathbf{a}$  не зависит от выбора координатной системы.

*Вихрь* или *ротор* векторного поля определяется следующим образом:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = [\nabla, \mathbf{a}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

В § 57, п. 3 будет показано, что в любой правой системе координат вихрь векторного поля одинаков, а при переходе от правой системы координат к левой меняет знак. Поэтому иногда  $\operatorname{rot} \mathbf{a}$  называют *псевдовектором*.

**3. Оператор Гамильтона  $\nabla$ . Некоторые формулы векторного анализа.** Многие формулы векторного анализа легко выводятся при использовании символического вектора  $\nabla$  (оператора Гамильтона). Нужно лишь помнить, что на функции и векторы, стоящие справа от  $\nabla$ , этот оператор действует как дифференциальный, а функции и векторы, стоящие слева от  $\nabla$ , перемножаются с  $\nabla$  как с обычным вектором по правилам векторной алгебры. В результате такого умножения получается новый дифференциальный оператор.

Применяя оператор  $\nabla$  к произведениям векторов и скаляров, будем пользоваться следующим правилом: запишем результат применения оператора  $\nabla$  к произведению в виде суммы произведений такой, что в каждом слагаемом оператор  $\nabla$  применяется только к одному из сомножителей, который мы отметим “стрелкой”, например  $\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}$ . Далее каждое слагаемое преобразуется так, чтобы все сомножители, не отмеченные стрелкой, оказались слева от  $\nabla$ . После этого стрелки опускаются.

Как нетрудно видеть, в одномерном случае оператор  $\nabla$  есть оператор дифференцирования функции одной переменной, и предлагаемое правило сводится к правилу нахождения производной произведения

$$\frac{d}{dx}(\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi) = \nabla(\overset{\downarrow}{\varphi}\psi) + \nabla(\varphi\overset{\downarrow}{\psi}) = \psi \nabla\overset{\downarrow}{\varphi} + \varphi \nabla\overset{\downarrow}{\psi} = \psi \frac{d\varphi}{dx} + \varphi \frac{d\psi}{dx}.$$

Можно показать, что предложенное правило не приводит к ошибкам в формулах, линейных относительно оператора  $\nabla$ . На нижеследующих примерах можно усвоить некоторые элементы техники обращения с оператором  $\nabla$ . Читатель всегда может проверить получающиеся формулы в координатах.

1) Пусть  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ,  $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \nabla\varphi(r) &= \left( \frac{\partial\varphi(r)}{\partial x}, \frac{\partial\varphi(r)}{\partial y}, \frac{\partial\varphi(r)}{\partial z} \right) = \varphi'(r) \left( \frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z} \right) = \\ &= \varphi'(r) \left( \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right) = \frac{\varphi'(r)}{r} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

$$2) \quad \text{grad}(\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi) = \nabla(\overset{\downarrow}{\varphi}\psi) + \nabla(\varphi\overset{\downarrow}{\psi}) = \\ = \psi \nabla\varphi + \varphi \nabla\psi = \psi \text{grad}\varphi + \varphi \text{grad}\psi.$$

$$3) \quad \text{div}(\rho\mathbf{a}) = (\nabla, \rho\mathbf{a}) = (\nabla, \overset{\downarrow}{\rho}\mathbf{a}) + (\nabla, \rho\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}) = (\nabla\overset{\downarrow}{\rho}, \mathbf{a}) + \rho(\nabla, \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}) = \\ = (\mathbf{a}, \nabla\overset{\downarrow}{\rho}) + \rho(\nabla, \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}) = (\mathbf{a}, \nabla\rho) + \rho \text{div}\mathbf{a} = (\mathbf{a}, \text{grad}\rho) + \rho \text{div}\mathbf{a}.$$

Наряду с обозначением векторного произведения  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ , будем использовать и более употребительное в физике обозначение  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ .

$$4) \quad \text{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\nabla, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\nabla, \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}, \mathbf{b}) + (\nabla, \mathbf{a}, \overset{\downarrow}{\mathbf{b}}) = \\ = (\mathbf{b}, \nabla, \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}) - (\mathbf{a}, \nabla, \overset{\downarrow}{\mathbf{b}}) = (\mathbf{b}, \nabla \times \mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \nabla \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \text{rot}\mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \text{rot}\mathbf{b}).$$

$$5) \quad \text{rot}(\rho\mathbf{a}) = \nabla \times (\rho\mathbf{a}) = \nabla \times (\overset{\downarrow}{\rho}\mathbf{a}) + \nabla \times (\rho\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}) = \\ = \nabla\overset{\downarrow}{\rho} \times \mathbf{a} + \rho \nabla \times \overset{\downarrow}{\mathbf{a}} = \rho \text{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a} \times \text{grad}\rho.$$

В последующих примерах применяется правило вычисления двойного векторного произведения

$$\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}) \mathbf{a} - (\mathbf{c}, \mathbf{a}) \mathbf{b}.$$

$$6) \quad \text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \nabla \times (\overset{\downarrow}{\mathbf{a}} \times \mathbf{b}) + \nabla \times (\mathbf{a} \times \overset{\downarrow}{\mathbf{b}}) = \\ = (\mathbf{b} \nabla) \overset{\downarrow}{\mathbf{a}} - \mathbf{b} (\nabla, \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}) + \mathbf{a} (\nabla, \overset{\downarrow}{\mathbf{b}}) - (\mathbf{a} \nabla) \overset{\downarrow}{\mathbf{b}} = \\ = (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{a} \text{div}\mathbf{b} - \mathbf{b} \text{div}\mathbf{a}.$$

$$7) \quad \mathbf{b} \times \text{rot}\mathbf{a} = \mathbf{b} \times (\nabla \times \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}) = \nabla(\mathbf{b}, \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}) - (\mathbf{b} \nabla) \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}, \\ \mathbf{a} \times \text{rot}\mathbf{b} = \nabla(\overset{\downarrow}{\mathbf{b}}, \mathbf{a}) - (\mathbf{a} \nabla) \overset{\downarrow}{\mathbf{b}}.$$

Складывая эти формулы, получаем

$$\mathbf{b} \times \text{rot}\mathbf{a} + \mathbf{a} \times \text{rot}\mathbf{b} = \nabla(\mathbf{b}, \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}) + \nabla(\mathbf{a}, \overset{\downarrow}{\mathbf{b}}) - (\mathbf{b} \nabla) \overset{\downarrow}{\mathbf{a}} - (\mathbf{a} \nabla) \overset{\downarrow}{\mathbf{b}},$$

или

$$\nabla(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \text{rot}\mathbf{b} + \mathbf{b} \times \text{rot}\mathbf{a} + (\mathbf{a} \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{a},$$

$$\nabla \frac{\mathbf{a}^2}{2} = \mathbf{a} \times \text{rot}\mathbf{a} + (\mathbf{a} \nabla) \mathbf{a}, \quad \text{где } \mathbf{a}^2 = (\mathbf{a}, \mathbf{a}).$$

$$8) \quad (\mathbf{c}, \mathbf{b}, \text{rot}\mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{b} \times \text{rot}\mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \nabla(\mathbf{b}, \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}) - (\mathbf{b} \nabla) \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}) = \\ = (\mathbf{c} \nabla)(\mathbf{b}, \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}) - (\mathbf{c}, (\mathbf{b} \nabla) \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}) = (\mathbf{b}, (\mathbf{c} \nabla) \mathbf{a}) - (\mathbf{c}, (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{a}).$$

$$9) \quad \text{div rot}\mathbf{a} = (\nabla, \nabla \times \mathbf{a}) = (\nabla, \nabla, \mathbf{a}) = 0.$$

$$10) \quad \text{rot grad}f = \nabla \times \nabla f = (\nabla \times \nabla) f = \mathbf{0}.$$

Последние две формулы легко проверяются в координатах.

### § 56. Формула Остроградского–Гаусса

**1. Общая формулировка теоремы.** Пусть  $G \subset R^3$  — ограниченная область, граница которой  $\partial G$  есть кусочно гладкая поверхность, ориентированная внешними нормальями. В  $\bar{G} = G \cup \partial G$  задано непрерывно дифференцируемое векторное поле  $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ . Тогда поток векторного поля  $\mathbf{a}$  через границу области  $\partial G$  равен тройному интегралу от  $\operatorname{div} \mathbf{a}$  по области  $G$ , т. е.

$$\iint_{\partial G} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) dS = \iiint_G \operatorname{div} \mathbf{a} dG, \quad (1)$$

или

$$\iiint_G P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iiint_G \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (2)$$

○ Докажем сначала формулу Остроградского–Гаусса в одном важном частном случае, когда область  $G$  еще и элементарна относительно всех трех координатных осей. Напомним, что область  $G$  называется элементарной относительно оси  $z$ , если найдутся две такие непрерывные в замыкании области  $\Omega \subset R^2$  функции  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$ , что

$$G = \{(x, y, z) : \varphi(x, y) < z < \psi(x, y), (x, y) \in \Omega\}.$$

Применяя формулу сведения тройного интеграла к повторному, получаем

$$\begin{aligned} \iiint_G \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z) dx dy dz &= \iint_{\Omega} dx dy \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z) dz = \\ &= \iint_{\Omega} R(x, y, \psi(x, y)) dx dy - \iint_{\Omega} R(x, y, \varphi(x, y)) dx dy = \\ &= \iint_{\Sigma_1} R(x, y, z) dx dy + \iint_{\Sigma_2} R(x, y, z) dx dy. \quad (3) \end{aligned}$$

Здесь  $\Sigma_1$  — поверхность, являющаяся графиком функции  $\psi(x, y)$ , а  $\Sigma_2$  — поверхность, являющаяся графиком функции  $\varphi(x, y)$ .

Мы воспользовались выражением поверхностного интеграла второго рода через двойной интеграл и тем, что поверхность  $\Sigma_1$  ориентирована внешними к  $\partial G$  нормальями, которые составляют с осью  $z$  острый угол, а на поверхности  $\Sigma_2$  внешние к  $\partial G$  нормали составляют с осью  $z$  тупой угол (рис. 56.1). Добавляя к двум поверхностным интегралам в формуле (3) еще равный нулю интеграл  $\iint_{\Sigma_3} R dx dy$  по куску цилиндрической поверх-

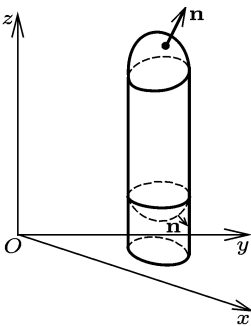


Рис. 56.1

ности, построенной на  $\partial\Omega$ , и замечая, что  $\partial G = \bigcup_{i=1}^3 \Sigma_i$ , получаем

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\partial G} R dx dy. \quad (4)$$

Аналогично, воспользовавшись элементарностью области относительно осей  $x$  и  $y$ , докажем, что

$$\iiint_G \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_{\partial G} P dy dz, \quad \iiint_G \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_{\partial G} Q dz dx. \quad (5)$$

Складывая равенства (4) и (5), получим формулу (2).

Примерами областей, элементарных относительно всех трех координатных осей, являются шар, куб, симплекс (фигура, получающаяся при пересечении четырех полупространств (рис. 56.2)).

Точки  $A, B, C, D$  — вершины симплекса, треугольники  $ABC, ABD, ACD$  и  $BCD$  — грани симплекса.

Дальнейшая схема последовательного расширения класса областей, для которых справедлива формула (2), такая же, как и при доказательстве формулы Грина на плоскости.

Будем называть область  $G$  *объемно односвязной*, если для любой ограниченной области  $\Omega$  из условия  $\partial\Omega \subset G$  следует, что и  $\Omega \subset G$ . Для простоты будем говорить просто “односвязная область”. Формулу (2) теперь можно обобщить на ограниченную односвязную область  $G$  с кусочно гладкой границей, которая кусочно гладкой перегородкой делится на две области,  $G_1$  и  $G_2$ , элементарные относительно всех трех координатных осей. При этом  $\partial G_1 = \Sigma_1 \cup \Sigma_3$ ,  $\partial G_2 = \Sigma_2 \cup \Sigma_3^-$ ,  $\partial G = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ . Если  $\partial G_1$  и  $\partial G_2$  ориентированы внешними нормальными, то  $\Sigma_3$  и  $\Sigma_3^-$  ориентированы противоположно (рис. 56.3).

Применяя формулу (2) к каждой из областей  $G_1$  и  $G_2$ , получаем

$$\begin{aligned} \iiint_{G_1} \operatorname{div} \mathbf{a} dx dy dz &= \iint_{\partial G_1} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) dS = \iint_{\Sigma_1} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) dS + \iint_{\Sigma_3} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) dS, \\ \iiint_{G_2} \operatorname{div} \mathbf{a} dx dy dz &= \iint_{\partial G_2} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) dS = \iint_{\Sigma_2} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) dS + \iint_{\Sigma_3^-} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) dS. \end{aligned}$$

Складывая эти формулы и учитывая, что потоки через перегородку взаимно уничтожаются, получаем формулу (2) для области  $G$ .

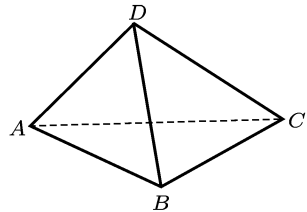


Рис. 56.2

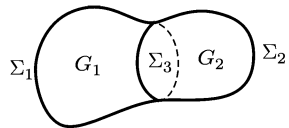


Рис. 56.3

Далее индукцией формула (2) распространяется на односвязные области с кусочно гладкой границей, которые при помощи  $n$  непересекающихся гладких перегородок разбиваются на области, элементарные относительно всех трех координатных осей. Примером таких областей являются выпуклые многогранники, возникающие как пересечение конечного числа полупространств. Их всегда можно представить как объединение симплексов. Можно распространить формулу (2) и на произвольные многогранники — связные множества в  $R^3$ , являющиеся объединением конечного числа симплексов, причем два симплекса могут пересекаться только по одной из граней и каждая грань может быть общей не более чем для двух симплексов.

Предельный переход от многогранников к произвольной односвязной области с кусочно гладкой границей требует преодоления некоторых нетривиальных технических трудностей. ●

Формула (2) подобно формуле Грина может быть обобщена на некоторые неодносвязные области. Область с одной “дырой” будем называть двусвязной. Другими словами, двусвязная область — это область  $G$  такая, что  $G = G_1 \setminus \overline{G_2}$ , где  $G_1$  и  $G_2$  — односвязные области и  $\overline{G_2} \subset G_1$ . Будем поверхность  $\partial G_1$  называть *внешней границей* двусвязной области  $G$ , а  $\partial G_2$  — *внутренней границей*  $G$  (рис. 56.4).

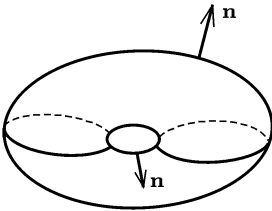


Рис. 56.4

Будем каждую из поверхностей  $\partial G_i$  ориентировать внешними по отношению к соответствующей области  $G_1$  или  $G_2$  нормальми. Тогда, разрезая гладкой перегородкой область  $G$  на две односвязные области, применяя к каждой из областей формулу (2), складывая полученные формулы и учитывая, что потоки через перегородку должны взаимно уничтожаться, получаем формулу (2) для двусвязной области

формулу (2) для двусвязной области

$$\iiint_G \operatorname{div} \mathbf{a} \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial G_1} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) \, dS - \iint_{\partial G_2} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) \, dS = \iint_{\partial G} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) \, dS. \quad (6)$$

Здесь под границей  $\partial G$  понимается объединение внешней и внутренней границ, ориентированных внешними по отношению к области  $G$  нормальми. Формула (2) обобщается на  $n$ -связную (с  $n$  “дырами”) ограниченную область с кусочно гладкими границами.

**2. Некоторые применения формулы Остроградского–Гаусса.** Формула Остроградского–Гаусса является основным инструментом, позволяющим переходить от записи законов природы в виде законов сохранения к записи в виде дифференциальных уравнений. С многочисленными примерами читатель встретится при изучении основ гидродинамики и других разделов физики. Многочисленны применения формулы Остроградского–Гаусса и в математике.

Приведем несколько примеров.

а) *Формула для вычисления объема через поверхностный интеграл.* Если  $P = x$ ,  $Q = y$ ,  $R = z$ , то

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 3$$

и по формуле (2) получаем

$$m(G) = \frac{1}{3} \iint_{\partial G} x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy.$$

б) *Инвариантность  $\operatorname{div} \mathbf{a}$ .* Пусть в области  $G$  задано непрерывно дифференцируемое поле  $\mathbf{a}(P)$ . Пусть  $S_\varepsilon(P)$  есть шар радиуса  $\varepsilon$  с центром в точке  $P$ , а  $\partial S_\varepsilon(P)$  — его граница (сфера), ориентированная внешними нормальями. Тогда

$$(\operatorname{div} \mathbf{a})_P = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\iint_{\partial S_\varepsilon(P)} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) \, dS}{m(S_\varepsilon(P))}. \quad (7)$$

○ Действительно, применяя к  $S_\varepsilon(P)$  формулу (2), получаем

$$\iiint_{S_\varepsilon(P)} \operatorname{div} \mathbf{a} \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial S_\varepsilon(P)} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) \, dS.$$

Воспользуемся теперь интегральной теоремой о среднем:

$$m(S_\varepsilon(P))(\operatorname{div} \mathbf{a})_{P^*} = \iint_{\partial S_\varepsilon(P)} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) \, dS, \quad P^* \in S_\varepsilon(P). \quad (8)$$

Формула (7) получается, если перейти к пределу в (8) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и воспользоваться непрерывностью функции  $\operatorname{div} \mathbf{a}(M)$  в точке  $P$ .

Нетрудно видеть, что вместо шара  $S_\varepsilon(P)$  можно выбрать любое семейство окрестностей  $G_\varepsilon(P)$  с кусочно гладкими границами, диаметры которых стремятся к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Так как поток не зависит от выбора координатной системы, то из формулы (7) следует, что и  $\operatorname{div} \mathbf{a}$  не зависит от координатной системы. ●

В некоторых случаях применение формулы Остроградского–Гаусса упрощает вычисление поверхностных интегралов.

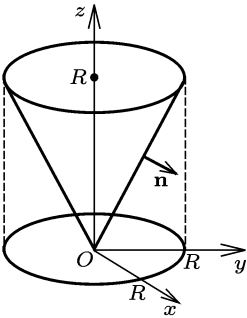
**Пример 1.** Показать, что поверхностный интеграл

$$J = \iint_{\Sigma} (y - z) \, dy \, dz + (z - x) \, dz \, dx + (x - y) \, dx \, dy$$

по внешней стороне части конической поверхности  $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $0 \leq z \leq R$  равен нулю.



△ Запишем поверхностный интеграл в виде  $J = \iint_{\Sigma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) dS$ , где  $\mathbf{a} =$



$= (y - z)\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$ . Тогда  $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$ . Применим формулу Остроградского–Гаусса к области  $G$ , изображенной на рис. 56.5. Граница  $G$  состоит из поверхности  $\Sigma$  и круга  $\Sigma_1$  радиуса  $R$  с центром в точке  $(0, 0, R)$ . Так как  $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$ , то

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) dS + \iint_{\Sigma_1} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) dS &= \\ &= \iiint_G \operatorname{div} \mathbf{a} dx dy dz = 0. \end{aligned}$$

Рис. 56.5

Следовательно,

$$J = \iint_{\Sigma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) dS = - \iint_{\Sigma_1} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) dS = - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x - y) dx dy = 0. \quad \blacktriangle$$

**3. Соленоидальные векторные поля.** Кусочно гладкую поверхность, являющуюся границей ограниченной односвязной области, в дальнейшем для краткости будем называть *допустимой*. Непрерывно дифференцируемое в области  $G$  поле  $\mathbf{a}$  будем называть *соленоидальным*, если поток вектора  $\mathbf{a}$  через любую допустимую поверхность  $\Sigma \subset G$  равен нулю.

**Теорема 1.** *Для того чтобы непрерывно дифференцируемое поле в области  $G$  было соленоидальным, необходимо, а в случае односвязной (объемной) области и достаточно, чтобы  $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$  в области  $G$ .*

○ **Необходимость.** Пусть поле  $\mathbf{a}$  соленоидально. Тогда поток вектора  $\mathbf{a}$  через любую допустимую поверхность равен нулю. Возьмем произвольную точку  $P \in G$ . При достаточно малом  $\varepsilon$  шар  $\overline{S}_\varepsilon(P) \subset G$ . Поток же через границу шара равен нулю. Применяя формулу (7) для дивергенции, получаем, что  $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$ .

**Достаточность.** Пусть область  $G$  объемно односвязна и пусть  $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$  в области  $G$ . Возьмем произвольно кусочно гладкую поверхность  $\Sigma \subset G$ , ограничивающую односвязную область  $\Omega$ . В силу односвязности области  $G$  область  $\Omega \subset G$ . Применяя к  $\Omega$  формулу Остроградского–Гаусса, получаем

$$\iint_{\Sigma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{a} dx dy dz = 0.$$

Таким образом, поток через любую допустимую поверхность равен нулю. ●

Покажем, что условие односвязности области существенно в формулировке теоремы 1. Рассмотрим поле “точечного источника”:

$$\mathbf{a} = -\frac{Q}{4\pi} \operatorname{grad} \frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{r} = (x, y, z), \quad r = |\mathbf{r}|.$$

Векторное поле точечного источника определено в неодносвязной области  $G$ , получающейся, если из пространства  $R^3$  удалить одну точку (начало координат). Покажем, что  $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$  в  $G$ . Воспользуемся примерами 1 и 3 п. 4 § 55 (впрочем, читатель может провести вычисления и непосредственно в координатах, не обращаясь к этим примерам). Получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{a} &= \frac{Q}{4\pi} \operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{Q}{4\pi r^3} \operatorname{div} \mathbf{r} + \frac{Q}{4\pi} \left( \mathbf{r}, \nabla \frac{1}{r^3} \right) = \\ &= \frac{3Q}{4\pi r^3} + \frac{Q}{4\pi} \left( \mathbf{r}, -\frac{3}{r^4} \mathbf{r} \right) = \frac{Q}{4\pi} \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^3} \right) = 0. \end{aligned}$$

Но если  $S_\varepsilon$  — шар радиуса  $\varepsilon$  с центром в начале координат и его поверхность  $\partial S_\varepsilon$  ориентирована внешними нормальными, то поток

$$\iint_{\partial S_\varepsilon} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) dS = \iint_{\partial S_\varepsilon} \left( \frac{Q}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \frac{\mathbf{r}}{r} \right) dS = \frac{Q}{4\pi} \iint_{\partial S_\varepsilon} \frac{dS}{r^2} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon^2} \iint_{\partial S_\varepsilon} dS = Q.$$

Теорема 1 неприменима из-за неодносвязности области  $G$ , в которой задано поле точечного источника.

**У п р а ж н е н и е 1.** Доказать, что поток поля точечного источника через любую допустимую поверхность, не содержащую внутри этот источник, равен нулю, а поток через любую допустимую поверхность, содержащую внутри источник, не зависит от поверхности и равен  $Q$ .

**У к а з а н и е.** Применить формулу (2) к двусвязной области, ограниченной поверхностью  $\Sigma$  и поверхностью шара  $S_\varepsilon(0)$ , лежащего внутри  $\Sigma$ .

**У п р а ж н е н и е 2.** Пусть непрерывно дифференцируемое векторное поле  $\mathbf{a}$  задано в двусвязной области  $G \subset R^3$  и  $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$  в области  $G$ . Показать, что поле  $\mathbf{a}$  можно представить в виде суммы соленоидального поля и поля точечного источника, помещенного внутрь “дыры”.

**У к а з а н и е.** Показать, что поток вектора  $\mathbf{a}$  через любую допустимую поверхность, лежащую в области  $G$  и содержащую “дыру” внутри, не зависит от этой поверхности.

## § 57. Формула Стокса

### 1. Формула Стокса для простой гладкой поверхности.

Пусть в ориентированном евклидовом пространстве задана простая поверхность  $\Sigma$  уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (u, v) \in \Omega \subset R^2. \quad (1)$$

Здесь  $\Omega$  — замкнутая область, граница которой есть положительно ориентированный гладкий (или кусочно гладкий) контур (при обходе границы  $\partial\Omega$  область  $\Omega$  остается слева). Пусть  $\partial\Omega$  задается уравнениями

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta. \quad (2)$$

Образ кривой  $\partial\Omega$  при отображении (1) мы назвали (см. § 52) положительно ориентированным краем поверхности  $\Sigma$  и обозначили  $\partial\Sigma$ .

Напомним, что ориентация поверхности  $\Sigma$ , создаваемая полем нормалей  $\mathbf{N} = [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$ , называется согласованной с положительной ориентацией края. Было показано, что такое согласование совпадает с известным правилом правого винта.

Пусть в окрестности поверхности  $\Sigma$  задано непрерывно дифференцируемое векторное поле  $\mathbf{a} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ . Если  $\gamma$  — замкнутый контур, то криволинейный интеграл  $\int_{\gamma} (\mathbf{a}, d\mathbf{r})$  в физике называют *циркуляцией векторного поля  $\mathbf{a}$  по контуру  $\gamma$* . Если  $\gamma = \partial\Sigma$ , то говорят, что *поверхность  $\Sigma$  натянута на контур  $\gamma$* .

**Теорема 1 (Стокса).** *Циркуляция векторного поля  $\mathbf{a}$  по контуру  $\gamma = \partial\Sigma$  равна потоку вихря этого поля через поверхность  $\Sigma$ , натянутую на контур  $\gamma$ , т. е.*

$$\int_{\partial\Sigma} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \iint_{\Sigma} (\text{rot } \mathbf{a}, \mathbf{n}) dS. \quad (3)$$

○ Докажем теорему Стокса в тех предположениях, которые были сформулированы в начале п. 1. Из (1) и (2) получаем уравнение края поверхности

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(t), v(t)), \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Сводя криволинейные интегралы к определенным, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) &= \int_{\alpha}^{\beta} (\mathbf{a}(\mathbf{r}(u(t), v(t))), \mathbf{r}_u(u(t), v(t)) u'(t) + \\ &\quad + \mathbf{r}_v(u(t), v(t)) v'(t)) dt = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{a}, \mathbf{r}_u) du + (\mathbf{a}, \mathbf{r}_v) dv. \end{aligned}$$

Сделаем дополнительное предположение о непрерывности (а следовательно, и равенстве) смешанных производных  $\mathbf{r}_{uv}$  и  $\mathbf{r}_{vu}$ . Тогда в силу формулы Грина (1), § 51 получаем равенство

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) &= \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial u} (\mathbf{a}, \mathbf{r}_v) - \frac{\partial}{\partial v} (\mathbf{a}, \mathbf{r}_u) \right] du dv = \\ &= \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} x_u + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} y_u + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z} z_u, \mathbf{r}_v \right) du dv - \\ &\quad - \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} x_v + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} y_v + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z} z_v, \mathbf{r}_u \right) du dv = \\ &= \iint_{\Omega} [\mathbf{r}_v, (\mathbf{r}_u, \nabla) \mathbf{a}] - (\mathbf{r}_u, (\mathbf{r}_v, \nabla) \mathbf{a}] du dv = \\ &= \iint_{\Omega} (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \text{rot } \mathbf{a}) du dv = \iint_{\Sigma} (\text{rot } \mathbf{a}, \mathbf{n}) dS. \end{aligned}$$

Здесь была использована формула (см. § 55, пример 8)

$$(\mathbf{b}, (\mathbf{c} \nabla) \mathbf{a}) - (\mathbf{c}, (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{b}, \operatorname{rot} \mathbf{a})$$

при  $\mathbf{b} = \mathbf{r}_v$ ,  $\mathbf{c} = \mathbf{r}_u$ , а также формула, выражающая поток через двойной интеграл от смешанного произведения:

$$\iint_{\Sigma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) dS = \iint_{\Omega} (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{a}) du dv.$$

Итак, формула Стокса доказана для простой гладкой поверхности, натянутой на кусочно гладкий контур. ●

**2. Формула Стокса для кусочно гладкой поверхности.** Разрежем кусочно гладкую поверхность на конечное число гладких кусков и запишем формулу Стокса для каждого куска. Если эти формулы сложить, то криволинейные интегралы по разрезам взаимно уничтожатся, так как разрезы входят в ориентированные границы кусков с противоположными ориентациями. Останется только криволинейный интеграл по краю поверхности  $\partial\Sigma$ . Сумма потоков через куски даст, в силу аддитивности поверхностного интеграла, поток через всю поверхность  $\Sigma$ , следовательно, формула Стокса справедлива и для кусочно гладкой поверхности.

**3. Инвариантность  $\operatorname{rot} \mathbf{a}$  в ориентированном евклидовом пространстве.** Пусть евклидово пространство  $E^3$  ориентировано, т. е. множество всех некомпланарных троек векторов разбито на два класса: “правых троек” и “левых троек”. Пусть  $\mathbf{a}$  — непрерывно дифференцируемое поле в области  $G$ . Возьмем точку  $P \in G$  и произвольный вектор  $\mathbf{n}$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ . Проведем через  $P$  плоскость с нормалью  $\mathbf{n}$ , возьмем в этой плоскости окружность  $\partial C_\varepsilon$  с центром в точке  $P$  и столь малого радиуса  $\varepsilon$ , что круг, вырезаемый этой окружностью из плоскости, лежит внутри области  $G$ . Ориентируем  $\partial C_\varepsilon$  по отношению к  $\mathbf{n}$  по правилу правого винта. Применим к  $C_\varepsilon$  теорему Стокса, а затем интегральную теорему о среднем. Получаем

$$\int_{\partial C_\varepsilon} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \iint_{C_\varepsilon} (\operatorname{rot} \mathbf{a}, \mathbf{n}) dS = (\operatorname{rot} \mathbf{a}(M^*), \mathbf{n}) \pi \varepsilon^2, \quad M^* \in C_\varepsilon.$$

Воспользовавшись непрерывностью  $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ , можем написать

$$(\operatorname{rot} \mathbf{a}, \mathbf{n})_M = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\partial C_\varepsilon} (\mathbf{a}, d\mathbf{r})}{\pi \varepsilon^2}. \quad (4)$$

Таким образом, проекция  $(\operatorname{rot} \mathbf{a}, \mathbf{n})$  есть инвариант; она не зависит от выбора любой правой системы координат. Так как вектор  $\mathbf{n}$  имеет произвольное направление, то и  $\operatorname{rot} \mathbf{a}$  не зависит от выбора правой координатной системы.

При изменении ориентации пространства на противоположную нормаль к площадке и направление обхода контура  $\partial C_\varepsilon$  уже нужно согласовывать по правилу левого винта, и вместо формулы (4) мы получим формулу со знаком минус. Таким образом, при изменении ориентации пространства вектор  $\text{rot } \mathbf{a}$  меняет знак.

**4. Потенциальные векторные поля.** Пусть в области  $G$  задано непрерывное поле  $\mathbf{a}(M) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ . Поле называется *потенциальным*, если существует такая скалярная функция  $U(M)$ , что  $\mathbf{a} = \text{grad } U$ , т. е.

$$P(x, y, z) = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x}, \quad Q(x, y, z) = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y},$$

$$R(x, y, z) = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z}.$$

Непрерывно дифференцируемое в области  $G$  поле  $\mathbf{a}$  называется *безвихревым*, если  $\text{rot } \mathbf{a} = \mathbf{0}$  в  $G$ . Аналогично плоскому случаю, рассмотренному в теореме 1, § 51, можно доказать следующую теорему.

**Теорема 2.** Пусть поле  $\mathbf{a}(M)$  непрерывно в области  $G \subset R^3$ . Тогда следующие три условия эквивалентны:

- а)  $\int_L P dx + Q dy + R dz = 0$  для любой замкнутой ломаной  $L \subset G$ ;
- б)  $\int_{L_{AB}} P dx + Q dy + R dz$  не зависит от ломаной  $L_{AB}$ , соединяющей точки  $A$  и  $B$ ;
- в) поле  $\mathbf{a}$  потенциально.

Докажем теперь аналог теоремы 2 из § 51. Предварительно условимся называть область  $G$  *поверхностно односвязной*, если на любой простой кусочно гладкий контур  $\Gamma \subset G$  можно натянуть кусочно гладкую поверхность  $\Sigma \subset G$ . Например, пространство, из которого удалена одна точка, — поверхностно односвязная область, но то же пространство, из которого удалена целая прямая, не является поверхностно односвязной областью.

**Теорема 3.** Для того чтобы непрерывно дифференцируемое в области  $G$  поле  $\mathbf{a}$  было потенциальным, необходимо, а в случае поверхностно односвязной области и достаточно, чтобы поле было безвихревым, т. е.  $\text{rot } \mathbf{a} = \mathbf{0}$ .

○ **Необходимость.** Пусть  $\mathbf{a} = \nabla U$ . Тогда

$$\text{rot } \mathbf{a} = \text{rot } \nabla U = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ U_x & U_y & U_z \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

**Достаточность.** Пусть  $\text{rot } \mathbf{a} = \mathbf{0}$  в  $G$ . Возьмем произвольную замкнутую простую ломаную  $L \subset G$ . Так как область поверхностно-

но односвязна, то на эту ломаную можно натянуть кусочно гладкую поверхность  $\Sigma \subset G$ . Применяя формулу Стокса, получаем

$$\int_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \iint_{\Sigma} (\operatorname{rot} \mathbf{a}, \mathbf{n}) dS = 0.$$

Как и в плоском случае, индукцией по числу звеньев ломаной теперь можно доказать, что  $\int_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = 0$  по любой ломаной  $L$  (не обязательно простой). В силу теоремы 2 существует потенциал  $U(M)$ . ●

Как показывает следующее упражнение, условие поверхностной односвязности области существенно для справедливости теоремы 3.

Упражнение 1. Доказать, что поле

$$\mathbf{a} = \left( -\frac{\omega}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{\omega}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}, z \right) \quad (5)$$

является безвихревым в области  $G$ , которая получается удалением из пространства оси  $Oz$ . Показать, что по любой окружности  $C$ , лежащей в плоскости, перпендикулярной оси  $Oz$  и с центром на оси  $z$ , выполнено равенство  $\int_C (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \omega \neq 0$ .

Объяснить, почему к  $C$  нельзя применить формулу Стокса.

Формула Стокса в некоторых случаях может упростить вычисление криволинейного интеграла.

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл

$$J = \int_{\Gamma_{AB}} (x^2 - yz) dx + (y^2 - xz) dy + (z^2 - xy) dz,$$

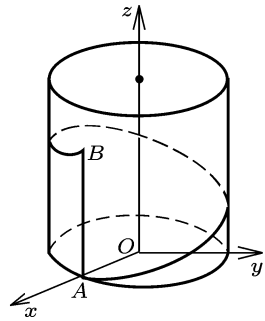


Рис. 57.1

взятый по отрезку винтовой линии (рис. 57.1)  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = \frac{h}{2\pi} t$  от точки  $A(a, 0, 0)$  до точки  $B(a, 0, h)$ .

△ Дополним кривую  $\Gamma_{AB}$  отрезком  $\Gamma'_{BA}$  до замкнутой кривой  $\Gamma$ . Тогда

$$\int_{\Gamma'_{BA}} (x^2 - yz) dx + (y^2 - xz) dy + (z^2 - xy) dz = \int_h^0 z^2 dz = -\frac{h^3}{3},$$

так как на отрезке  $\Gamma'_{BA}$  выполнены равенства  $x = a$ ,  $y = 0$ .

Рассмотрим векторное поле  $\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ ,  $P = x^2 - yz$ ,  $Q = y^2 - xz$ ,  $R = z^2 - xy$ .

Простое вычисление показывает, что  $\operatorname{rot} \mathbf{a} = \mathbf{0}$ . В силу формулы Стокса

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \iint_{\Sigma} (\operatorname{rot} \mathbf{a}, \mathbf{n}) dS,$$

где  $\Sigma$  — любая кусочно гладкая поверхность, натянутая на контур  $\Gamma$ .

Таким образом,

$$J = \int_{\Gamma_{AB}} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_{\Gamma'_{AB}} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \frac{h^3}{3}. \quad \blacktriangle$$

### УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ XII

1. Найти  $\nabla|[\mathbf{c}, \mathbf{r}]|$ , где  $\mathbf{c}$  — постоянный вектор,  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ .

2. Пусть  $\mathbf{v}(x, y, z, t)$  и  $\mathbf{w}(x, y, z, t)$  — поля скоростей и ускорений движущейся жидкости. Показать, что

$$\mathbf{w}(x, y, z, t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}.$$

Указание. Если функции  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  задают закон движения индивидуальной жидкой частицы, то

$$\dot{x}(t)\mathbf{i} + \dot{y}(t)\mathbf{j} + \dot{z}(t)\mathbf{k} = \mathbf{v}(x(t), y(t), z(t), t).$$

3. Показать, что

$$\operatorname{div} \mathbf{b}(\mathbf{r}, \mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad \operatorname{div} \mathbf{r}(\mathbf{r}, \mathbf{a}) = 4(\mathbf{r}, \mathbf{a}),$$

где  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — постоянные векторы,  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ .

4. Найти  $\operatorname{rot} \mathbf{v}$  для поля скоростей в движущемся твердом теле  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]$ , где  $\mathbf{v}_0$  и  $\boldsymbol{\omega}$  — постоянные векторы,  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ .

5. Пусть  $p$  — непрерывно дифференцируемое скалярное поле. Показать, что для любой области  $\Omega$ , ограниченной кусочно гладкой границей  $\partial\Omega$ , выполнено равенство

$$\iint_{\partial\Omega} p \mathbf{n} dS = \iiint_{\Omega} \nabla p dx dy dz.$$

6. Пусть  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{F}$  — векторные поля скоростей, ускорений и массовых сил движущейся жидкости. В силу принципа Д'Аламбера сумма всех сил, включая силы инерции, действующих на жидкие частицы, заключенные внутри произвольной односвязной области  $G$  с кусочно гладкой границей, должна равняться нулю. В невязкой жидкости сила давления на площадку направлена по нормали к площадке. Поэтому получаем

$$\iiint_G \rho(\mathbf{F} - \mathbf{w}) dG + \iint_{\partial G} p \mathbf{n} dS = 0.$$

Воспользовавшись результатами упр. 2 и 5 и произвольностью жидкого объема  $G$ , вывести уравнение Эйлера, описывающее движение невязкой жидкости

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p.$$

7. Пусть функции  $u$  и  $v$  дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой области пространства  $R^3$ ,  $\Delta$  — оператор Лапласа  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ . Показать, что

$$v \Delta u - u \Delta v = \operatorname{div}(v \nabla u - u \nabla v).$$

8. Пусть функции  $u$  и  $v$  дважды непрерывно дифференцируемы в замкнутой области  $G$  с кусочно гладкой границей. Доказать формулу Грина в  $R^3$

$$\iiint_G (v \Delta u - u \Delta v) dx dy dz = \iint_G \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS.$$

Здесь  $\frac{\partial u}{\partial n}$  — производная по направлению внешней нормали к границе области.

9. Пусть  $\mathbf{v}$  — дважды непрерывно дифференцируемое векторное поле в некоторой односвязной области пространства  $R^3$ ,  $\boldsymbol{\Omega} = \text{rot } \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ . Кривая, в каждой точке которой касательная параллельна вектору вихря в этой точке, называется *вихревой линией*. Пусть  $\Gamma$  — гладкий контур, причем ни в одной его точке касательная не параллельна вектору вихря в этой точке. Проводя через все точки контура  $\Gamma$  вихревые линии, получим поверхность, которая называется *вихревой трубкой*. Показать, что поток вихря через любое сечение вихревой трубки не зависит от сечения. Этот поток вихря называется *интенсивностью вихревой трубки*.

10. Применяя формулу Стокса, вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{\Gamma} y dx + z dy + x dz,$$

где  $\Gamma$  — окружность  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $x + y + z = 0$ , ориентированная по правилу правого винта, если смотреть с положительной стороны оси  $Ox$ .

11. Пусть  $(r, \varphi, z)$  — цилиндрические координаты,  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$ ,  $\mathbf{e}_z$  — единичные векторы, касательные к координатным линиям, проходящим через точку  $M(r, \varphi, z)$ . Показать, что

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Указание. Воспользоваться инвариантной формулой (6), § 55.

12. Пусть  $(r, \varphi, \psi)$  — сферические координаты точки  $M$ ,  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$ ,  $\mathbf{e}_\psi$  — единичные касательные векторы к соответствующим координатным линиям. Показать, что

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\mathbf{e}_\psi}{r} \frac{\partial}{\partial \psi}.$$



ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 58. Формула Тейлора для функций многих переменных

**1. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.** В дальнейшем будет удобно наделить метрическое пространство  $R^n$  еще и структурой *линейного пространства* [7], полагая для любых  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$  и  $\alpha \in R$ , что

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad \alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

Легко проверяется, что для введенных подобным образом операций сложения элементов и умножения элементов на вещественные числа выполняются все аксиомы линейного пространства [7]. Роль нулевого элемента выполняет  $0 = (0, 0, \dots, 0) \in R^n$ . Если  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ , то по определению

$$\Delta x = dx = x - x^0 = (x_1 - x_1^0, \dots, x_n - x_n^0) = (dx_1, \dots, dx_n),$$

$$|\Delta x| = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^2} = \rho(x, x^0).$$

**Теорема 1.** Пусть функция  $f(x)$  имеет в шаре  $S_\delta(x^0) \subset R^n$  непрерывные частные производные всех порядков до  $m$  включительно. Тогда для любой точки  $x^0 + \Delta x \in S_\delta(x^0)$  найдется число  $\theta \in (0, 1)$  такое, что справедливо следующее равенство (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа):

$$f(x^0 + \Delta x) = f(x^0) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{d^k f(x^0)}{k!} + r_m(x), \quad (1)$$

где

$$r_m(x) = \frac{1}{m!} d^m f(x^0 + \theta \Delta x), \quad (2)$$

а  $d^k f(\xi)$  есть дифференциал  $k$ -го порядка функции  $f(x)$ , вычисленный в точке  $\xi$  и являющийся однородной формой  $k$ -го порядка относительно дифференциалов независимых переменных  $dx_1, \dots, dx_n$ :

$$d^k f(\xi) = \left( dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k f(\xi) =$$

$$= \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n \frac{\partial^k f(\xi)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} dx_{i_1} \dots dx_{i_k}. \quad (3)$$

○ Если точка  $x^0 + \Delta x \in S_\delta(x^0)$ , то в силу симметрии шара и точка  $x^0 - \Delta x \in S_\delta(x^0)$ . Так как шар есть выпуклое множество, то  $x^0 + t \Delta x \in S_\delta(x^0)$  при любом  $t \in [-1, 1]$ . Поэтому на  $[-1, 1]$  определена функция одной переменной:

$$\varphi(t) = f(x^0 + t \Delta x) = f(x_1^0 + t \Delta x_1, \dots, x_n^0 + t \Delta x_n).$$

Функция  $\varphi(t)$  дифференцируема на отрезке  $[-1, 1]$ . Действительно, применяя правило нахождения производной сложной функции, получаем

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x^0 + t \Delta x)}{\partial x_i} \Delta x_i = df(x^0 + t \Delta x) = \\ &= \left( dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) f(x^0 + t \Delta x). \end{aligned} \quad (4)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \varphi''(t) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(x^0 + t \Delta x)}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j = d^2 f(x^0 + t \Delta x) = \\ &= \left( dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^2 f(x^0 + t \Delta x). \end{aligned}$$

По индукции получаем, что для  $k = \overline{1, m}$  справедливы формулы

$$\begin{aligned} \varphi^{(k)}(t) &= \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n \frac{\partial^k f(x^0 + t \Delta x)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} dx_{i_1} \dots dx_{i_k} = \\ &= d^k f(x^0 + t \Delta x) = \left( dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k f(x^0 + t \Delta x). \end{aligned} \quad (5)$$

Применим к функции  $\varphi(t)$  формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Существует число  $\theta \in (0, 1)$  такое, что

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi(0) + t \varphi'(0) + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \varphi^{(m-1)}(0) + r_m(t), \\ r_m(t) &= \frac{t^m}{m!} \varphi^{(m)}(\theta t). \end{aligned}$$

Полагая  $t = 1$ , получаем

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= \varphi(0) + \varphi'(0) + \dots + \frac{1}{(m-1)!} \varphi^{(m-1)}(0) + r_m(1), \\ r_m(1) &= \frac{1}{m!} \varphi^m(\theta). \end{aligned}$$

Подставляя в эту формулу выражения (5) для производных  $\varphi^{(k)}(t)$  при  $t = 0$ , получаем формулу (1). ●

Замечание. Для функции двух переменных  $f(x, y)$  формула Тейлора (1) принимает более простой вид

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} d^k f(x_0, y_0) + r_m,$$

где

$$\begin{aligned} d^k f(x_0, y_0) &= \left( (x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right)^k f(x_0, y_0) = \\ &= \sum_{p=0}^k C_k^p \frac{\partial^k f(x_0, y_0)}{\partial x^{k-p} \partial y^p} (x - x_0)^{k-p} (y - y_0)^p, \\ r_m &= \frac{1}{m!} d^m f(x + \theta(x - x_0), y + \theta(y - y_0)). \end{aligned}$$

Следствие. Если выполнены условия теоремы 1, то для функции  $f(x)$  справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} d^k f(x^0) + o(|\Delta x|^m) \quad (6)$$

при  $|\Delta x| \rightarrow 0$ , где  $|\Delta x| = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^2}$ .

○ Рассмотрим остаточный член в формуле (1):

$$r_m(x) = \frac{1}{m!} d^m f(x^0 + \theta \Delta x) = \frac{1}{m!} \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n \frac{\partial^m f(x^0 + \theta \Delta x)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} \Delta x_{i_1} \dots \Delta x_{i_m}. \quad (7)$$

Так как по условию все производные порядка  $m$  функции  $f(x)$  непрерывны в точке  $x^0$ , то

$$\frac{\partial^m f(x^0 + \theta \Delta x)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} = \frac{\partial^m f(x^0)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} + \alpha_{i_1 \dots i_m}(x), \quad (8)$$

где функции  $\alpha_{i_1 \dots i_m}(x)$  бесконечно малые при  $|\Delta x| \rightarrow 0$ .

Так как  $|\Delta x_i| \leq |\Delta x|$ , то  $|\Delta x_{i_1} \dots \Delta x_{i_m}| \leq |\Delta x|^m$ . Следовательно,

$$\sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n \alpha_{i_1 \dots i_m}(x) \Delta x_{i_1} \dots \Delta x_{i_m} = o(|\Delta x|^m) \quad (9)$$

при  $|\Delta x| \rightarrow 0$ .

Подставляя выражения (8) и (9) в формулу (7), получаем

$$\begin{aligned} r_m(x) &= \frac{1}{m!} \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n \frac{\partial^m f(x^0)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} \Delta x_{i_1} \dots \Delta x_{i_m} + \\ &+ \frac{1}{m!} \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n \alpha_{i_1 \dots i_m}(x) \Delta x_{i_1} \dots \Delta x_{i_m} = \frac{1}{m!} d^m f(x^0) + o(|\Delta x|^m) \quad (10) \end{aligned}$$

при  $|\Delta x| \rightarrow 0$ .

Подставляя выражение (10) для  $r_m(x)$  в формулу (1), получаем формулу (6). ●

У п р а ж н е н и е 1. Пусть  $F_k(x)$  — однородные формы степени  $k$  в пространстве  $R^n$  при  $k = \overline{1, m}$ , т. е.

$$F_k(x) = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n \gamma_{i_1 \dots i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k}, \quad k = \overline{1, m},$$

и пусть функция  $f(x)$  удовлетворяет условиям теоремы 1. Показать, что представление функции  $f(x)$  в виде

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{k=1}^m F_k(\Delta x) + o(|\Delta x|^m) \quad \text{при } |\Delta x| \rightarrow 0$$

единственно, а поэтому  $F_k(\Delta x) = \frac{1}{k!} d^k f(x^0)$ ,  $k = \overline{1, m}$ .

У к а з а н и е. Использовать доказательство соответствующей теоремы для функции одной переменной в § 18.

У п р а ж н е н и е 2. Используя результат упр. 1, показать, что написанная ниже формула является формулой Тейлора:

$$e^x \sin y = y + xy - \frac{y^3}{6} + \frac{x^2 y}{2} + o((x^2 + y^2)^{3/2}) \quad \text{при } x^2 + y^2 \rightarrow 0.$$

## § 59. Экстремумы функций многих переменных

**1. Необходимые условия экстремума.** Пусть функция  $f(x)$  определена в области  $G \subset R^n$  и пусть  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in G$ . Назовем  $x^0$  *точкой* (локального) *минимума* функции  $f(x)$ , если найдется такой шар  $S_\delta(x^0) \subset G$ , что для всех  $x \in S_\delta(x^0)$  выполнено неравенство  $f(x) \geq f(x^0)$ . Назовем точку  $x^0$  *точкой строгого минимума* функции  $f(x)$ , если найдется такой шар  $S_\delta(x^0) \in G$ , что для всех  $x \in \dot{S}_\delta(x^0)$  (т. е. для всех точек шара, не совпадающих с его центром) выполнено неравенство  $f(x) > f(x^0)$ .

Аналогично определяются *точки максимума* (строгого максимума) функции  $f(x)$ . Точки максимума и минимума функции называются *точками экстремума*.

Теорема 1. Если в точке экстремума  $x^0$  функции  $f(x)$  существует частная производная  $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)$ , то она равна нулю.

○ Пусть, например, существует  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)$ . Рассмотрим функцию одной переменной

$$\varphi(x_1) = f(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0).$$

Так как  $x^0$  — точка экстремума (пусть, например, минимума), то существует шар  $S_\delta(x^0)$  такой, что  $f(x) \geq f(x^0)$  для всех точек

этого шара. В частности, для любого  $x_1 \in (x_1^0 - \delta, x_1^0 + \delta)$  должно быть выполнено неравенство

$$\varphi(x_1) = f(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0) \geq f(x_1^0, \dots, x_n^0) = \varphi(x_1^0).$$

Функция одной переменной  $\varphi(x_1)$  имеет в точке  $x_1^0$  минимум. Поэтому

$$\frac{d\varphi}{dx_1}(x_1^0) = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) = 0. \quad \bullet$$

*Следствие.* Если в точке экстремума  $x^0$  функция  $f(x)$  дифференцируема, то

$$df(x^0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) dx_i = 0. \quad (1)$$

○ Действительно, так как в точке  $x^0$  функция  $f(x)$  дифференцируема, то в этой точке существуют частные производные  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , а так как  $x^0$  есть точка экстремума, то  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = 0$ . Отсюда следует равенство (1). ●

Если функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x^0$  и  $df(x^0) = 0$ , то точка  $x^0$  называется *стационарной точкой* функции  $f(x)$ . Точка экстремума дифференцируемой функции в силу необходимых условий экстремума будет стационарной точкой. Обратное утверждение неверно. Стационарная точка может не быть точкой экстремума.

**Пример 1.** Показать, что  $(0, 0)$  является стационарной точкой функции  $f(x, y) = xy$ , но  $(0, 0)$  не есть точка экстремума этой функции.

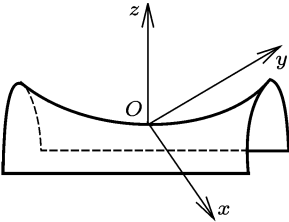


Рис. 59.1

△ Так как  $df(x, y) = y dx + x dy$ , то  $df(0, 0) = 0$  и  $(0, 0)$  есть стационарная точка функции  $f(x, y)$ . Но для любого  $\delta > 0$  точки  $(\delta, \delta)$  и  $(\delta, -\delta)$  лежат в круге  $S_{2\delta}(0, 0)$  и

$$\begin{aligned} f(\delta, \delta) &= \delta^2 > f(0, 0) = 0, \\ f(\delta, -\delta) &= -\delta^2 < f(0, 0) = 0. \end{aligned}$$

Поэтому  $(0, 0)$  не есть точка экстремума функции  $f(x, y)$ . График функции  $z = xy$  изображен на рис. 59.1. ▲

**Лемма 1.** Если функция одной переменной  $\varphi(t)$  имеет производные первого и второго порядков в точке минимума  $t = 0$ , то  $\varphi''(0) \geq 0$ .

○ Пусть  $t = 0$  является точкой минимума функции  $\varphi(t)$ . Тогда найдется число  $\varepsilon > 0$  такое, что для всех  $|t| < \varepsilon$  выполняется неравенство  $\varphi(t) - \varphi(0) \geq 0$ . Применяя разложение функции  $\varphi(t)$  по формуле

Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, получаем, воспользовавшись тем, что в точке минимума  $\varphi'(0) = 0$ :

$$0 \leq \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t^2} = \frac{1}{t^2} \left[ \varphi'(0)t + \varphi''(0) \frac{t^2}{2} + o(t^2) \right] = \frac{1}{2} \varphi''(0) + o(1) \quad (1)$$

при  $t \rightarrow 0$ .

Переходя в этом неравенстве к пределу при  $t \rightarrow 0$ , получаем, что  $\varphi''(0) \geq 0$ . ●

**Теорема 2** (необходимое условие минимума). Пусть функция  $f(x)$  имеет в окрестности точки минимума  $x^0 \in R^n$  непрерывные частные производные первого и второго порядка. Тогда

$$df(x^0) = 0, \quad d^2f(x^0) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0) dx_i dx_j \geq 0. \quad (2)$$

○ Пусть  $x^0$  — точка минимума функции  $f(x)$ . Тогда найдется шар  $S_\delta(x^0)$  такой, что при всех  $\xi \in S_\delta(x^0)$  выполнено неравенство  $f(\xi) - f(x^0) \geq 0$ . Пусть  $x \in R^n$  и  $x \neq x^0$ , тогда  $|\Delta x| = \rho(x, x^0) > 0$ . При любом  $t$  таком, что  $|t| < \frac{\delta}{|\Delta x|}$ , точка  $x^0 + t \Delta x \in S_\delta(x^0)$ , и поэтому  $\varphi(t) = f(x^0 + t \Delta x) - f(x^0) \geq 0$ . Функция  $\varphi(t)$  определена в окрестности точки  $t = 0$  и имеет при  $t = 0$  минимум. В силу формул (4) и (5), § 58 функция  $\varphi(t)$  имеет в точке  $t = 0$  производные первого и второго порядков, причем

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) dx_i = df(x^0), \\ \varphi''(0) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j = d^2f(x^0). \end{aligned}$$

Так как в силу леммы 1 должно выполняться неравенство  $\varphi''(0) \geq 0$ , то  $d^2f(x^0) \geq 0$ . ●

**З а м е ч а н и е.** Аналогично доказывается, что для функции  $f(x)$ , дважды непрерывно дифференцируемой в окрестности точки максимума  $x^0$ , выполняются условия

$$df(x^0) = 0, \quad d^2f(x^0) \leq 0.$$

Условия  $df(x^0) = 0$  и  $d^2f(x^0) \geq 0$  необходимы, но не достаточны для того, чтобы точка  $x^0$  была точкой минимума. Например, функция  $f(x, y) = x^3 + y^3$  имеет единственную стационарную точку  $x = y = 0$ , и в этой точке  $d^2f(0, 0) = 0$ . Легко убедиться, что функция  $f(x, y)$  не имеет экстремума в точке  $(0, 0)$ .

**2. Достаточные условия экстремума.** При доказательстве достаточных условий потребуются некоторые сведения о квадратичных

формах. Напомним, что квадратичная форма

$$\Phi(\xi) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j, \quad (3)$$

где  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in R^n$ ,  $a_{ij} = a_{ji}$ , называется:

- а) *положительно определенной*, если  $\Phi(\xi) > 0$  для любого  $\xi \neq 0$ ;
- б) *отрицательно определенной*, если  $\Phi(\xi) < 0$  для любого  $\xi \neq 0$ ;
- в) *неопределенной*, если существуют  $\xi$  и  $\xi'$  такие, что  $\Phi(\xi) > 0$ , а  $\Phi(\xi') < 0$ .

Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы [7]. *Квадратичная форма положительно определена в том и только том случае, когда все главные миноры ее матрицы положительны, т. е.*

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0. \quad (4)$$

Заметим также, что квадратичная форма  $\Phi(\xi)$  отрицательно определена в том и только том случае, когда квадратичная форма  $-\Phi(\xi)$  положительно определена.

*Лемма 2. Если квадратичная форма  $\Phi(\xi)$  положительно определена, то найдется такое положительное число  $\gamma$ , что*

$$\Phi(\xi) \geq \gamma |\xi|^2, \quad \text{где} \quad |\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}. \quad (5)$$

○ Рассмотрим квадратичную форму  $\Phi(\eta)$  на сфере

$$S = \{\eta: \eta_1^2 + \dots + \eta_n^2 = 1\}.$$

Так как точка  $0 \notin S$ , а квадратичная форма положительно определена, то  $\Phi(\eta) > 0$  в любой точке  $\eta \in S$ .

Очевидно, что  $S$  есть замкнутое и ограниченное множество в  $R^n$ . Непрерывная на компакте  $S$  функция  $\Phi(\eta)$  принимает в некоторой точке  $\bar{\eta} \in S$  свое наименьшее на  $S$  значение (теорема Вейерштрасса). Поэтому, полагая  $\gamma = \Phi(\bar{\eta})$ , получаем, что  $\gamma > 0$  и что для любой точки  $\eta \in S$  выполняется неравенство  $\Phi(\eta) \geq \gamma$ .

Если  $\xi \neq 0$ , то точка  $\xi/|\xi|$  принадлежит сфере  $S$ . Поэтому

$$\Phi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) \geq \gamma.$$

Пользуясь однородностью квадратичной формы, получаем

$$\frac{1}{|\xi|^2} \Phi(\xi) = \Phi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) \geq \gamma. \quad \bullet$$

*Теорема 3 (достаточные условия экстремума). Пусть функция  $f(x)$  имеет в окрестности точки  $x^0 \in R^n$  непрерывные частные производные второго порядка, и пусть  $df(x^0) = 0$ . Тогда если второй дифференциал  $d^2 f(x^0)$  есть положительно определенная квадратичная*

форма (см. формулу (2)), то  $x^0$  — точка строгого минимума функции  $f(x)$ , если  $d^2 f(x^0)$  — отрицательно определенная квадратичная форма, то  $x^0$  — точка строгого максимума функции  $f(x)$ , если  $d^2 f(x^0)$  — неопределенная квадратичная форма, то функция  $f(x)$  не имеет экстремума в точке  $x^0$ .

○ Воспользуемся формулой (6) из § 58 при  $m = 2$ . Учитывая, что  $df(x^0) = 0$ , получаем

$$f(x) - f(x^0) = \frac{1}{2} d^2 f(x^0) + o(|\Delta x|^2) \quad \text{при} \quad |\Delta x| \rightarrow 0, \quad (6)$$

где

$$|\Delta x|^2 = \Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^2.$$

Пусть

$$d^2 f(x^0) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j$$

есть положительно определенная квадратичная форма. В силу леммы 2 существует такое положительное число  $\gamma$ , что

$$d^2 f(x^0) \geq \gamma |\Delta x|^2.$$

Применяя это неравенство к формуле (6), получаем

$$f(x) - f(x^0) \geq \frac{\gamma}{2} |\Delta x|^2 + o(|\Delta x|^2) = \frac{\gamma}{2} |\Delta x|^2 (1 + \alpha(\Delta x)), \quad (7)$$

где  $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , откуда следует, что найдется шар  $S_\delta(x^0)$  такой, что  $\forall x \in S_\delta(x^0)$  выполнено неравенство  $|\alpha(\Delta x)| < \frac{1}{2}$ .

Тогда из формулы (7) следует, что  $\forall x \in \dot{S}_\delta(x^0)$  выполнено неравенство

$$f(x) - f(x^0) \geq \frac{\gamma}{2} |\Delta x|^2 (1 - |\alpha(\Delta x)|) \geq \frac{\gamma}{4} |\Delta x|^2 > 0.$$

Следовательно,  $x^0$  — точка строгого минимума функции  $f(x)$ .

Аналогично доказывается, что в том случае, когда  $d^2 f(x^0)$  есть отрицательно определенная квадратичная форма,  $x^0$  — точка строгого максимума функции  $f(x)$ .

Если  $d^2 f(x^0)$  есть неопределенная квадратичная форма, то не выполняется необходимое условие минимума  $d^2 f(x^0) \geq 0$  (см. теорему 2). Поэтому  $x^0$  не есть точка минимума функции  $f(x)$ . Аналогично доказывается, что  $x^0$  не есть точка минимума функций  $-f(x)$ , т. е. точка максимума функции  $f(x)$ . ●

**Пример 2.** Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y, z) = x^2 + 2xy + 4xz + 8yz + 5y^2 + 9z^2.$$

△ Найдем стационарные точки функции  $f(x, y, z)$ . Они определяются из системы уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y + 4z = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 10y + 8z = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 4x + 8y + 18z = 0.$$



Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 8 & 18 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 8 \cdot 16 > 0.$$

Поэтому единственное решение однородной системы есть  $x = y = z = 0$ .

Итак, функция  $f(x, y, z)$  имеет единственную стационарную точку  $(0, 0, 0)$ . Найдем  $d^2 f(0, 0, 0)$ . Имеем

$$d^2 f(0, 0, 0) = 2 dx^2 + 4 dx dy + 8 dx dz + 16 dy dz + 10 dy^2 + 18 dz^2.$$

Так как

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 8 & 18 \end{vmatrix} = 8 \cdot 16 > 0,$$

то в силу критерия Сильвестра квадратичная форма  $d^2 f(0, 0, 0)$  положительно определена. Точка  $(0, 0, 0)$  является точкой строгого минимума функции  $f(x, y, z)$ . ▲

**У п р а ж н е н и е 1.** Показать, что квадратичная форма (3) отрицательно определена в том и только том случае, когда выполнено следующее условие для ее главных миноров:  $\Delta_k (-1)^k > 0$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

**У к а з а н и е.** Воспользоваться критерием Сильвестра положительной определенности квадратичной формы  $-\Phi(\xi)$ .

**У п р а ж н е н и е 2.** Показать, что для функции двух переменных  $f(x, y)$ , имеющей непрерывные частные производные второго порядка в окрестности точки  $(x_0, y_0)$ , условия

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0,$$

$$f_{xx}(x_0, y_0) > 0, \quad f_{xy}^2(x_0, y_0) - f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) < 0$$

достаточны для того, чтобы точка  $(x_0, y_0)$  была точкой строгого минимума функции  $f(x, y)$ .

## § 60. Условный экстремум

**1. Понятие условного экстремума.** Пусть на открытом множестве  $G \subset R^n$  заданы функции  $f_0(x), f_1(x), \dots, f_m(x)$ , причем  $m < n$ , и пусть  $E$  — множество точек множества  $G$ , удовлетворяющих системе уравнений

$$f_1(x) = 0, \quad \dots, \quad f_m(x) = 0. \quad (1)$$

Уравнения (1) будем называть *уравнениями связей* (или просто *связями*).

Точка  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in G$  называется *точкой условного минимума* функции  $f_0(x)$  при наличии связей (1), если найдется такая

окрестность  $S_\delta(x^0)$ , что для всех  $x \in G \cap S_\delta(x^0)$  выполнено неравенство  $f_0(x) \geq f_0(x^0)$ .

Точка  $x^0 \in G$  называется точкой *строгого условного минимума* функции  $f_0(x)$  при наличии связей (1), если найдется такая окрестность  $S_\delta(x^0)$ , что для всех  $x \in \dot{S}_\delta(x^0) \cap G$  выполнено неравенство  $f_0(x) > f_0(x^0)$ .

Аналогично определяются точки *условного максимума*. Точки условного максимума и минимума называются точками *условного экстремума*.

## 2. Прямой метод отыскания точек условного экстремума.

Предположим, что из системы уравнений (1) можно выразить какие-либо  $m$  переменных  $x_i$  через остальные переменные. Тогда, подставив вместо соответствующих переменных  $x_i$  их выражения через остальные  $n - m$  переменных в функцию  $f_0(x)$ , получим функцию  $F$  от  $n - m$  переменных.

Задача о нахождении точек экстремума функции  $f_0(x)$  при наличии связей (1) сведется к задаче нахождения обычного (безусловного) экстремума функции  $F$ , зависящей от  $n - m$  переменных.

**Пример 1.** Найти точки условного экстремума функции  $z = 1 - x^2 - y^2$ , если  $x + y = 1$ .

$\Delta$  Уравнение связи  $x + y = 1$  легко разрешается относительно переменной  $y$ , а именно  $y = 1 - x$ . Подставив это выражение для  $y$  в функцию  $z = 1 - x^2 - y^2$ , получаем, что  $z = 1 - x^2 - (1 - x)^2 = 2x - 2x^2$ . Функция  $2x - 2x^2$  имеет максимум при  $x = \frac{1}{2}$ . Точка  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  является точкой условного максимума функции  $z(x, y)$  при наличии связи  $x + y = 1$ , причем  $z_{\max} = \frac{1}{2}$ .  $\blacktriangle$

**Замечание.** Прямой метод нахождения условного экстремума редко бывает эффективным ввиду трудности разрешения уравнений связей относительно какой-либо группы переменных.

**3. Метод множителей Лагранжа.** Рассмотрим функцию  $n + m$  переменных

$$L(x, \lambda) = f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_m f_m(x),$$

где  $x \in G$ , а  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in R^m$ . Числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  называются *множителями Лагранжа*, а функция  $L(x, \lambda)$  называется *функцией Лагранжа*.

Будем говорить, что  $(x^0, \lambda^0)$  есть *стационарная точка функции Лагранжа*, если

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1}(x^0, \lambda^0) = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial L}{\partial x_n}(x^0, \lambda^0) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1}(x^0, \lambda^0) = f_1(x^0) = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_m}(x^0, \lambda^0) = f_m(x^0) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Теорема 1 (Лагранжа). Пусть  $x^0$  — точка условного экстремума функции  $f_0(x)$  при наличии связей (1), и пусть функции  $f_i(x)$ ,  $i = \overline{0, m}$ , непрерывно дифференцируемы в окрестности точки  $x^0$ , причем в точке  $x^0$  ранг матрицы Якоби

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \quad (3)$$

равен  $m$ .

Тогда найдутся такие множители Лагранжа  $\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0$ , что  $(x^0, \lambda^0)$  будет стационарной точкой функции Лагранжа.

○ Так как  $m < n$ , а ранг матрицы Якоби в точке  $x^0$  равен  $m$ , то хотя бы один из миноров этой матрицы порядка  $m$  отличен от нуля.

Без ограничения общности можно считать, что

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x^0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(x^0) \end{vmatrix} \neq 0, \quad (4)$$

так как выполнения условия (4) всегда можно добиться, перенумеровав переменные и уравнения связей в нужном порядке.

Пусть  $x^0$  есть точка условного минимума функции  $f_0(x)$ . Тогда существует окрестность  $K'(x^0) = K_1'(x_1^0, \dots, x_m^0) \times K_2'(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)$  такая, что

$$f_0(x) - f_0(x^0) \geq 0 \quad \text{при всех } x \in E \cap K'(x^0). \quad (5)$$

В силу непрерывности частных производных и выполнения условия (4) можно применить теорему о неявных функциях (§ 28). В силу этой теоремы найдется такая окрестность

$$K(x^0) = K_1(x_1^0, \dots, x_m^0) \times K_2(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0) \subset K'(x^0),$$

в которой система уравнений связей (1) определяет переменные  $x_1, \dots, x_m$  как неявные функции переменных  $x_{m+1}, \dots, x_n$ . Это означает, что найдется единственный набор непрерывно дифференцируемых в окрестности  $K_2(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)$  функций  $\varphi_i(x_{m+1}, \dots, x_n)$ ,  $i = \overline{1, m}$ , таких, что

$$\varphi_i(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0) = x_i^0, \quad i = \overline{1, m}; \quad (6)$$

$$f_i(\varphi_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) \equiv 0, \quad (7)$$

$$(\varphi_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_{m+1}, \dots, x_n)) \in K_1(x_1^0, \dots, x_m^0)$$

при  $(x_{m+1}, \dots, x_n) \in K_2(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

Другими словами, множество  $E \cap K(x^0)$  можно задать следующим образом:

$$E \cap K(x^0) = \{x: x = (x_1, \dots, x_n), (x_{m+1}, \dots, x_n) \in K_2(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0), \\ x_i = \varphi_i(x_{m+1}, \dots, x_n), i = \overline{1, m}\}. \quad (8)$$

Так как  $K(x^0) \subset K'(x^0)$ , то из неравенства (5) следует, что функция  $f_0(x)$  принимает на множестве  $E \cap K(x^0)$  наименьшее значение в точке  $x^0$ . Если взять представление множества  $E \cap K(x^0)$  в виде (8), то сложная функция

$$F(x_{m+1}, \dots, x_n) = \\ = f_0(\varphi_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) \quad (9)$$

определена в окрестности  $K_2(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)$  и принимает в этой окрестности наименьшее значение в точке  $(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)$ . Следовательно, в силу необходимых условий экстремума должно выполняться равенство  $dF(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0) = 0$ . Воспользовавшись инвариантностью формы первого дифференциала и равенством (9), получаем, что

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_0(x^0)}{\partial x_k} dx_k = 0. \quad (10)$$

В равенстве (10)  $dx_{m+1}, \dots, dx_n$  есть дифференциалы независимых переменных, а  $dx_1, \dots, dx_m$  — дифференциалы функций  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ , зависящих от  $x_{m+1}, \dots, x_n$ . Для краткости будем говорить о независимых и зависимых дифференциалах.

Найдем связи между зависимыми и независимыми дифференциалами. Дифференцируя тождества (7) в точке  $(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)$  и пользуясь инвариантностью формы первого дифференциала, получаем

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i(x^0)}{\partial x_k} dx_k = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (11)$$

Умножая равенства (11) на множители  $\lambda_i$  и складывая полученные равенства с равенством (10), находим

$$0 = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial f_0}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \lambda_i \right)_{x=x^0} dx_k = \sum_{k=1}^n \frac{\partial L(x^0, \lambda)}{\partial x_k} dx_k, \quad (12)$$

где  $L(x, \lambda)$  есть функция Лагранжа.

Подберем множители  $\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0$  так, чтобы коэффициенты при зависимых дифференциалах в равенстве (12) обратились в нуль, т. е.

$$\frac{\partial L(x^0, \lambda^0)}{\partial x_k} = \frac{\partial f_0(x^0)}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 \frac{\partial f_i(x^0)}{\partial x_k} = 0, \quad k = \overline{1, m}. \quad (13)$$

Система уравнений (13) единственным образом определяет множители  $\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0$ , так как ее определитель (4) отличен от нуля.

При выполнении условий (13) уравнение (12) примет вид

$$\sum_{k=m+1}^n \frac{\partial L(x^0, \lambda^0)}{\partial x_k} dx_k = 0. \quad (14)$$

Так как дифференциалы независимых переменных  $dx_{m+1}, \dots, dx_n$  могут принимать любые значения, то из (14) следует, что

$$\frac{\partial L(x^0, \lambda^0)}{\partial x_k} = 0, \quad k = m+1, \dots, n. \quad (15)$$

Объединяя равенства (13) и (15), получаем

$$\frac{\partial L(x^0, \lambda^0)}{\partial x_k} = 0, \quad k = \overline{1, n}.$$

Так как точка  $x^0 \in E$  и, следовательно, удовлетворяет уравнениям связей, то

$$\frac{\partial L(x^0, \lambda^0)}{\partial \lambda_j} = f_j(x^0) = 0, \quad j = \overline{1, m}.$$

Таким образом,  $(x^0, \lambda^0)$  есть стационарная точка функции Лагранжа  $L(x, \lambda)$ . ●

Второй дифференциал функции Лагранжа, вычисленный при фиксированных  $\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0$  по переменным  $x_1, \dots, x_n$  в точке  $x_1^0, \dots, x_n^0$ , будем обозначать через  $d_{xx}^2 L(x^0, \lambda^0)$ .

Таким образом,

$$d_{xx}^2 L(x^0, \lambda^0) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L(x^0, \lambda^0)}{\partial x_k \partial x_j} dx_k dx_j. \quad (16)$$

Иногда вместо  $d_{xx}^2 L(x^0, \lambda^0)$  будем писать  $d^2 L(x^0, \lambda^0)$ .

Обозначим через  $E_T$  следующее линейное многообразие в  $R^n$ :

$$E_T = \left\{ \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in R^n : \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i(x^0)}{\partial x_k} \xi_k = 0, \quad i = \overline{1, m} \right\}. \quad (17)$$

Равенства (11) означают, что  $dx = (dx_1, \dots, dx_n) \in E_T$ .

**Теорема 2.** Пусть  $x^0$  есть точка условного минимума функции  $f_0(x)$  при наличии связей (1), и пусть функции  $f_i(x)$ ,  $i = \overline{0, m}$ , имеют непрерывные частные производные второго порядка в окрестности точки  $x^0$ , причем в точке  $x^0$  ранг функциональной матрицы (3) равен  $m$ .

Тогда найдутся множители Лагранжа  $\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0$  такие, что  $(x^0, \lambda^0)$  есть стационарная точка функции Лагранжа, а  $d_{xx}^2 L(x^0, \lambda^0) \geq 0$  при  $(dx_1, \dots, dx_n) \in E_T$ .

○ Так как выполнены все условия теоремы 1, то найдутся множители Лагранжа  $\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0$  такие, что  $(x^0, \lambda^0)$  будет стационарной точкой функции Лагранжа, т. е. выполняются условия (2). Повторяя рас-

суждения теоремы 1, рассмотрим сложную функцию (9), имеющую безусловный экстремум в точке  $(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)$ . Так как эта функция имеет непрерывные частные производные второго порядка, то, в силу теоремы 2, § 59 должно быть выполнено условие  $d^2 F(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0) \geq 0$ .

Воспользовавшись правилом нахождения второго дифференциала сложной функции и формулой (9), находим, что

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f_0(x^0)}{\partial x_k \partial x_j} dx_k dx_j + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_0}{\partial x_k}(x^0) d^2 x_k \geq 0. \quad (18)$$

Дифференцируя два раза в точке  $x_{m+1}^0, \dots, x_n^0$  тождества (7), получаем равенства

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f_i(x^0)}{\partial x_k \partial x_j} dx_k dx_j + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x^0) d^2 x_k = 0. \quad (19)$$

Если умножить каждое из равенств (19) на соответствующий множитель Лагранжа  $\lambda_i^0$  и сложить с неравенством (18), то получаем неравенство

$$d_{xx}^2 L(x^0, \lambda^0) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial L(x^0, \lambda^0)}{\partial x_k} d^2 x_k \geq 0. \quad (20)$$

Последняя сумма в неравенстве (20) равна нулю, так как  $(x^0, \lambda^0)$  есть стационарная точка функции Лагранжа и в ней выполняются условия (2). Таким образом,  $d_{xx}^2 L(x^0, \lambda^0) \geq 0$  при  $(dx_1, \dots, dx_n) \in E_T$ . ●

**Теорема 3** (достаточные условия условного экстремума). Пусть функции  $f_i(x)$ ,  $i = \overline{0, m}$ , имеют непрерывные частные производные второго порядка в окрестности точки  $x^0 \in R^n$ , причем в точке  $x^0$  ранг функциональной матрицы (3) равен  $m$ , и пусть  $(x^0, \lambda^0)$  есть стационарная точка функции Лагранжа  $L(x, \lambda)$ .

Тогда если  $d_{xx}^2 L(x^0, \lambda^0)$  есть положительно определенная квадратичная форма при  $dx \in E_T$ , то  $x^0$  является точкой условного строгого минимума функции  $f_0(x)$  при наличии связей (1). Если  $d_{xx}^2 L(x^0, \lambda^0)$  есть отрицательно определенная квадратичная форма при  $dx \in E_T$ , то  $x^0$  — точка условного строгого максимума. Если  $d_{xx}^2 L(x^0, \lambda^0)$  есть неопределенная квадратичная форма при  $dx \in E_T$ , то  $x^0$  не есть точка условного экстремума функции  $f_0(x)$  при наличии связей (1).

○ Пусть

$$E = \{x: f_i(x) = 0, i = \overline{1, m}\}. \quad (21)$$

По условию теоремы функции  $f_i(x)$ ,  $i = \overline{0, m}$ , имеют непрерывные частные производные второго порядка, а ранг функциональной матрицы (3) равен  $m$ . Повторяя рассуждения теоремы 1, можем без ограничения общности считать, что выполнено условие (4) и что найдется такая окрестность  $K(x^0) = K_1(x_1^0, \dots, x_m^0) \times K_2(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)$ , что множество  $E \cap K(x^0)$  можно задать формулой (8). На  $E \cap K(x^0)$  функция

$f_0(x)$  становится функцией  $n - m$  переменных  $F(x_{m+1}, \dots, x_n)$ , определенной формулой (9) и имеющей непрерывные частные производные второго порядка.

По условию теоремы  $(x^0, \lambda^0)$  есть стационарная точка функции Лагранжа, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_k}(x^0, \lambda^0) &= 0, \quad k = \overline{1, n}; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(x^0, \lambda^0) &= f_i(x^0) = 0, \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (22)$$

Из формул (22) следует, что  $x^0 \in E$  и что

$$d_x L(x^0, \lambda^0) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial L(x^0, \lambda^0)}{\partial x_k} dx_k = 0. \quad (23)$$

Рассмотрим функцию  $L(x, \lambda^0)$  на множестве  $E \cap K(x^0)$ . Очевидно, что

$$L(x, \lambda^0) = f_0(x) = F(x_{m+1}, \dots, x_n) \quad \text{при } x \in E \cap K(x^0). \quad (24)$$

В силу инвариантности формы первого дифференциала из формулы (24) следует, что

$$dF(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0) = d_x L(x^0, \lambda^0) = 0. \quad (25)$$

Находя второй дифференциал от обеих частей равенства (24) и используя равенства (22), получаем

$$\begin{aligned} d^2 F(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0) &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L(x^0, \lambda^0)}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k + \\ &+ \sum_{k=1}^n \frac{\partial L(x^0, \lambda^0)}{\partial x_k} d^2 x_k = d_{xx}^2 L(x^0, \lambda^0). \end{aligned} \quad (26)$$

Пусть  $d_{xx}^2 L(x^0, \lambda^0) > 0$  при  $dx \in E_T$ ,  $dx \neq 0$ . Так как множество  $E \cap K(x^0)$  можно задать в форме (8), то, выбирая  $dx_{m+1}, \dots, dx_n$  произвольным образом, получим, что дифференциалы  $dx_1, \dots, dx_m$  зависят от  $dx_{m+1}, \dots, dx_n$ . Дифференцируя тождества (7) в точке  $x^0$ , получаем соотношения (11), которые означают, что  $dx \in E_T$ .

Из формулы (26) тогда следует, что

$$d^2 F(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0) > 0 \quad \text{при } dx_{m+1}^2 + \dots + dx_n^2 > 0. \quad (27)$$

Из (25) и (27) получаем, что  $(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)$  есть точка строгого минимума функции  $F(x_{m+1}, \dots, x_n)$ , т. е.  $x^0$  есть точка строгого минимума функции  $f_0(x)$  на множестве  $E \cap K(x^0)$ . Таким образом,  $x^0$  есть точка строгого условного минимума функции  $f_0(x)$  при наличии связей (1).

Аналогично рассматривается случай, когда  $d_{xx}^2 L(x^0, \lambda^0) < 0$ ,  $dx \in E_T$ ,  $dx \neq 0$ . Если же  $d_{xx}^2 L(x^0, \lambda^0)$  при  $dx \in E_T$  есть неопределенная квадратичная форма, то не выполняется условие  $d_{xx}^2 L(x^0, \lambda^0) \geq 0$

при  $dx \in E_T$ , являющееся, в силу теоремы 2, необходимым условием минимума. Поэтому  $x^0$  не есть точка условного минимума функции  $f_0(x)$  при связях (1). Аналогично доказывается, что  $x^0$  не может быть точкой условного минимума функции  $-f_0(x)$ , а следовательно, и точкой условного максимума функции  $f_0(x)$  при связях (1). ●

**З а м е ч а н и е.** Если окажется, что  $d_{xx}^2 L(x^0, \lambda^0)$  есть положительно определенная квадратичная форма на всем пространстве  $R^n$ , то  $d_{xx}^2 L(x^0, \lambda^0) > 0$  и при  $dx \in E_T$ ,  $dx \neq 0$ . Поэтому в этом случае в квадратичной форме  $d_{xx}^2 L(x^0, \lambda^0)$  не нужно исключать зависимые дифференциалы.

**П р и м е р 1.** Найти экстремумы функции  $x - 2y + 2z = u$  и на сфере  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

△ Строим функцию Лагранжа

$$L(x, y, z, \lambda) = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

Стационарные точки функции Лагранжа находим, решая систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -2 + 2\lambda y = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = 2 + 2\lambda z = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Исключая из этой системы  $x, y, z$ , получаем  $\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 - 1 = 0$ , откуда  $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ ,  $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$ .

У функции Лагранжа есть две стационарные точки,

$$M_1 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right) \quad \text{и} \quad M_2 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{2}\right).$$

Так как  $d^2 L(M_1) = 3(dx^2 + dy^2 + dz^2) > 0$ , а  $d^2 L(M_2) = -3(dx^2 + dy^2 + dz^2) < 0$  при  $dx^2 + dy^2 + dz^2 > 0$ , то  $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$  — точка условного минимума, а  $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$  — точка условного максимума функции  $u = x - 2y + 2x$  при наличии ограничения  $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ , причем  $u_{\min} = -3$ ,  $u_{\max} = 3$ . ▲

**П р и м е р 2.** Найти условные экстремумы функции  $f_0(x, y) = e^{axy}$ ,  $a \neq 0$ , при наличии ограничения  $f_1(x, y) = x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0$ .

△ Построим функцию Лагранжа:

$$L(x, y) = e^{axy} + \lambda(x^3 + y^3 + x + y - 4).$$

Стационарные точки функции Лагранжа определяются из системы



уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} &= aye^{axy} + \lambda(3x^2 + 1) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= axe^{axy} + \lambda(3y^2 + 1) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0.\end{aligned}\tag{28}$$

Умножая первое уравнение на  $x$ , а второе на  $y$  и вычитая, получаем

$$\lambda(3x^3 - 3y^3 + x - y) = \lambda(x - y)(3x^2 + 3xy + 3y^2 + 1) = 0.\tag{29}$$

Если  $\lambda = 0$ , то из первых двух уравнений (28) получаем  $x = y = 0$ . Но  $x = y = 0$  не удовлетворяет уравнению связи. Итак,  $\lambda \neq 0$ , поэтому из (29) следует, что  $x = y$  (второй сомножитель всегда положителен:  $3(x^2 + xy + y^2) + 1 > 0$ ). Подставляя  $x = y$  в уравнение связи, получаем  $x^3 + x = 2$ ,  $x = y = 1$ . Первое из уравнений (28) дает при  $x = y = 1$  значение  $\lambda = -\frac{a}{4}e^a$ .

Итак,  $(1, 1, -\frac{a}{4}e^a)$  есть единственная стационарная точка функции Лагранжа.

Так как

$$\begin{aligned}d(e^{axy}) &= a(x dy + y dx) e^{axy}, \\ d^2(e^{axy}) &= a^2(x dy + y dx)^2 e^{axy} + 2a dx dy e^{axy}, \\ d^2(x^3 + y^3 + x + y - 4) &= 6x dx^2 + 6y dy^2,\end{aligned}$$

то для второго дифференциала функции Лагранжа при  $\lambda_0 = -\frac{a}{4}e^a$  и  $x = y = 1$  получается следующее выражение:

$$d^2L(1, 1, \lambda_0) = ae^a \left[ a(dx + dy)^2 + 2 dx dy - \frac{3}{2}(dx^2 + dy^2) \right].\tag{30}$$

Дифференцируя уравнение связи при  $x = y = 1$ , получаем, что  $dy + dx = 0$ . Подставляя  $dy = -dx$  в уравнение (30), получаем равенство

$$d^2L(1, 1, \lambda_0) = -5ae^a dx^2.\tag{31}$$

Поэтому при  $a < 0$  в точке  $(1, 1)$  будет условный минимум, а при  $a > 0$  — условный максимум функции  $f_0(x, y)$  при наличии связи  $x^3 + y^3 + x + y = 4$ , причем экстремальное значение функции равно  $e^a$ . ▲

*Замечание.* Уравнение связи  $x^3 + y^3 + x + y = 4$  было бы затруднительно разрешить относительно одной из переменных. Метод Лагранжа для примера 2 более эффективен, чем прямой метод исключения зависимых переменных.

#### 4. Несколько замечаний о методе множителей Лагранжа.

Задачи об отыскании экстремумов функций (как числовых, так и функций более общей природы) при наличии ограничений являются весьма распространенными. Теория экстремальных задач интенсивно развивается и находит широкий круг приложений. В § 60 были рас-

смотрены ограничения типа равенств, задаваемые достаточно гладкими функциями (гладкие связи). Метод множителей Лагранжа имеет глубокие обобщения и на более общий случай, когда ограничения задаются системой равенств и неравенств при помощи недифференцируемых в обычном смысле функций.

В конкретных прикладных вопросах множители Лагранжа имеют содержательную интерпретацию. Так, в механике множители Лагранжа задают реакции связей, а в математической экономике — цены на продукты производства. Широко развиты приближенные методы решения экстремальных задач, использующие современную вычислительную технику.

### УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ XIII

1. Функцию  $(x + y)e^{x-y}$  разложить в окрестности точки  $(0, 0)$  по формуле Тейлора, удерживая члены до третьего порядка малости включительно при  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ .

2. Функцию  $\operatorname{ch} x \sin y$  разложить в окрестности точки  $(0, 0)$  по формуле Тейлора, удерживая члены до пятого порядка малости включительно при  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ .

3. Функция  $f(x)$ , определенная на выпуклом множестве  $G$  в евклидовом пространстве  $R^3$ , называется выпуклой на  $G$ , если для любых  $x, y \in G$  и для любого  $t \in [0, 1]$  выполнено неравенство

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Показать, что для монотонно возрастающей выпуклой функции  $\varphi: R \rightarrow R$  и выпуклой на выпуклом множестве  $G$  функции  $f$  композиция  $\varphi \circ f$  будет выпуклой функцией на множестве  $G$ .

4. Функция  $f: G \rightarrow R$  называется строго выпуклой на выпуклом множестве  $G \subset R^n$ , если для любых  $x, y \in G$  и для любого  $t \in (0, 1)$  выполнено неравенство

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y).$$

Показать, что строго выпуклая в выпуклой области  $G$  функция не может иметь в этой области более одного локального минимума.

5. Пусть функция  $f: G \rightarrow R$  дважды непрерывно дифференцируема на выпуклой области  $G \subset R^n$ . Показать, что она будет строго выпукла в области  $G$ , если второй дифференциал  $d^2f(x)$  есть положительного определенной форма дифференциалов независимых переменных  $dx_1, \dots, dx_n$  в каждой точке области  $G$ .

6. Исследовать на экстремум следующую квадратичную форму:  $u = x^2 + y^2 + z^2 + 12xy + 2zy$ .

7. Исследовать на экстремум функцию  $u = xyz$  при наличии связей  $x + y + z = 0$ ,  $z^2 + y^2 + x^2 = a^2$ .

8. Показать, что наибольшее и наименьшее значения квадратичной формы  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$  на сфере  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$  равны наибольшему и наименьшему собственным значениям матрицы квадратичной формы.

9. Найти условный экстремум функции  $u = e^{xyz}$  при ограничении  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

# ГЛАВА XIV

## РЯДЫ ФУРЬЕ

В науке и технике возникают разнообразные задачи, связанные с изучением реакции  $Lf$  некоторого сложного объекта на внешнее воздействие  $f$ . Часто эту реакцию можно считать линейно зависящей от воздействия  $f$ . Допустим, что известна реакция объекта на некоторое счетное множество простых воздействий  $f_n$ ,  $n \in N$ . Если есть возможность представить сложное воздействие  $f$  в виде линейной комбинации простых воздействий, то в силу линейности оператора  $L$  и реакцию системы можно представить в виде линейной комбинации реакций на простые воздействия. Возникает проблема представления заданной функции в виде конечной или бесконечной линейной комбинации известных простых функций. Например, в теории колебаний возникает проблема разложения сложного колебания в сумму простых гармоник вида  $A_k \sin(\omega_k t + \alpha_k)$ , где  $\omega_k$  — известная последовательность частот. В строгой математической постановке подобные задачи изучаются в теории рядов Фурье.

### § 61. Ортогональные системы функций. Ряды Фурье по ортогональным системам

**1. Ортогональные системы функций.** Говорят, что система непрерывных на отрезке  $[a, b]$  функций  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  — *ортогональна на отрезке  $[a, b]$* , если

$$\int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0 \quad \text{для } n, m \in N \text{ и } n \neq m. \quad (1)$$

Если, кроме того,

$$\int_a^b \varphi_n^2(x) dx = 1 \quad \text{для } n \in N, \quad (2)$$

то система функций  $\{\varphi_n\}$  называется *ортонормированной на отрезке  $[a, b]$* .

Например, *тригонометрическая система*

$$\frac{1}{2}, \quad \cos \frac{\pi x}{l}, \quad \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \dots, \quad \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \dots \quad (3)$$

ортгональна на отрезке  $[-l, l]$  (§ 36, пример 1 и упр. 3).

Так как

$$2 \int_{-l}^l \left(\frac{1}{2}\right)^2 dx = \int_{-l}^l \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \int_{-l}^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = l, \quad n \in \mathbf{N}, \quad (4)$$

то, поделив все функции тригонометрической системы (3) на  $\sqrt{l}$ , а первую из этих функций на  $\sqrt{l/2}$ , получим ортонормированную на отрезке  $[-l, l]$  тригонометрическую систему

$$\frac{1}{\sqrt{2l}}, \quad \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{\pi x}{l}, \quad \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \dots \quad (5)$$

При  $l = \pi$  тригонометрическая система (3) имеет особенно простой вид

$$\frac{1}{2}, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \dots, \quad \cos nx, \quad \sin nx, \quad \dots \quad (6)$$

и ортогональна на отрезке  $[-\pi, \pi]$ .

*Пример 1. Многочлены Лежандра*

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n \in \mathbf{N}, \quad L_0(x) = 1, \quad (7)$$

образуют ортогональную систему функций на отрезке  $[-1, 1]$ .

$\Delta$  Доказательство ортогональности многочленов Лежандра на отрезке  $[-1, 1]$  сводится к проверке при  $n > m$  тождества

$$J = \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m dx = 0.$$

Воспользуемся тем, что  $x = 1$  и  $x = -1$  есть нули кратности  $n$  многочлена  $(x^2 - 1)^n$ . Поэтому все производные многочлена  $(x^2 - 1)^n$  до порядка  $n - 1$  включительно обращаются в нуль в точках  $x = 1$  и  $x = -1$ .

Интегрируя выражение  $J$  по частям, получаем, что

$$\begin{aligned} J &= - \int_{-1}^1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} (x^2 - 1)^m dx = \dots \\ &\dots = (-1)^n \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2 - 1)^m dx = 0, \end{aligned}$$

так как  $n + m > 2m$ , многочлен  $(x^2 - 1)^m$  имеет степень  $2m$ , а производная от многочлена порядка, более высокого, чем степень многочлена, тождественно равна нулю.  $\blacktriangle$

**Упражнение 1.** Показать, что тригонометрическая система (3) ортогональна на любом отрезке  $[a, a + 2l]$ ,  $a \in \mathbf{R}$ .

**Указание.** См. § 36, пример 6.

У п р а ж н е н и е 2. Показать, что система функций

$$\frac{1}{2}, \cos x, \dots, \cos nx, \dots$$

ортогональна на отрезке  $[0, \pi]$ .

У п р а ж н е н и е 3. Показать, что система синусов

$$\sin \frac{\pi x}{l}, \dots, \sin \frac{n\pi x}{l}, \dots$$

ортгональна на любом отрезке вида  $[a, a + l]$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

У п р а ж н е н и е 4. Показать, что тригонометрическая система

$$\frac{1}{2}, \cos \frac{2\pi x}{b-a}, \sin \frac{2\pi x}{b-a}, \dots, \cos \frac{2\pi nx}{b-a}, \sin \frac{2\pi nx}{b-a}, \dots$$

ортогональна на отрезке  $[a, b]$ .

**2. Ряд Фурье по ортогональной системе.** Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , а  $\{\varphi_k(x)\}$  — ортогональная на  $[a, b]$  система непрерывных функций, причем ни одна из функций  $\varphi_k(x)$  не обращается тождественно в нуль на отрезке  $[a, b]$ . Говорят, что функция  $f(x)$  разложена на отрезке  $[a, b]$  в сходящийся ряд по ортогональной системе функций  $\{\varphi_k(x)\}$ , если найдется такая числовая последовательность  $\{a_k\}$ , что функциональный ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$  сходится и его сумма равна  $f(x)$ , т. е.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x), \quad x \in [a, b]. \quad (8)$$

*Лемма 1. Если функциональный ряд (8) сходится равномерно на отрезке  $[a, b]$ , то справедливы следующие выражения для коэффициентов этого ряда:*

$$a_n = \frac{\int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx}{\int_a^b \varphi_n^2(x) dx}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

○ Так как функция  $\varphi_n(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то она ограничена на этом отрезке (теорема Вейерштрасса). Если равномерно сходящийся ряд умножить на ограниченную функцию, то получим равномерно сходящийся ряд (это непосредственно следует из определения равномерной сходимости функционального ряда). Поэтому, умножая ряд (8) на функцию  $\varphi_n(x)$ , получаем

$$f(x) \varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \varphi_n(x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (10)$$

причем ряд в правой части равенства (10) сходится равномерно на отрезке  $[a, b]$ .

Воспользовавшись теоремой о законности почленного интегрирования равномерно сходящегося ряда и ортогональностью функций  $\varphi_k(x)$  на отрезке  $[a, b]$ , получаем

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx &= \int_a^b \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \right) \varphi_n(x) dx = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_a^b \varphi_k(x) \varphi_n(x) dx = a_n \int_a^b \varphi_n^2(x) dx. \end{aligned} \quad (11)$$

Так как функция  $\varphi_n(x)$  не равна тождественно нулю на отрезке  $[a, b]$  и непрерывна, то  $\int_a^b \varphi_n^2(x) dx > 0$ . Поэтому из равенства (11) следует формула (9) для коэффициентов  $a_n$ . ●

Числа  $a_n$  называются *коэффициентами Фурье*, а ряд (8) — *рядом Фурье функции  $f(x)$  по ортогональной на  $[a, b]$  системе функций  $\{\varphi_k(x)\}$* .

Ряд Фурье функции  $f(x)$  по тригонометрической системе на отрезке  $[-l, l]$  будем записывать в виде

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right) \quad (12)$$

и называть *тригонометрическим рядом Фурье функции  $f(x)$  на отрезке  $[-l, l]$* .

Коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  можно вычислить, если подставить в формулы (9) выражения для тригонометрических функций и воспользоваться формулами (4):

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n \in N. \end{aligned} \quad (13)$$

В частности, при  $l = \pi$  получаем

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n \in N. \end{aligned} \quad (14)$$

**3. Ряд Фурье абсолютно интегрируемой функции.** Коэффициенты Фурье могут быть вычислены при помощи формулы (9) для любой абсолютно интегрируемой на отрезке  $[a, b]$  функции  $f(x)$ , если функции  $\varphi_k(x)$  непрерывны и не обращаются тождественно в нуль на отрезке  $[a, b]$ .

В самом деле, пусть  $\int_a^b |f(x)| dx$  сходится как несобственный интеграл. Тогда

$$|f(x) \varphi_n(x)| \leq k_n |f(x)|, \quad k_n = \sup_{x \in [a, b]} |\varphi_n(x)|.$$

По признаку сравнения интеграл  $\int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx$  сходится абсолютно. Следовательно, все коэффициенты Фурье могут быть вычислены при помощи формулы (9).

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ , где  $a_n$  — коэффициенты Фурье абсолютно интегрируемой на  $[a, b]$  функции  $f(x)$ , будем называть *рядом Фурье функции  $f(x)$  по ортогональной системе функций  $\{\varphi_n(x)\}$* . Так как этот ряд может оказаться расходящимся, то будем писать

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x). \quad (15)$$

В частности, для тригонометрической системы (3) формула (15) имеет следующий вид:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (16)$$

Запись (15) означает, что  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$  есть ряд Фурье функции  $f(x)$  по ортогональной системе  $\{\varphi_n(x)\}$ .

## § 62. Лемма Римана

В теории тригонометрических рядов и теории интеграла Фурье (которая будет изложена в § 74) фундаментальную роль играет следующая лемма Римана.

**Лемма 1 (Римана).** Пусть функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема на конечном или бесконечном интервале  $(a, b)$ . Тогда

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin \omega x dx = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos \omega x dx = 0. \quad (1)$$

○ а) Пусть сначала функция  $f(x)$  интегрируема по Риману на отрезке  $[a, b]$ . В силу критерия интегрируемости для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое разбиение  $T = \{x_i, i = \bar{0}, n\}$  отрезка  $[a, b]$ , что разность  $S_T - s_T$

верхней и нижней сумм Дарбу будет меньше  $\varepsilon/2$ , т. е.

$$S_T - s_T = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2},$$

где  $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ ,  $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ .

Тогда для любого  $i = \overline{1, n}$  и для любого  $x \in [x_{i-1}, x_i]$  выполняется неравенство  $0 \leq f(x) - m_i \leq M_i - m_i$  и

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \sin \omega x \, dx \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \sin \omega x \, dx \right| = \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - m_i) \sin \omega x \, dx + \sum_{i=1}^n m_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin \omega x \, dx \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - m_i| \cdot |\sin \omega x| \, dx + \sum_{i=1}^n \frac{|m_i|}{|\omega|} |\cos \omega x_i - \cos \omega x_{i-1}| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i + \frac{2}{|\omega|} \sum_{i=1}^n |m_i| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{c_0}{|\omega|}, \end{aligned}$$

где  $c_0 = 2n \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ .

При фиксированном  $n$  найдется  $\omega_0 > 0$  такое, что при  $|\omega| > \omega_0$  выполнено неравенство  $c_0/\omega < \varepsilon/2$ . Таким образом, при  $|\omega| > \omega_0$  выполнено неравенство

$$\left| \int_a^b f(x) \sin \omega x \, dx \right| < \varepsilon,$$

т. е.

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin \omega x \, dx = 0.$$

б) Пусть теперь функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема на  $(a, b)$ . Без ограничения общности считаем, что единственная особая точка интеграла  $\int_a^b |f(x)| \, dx$  есть  $b$ . Напомним, что рассматриваются только несобственные интегралы с конечным числом особых точек.

Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $b' < b$  такое, что на отрезке  $[a, b']$  функция  $f(x)$  интегрируема по Риману, а несобственный интеграл  $\int_{b'}^b |f(x)| \, dx < \frac{\varepsilon}{2}$ .



Так как для интегрируемых по Риману функций лемма доказана в п. а), то найдется  $\omega_0 > 0$  такое, что при  $|\omega| > \omega_0$  выполнено неравенство

$$\left| \int_a^{b'} f(x) \sin \omega x \, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому при  $|\omega| > \omega_0$  имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \sin \omega x \, dx \right| &= \left| \int_a^{b'} f(x) \sin \omega x \, dx + \int_{b'}^b f(x) \sin \omega x \, dx \right| \leq \\ &\leq \left| \int_a^{b'} f(x) \sin \omega x \, dx \right| + \int_{b'}^b |f(x)| \, dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Итак,  $\int_a^b f(x) \sin \omega x \, dx \rightarrow 0$  при  $\omega \rightarrow \infty$ . Аналогично доказывается, что

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos \omega x \, dx = 0. \bullet$$

*Следствие. Если  $f(x)$  — абсолютно интегрируемая на отрезке  $[-l, l]$  функция, то ее коэффициенты Фурье, определенные формулами (13), стремятся к нулю при  $n \rightarrow \infty$ .*

### § 63. Формула для частичных сумм тригонометрического ряда Фурье

**1. Периодические функции.** Периодическая функция была определена в § 9. Под периодом  $T$  функции  $f(x)$  будем понимать наименьший из ее периодов. Так, функции  $\sin x$  и  $\cos x$  имеют период  $2\pi$ , а функция  $\operatorname{tg} x$  имеет период  $\pi$ .

Если функция  $f(x)$  имеет период  $2l$ , то будем называть ее  *$2l$ -периодической*. Функцию, определенную на  $[-l, l]$ , можно периодически продолжить на  $(-\infty, +\infty)$ , сдвигая последовательно график функции на промежутке  $[-l, l]$  параллельно оси  $x$  на  $2nl$ , где  $n = 0, \pm 1, \dots$  Если существуют односторонние пределы  $f(-l+0)$  и  $f(l-0)$ , то, в силу периодичности выполняются равенства

$$\begin{aligned} f(l+0) &= \lim_{x \rightarrow l+0} f(x) = \lim_{u \rightarrow +0} f(l+u) = \lim_{u \rightarrow +0} f(-l+u) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -l+0} f(x) = f(-l+0). \end{aligned}$$

Если  $f(-l+0) \neq f(l-0)$ , то продолженная функция в точках  $l(2n+1)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , будет иметь разрывы первого рода со скачком  $f(-l+0) - f(l-0)$  даже в том случае, когда функция  $f(x)$  была непре-

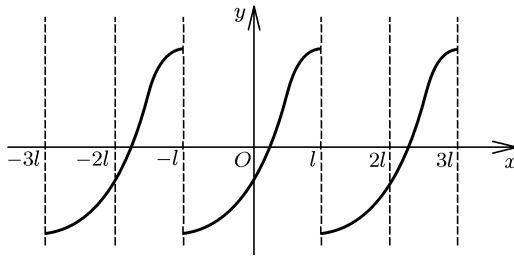


Рис. 63.1

рывной на промежутке  $[-l, l]$  (см. рис. 63.1). Функция  $f(x)$ , непрерывная на промежутке  $[-l, l]$ , будучи периодически продолженной на  $(-\infty, +\infty)$ , останется непрерывной в том и только том случае, когда  $f(-l+0) = f(l-0)$ .

**Упражнение 1.** Показать, что для нечетной на отрезке  $[-l, l]$ , абсолютно интегрируемой функции все коэффициенты  $a_n$  в формуле (12) равны нулю, а для четной абсолютно интегрируемой на  $[-l, l]$  функции все коэффициенты  $b_n$  в формуле (12) равны нулю.

**Лемма 1.** Если функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема на отрезке  $[-l, l]$  и  $2l$ -периодическая, то для любого вещественного числа  $a$  выполнено равенство

$$\int_{a-l}^{a+l} f(x) dx = \int_{-l}^l f(x) dx.$$

○ Это утверждение доказано в § 36 (пример 6). ●

**2. Частичные суммы ряда Фурье абсолютно интегрируемой функции.** В дальнейшем считаем, что полупериод  $l = \pi$ . Такое предположение не ограничивает общности, поскольку от периода  $2l$  к периоду  $2\pi$  можно перейти при помощи простой замены независимой переменной.

Запишем для  $2\pi$ -периодической абсолютно интегрируемой функции ее тригонометрический ряд Фурье при помощи формулы (12) в § 61 и построим последовательность частичных сумм этого ряда

$$S_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx. \quad (1)$$

Заметим, что функция  $S_n(x)$  бесконечно дифференцируема и  $2\pi$ -периодична.

Найдем формулу для  $S_n(x)$  (формулу Дирихле). При  $u \neq 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , справедливо тождество

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \cos u + \dots + \cos nu = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}}. \quad (2)$$

○ Достаточно заметить, что

$$\begin{aligned} 2D_n(u) \sin \frac{u}{2} &= \sin \frac{u}{2} + 2 \cos u \sin \frac{u}{2} + \dots + 2 \cos nu \sin \frac{u}{2} = \\ &= \sin \frac{u}{2} + \sin \frac{3u}{2} - \sin \frac{u}{2} + \dots + \sin \left(n + \frac{1}{2}\right)u - \\ &\quad - \sin \left(n - \frac{1}{2}\right)u = \sin \left(n + \frac{1}{2}\right)u. \quad \bullet \end{aligned}$$

Функция  $D_n(u)$ , определяемая формулой (2), называется *ядром Дирихле*.

Лемма 2. *Ядро Дирихле — бесконечно дифференцируемая, четная и  $2\pi$ -периодическая функция, причем*

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) du = 1. \quad (3)$$

○ Четность,  $2\pi$ -периодичность и бесконечная дифференцируемость ядра Дирихле следуют из формулы (2), так как теми же свойствами обладает функция  $\cos ku$ . Формула (3) также следует из формулы (2), поскольку

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) du &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos u + \dots + \cos nu\right) du = \\ &= 1 + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} \cos ku du = 1. \quad \bullet \end{aligned}$$

Выведем теперь формулу Дирихле для частичных сумм ряда Фурье. Подставляя в формулу (1) для частичной суммы выражения (14) из § 61 для коэффициентов Фурье и используя формулу (2) для ядра Дирихле, получаем

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \\ &+ \sum_{k=1}^n \left( \cos kx \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt + \sin kx \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt \right) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(x-t) \right) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u) D_n(u) du. \end{aligned}$$

Так как подынтегральная функция  $2\pi$ -периодическая, а интеграл по отрезку длины  $2\pi$  в силу леммы 1 не зависит от того, в каком месте вещественной оси этот отрезок расположен, то

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) D_n(u) du. \quad (4)$$

Выражение (4) для частичной суммы ряда Фурье называют *формулой Дирихле*. Если разбить отрезок интегрирования на два симметричных отрезка, сделать во втором интеграле замену переменной  $u = -v$  и воспользоваться четностью ядра Дирихле, то эту формулу можно еще преобразовать к виду

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+u) + f(x-u)) D_n(u) du. \quad (5)$$

## § 64. Сходимость ряда Фурье в точке

**1. Теорема о локализации.** Сходимость ряда Фурье в точке  $x_0$  сводится к исследованию сходимости последовательности частичных сумм  $S_n(x_0)$ , определенных формулой Дирихле (5).

**Теорема 1 (принцип локализации).** Пусть функция  $f(x)$   $2\pi$ -периодическая и абсолютно интегрируемая на отрезке  $[-\pi, \pi]$ . Тогда сходимость ряда Фурье функции  $f(x)$  в точке  $x_0 \in R$  и сумма ряда Фурье функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  (если этот ряд сходится) зависят только от поведения функции  $f(x)$  в произвольно малом интервале  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ,  $\delta > 0$ .

○ Используя формулы (5) и (2) из § 63, запишем частичную сумму ряда Фурье в следующем виде:

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x_0+u) + f(x_0-u)}{2 \sin \frac{u}{2}} \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) u du. \quad (1)$$

Так как функция  $f(x_0+u) + f(x_0-u)$  абсолютно интегрируема на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , а для  $\delta \in (0, \pi)$  и всех  $u \in [\delta, \pi]$  выполнено неравенство

$$\left| \frac{f(x_0+u) + f(x_0-u)}{2 \sin \frac{u}{2}} \right| \leq \frac{1}{2 \sin \frac{\delta}{2}} |f(x_0+u) + f(x_0-u)|,$$

то по признаку сравнения функция

$$\Phi(u) = \frac{f(x_0+u) + f(x_0-u)}{2 \sin \frac{u}{2}}$$

абсолютно интегрируема на отрезке  $[\delta, \pi]$ . В силу леммы Римана

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} \frac{f(x_0 + u) + f(x_0 - u)}{2 \sin \frac{u}{2}} \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) u \, du = 0.$$

Тогда из формулы (1) получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ S_n(x_0) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{f(x_0 + u) + f(x_0 - u)}{2 \sin \frac{u}{2}} \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) u \, du \right] = 0. \quad (2)$$

Из формулы (2) следует, что существование и величина предела  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0)$  зависит только от существования и величины предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{f(x_0 + u) + f(x_0 - u)}{2 \sin \frac{u}{2}} \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) u \, du,$$

т. е. от значений функции  $f$  на интервале  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ . ●

**Замечание.** Для функции  $f(x) \equiv \frac{1}{2}$  формула (2) принимает следующий вид:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) u}{2 \sin \frac{u}{2}} \, du = \frac{1}{2}, \quad 0 < \delta < \pi. \quad (3)$$

**2. Условие Гёльдера.** Будем говорить, что функция  $f(x)$  удовлетворяет в точке  $x_0$  *условию Гёльдера*, если существуют односторонние конечные пределы  $f(x_0 \pm 0)$  и такие числа  $\delta > 0$ ,  $\alpha \in (0, 1]$  и  $c_0 > 0$ , что для всех  $u \in (0, \delta)$  выполнены неравенства

$$|f(x_0 + u) - f(x_0 + 0)| \leq c_0 u^\alpha, \quad |f(x_0 - u) - f(x_0 - 0)| \leq c_0 u^\alpha. \quad (4)$$

Число  $\alpha$  называют *показателем Гёльдера*.

Заметим, что функция  $f(x)$ , удовлетворяющая условию Гёльдера (4), может иметь в точке  $x_0$  разрыв первого рода, если  $f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$ .

Можно расширить определение односторонних производных (см. § 14), полагая

$$f'_+(x_0) = \lim_{u \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + u) - f(x_0 + 0)}{u},$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{u \rightarrow +0} \frac{f(x_0 - u) - f(x_0 - 0)}{-u}.$$

**Лемма 1.** Если в точке  $x_0$  функция  $f(x)$  имеет конечные односторонние производные  $f'_+(x_0)$  и  $f'_-(x_0)$ , то функция  $f(x)$  удовлетворяет в точке  $x_0$  условию Гёльдера с показателем  $\alpha = 1$ .

○ Функции

$$\varphi(u) = \frac{f(x_0 + u) - f(x_0 + 0)}{u}, \quad \psi(u) = \frac{f(x_0 - u) - f(x_0 - 0)}{-u}$$

имеют конечные пределы при  $u \rightarrow +0$  и поэтому ограничены на некотором интервале  $(0, \delta)$ , т. е. существует  $c_0 > 0$  такое, что

$$\left| \frac{f(x_0 + u) - f(x_0 + 0)}{u} \right| \leq c_0, \quad \left| \frac{f(x_0 - u) - f(x_0 - 0)}{u} \right| \leq c_0.$$

Следовательно, функция  $f(x)$  удовлетворяет в точке  $x_0$  условию Гёльдера с показателем  $\alpha = 1$ . ●

Следствие. Если функция  $f(x)$  имеет в точке  $x_0$  производную, то она удовлетворяет в этой точке условию Гёльдера.

Обратное утверждение неверно: функция  $|x|^\alpha$  при  $0 < \alpha < 1$  удовлетворяет условию Гёльдера в точке  $x = 0$ , но не дифференцируема в точке  $x = 0$ .

### 3. Сходимость ряда Фурье в точке.

Теорема 2. Пусть  $2\pi$ -периодическая функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема на  $[-\pi, \pi]$  и в точке  $x_0$  удовлетворяет условию Гёльдера. Тогда в точке  $x_0$  ряд Фурье функции  $f(x)$  сходится к

$$\frac{1}{2}(f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)).$$

Если в точке  $x_0$  функция  $f(x)$  еще и непрерывна, то в этой точке сумма ряда Фурье равна  $f(x_0)$ .

○ Так как функция  $f(x)$  удовлетворяет в точке  $x_0$  условию Гёльдера, то при  $0 < u < \delta$  и  $\alpha > 0$  выполнены неравенства (4).

Запишем при заданном  $\delta > 0$  равенства (2) и (3). Умножая равенство (3) на  $f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)$  и вычитая результат из равенства (2), получаем

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ S_n(x_0) - \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(x_0 + u) - f(x_0 + 0) + f(x_0 - u) - f(x_0 - 0)}{2 \sin \frac{u}{2}} \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) u \, du \right] = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Из условия Гёльдера (4) следует, что функция

$$\Phi(u) = \frac{f(x_0 + u) - f(x_0 + 0) + f(x_0 - u) - f(x_0 - 0)}{2 \sin \frac{u}{2}} \quad (6)$$

абсолютно интегрируема на отрезке  $[0, \delta]$ . В самом деле, применяя неравенство Гёльдера, получаем, что для функции  $\Phi(u)$ , определенной равенством (6), справедливо следующее неравенство:

$$|\Phi(u)| \leq \frac{2c_0 u^\alpha}{2u} = \pi c_0 u^{\alpha-1}, \quad \alpha \in (0, 1]. \quad (7)$$

В силу признака сравнения для несобственных интегралов из не-

равенства (7) следует, что функция  $\Phi(u)$  абсолютно интегрируема на отрезке  $[0, \delta]$ .

В силу леммы Римана

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \Phi(u) \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) u \, du = 0.$$

Из формулы (5) теперь следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}. \quad \bullet$$

**Следствие 1.** Если  $2\pi$ -периодическая и абсолютно интегрируемая на  $[-\pi, \pi]$  функция  $f(x)$  имеет в точке  $x_0$  обе односторонние производные, то ее ряд Фурье сходится в точке  $x_0$  к  $\frac{1}{2}f(x_0 + 0) + \frac{1}{2}f(x_0 - 0)$ .

**Следствие 2.** Если  $2\pi$ -периодическая и абсолютно интегрируемая на  $[-\pi, \pi]$  функция  $f(x)$  имеет в точке  $x_0$  производную, то ее ряд сходится в этой точке к  $f(x_0)$ .

**Следствие 3.** Если  $2\pi$ -периодическая и абсолютно интегрируемая на  $[-\pi, \pi]$  функция  $f(x)$  удовлетворяет в точках  $\pm\pi$  условию Гёльдера, то в силу периодичности сумма ряда Фурье в точках  $\pm\pi$  равна

$$\frac{f(\pi - 0) + f(-\pi + 0)}{2}$$

#### 4. Некоторые примеры.

**Пример 1.** На отрезке  $[-\pi, \pi]$  найти тригонометрический ряд Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, \pi), \\ -1, & x \in (-\pi, 0), \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Исследовать сходимость полученного ряда.

○ Продолжая периодически  $f(x)$  на всю вещественную ось, полу-

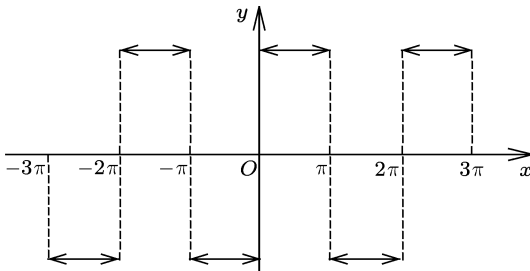


Рис. 64.1

чим функцию  $\tilde{f}(x)$ , график которой изображен на рис. 64.1.

Так как функция  $f(x)$  нечетна, то

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = 0;$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kx \, dx = -\frac{2}{\pi k} \cos kx \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k} (1 - \cos k\pi),$$

$$b_{2n} = 0, \quad b_{2n+1} = \frac{4}{\pi(2n+1)}.$$

Следовательно,

$$\tilde{f}(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}.$$

Так как  $f'(x)$  существует при  $x \neq k\pi$ , то

$$\tilde{f}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

В точках  $x = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , функция  $\tilde{f}(x)$  не определена, а сумма ряда Фурье равна нулю.

Полагая  $x = \frac{\pi}{2}$ , получаем равенство

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \dots = \frac{\pi}{4}. \quad \blacktriangle$$

**Пример 2.** На отрезке  $[-\pi, \pi]$  найти тригонометрический ряд Фурье функции

$$f(x) = \cos ax, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad a \neq n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

и исследовать сходимость полученного ряда.

$\Delta$  Продолжая функцию  $f(x)$  периодически на всю вещественную прямую, получаем непрерывную и  $2\pi$ -периодическую функцию, имею-

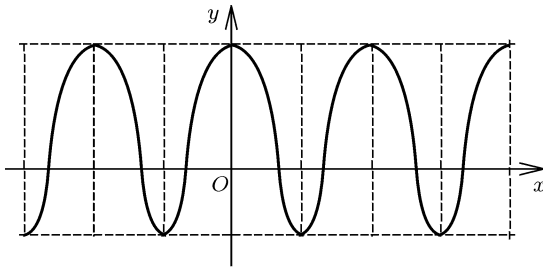


Рис. 64.2

щую в каждой точке обе односторонние производные (рис. 64.2). Ряд



Фурье такой функции будет в любой точке сходиться к значению функции в этой точке.

Найдем коэффициенты Фурье. Так как функция  $f(x)$  четная, то все коэффициенты  $b_n = 0$ , а коэффициенты  $a_n$  вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ax \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos(a-n)x + \cos(a+n)x] \, dx = \\ &= \frac{\sin a\pi}{\pi} (-1)^n \left[ \frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n} \right], \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\pi \cos ax}{\sin a\pi} = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{a-n} + \frac{1}{a+n} \right) \cos nx, \quad -\pi \leq x \leq \pi. \quad \blacktriangle (8)$$

Замечание. Полагая в формуле (8)  $x = \pi$  и  $a\pi = z$ , получаем замечательную формулу, дающую разложение функции  $\operatorname{ctg} z$  на элементарные дроби:

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{z+n\pi} \right), \quad (9)$$

где точки  $\pm n\pi$  являются нулями функции  $\sin z$ .

Если же положить в формуле (8)  $x = 0$  и  $z = a\pi$ , то получаем разложение функции  $\operatorname{cosec} z$  на элементарные дроби:

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{z+n\pi} \right). \quad (10)$$

Пример 3. Найти ряд Фурье следующей  $2\pi$ -периодической, абсолютно интегрируемой на отрезке  $[-\pi, \pi]$  функции:

$$f(x) = -\ln \left| \sin \frac{x}{2} \right|, \quad x \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

и исследовать сходимость полученного ряда.

$\Delta$  Так как  $f'(x)$  существует при  $x \neq 2k\pi$ , то ряд Фурье функции  $f(x)$  будет сходиться во всех точках  $x \neq 2k\pi$  к значению функции. Очевидно, что  $f(x)$  — четная функция и поэтому ее разложение в ряд Фурье должно содержать только косинусы. Найдем коэффициент  $a_0$ . Имеем

$$\begin{aligned} \pi a_0 &= -2 \int_0^{\pi} \ln \sin \frac{x}{2} \, dx = -2 \int_0^{\pi/2} \ln \sin \frac{x}{2} \, dx - 2 \int_{\pi/2}^{\pi} \ln \sin \frac{x}{2} \, dx = \\ &= -2 \int_0^{\pi/2} \ln \sin \frac{x}{2} \, dx - 2 \int_0^{\pi/2} \ln \cos \frac{x}{2} \, dx = -2 \int_0^{\pi/2} \ln \left( \frac{1}{2} \sin x \right) \, dx = \\ &= \pi \ln 2 - 2 \int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx = \pi \ln 2 - \int_0^{\pi} \ln \sin \frac{t}{2} \, dt = \pi \ln 2 + \frac{\pi a_0}{2}, \end{aligned}$$

откуда  $a_0 = 2 \ln 2$ .

Найдем теперь  $a_n$  при  $n \neq 0$ . Имеем

$$\begin{aligned} \pi a_n &= -2 \int_0^\pi \cos nx \ln \sin \frac{x}{2} dx = -2 \frac{\sin nx}{n} \ln \sin \frac{x}{2} \Big|_{+0}^\pi + \\ &+ 2 \int_0^\pi \frac{\sin nx}{n} \frac{\cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} dx = \int_0^\pi \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right)x + \sin \left(n - \frac{1}{2}\right)x}{2n \sin \frac{x}{2}} dx = \\ &= \frac{1}{2n} \int_{-\pi}^\pi [D_n(x) + D_{n-1}(x)] dx. \end{aligned}$$

Здесь  $D_n(x)$  — ядро Дирихле, определяемое формулой (2), § 63. Из свойства (3), § 63 ядра Дирихле получаем, что  $\pi a_n = \frac{\pi}{n}$  и, следовательно,  $a_n = \frac{1}{n}$ . Таким образом,

$$-\ln \left| \sin \frac{x}{2} \right| = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}, \quad x \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (11)$$

График функции  $-\ln \left| \sin \frac{x}{2} \right|$  изображен на рис. 64.3. ▲

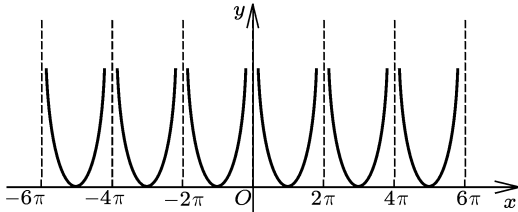


Рис. 64.3

Замечание. Полагая в формуле (11)  $x = \pi$ , получаем

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots$$

Пример 4. На отрезке  $[0, 4]$  найти тригонометрический ряд Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & 1 \leq x \leq 3, \\ x-3, & 3 \leq x \leq 4, \end{cases}$$

периодически продолжив ее на  $(-\infty, +\infty)$ , и исследовать полученный ряд на сходимость.

△ Продолжим функцию  $f(x)$  периодически. Получим четную функ-

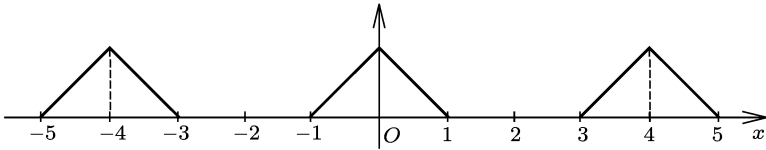


Рис. 64.4

цию  $\tilde{f}(x)$  с периодом, равным 4 (рис. 64.4). Следовательно, разложение  $\tilde{f}(x)$  в тригонометрический ряд Фурье имеет следующий вид:

$$\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{2},$$

где

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 (1-x) dx = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^2 f(x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \int_0^1 (1-x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \\ &= \frac{2}{n\pi} (1-x) \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \\ &= \left( \frac{2}{n\pi} \right)^2 \left( -\cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^1 \right) = \left( \frac{2}{n\pi} \right)^2 \left[ 1 - \cos \frac{n\pi}{2} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \frac{n\pi}{2}}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Так как в каждой точке непрерывная функция  $\tilde{f}(x)$  имеет конечные односторонние производные, то ряд Фурье функции  $\tilde{f}(x)$  во всех точках сходится к значению функции.  $\blacktriangle$

**Упражнение 1.** Найти на отрезке  $[-\pi, \pi]$  тригонометрические ряды Фурье для следующих функций:

а)  $f(x) = x$ ; б)  $f(x) = |x|$ ; в)  $f(x) = |\sin x|$ .

Исследовать сходимость полученных рядов и построить графики сумм соответствующих рядов Фурье.

**Упражнение 2.** Для функции  $f(x) = x^2$  найти ряды Фурье по тригонометрической системе:

а) на отрезке  $[-\pi, \pi]$ ; б) на отрезке  $[0, 2\pi]$ .

Исследовать сходимость полученных рядов и построить графики сумм соответствующих рядов Фурье.

**Упражнение 3.** На интервале  $(0, \pi)$  представить функцию  $f(x) = x^2$  в виде суммы тригонометрического ряда, содержащего только синусы.

**5. Кусочно непрерывные и кусочно гладкие функции.** Говорят, что функция  $f(x)$  *кусочно непрерывна* на  $[a, b]$ , если существует такое разбиение отрезка  $[a, b]$  точками  $x_i, i = \overline{1, n}$ , где  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , что на каждом из интервалов  $(x_{i-1}, x_i)$  функция  $f(x)$  непрерывна и существуют односторонние пределы  $f(a + 0), f(b - 0), f(x_i \pm 0), i = \overline{1, n - 1}$ .

Например, функции из примеров 1 и 2 являются кусочно непрерывными, функция примера 3, график которой изображен из рис. 64.3, кусочно непрерывной не является.

Говорят, что  $f(x)$  — *кусочно гладкая* функция на отрезке  $[a, b]$ , если найдется такое разбиение отрезка  $[a, b]$ , что на каждом из интервалов разбиения  $(x_{i-1}, x_i), i = \overline{1, n}$ , функция  $f(x)$  имеет непрерывную производную  $f'(x)$  и существуют односторонние производные  $f'(a + 0), f'(b - 0), f'(x_i \pm 0), i = \overline{1, n - 1}$ . Ясно, что производная кусочно гладкой функции, определенная во всех точках отрезка  $[a, b]$ , кроме конечного числа точек, есть кусочно непрерывная функция. Ряд Фурье кусочно гладкой функции сходится в каждой точке непрерывности функции к значению функции в этой точке, а в каждой точке разрыва — к полусумме предельных значений функции в этой точке.

Для непрерывной и кусочно гладкой функции справедливы формула Ньютона–Лейбница и формула интегрирования по частям.

## § 65. Почленное дифференцирование и интегрирование ряда Фурье

### 1. Почленное дифференцирование ряда Фурье.

**Теорема 1.** *Если  $f(x)$  — кусочно гладкая  $2\pi$ -периодическая и непрерывная функция, то ряд Фурье производной  $f'(x)$  получается при помощи формального почленного дифференцирования ряда Фурье функции  $f(x)$ .*

○ Пусть  $a_n$  и  $b_n$  — коэффициенты Фурье функции  $f(x)$ , а  $a'_n$  и  $b'_n$  — коэффициенты Фурье производной  $f'(x)$ . Воспользовавшись непрерывностью и периодичностью функции и интегрируя по частям, получаем, что

$$a'_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = \frac{1}{\pi} (f(\pi) - f(-\pi)) = 0,$$

$$\pi a'_n = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} n f(x) \sin nx dx = n\pi b_n,$$

$$\pi b'_n = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx dx = - \int_{-\pi}^{\pi} n f(x) \cos nx dx = -n\pi a_n.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} f'(x) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \cos nx + b'_n \sin nx = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos nx - na_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)'. \quad \bullet \end{aligned}$$

Следствие 1. Если  $2\pi$ -периодическая функция  $f(x)$  имеет непрерывные производные до порядка  $k-1$  и  $f^{(k-1)}(x)$  — кусочно гладкая функция, то ряд Фурье функции  $f^{(k)}(x)$  получается  $k$ -кратным почленным дифференцированием ряда Фурье функции  $f(x)$ .

Следствие 2. Если выполнены условия следствия 1, то для коэффициентов Фурье справедливы следующие асимптотические равенства:

$$a_n = o(n^{-k}), \quad b_n = o(n^{-k}), \quad n \rightarrow \infty.$$

○ В силу следствия 1 ряд Фурье функции  $f^{(k)}(x)$  получается при помощи  $k$ -кратного почленного дифференцирования ряда Фурье функции  $f(x)$ , т. е.

$$f^{(k)}(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n^k a_n \cos\left(nx + k\frac{\pi}{2}\right) + n^k b_n \sin\left(nx + k\frac{\pi}{2}\right).$$

С точностью до знака числа  $n^k a_n$  и  $n^k b_n$  являются коэффициентами Фурье абсолютно интегрируемой на  $[-\pi, \pi]$  функции  $f^{(k)}(x)$ . Так как в силу следствия из леммы Римана коэффициенты Фурье абсолютно интегрируемой функции стремятся к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k a_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^k b_n = 0,$$

что и требовалось доказать. ●

## 2. Почленное интегрирование ряда Фурье.

Теорема 2. Для кусочно непрерывной и  $2\pi$ -периодической функции  $f(x)$  справедливо равенство

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\sin kx}{k} + b_k \frac{1 - \cos kx}{k}, \quad (1)$$

где ряд в правой части получен формальным почленным интегрированием ряда Фурье функции  $f(x)$ .

○ Рассмотрим функцию

$$\Phi(x) = \int_0^x f(t) dt - \frac{a_0 x}{2}. \quad (2)$$

Функция  $\Phi(x) + \frac{a_0 x}{2}$  в точках непрерывности  $f(x)$  имеет непрерывную производную, равную  $f(x)$ , в точках разрыва первого рода

функции  $f(x)$  функция  $\Phi(x) + \frac{a_0x}{2}$  имеет обе односторонние производные, равные  $f(x+0)$  и  $f(x-0)$ . Поэтому непрерывная и кусочно-гладкая функция  $\Phi(x)$  удовлетворяет условию

$$\Phi(x+2\pi) - \Phi(x) = \int_x^{2\pi+x} f(t) dt - a_0\pi = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt - a_0\pi = 0,$$

из которого следует ее  $2\pi$ -периодичность.

Для функции  $\Phi(x)$  выполнены все условия теоремы 2, § 64 и ее ряд Фурье сходится к  $\Phi(x)$  в любой точке  $x \in R$ . Пусть

$$\Phi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx. \quad (3)$$

Из теоремы 1 следует, что коэффициенты Фурье функций  $f(x)$  и  $\Phi(x)$  связаны при  $n > 0$  следующими соотношениями:

$$b_n = -nA_n, \quad a_n = nB_n. \quad (4)$$

Чтобы найти коэффициент  $A_0$ , воспользуемся тем, что равенство (3) справедливо при любом  $x \in R$ . Полагая в этом равенстве  $x = 0$ , получаем, что

$$\frac{A_0}{2} = - \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}. \quad (5)$$

Подставляя в формулу (3) выражения (4) и (5) для коэффициентов Фурье, получаем формулу (1). ●

**Пример 1.** Используя ряд Фурье для функции  $\text{sign } x$  (пример 1, § 64), доказать, что:

$$\text{а) } x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}, \quad 0 \leq x \leq \pi;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

△ Так как функция  $\text{sign } x$  является кусочно непрерывной, то в силу теоремы 2 справедливо равенство

$$\int_{\pi/2}^x \text{sign } x dx = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\pi/2}^x \frac{\sin(2n+1)t}{2n+1} dt, \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

из которого следует равенство а).

Полагая в равенстве а)  $x = 0$ , получаем равенство б).

Если обозначить сумму ряда в формуле в) через  $S$ , то для  $S$  получаем следующее уравнение:

$$S = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \left( \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} + \dots \right) = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} S,$$

из которого следует, что  $S = \frac{\pi^2}{6}$ , т. е. равенство в). ▲

### § 66. Равномерная сходимость ряда Фурье

**1. Неравенство Бесселя.** Введем класс функций  $L_2^C(a, b)$ , более широкий, чем класс кусочно непрерывных функций. Функция  $f(x)$  принадлежит этому классу, если существует такое разбиение отрезка  $[a, b]$  точками  $x_i, i = \overline{0, n}$ , что на каждом из интервалов  $(x_{i-1}, x_i)$  функция  $f(x)$  непрерывна, а несобственный интеграл от функции  $|f(x)|^2$  сходится на интервале  $(a, b)$ .

Лемма 1. Если функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  принадлежат классу  $L_2^C(a, b)$ , то произведение этих функций — абсолютно интегрируемая на  $(a, b)$  функция.

○ Так как функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  принадлежат классу  $L_2^C$ , то существуют такие разбиения  $T_1$  и  $T_2$  отрезка  $[a, b]$ , что функция  $f(x)$  непрерывна на каждом из интервалов разбиения  $T_1$ , функция  $\varphi(x)$  непрерывна на каждом из интервалов разбиения  $T_2$ , а интегралы по интервалу  $(a, b)$  от квадратов этих функций абсолютно сходятся. Объединяя точки разбиений  $T_1$  и  $T_2$ , получаем разбиение  $T$ , на всех интервалах которого непрерывны обе функции. Абсолютная интегрируемость произведения этих функций следует из неравенства

$$2|f(x)\varphi(x)| \leq |f(x)|^2 + |\varphi(x)|^2$$

и из теоремы сравнения для несобственных интегралов. ●

Пусть  $\{\varphi_n(x)\}, n \in \mathbf{N}$ , — ортогональная система непрерывных на отрезке  $[a, b]$  функций (см. § 61), причем  $\varphi_n(x) \not\equiv 0$  на  $[a, b]$ .

Если функция  $f(x) \in L_2^C(a, b)$ , то в силу леммы 1, § 61 для нее могут быть вычислены коэффициенты Фурье

$$a_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx, \quad \text{где} \quad \|\varphi_n\| = \sqrt{\int_a^b \varphi_n^2(x) dx}. \quad (1)$$

Теорема 1. Пусть  $f \in L_2^C(a, b)$ , а  $\{\varphi_n(x)\}, n \in \mathbf{N}$ , — ортогональная система непрерывных на отрезке  $[a, b]$  функций. Тогда для коэффициентов Фурье функции  $f(x)$  по ортогональной системе  $\{\varphi_n(x)\}$  справедливо неравенство Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \|\varphi_k\|^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx. \quad (2)$$

○ Воспользовавшись ортогональностью системы функций  $\{\varphi_k(x)\}$  на отрезке  $[a, b]$ , получаем, что для любого  $n \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b \left[ f(x) - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) \right]^2 dx = \\ &= \int_a^b f^2(x) dx - 2 \sum_{k=1}^n a_k \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx + \sum_{k=1}^n a_k^2 \int_a^b \varphi_k^2(x) dx = \end{aligned}$$

$$= \int_a^b f^2(x) dx - 2 \sum_{k=1}^n a_k^2 \|\varphi_k\|^2 + \sum_{k=1}^n a_k^2 \|\varphi_k\|^2.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 \|\varphi_k\|^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx = \|f\|^2.$$

Последнее неравенство означает, что все частичные суммы ряда, стоящего в левой части неравенства (2), ограничены сверху числом  $\|f\|^2$ . Поэтому этот ряд сходится и сумма его не превышает числа  $\|f\|^2$ , т. е. справедливо неравенство Бесселя (2). ●

Следствие. Для тригонометрической системы (см. (6), § 61) на отрезке  $[-\pi, \pi]$  и для любой функции  $f \in L_2^C(-\pi, \pi)$  неравенство Бесселя имеет следующий вид:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx. \quad (3)$$

○ Используя равенства

$$\left\| \frac{1}{2} \right\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4} dx = \frac{\pi}{2}, \quad \|\cos nx\|^2 = \|\sin nx\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi$$

и неравенство Бесселя (2), получаем неравенство (3). ●

Теорема 2. Ряд Фурье  $2\pi$ -периодической непрерывной и кусочно гладкой функции сходится равномерно.

○ Пусть  $a_n, b_n$  и  $a'_n, b'_n$  — коэффициенты Фурье функций  $f(x)$  и  $f'(x)$ . Из доказательства теоремы 1, § 65 следует, что

$$a'_0 = 0, \quad b_n = \frac{a'_n}{n}, \quad a_n = -\frac{b'_n}{n}. \quad (4)$$

Запишем для функции  $f'(x)$  неравенство Бесселя:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a'_n)^2 + (b'_n)^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2 dx. \quad (5)$$

Используя равенства (4) и неравенство  $|\alpha\beta| \leq \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}$ , получаем

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n| = \frac{|a'_n|}{n} + \frac{|b'_n|}{n} \leq \frac{1}{2} |a'_n|^2 + \frac{1}{2} |b'_n|^2 + \frac{1}{n^2}.$$

Так как числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} |a'_n|^2 + \frac{1}{2} |b'_n|^2 + \frac{1}{n^2} \right)$$



сходится, то по признаку Вейерштрасса функциональный ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

сходится равномерно на  $R$ . ●

## § 67. Комплекснозначные функции. Ряд Фурье в комплексной форме

**1. Комплекснозначные функции.** Теория рядов Фурье без существенных изменений переносится на *комплекснозначные функции* вещественной переменной, т. е. функции вида  $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ , где функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  принимают вещественные значения.

Если несобственный интеграл  $\int_a^b |f(x)| dx$  сходится, то будем говорить, что функция  $f(x)$  *абсолютно интегрируема на интервале*  $(a, b)$ .

У п р а ж н е н и е 1. Пусть  $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ . Доказать, что:

а) несобственный интеграл  $\int_a^b |f(x)| dx$  сходится в том и только том случае, когда сходятся несобственные интегралы  $\int_a^b |f_1(x)| dx$  и  $\int_a^b |f_2(x)| dx$ ;

б) несобственный интеграл  $\int_a^b |f(x)|^2 dx$  сходится в том и только том случае, когда сходятся несобственные интегралы  $\int_a^b f_1^2(x) dx$  и  $\int_a^b f_2^2(x) dx$ .

Если  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  принадлежат классу  $L_2^C(a, b)$  (см. § 66), то будем говорить, что функция  $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$  принадлежит классу  $L_2^C(a, b)$ .

У п р а ж н е н и е 2. Пусть  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  есть комплекснозначные функции класса  $L_2^C(a, b)$ . Показать, что несобственный интеграл  $\int_a^b f(x) \varphi(x) dx$  сходится.

Будем говорить, что функции  $f(x)$  и  $\varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x)$  класса  $L_2^C(a, b)$  ортогональны, если

$$\int_a^b f(x) \overline{\varphi(x)} dx = 0, \quad \text{где} \quad \overline{\varphi(x)} = \varphi_1(x) - i\varphi_2(x).$$

У п р а ж н е н и е 3. Доказать, что система функций

$$\{e^{ikx}\}, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm n, \dots,$$

ортогональна на отрезке  $[-\pi, \pi]$ .

**2. Ряд Фурье в комплексной форме.** Если функция  $f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$  абсолютно интегрируема на интервале  $(-\pi, \pi)$ , то для нее могут быть вычислены все коэффициенты Фурье

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x) \cos nx \, dx + \frac{i}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_2(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x) \sin nx \, dx + \frac{i}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_2(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

и, следовательно, может быть написан тригонометрический ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx. \quad (1)$$

Используя формулы Эйлера

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \quad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i},$$

запишем частичную сумму ряда (1) в следующем виде:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2} (e^{ikx} + e^{-ikx}) + \frac{b_k}{2i} (e^{ikx} - e^{-ikx}) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{a_k - ib_k}{2} e^{ikx} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ikx}. \quad (2)$$

Если ввести обозначения

$$c_k = \frac{1}{2} (a_k - ib_k), \quad c_{-k} = \frac{1}{2} (a_k + ib_k) \quad (k = 0, 1, \dots), \quad (3)$$

то

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos kx - i \sin kx) \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx,$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos kx + i \sin kx) \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx} \, dx. \quad (4)$$

Формулу (2) для частичной суммы  $S_n(x)$  можно теперь записать в следующем виде:

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}, \quad (5)$$

где

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$

Ряд  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$ , где коэффициенты  $c_k$  определяются формулами (6), будем называть *рядом Фурье функции  $f(x)$  в комплексной форме* и будем писать

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}. \quad (7)$$

Если существует предел последовательности  $S_n(x)$ , определенной равенством (5), то будем говорить, что ряд (7) сходится, и записывать это в следующем виде:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x). \quad (8)$$

Если, в частности,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$ , то пишут

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}. \quad (9)$$

### § 68. Суммирование ряда Фурье методом средних арифметических

Пусть  $f(x)$  есть непрерывная и  $2\pi$ -периодическая функция. Рассмотрим последовательность  $S_n(x)$  частичных сумм ряда Фурье функции  $f(x)$ . Определим *суммы Фейера* как средние арифметические сумм  $S_0(x), S_1(x), \dots, S_n(x)$ :

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + \dots + S_n(x)}{n+1}. \quad (1)$$

**Теорема (Фейера).** *Последовательность  $\{\sigma_n(x)\}$  сумм Фейера  $2\pi$ -периодической непрерывной функции  $f(x)$  равномерно сходится к функции  $f(x)$ .*

○ Воспользуемся выражением для частичной суммы ряда Фурье через ядро Дирихле (§ 63, (4), (2)):

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt, \quad (2)$$

где

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \dots + \cos nt = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t}. \quad (3)$$

Подставляя выражение (2) в формулу (1) для суммы Фейера, получаем, что

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) F_n(t) dt, \quad (4)$$

где

$$F_n(t) = \frac{D_0(t) + \dots + D_n(t)}{n+1}. \quad (5)$$

Функцию  $F_n(t)$  назовем *ядром Фейера*. Для доказательства теоремы существенны следующие свойства ядра Фейера:

- 1)  $F_n(t)$  — четная,  $2\pi$ -периодическая и непрерывная функция;
- 2)  $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = 1$ ;
- 3)  $F_n(t) \geq 0$ ;
- 4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\delta \leq t \leq \pi} F_n(t) = 0$  при любом  $\delta \in (0, \pi)$ .

Свойства 1) и 2) сразу следуют из формулы (5) и соответствующих свойств ядра Дирихле. Докажем свойство 3).

Подставляя в формулу (5) для ядра Фейера выражение (3) для ядер Дирихле, получаем

$$\begin{aligned} (n+1)F_n(t) &= D_0(t) + \dots + D_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \\ &= \frac{1}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} \sum_{k=0}^n 2 \sin \frac{x}{2} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x = \frac{1 - \cos(n+1)x}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} \geq 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Докажем свойство 4). Из равенства (6) следует, что

$$\sup_{x \in [\delta, \pi]} F_n(x) \leq \frac{2}{4 \sin^2 \frac{\delta}{2}} \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad 0 < \delta < \pi.$$

Оценим теперь  $\sigma_n(x) - f(x)$ . Воспользовавшись свойствами 2) и 3) ядра Фейера, получаем, что

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x)) F_n(t) dt, \\ |\sigma_n(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| F_n(t) dt. \end{aligned} \quad (7)$$

Непрерывная на  $R$  и  $2\pi$ -периодическая функция равномерно непрерывна на  $R$ . В самом деле, в силу теоремы Кантора функция  $f(x)$  равномерно непрерывна на отрезке  $[-2\pi, 2\pi]$ . Поэтому для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для любых  $x, t \in [-2\pi, 2\pi]$  таких, что  $|x - t| < \delta$ , выполнено неравенство  $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$ .

Пусть  $\xi$  и  $\eta$  — произвольные числа такие, что  $|\xi - \eta| < \delta < \pi$ . Тогда для любого  $\xi \in R$  найдется целое число  $k$  такое, что  $\xi - 2k\pi = x \in [-\pi, \pi]$ . Так как по условию  $|\xi - \eta| < \delta < \pi$ , то  $t = \eta - 2k\pi \in [-2\pi, 2\pi]$ , и поэтому

$$|f(\xi) - f(\eta)| = |f(\xi - 2k\pi) - f(\eta - 2k\pi)| = |f(x) - f(t)| < \varepsilon,$$

что доказывает равномерную непрерывность функции  $f(x)$  на  $R$ .

Воспользуемся равномерной непрерывностью функции  $f(x)$  на  $R$  и для любого  $\varepsilon > 0$  найдем  $\delta > 0$  такое, что для любого  $x \in R$  и при любом  $|t| < \delta$  выполнено равенство

$$|f(x+t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Разобьем отрезок интегрирования в формуле (7) на три отрезка:  $[-\pi, -\delta]$ ,  $[-\delta, \delta]$  и  $[\delta, \pi]$ . Воспользовавшись свойствами 2) и 3) ядра Фейера, получаем, что

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t) - f(x)| F_n(t) dt \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\varepsilon}{2} F_n(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = \frac{\varepsilon}{2}. \quad (8)$$

Так как функция  $f(x)$  непрерывна на  $R$  и имеет период  $2\pi$ , то она ограничена на  $R$ . Пусть  $|f(x)| < M$ . Воспользуемся свойством 4) ядра Фейера и найдем такое  $N$ , что для всех  $n > N$  выполнено неравенство

$$\max_{t \in [\delta, \pi]} F_n(t) < \frac{\varepsilon}{8M}.$$

Тогда для всех  $n > N$  справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| F_n(t) dt &\leq \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} (|f(x+t)| + |f(x)|) F_n(t) dt \leq \\ &\leq \frac{2M}{\pi} (\pi - \delta) \max_{t \in [\delta, \pi]} F_n(t) < 2M \frac{\varepsilon}{8M} = \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned} \quad (9)$$

Аналогично для всех  $n > N$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} |f(x+t) - f(x)| F_n(t) dt < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (10)$$

Из неравенств (7)–(10) следует, что для любого  $x \in R$  и для всех  $n > N$  выполнено неравенство

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

которое означает, что последовательность сумм Фейера  $\sigma_n(x)$  равномерно на  $R$  сходится к функции  $f(x)$ . ●

## § 69. Теоремы Вейерштрасса о равномерных приближениях непрерывных функций многочленами

**1. Тригонометрические многочлены.** Пусть  $A_0, A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$  — некоторые вещественные числа. Выражение

$$T_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n A_k \cos kx + B_k \sin kx$$

называют *тригонометрическим многочленом степени  $n$* . Очевидно, что  $T_n(x)$  — бесконечно дифференцируемая и  $2\pi$ -периодическая функция. Множество всех тригонометрических многочленов образует линейное пространство.

**Теорема 1 (Вейерштрасса).** *Любую непрерывную  $2\pi$ -периодическую функцию можно с любой степенью точности равномерно приблизить тригонометрическим многочленом, т. е. для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такой тригонометрический многочлен  $T_n(x)$ , что*

$$\max_{-\infty < x < +\infty} |f(x) - T_n(x)| < \varepsilon.$$

○ Частичные суммы ряда Фурье функции  $f(x)$  — тригонометрические многочлены. Сумма Фейера  $\sigma_n(x)$ , являющаяся средним арифметическим  $S_0(x), \dots, S_n(x)$ , также будет тригонометрическим многочленом. В силу теоремы Фейера для любого  $\varepsilon > 0$  найдется сумма Фейера  $\sigma_n(x)$  такая, что  $\max_{x \in R} |f(x) - \sigma_n(x)| < \varepsilon$ . ●

**Замечание.** Если функция  $f(x)$  задана на отрезке  $[-\pi, \pi]$  и непрерывна, то ее можно равномерно приблизить на этом отрезке тригонометрическим многочленом в том и только том случае, когда  $f(\pi) = f(-\pi)$ .

## 2. Равномерное приближение непрерывной на отрезке функции многочленом.

**Теорема 2 (Вейерштрасса).** *Непрерывную на отрезке  $[a, b]$  функцию можно равномерно приблизить с любой степенью точности многочленом, т. е. для любого  $\varepsilon > 0$  найдется многочлен  $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  такой, что*

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon.$$

○ Рассмотрим сначала случай, когда  $[a, b] = [0, \pi]$ . Продолжим функцию  $f(x)$  на отрезок  $[-\pi, 0]$  четным образом, а затем с периодом  $2\pi$  на всю вещественную ось. Получим четную,  $2\pi$ -периодическую

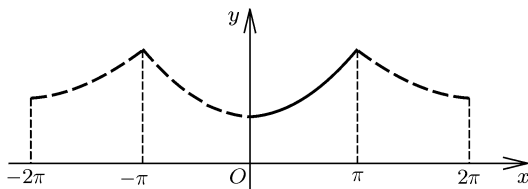


Рис. 69.1

и непрерывную функцию, совпадающую с  $f(x)$  на отрезке  $[0, \pi]$  (рис. 69.1).

В силу теоремы Фейера для любого  $\varepsilon > 0$  найдется тригонометрический многочлен  $T_m(x)$  такой, что

$$\max_{-\infty < x < +\infty} |f(x) - T_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1)$$

Заметим, что  $\sin kx$  и  $\cos kx$  раскладываются в степенные ряды, сходящиеся для всех вещественных  $x$  (радиус сходимости этих степенных рядов равен  $+\infty$ ). Так как  $T_m(x)$  есть конечная линейная комбинация функций  $\sin kx$  и  $\cos kx$ , то  $T_m(x)$  также раскладывается в степенной ряд, сходящийся для всех вещественных  $x$ ,

$$T_m(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n + \dots$$

Известно, что на любом отрезке  $[\alpha, \beta]$ , лежащем внутри интервала сходимости, степенной ряд сходится равномерно. Следовательно, для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $n$  такое, что

$$\max_{0 \leq x \leq \pi} |T_m(x) - (c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2)$$

Если положить  $P_n(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$ , то в силу (1) и (2) получаем

$$\begin{aligned} |f(x) - P_n(x)| &\leq |f(x) - T_m(x)| + |T_m(x) - P_n(x)| \leq \\ &\leq \max_{-\infty < x < +\infty} |f(x) - T_m(x)| + \max_{0 \leq x \leq \pi} |T_m(x) - P_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\max_{0 \leq x \leq \pi} |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon.$$

Пусть теперь функция  $f(x)$  непрерывна на произвольном отрезке  $[a, b]$ . Положим

$$F(t) = f\left[a + \frac{t}{\pi}(b-a)\right], \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Тогда функция  $F(t)$  непрерывна на  $[0, \pi]$  и ее можно равномерно приблизить на  $[0, \pi]$  многочленом  $Q_n(t)$ , т. е.

$$\max_{0 \leq t \leq \pi} \left| f\left(a + \frac{t}{\pi}(b-a)\right) - Q_n(t) \right| < \varepsilon. \quad (3)$$

Полагая

$$x = a + \frac{t}{\pi}(b-a), \quad P_n(x) = Q_n\left(\pi \frac{x-a}{b-a}\right),$$

получаем из неравенства (3), что

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon. \quad \bullet$$

## § 70. Сходимость ряда Фурье в смысле среднего квадратичного

**1. Унитарное пространство.** При дальнейшем изложении удобно будет пользоваться геометрическим языком. Из курса линейной алгебры [7] известны определения комплексного линейного и унитарного пространства. Напомним, что в *линейном пространстве* определены операции сложения элементов (векторов) и умножения элементов на комплексные числа, причем эти операции удовлетворяют следующим *аксиомам линейного пространства E*:

- 1)  $x + y = y + x$  для любых  $x, y \in E$ ;
- 2)  $x + (y + z) = (x + y) + z$  для любых  $x, y, z \in E$ ;
- 3) существует элемент  $0 \in E$  такой, что для любого  $x \in E$  справедливо равенство  $x + 0 = x$ ;
- 4) для любого  $x \in E$  существует элемент  $-x \in E$  такой, что  $x + (-x) = 0$ ;
- 5) для любого  $x \in E$  и для любых  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  справедливо равенство  $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ ;
- 6)  $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$  для любых  $x \in E$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ;
- 7)  $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$  для любых  $x, y \in E$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ ;
- 8)  $1 \cdot x = x$  для любого  $x \in E$ .

Греческими буквами обозначались комплексные числа, латинскими — элементы линейного пространства  $E$ .

*Унитарным* называется комплексное линейное пространство  $E$ , для каждой пары элементов которого определено комплексное число  $(x, y)$  — их *скалярное произведение*.

*Аксиомы скалярного произведения:*

- 1)  $(x, y) = \overline{(y, x)}$  для любых  $x, y \in E$ ;
- 2)  $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$  для любых  $x, y, z \in E$ ;
- 3)  $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$  для любых  $x, y \in E$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ ;
- 4)  $(x, x) \geq 0$  для любого  $x \in E$ , причем  $(x, x) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = 0$ .

Здесь через  $\bar{\gamma}$  обозначается число, комплексно сопряженное комплексному числу  $\gamma$ .

Неотрицательное число  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$  называется *нормой* элемента  $x$ . Из аксиом 1–4 унитарного пространства выводятся следующие свойства.

- а)  $\|x\| = 0$  эквивалентно  $x = 0$ .
  - б)  $(x, \lambda y) = \bar{\lambda}(x, y)$ .
- $(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} = \overline{\lambda(y, x)} = \bar{\lambda}(y, x) = \bar{\lambda}(x, y)$ . ●
- в) Для любых  $x, y \in E$  справедливо неравенство Коши–Буняковского

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|. \quad (1)$$

○ Так как для любых  $x, y \in E$  и  $\lambda \in \mathbb{C}$  справедливо неравенство  $(x + \lambda y, x + \lambda y) \geq 0$ , то, пользуясь свойствами скалярного произведе-



ния, получаем

$$0 \leq (x, x) + \lambda(y, x) + \bar{\lambda}(x, y) + \lambda\bar{\lambda}(y, y). \quad (2)$$

Если  $\|y\| = 0$ , то  $y = 0$  и неравенство Коши–Буняковского становится тривиальным. Пусть  $\|y\| \neq 0$ . Положим в (2)  $\lambda = -\frac{(x, y)}{\|y\|^2}$ . Получаем

$$0 \leq \|x\|^2 - \frac{(x, y)}{\|y\|^2} (y, x) - \frac{\overline{(x, y)}}{\|y\|^2} (x, y) + \frac{(x, y)\overline{(x, y)}}{\|y\|^4} \|y\|^2,$$

откуда сразу следует неравенство Коши–Буняковского. ●

г) Для любых  $x, y \in E$  справедливо неравенство для нормы

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

○ Неравенство для нормы следует из неравенства Коши–Буняковского. В самом деле,

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = (x, x) + (y, x) + (x, y) + (y, y) \leq \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \quad \bullet \end{aligned}$$

д) Положительная однородность нормы:  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ .

○  $\|\lambda x\|^2 = (\lambda x, \lambda x) = \lambda\bar{\lambda}(x, x) = |\lambda|^2\|x\|^2$ . ●

Из курса линейной алгебры известно унитарное пространство  $E^n$ , элементами которого являются упорядоченные наборы  $n$  комплексных чисел

$$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n), \quad \gamma_i \in \mathbb{C}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Естественным образом определяется в  $E^n$  сложение элементов (векторов) и умножение их на комплексные числа. Скалярное произведение двух векторов  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  и  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$  есть комплексное число, определенное формулой

$$(\gamma, \delta) = \gamma_1\bar{\delta}_1 + \dots + \gamma_n\bar{\delta}_n.$$

По аналогии с вещественным пространством  $L_2^C(a, b)$ , рассмотренным в § 6б, введем комплексное пространство  $L_2^C(a, b)$ , элементами которого являются комплекснозначные функции, для каждой из которых найдется такое разбиение отрезка  $[a, b]$  точками  $\{x_i\}$ ,  $i = \overline{0, n}$ , что на любом из интервалов  $(x_{i-1}, x_i)$  функция непрерывна, а интеграл от квадрата ее модуля по отрезку  $[a, b]$  сходится как несобственный.

Лемма 1. Множество  $L_2^C(a, b)$  является линейным пространством с естественными операциями сложения и умножения на комплексные числа.

○ Пусть функции  $f, \varphi \in L_2^C(a, b)$ . Из неравенства

$$\begin{aligned} |f + \varphi|^2 &= (f + \varphi)(\bar{f} + \bar{\varphi}) = f\bar{f} + f\bar{\varphi} + \bar{f}\varphi + \varphi\bar{\varphi} \leq \\ &\leq |f|^2 + |\varphi|^2 + 2|f| \cdot |\varphi| \leq 2|f|^2 + 2|\varphi|^2 \end{aligned}$$

и признака сравнения для несобственных интегралов следует, что несобственный интеграл  $\int_a^b |f + \varphi|^2 dx$  сходится и, следовательно,  $f + \varphi \in L_x^C(a, b)$ .

Если  $f \in L_2^C(a, b)$ , то и  $\alpha f \in L_2^C(a, b)$  для любого  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Проверка всех аксиом линейного пространства тривиальна. ●

Договоримся не различать две функции  $f$  и  $\varphi$  из пространства  $L_2^C(a, b)$ , если их значения не совпадают лишь в конечном числе точек.

**Лемма 2.** *Линейное пространство  $L_2^C(a, b)$  будет унитарным, если определить скалярное произведение функций  $f, \varphi \in L_2^C(a, b)$  при помощи следующей формулы:*

$$(f, \varphi) = \int_a^b f(x) \overline{\varphi(x)} dx. \quad (3)$$

○ Так как  $|f\overline{\varphi}| \leq \frac{1}{2}|f|^2 + \frac{1}{2}|\varphi|^2$ , то по признаку сравнения несобственный интеграл (3) сходится. Первые три аксиомы скалярного произведения проверяются без труда. Проверим выполнение аксиомы 4).

Пусть  $(f, f) = \int_a^b |f|^2 dx = 0$ . Так как  $f \in L_2^C(a, b)$ , то найдется такое разбиение отрезка  $[a, b]$  точками  $\{x_i\}$ ,  $i = \overline{0, n}$ , что на каждом из интервалов  $(x_{i-1}, x_i)$  функция  $f(x)$  непрерывна. Так как  $(x_{i-1}, x_i) \subset [a, b]$ , то

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)|^2 dx = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Из этого равенства следует, что  $f(x) = 0$  на любом интервале  $(x_{i-1}, x_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Следовательно, функция  $f(x)$  отлична от нуля лишь в конечном числе точек. Согласно договоренности такая функция отождествляется с функцией, тождественно равной нулю на  $[a, b]$ . ●

**2. Нормированные пространства.** В нормированных пространствах определены длины векторов, но нет скалярного произведения. Более точно, комплексное или вещественное линейное пространство  $E$  называется *нормированным*, если каждому элементу  $x$  поставлено в соответствие неотрицательное число  $\|x\|$  (*норма элемента  $x$* ), причем удовлетворяются следующие *аксиомы нормы*:

- 1)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$  для любого  $x \in E$  и любого  $\lambda \in \mathbb{C}$ ;
- 2)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  для любых  $x, y \in E$ ;
- 3)  $\|x\| = 0$  в том и только том случае, когда  $x = 0$ .

Если  $E$  есть унитарное пространство, то число  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$  удовлетворяет всем аксиомам нормы, и поэтому каждое унитарное пространство будет и нормированным пространством.

Множество непрерывных функций на отрезке  $[a, b]$  станет нормированным пространством  $C[a, b]$ , если определить норму функции

следующим образом:

$$\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|. \quad (4)$$

Все аксиомы нормы проверяются без труда.

Заметим еще, что любое нормированное пространство есть частный случай метрического пространства, если ввести метрику следующим образом:

$$\rho(x, y) = \|x - y\|. \quad (5)$$

Из аксиом нормы тогда следует, что для расстояния (5) выполняются все аксиомы метрики:

- 1)  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ ;
- 2)  $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$ ;
- 3)  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ .

Поскольку нормированные и унитарные пространства есть частные случаи метрических пространств, то на них переносятся все метрические понятия, например понятие предела последовательности.

**3. Сходимость. Полные пространства. Гильбертовы пространства.** Будем говорить, что последовательность точек  $\{x_n\}$  унитарного пространства  $E$  *сходится* к точке  $x \in E$ , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0. \quad (6)$$

Запись  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  означает, что выполнено равенство (6).

Легко доказываются следующие свойства пределов:

- а) если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x + y;$$

- б) если  $\alpha_n \in R$ ,  $x_n \in E$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n x_n = \alpha x;$$

в) сходящаяся последовательность ограничена, т. е. если существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ , то найдется число  $C > 0$  такое, что для всех  $n \in N$  выполнено неравенство  $\|x_n\| \leq C$ ;

г) скалярное произведение непрерывно, т. е. если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x, y).$$

○ Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ . Так как сходящаяся последовательность ограничена, то существует такое число  $C$ , что  $\|y_n\| \leq C$  для всех  $n \in N$ . Воспользовавшись неравенством Коши–Буняковского, получаем, что

$$|(x_n, y_n) - (x, y)| = |(x_n - x, y_n) + (x, y_n - y)| \leq$$

$$\leq \|y_n\| \cdot \|x_n - x\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \leq C\|x_n - x\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x, y)$ . ●

**Замечание.** Сходимость в пространстве  $L_2^C$  называют сходимостью в смысле среднего квадратичного.

Будем говорить, что последовательность точек  $x_n$  унитарного (или нормированного) пространства  $E$  *фундаментальна*, если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется номер  $N$  такой, что для всех  $n, m \geq N$  выполнено неравенство  $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ .

Введенное понятие фундаментальной последовательности точек унитарного пространства находится в полном соответствии с введенным ранее в § 23 понятием фундаментальной последовательности точек метрического пространства. Достаточно вспомнить формулу  $\rho(x, y) = \|x - y\|$ , задающую метрику в унитарном пространстве. Если последовательность сходится, то она фундаментальна (см. § 23). В произвольном унитарном пространстве фундаментальная последовательность может не сходиться.

Говорят, что унитарное (нормированное, метрическое) пространство *полное*, если любая фундаментальная последовательность его точек сходится к точке этого пространства.

Полное нормированное пространство называется *банаховым*, полное унитарное бесконечномерное пространство называется *гильбертовым*.

Нетрудно видеть, что каждое конечномерное унитарное пространство будет полным (критерий Коши сходимости в пространстве  $R^n$ ).

Покажем, что существуют неполные бесконечномерные унитарные пространства. Например, пространство  $L_2^C(0, 1)$  неполное. ○ Для доказательства рассмотрим счетное множество точек

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

Построим следующую функцию (рис. 70.1):

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2^{2n+1}} \leq x < \frac{1}{2^{2n}}, & n = 0, 1, \dots, \\ 0, & \frac{1}{2^{2n}} \leq x < \frac{1}{2^{2n-1}}, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

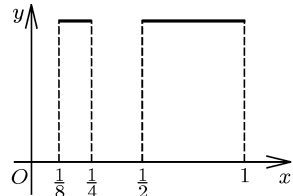


Рис. 70.1

Очевидно, что  $f \notin L_2^C(0, 1)$ , так как множество ее точек разрыва счетно. Построим последовательность

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & \frac{1}{2^n} \leq x < 1, \\ 0, & 0 < x < \frac{1}{2^n}. \end{cases}$$

Покажем, что последовательность  $f_n$  фундаментальна в пространстве  $L_2^C(0, 1)$ . Так как на отрезке  $[1/2^n, 1]$  функции  $f_{n+p}$  и  $f_n$

совпадают, то

$$\begin{aligned} \|f_{n+p} - f_n\|^2 &= \int_0^1 |f_{n+p}(x) - f_n(x)|^2 dx = \int_0^{1/2^n} |f_{n+p} - f_n|^2 dx \leq \\ &\leq \frac{1}{2^n} \max |f_{n+p} - f_n| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon \quad \text{при } n > N(\varepsilon). \end{aligned}$$

Последовательность  $\{f_n\}$  фундаментальна. Покажем, что она не может быть сходящейся. Если  $\varphi \in L_2^C(0, 1)$  и  $\|f_n - \varphi\|^2 \rightarrow 0$ , то для всех  $m \in \mathbb{N}$  выполнено условие

$$\int_{1/2^{m+1}}^{1/2^m} |f_n - \varphi|^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Если  $n > m$ , то  $f_n = f$  при  $x \in \left(\frac{1}{2^{m+1}}, \frac{1}{2^m}\right)$ . Поэтому

$$\int_{1/2^{m+1}}^{1/2^m} |f - \varphi|^2 dx = 0, \quad m = 0, 1, \dots \quad (7)$$

Так как функция  $\varphi(x)$  имеет конечное число точек разрыва, то при достаточно большом  $m$  на интервале  $\left(\frac{1}{2^{m+1}}, \frac{1}{2^m}\right)$  у функции  $\varphi(x)$  точек разрыва не будет, функция  $f(x)$  непрерывна на этом же интервале. Поэтому из (7) следует, что

$$f(x) = \varphi(x) \quad \text{при } x \in \left(\frac{1}{2^{m+1}}, \frac{1}{2^m}\right), \quad m = M + 1, \dots$$

Но тогда функция  $\varphi$ , как и функция  $f$ , должна иметь счетное множество точек разрыва и, следовательно, не может принадлежать пространству  $L_2^C(a, b)$ . Итак, пространство  $L_2^C(a, b)$  неполное. ●

**4. Пополнение унитарного пространства.** Два унитарных пространства будем называть *изоморфными*, если можно установить такое взаимно однозначное отображение  $F$  пространства  $E_1$  на пространство  $E_2$ , что для любых  $x, y \in E$  и любого  $\alpha \in \mathbb{C}$  выполнены равенства

$$F(x + y) = F(x) + F(y), \quad F(\alpha x) = \alpha F(x), \quad (Fx, Fy) = (x, y).$$

Подмножество  $L$  унитарного пространства  $E$ , само являющееся унитарным пространством с тем же скалярным произведением, называется *подпространством* пространства  $E$ .

Пусть  $A$  и  $B$  — подмножества унитарного (или нормированного) пространства  $E$ . Говорят, что  $B$  *плотно* в  $A$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  и любого  $x \in A$  найдется  $y \in B$  такой, что  $\|x - y\| < \varepsilon$ .

**Лемма 3.** Если  $A, B, C \subset E$  и  $C$  плотно в  $B$ , а  $B$  плотно в  $A$ , то  $C$  плотно в  $A$ .

○ Пусть  $\varepsilon > 0$  и  $x \in A$ . Так как  $B$  плотно в  $A$ , то найдется  $y \in B$  такой, что  $\|x - y\| < \varepsilon/2$ . Так как  $C$  плотно в  $B$ , то найдется  $z \in C$  такой, что  $\|y - z\| < \varepsilon/2$ . Тогда

$$\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно,  $C$  плотно в  $A$ . ●

Лемма 4. *Подпространство функций, непрерывных на отрезке  $[a, b]$  и принимающих на концах этого отрезка равные значения, плотно в  $L_2^C(a, b)$ .*

○ Обозначим для краткости через  $B$  подпространство кусочно непрерывных на  $[a, b]$  функций, а через  $C$  — подпространство непрерывных функций, принимающих на концах отрезка  $[a, b]$  одинаковые значения. Договоримся, что будем доопределять нулем функции вне отрезка  $[a, b]$ .

Покажем, что  $B$  плотно в  $L_2^C(a, b)$ . Возьмем произвольную функцию  $f \in L_2^C(a, b)$  и любое  $\varepsilon > 0$ . Тогда существует такое разбиение  $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ , что на каждом из интервалов  $(x_{i-1}, x_i)$

функция  $f(x)$  непрерывна, а интеграл  $\int_a^b |f|^2 dx$  сходится как несобственный. Найдется такое  $\delta > 0$ , что

$$\sum_{i=0}^n \int_{x_i-\delta}^{x_i+\delta} |f|^2 dx < \varepsilon, \quad (x_i - \delta, x_i + \delta) \cap (x_j - \delta, x_j + \delta) = \emptyset, \quad i \neq j. \quad \bullet$$

Возьмем функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in \bigcup_{i=0}^n (x_i - \delta, x_i + \delta), \\ f(x) & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Очевидно, что  $\varphi(x)$  кусочно непрерывна и

$$\|f - \varphi\|^2 = \sum_{i=0}^n \int_{x_i-\delta}^{x_i+\delta} |f|^2 dx < \varepsilon.$$

Итак,  $B$  плотно в  $L_2^C(a, b)$ . Покажем, что  $C$  плотно в  $B$ . Пусть  $\varphi \in B$  и  $\tilde{x}_0 = a < \tilde{x}_1 < \dots < \tilde{x}_m = b$  — ее точки разрыва первого рода. Построим непрерывную функцию  $\psi(x)$ , обращающуюся в ноль во всех точках  $\tilde{x}_i$  (рис. 70.2):

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{\tilde{x}_i - x}{\varepsilon} \varphi(\tilde{x}_i - \varepsilon), & \tilde{x}_i - \varepsilon \leq x \leq \tilde{x}_i, \\ \frac{x - \tilde{x}_i}{\varepsilon} \varphi(\tilde{x}_i + \varepsilon), & \tilde{x}_i \leq x \leq \tilde{x}_i + \varepsilon, \quad i = \overline{0, m}, \\ \varphi(x) & \text{в остальных точках,} \end{cases}$$

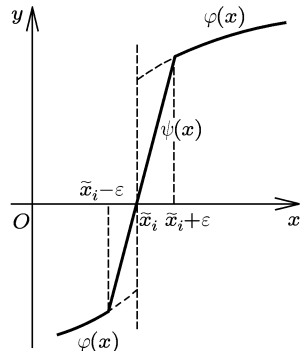


Рис. 70.2

где  $\varepsilon < \frac{1}{4} \max_{i=0, m} \Delta \tilde{x}_i$ ,  $\Delta \tilde{x}_i = \tilde{x}_i - \tilde{x}_{i-1}$ .

Функция  $\psi(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и

$$|\psi(x)| \leq M = \max_{a \leq x \leq b} |\varphi(x)|.$$

В самом деле, так как функция  $\psi(x)$  линейна на отрезках  $[\tilde{x}_i - \varepsilon, \tilde{x}_i]$  и  $[\tilde{x}_i, \tilde{x}_i + \varepsilon]$  и  $\psi(\tilde{x}_i) = 0$ , то

$$\max_{\tilde{x}_i - \varepsilon \leq x \leq \tilde{x}_i} |\psi(x)| = |\psi(\tilde{x}_i - \varepsilon)| = |\varphi(\tilde{x}_i - \varepsilon)| \leq M,$$

$$\max_{\tilde{x}_i \leq x \leq \tilde{x}_i + \varepsilon} |\psi(x)| = |\psi(\tilde{x}_i + \varepsilon)| = |\varphi(\tilde{x}_i + \varepsilon)| \leq M.$$

Вне отрезков  $[\tilde{x}_i - \varepsilon, \tilde{x}_i]$  и  $[\tilde{x}_i, \tilde{x}_i + \varepsilon]$  функция совпадает с  $\varphi(x)$  и ее значения по модулю не превосходят  $M$ .

Оценивая среднеквадратичное отклонение функции  $\varphi(x)$  от функции  $\psi(x)$ , получаем

$$\|\varphi(x) - \psi(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n \int_{\tilde{x}_i - \varepsilon}^{\tilde{x}_i + \varepsilon} |\varphi(x) - \psi(x)|^2 dx \leq 8Mn\varepsilon.$$

Отсюда следует, что  $C$  плотно в  $B$ . Итак,  $C$  плотно в  $B$ , а  $B$  плотно в  $L_2^C(a, b)$ . В силу леммы 3  $C$  плотно в  $L_2^C(a, b)$ . ●

Полнением унитарного пространства  $E$  называется полное унитарное пространство  $\tilde{E}$ , содержащее плотное в  $\tilde{E}$  подпространство  $L$ , изоморфное  $E$ .

**Теорема 1.** Для любого унитарного пространства существует пополнение, единственное с точностью до изоморфизма.

Доказательство содержится, например, в [2].

Полнение пространства  $L_2^C(a, b)$  называется пространством  $L_2(a, b)$ . Можно показать, что  $L_2(a, b)$  изоморфно гильбертову пространству функций, интегрируемых с квадратом по Лебегу [10].

**5. Ряды Фурье по ортогональным системам.** Пусть  $H$  — бесконечномерное унитарное пространство. Систему элементов  $\{e_i\}_{i=1, \dots} \in H$  будем называть *линейно независимой*, если при любом  $n$  элементы  $e_1, e_2, \dots, e_n$  линейно независимы. Если любой элемент  $x \in H$  можно представить в виде суммы сходящегося ряда

$$x = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m x_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n, \quad (8)$$

то линейно независимая система  $\{e_i\}$  называется *базисом* в  $H$ . Система  $\{e_i\}$  называется *ортогональной*, если  $(e_i, e_j) = 0$  при  $i \neq j$ , и *ортонормированной*, если  $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ , где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера, т. е.  $\delta_{ij} = 0$  при  $i \neq j$  и  $\delta_{ii} = 1$ . Если, кроме того,  $\{e_i\}$  есть базис, то будем говорить об ортогональных и ортонормированных базисах.

Если  $\{e_i\}$  — ортогональный базис, то все коэффициенты  $x_n$  ряда (8) могут быть выражены через  $x$ . Так как элементы  $e_i$  ортогональны, то при  $k \leq n$  имеем

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i e_i, e_k \right) = x_k (e_k, e_k). \tag{9}$$

Так как  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i e_i$ , а скалярное произведение непрерывно, то, переходя в (9) к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получаем

$$x_k = \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|^2}, \quad k \in N. \tag{10}$$

Если базис ортонормированный, то  $\|e_k\| = 1$  и  $x_k = (x, e_k)$ . Числа  $x_k$  называются *коэффициентами Фурье элемента  $x$  по ортогональной системе  $\{e_i\}$* .

Если теперь отказаться от требования, чтобы ортогональная система  $\{e_i\}$  была базисом в  $H$ , то коэффициенты Фурье элемента  $x$  все равно можно вычислять по формуле (10). Выражение  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$ , где  $x_k$  — коэффициенты Фурье элемента  $x$ , будем называть *рядом Фурье элемента  $x$  по ортогональной системе  $\{e_i\}$* . Так как, вообще говоря, ряд может и не сходиться, то будем писать

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k, \quad x_k = \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|^2}.$$

### 6. Минимальное свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя.

**Теорема 2.** Пусть  $\{e_i\}$  — ортонормированная система элементов унитарного пространства  $E$ ,  $x$  — произвольный элемент пространства  $E$ ,  $n \in N$ . Тогда из всех линейных комбинаций  $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ , где  $\alpha_i \in \mathbb{C}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , наилучшим образом приближает элемент  $x$  по норме пространства  $E$   $n$ -я частичная сумма ряда Фурье элемента  $x$  по ортонормированной системе  $\{e_i\}$ , т. е.

$$\min_{\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}} \left\| x - \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right\| = \left\| x - \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i \right\|.$$

○ Обозначим  $\sigma_n = \left\| x - \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right\|^2$ . Так как  $\|x\|^2 = (x, x)$ , то

$$0 \leq \sigma_n = \left( x - \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, x - \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right) = (x, x) - \sum_{i=1}^n \alpha_i (e_i, x) -$$



$$\begin{aligned}
 -\sum_{i=1}^n \bar{\alpha}_i(x, e_i) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{\alpha}_i &= (x, x) - \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{x}_i - \sum_{i=1}^n \bar{\alpha}_i x_i + \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{\alpha}_i = \\
 &= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + \sum_{i=1}^n (\alpha_i - x_i)(\bar{\alpha}_i - \bar{x}_i).
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$0 \leq \sigma_n = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + \sum_{i=1}^n |\alpha_i - x_i|^2. \quad (11)$$

Из равенства (11) следует, что минимум  $\sigma_n$  достигается при  $\alpha_i = x_i$ , причем

$$0 \leq \min_{\alpha_i \in \mathbb{C}, i=1, n} \sigma_n = \left\| x - \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n |x_i|^2, \quad x_i = (x, e_i). \quad \bullet \quad (12)$$

*Следствие.* Для коэффициентов Фурье элемента  $x$  по ортонормированной системе  $\{e_i\}$  справедливо неравенство Бесселя

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \leq \|x\|^2. \quad (13)$$

○ Из (12) следует, что  $\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leq \|x\|^2$ . Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получаем неравенство Бесселя. ●

**7. Полнота системы элементов  $\{e_i\}$  в унитарном пространстве. Полнота тригонометрической системы в  $L_2(-\pi, \pi)$ .** Система элементов  $\{e_i\}$  называется *полной* в унитарном (нормированном) пространстве  $E$ , если любой элемент  $x \in E$  может с любой степенью точности быть приближен по норме конечной линейной комбинацией  $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ , т. е. для любого  $\varepsilon > 0$  найдется линейная комбинация  $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$  такая, что

$$\left\| x - \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right\| < \varepsilon. \quad (14)$$

*Теорема 3.* Если  $\{e_i\}$  — ортонормированная система в унитарном пространстве  $H$ , то следующие условия эквивалентны:

- 1) система  $\{e_i\}$  полна в  $H$ ;
- 2) для любого  $x \in H$  справедливо равенство Парсеваля

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2, \quad x_i = (x, e_i); \quad (15)$$

3) для любого  $x \in H$  выполнено равенство

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i. \quad (16)$$

○ Докажем, что 1)  $\Rightarrow$  2). Пусть ортонормированная система  $\{e_i\}$  полна в  $H$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  найдется линейная комбинация  $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$  такая, что справедливо неравенство (14).

В силу минимального свойства коэффициентов Фурье

$$0 \leq \left\| x - \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leq \left\| x - \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right\|^2 < \varepsilon^2.$$

Используя это неравенство и неравенство (13), получаем

$$0 \leq \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \leq \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n |x_i|^2 < \varepsilon^2.$$

В силу произвольности  $\varepsilon$  должно быть справедливо равенство Парсеваля (15).

Докажем, что 2)  $\Rightarrow$  3). Пусть справедливо равенство Парсеваля (15).

Тогда

$$\left\| x - \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

т. е. справедливо равенство (16).

Утверждение 3)  $\Rightarrow$  1) очевидно. ●

**Лемма 5.** Пусть подпространство  $L$  плотно в унитарном пространстве  $H$ , а система  $\{e_i\}$  полна в  $L$ . Тогда система элементов  $\{e_i\}$  полна в  $H$ .

○ Пусть  $x$  — произвольный элемент пространства  $H$ . Так как  $L$  плотно в  $H$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  найдется элемент  $y \in L$  такой, что  $\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Так как система  $\{e_i\}$  полна в  $L$ , то найдется линейная комбинация  $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$  такая, что

$$\left\| y - \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда

$$\left\| x - \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right\| \leq \|x - y\| + \left\| y - \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Поэтому  $\{e_i\}$  — полная система в пространстве  $H$ . ●

**Теорема 4.** Тригонометрическая система полна в  $L_2(-\pi, \pi)$ .

○ Пространство  $L_2(-\pi, \pi)$  есть пополнение  $L_2^C(-\pi, \pi)$ . Поэтому

$L_2^C(-\pi, \pi)$  плотно в  $L_2(-\pi, \pi)$ . Пространство непрерывных функций, принимающих одинаковые значения в точках  $\pi$  и  $-\pi$ , в силу леммы 4 плотно в  $L_2^C(-\pi, \pi)$ , а следовательно, и в  $L_2(-\pi, \pi)$ .

Осталось, в силу леммы 5, показать, что тригонометрическая система полна в подпространстве  $L$  непрерывных на  $[-\pi, \pi]$  функций, принимающих одинаковые значения в точках  $\pi$  и  $-\pi$ . Каждую такую функцию можно в силу теоремы Вейерштрасса равномерно приблизить тригонометрическим многочленом  $T(x)$ , т. е.

$$\max_{-\pi \leq x \leq \pi} |f(x) - T(x)| < \varepsilon,$$

$$\text{где } T(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^N A_n \cos nx + B_n \sin nx.$$

Но тогда  $f(x)$  можно приблизить с любой степенью точности тригонометрическим многочленом и по норме пространства  $L_2(-\pi, \pi)$  (в смысле среднего квадратичного), так как

$$\|f - T\| = \left( \int_{-\pi}^{\pi} |f - T|^2 dx \right)^{1/2} \leq \varepsilon \sqrt{2\pi}.$$

Итак, тригонометрическая система полна в  $L_2(-\pi, \pi)$ . ●

*Следствие.* Из теорем 3 и 4 следует, что для любой функции  $f \in L_2^C[-\pi, \pi]$ , в частности, для любой непрерывной или кусочно непрерывной функции, выполнено равенство Парсеваля

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

и ряд Фурье такой функции сходится в смысле среднего квадратичного к функции  $f(x)$ , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right|^2 dx = 0.$$

Упражнение 1. Доказать, что система

$$1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$$

полна в пространстве  $L_2(-1, 1)$ .

Упражнение 2. Доказать, что система многочленов Лежандра  $L_n(x)$ , определенных равенством (7), § 61, полна в пространстве  $L_2(-1, 1)$ .

Указание. Ортогонализировать систему  $\{x^k\}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , на  $[-1, 1]$  при помощи процесса Грамма–Шмидта [7]. Тогда каждая функция  $x^k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) будет конечной линейной комбинацией ортогональных многочленов, отличающихся лишь постоянными множителями от многочленов Лежандра.

### 8. Эквивалентность полноты и замкнутости ортогональной системы в гильбертовом пространстве.

Теорема 5. Пусть  $H$  — гильбертово пространство и  $\{e_i\}$  — ортонормированная система элементов. Для того чтобы ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$$

сходиллся, необходимо и достаточно, чтобы сходиллся числовой ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2.$$

○ Необходимость следует из неравенства Бесселя. Если

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i, \text{ то } \alpha_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k, e_i \right) = (x, e_i) \text{ и } \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 \leq \|x\|^2.$$

Достаточность. Пусть числовой ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2$  сходится. Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такой номер  $N$ , что для всех  $n, m > N$  выполнено неравенство

$$\sum_{k=n}^m |\alpha_k|^2 < \varepsilon.$$

Последовательность частичных сумм ряда  $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$  будет фундаментальной, так как при любых  $n, m > N$  выполнено условие

$$\|s_n - s_m\|^2 = \left\| \sum_{i=n}^m \alpha_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=n}^m |\alpha_i|^2 < \varepsilon,$$

где  $s_n = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ .

Но в полном пространстве любая фундаментальная последовательность сходится. Следовательно, последовательность частичных сумм  $s_n$  сходится, т. е. ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$  сходится. ●

Следствие. Если  $\{e_i\}$  — ортонормированная система в гильбертовом пространстве  $H$ , то для любого  $x \in H$  ряд Фурье по ортонормированной системе  $\{e_i\}$  сходится и элемент  $x$  представим в виде

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i + y, \quad \text{где } x_i = (x, e_i), \quad (y, e_i) = 0, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (17)$$

○ Пусть  $\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$  есть ряд Фурье элемента  $x$ . В силу неравенства Бесселя числовой ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$  сходится. Из теоремы 5 тогда следует,

что ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$  будет сходящимся.

Пусть

$$y = x - \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( x - \sum_{i=1}^n x_i e_i \right).$$

В силу ортогональности системы  $\{e_i\}$  и непрерывности скалярного произведения справедливо равенство

$$(y, e_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( x - \sum_{i=1}^n x_i e_i, e_i \right) = (x, e_i) - x_i = 0, \quad i \in \mathbb{N}. \quad \bullet$$

Ортогональная система  $\{e_i\}$  называется *замкнутой* в унитарном пространстве  $H$ , если для любого  $x \in H$  из  $(x, e_i) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , следует  $x = 0$ .

**Теорема 6.** *Для того чтобы ортонормированная система была полной в унитарном пространстве, необходимо, а в случае полного пространства и достаточно, чтобы она была замкнутой.*

○ **Необходимость.** Пусть  $\{e_i\}$  — полная система в унитарном пространстве  $H$ . Если для элемента  $x \in H$  справедливы равенства  $(x, e_i) = 0$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , то, применяя равенство Парсеваля, получаем

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(x, e_i)|^2 = 0,$$

т. е.  $x = 0$ .

**Достаточность.** Пусть  $H$  — полное пространство. Тогда каждый элемент  $x \in H$  можно представить в виде (17). Так как система  $\{e_i\}$  замкнута, то из равенств  $(y, e_i) = 0$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , следует, что  $y = 0$ . Таким образом, любой элемент  $x$  есть сумма своего ряда Фурье по ортонормированной системе  $\{e_i\}$ . Следовательно, система  $\{e_i\}$  полна в  $H$ . ●

#### УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ XIV

**1.** Показать графически, что уравнение  $\operatorname{tg} \lambda = \lambda$  имеет счетное множество решений  $\{\lambda_k\}$ ,  $k = 1, \dots$ , и что система функций  $\{\sin \lambda_k x\}$  ортогональна на отрезке  $[0, 1]$ .

**Указание.** Воспользоваться тем, что функция  $y_k = \sin \lambda_k x$  удовлетворяет условиям

$$y_k'' + \lambda_k^2 y_k = 0, \quad y_k(0) = 0, \quad y_k'(1) - y_k(1) = 0$$

и справедливо равенство

$$\int_0^1 (y_k'' y_n - y_n'' y_k) dx = y_k' y_n - y_n' y_k \Big|_0^1 = 0.$$

**2.** Пусть функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема на  $[0, \pi]$  и для всех  $x \in [0, \pi]$  выполнено условие  $f(x) = f(\pi - x)$ . Показать, что при разложении

функции  $f(x)$  в ряд по ортогональной системе  $\{\cos nx\}$  все коэффициенты Фурье с нечетными номерами равны нулю, а при разложении  $f(x)$  в ряд по ортогональной системе  $\{\sin nx\}$  все коэффициенты Фурье с четными номерами должны обратиться в нуль.

**3.** Показать, что у непрерывной периодической, не равной тождественно нулю функции есть минимальный положительный период.

**4.** Показать, что для любых  $\delta, \varepsilon > 0$  и для любых  $x \in [\delta, \pi - \delta]$  тригонометрические ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^\varepsilon}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\varepsilon}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\ln n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$$

сходятся.

**Указание.** Воспользоваться признаком Дирихле сходимости числового ряда.

**5.** Пусть  $0 < \varepsilon < 1$  и  $f(x) = |x|^{\varepsilon-1}$  при  $0 < x \leq \pi$ . Показать, что для коэффициентов Фурье разложения функции  $f(x)$  в тригонометрический ряд Фурье справедливы асимптотические формулы  $a_n \sim \frac{C(\varepsilon)}{n^\varepsilon}$  при  $n \rightarrow \infty$ , где  $C(\varepsilon) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos t}{t^{1-\varepsilon}} dt$ .

**6.** Разложить функции  $\operatorname{ch} x$  и  $\operatorname{sh} x$  на отрезке  $[-\pi, \pi]$  в тригонометрические ряды Фурье. Исследовать полученные ряды на равномерную сходимость. Нарисовать графики сумм рядов.

**7.** Показать, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$  не может быть рядом Фурье функции класса  $L_2^C(-\pi, \pi)$ .

**8.** Показать, что система функций  $\sin x, \dots, \sin nx, \dots$  полна в пространстве  $L_2(0, \pi)$ .

**9.** Пусть  $l_2$  есть линейное пространство комплексных последовательностей  $c = (c_1, c_2, \dots)$  таких, что ряд  $|c_1|^2 + |c_2|^2 + \dots$  является сходящимся. Показать, что на  $l_2$  можно определить скалярное произведение любых двух элементов  $c = (c_1, c_2, \dots)$  и  $d = (d_1, d_2, \dots)$  формулой

$$(c, d) = c_1 d_1 + \dots + c_n d_n + \dots$$

и что с таким скалярным произведением  $l_2$  есть гильбертово пространство.

**10.** Показать, что тригонометрический ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$  не может быть рядом Фурье кусочно непрерывной функции.

**Указание.** Показать, что при интегрировании ряда по отрезку  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  возникает расходящийся ряд.

ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

§ 71. Собственные интегралы, зависящие от параметра

**1. Определение собственного интеграла, зависящего от параметра.** Пусть  $Y$  — произвольное множество (множество параметров), а  $f(x, y)$  — функция, определенная на множестве пар  $(x, y)$ , где  $x \in [a, b] \subset R$ ,  $y \in Y$ . Если при любом значении параметра  $y \in Y$  функция  $f(x, y)$  как функция  $x$  интегрируема по Риману на  $[a, b]$ , то интеграл  $\int_a^b f(x, y) dx$  есть функция параметра  $y$ , определенная на множестве  $Y$ . Интеграл

$$\int_a^b f(x, y) dx \tag{1}$$

называется *собственным интегралом, зависящим от параметра*.

Обычно  $Y$  является числовым множеством или множеством в  $R^n$ . Например,

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \cos \varphi) d\varphi \tag{2}$$

есть собственный интеграл, зависящий от параметра  $x \in (-\infty, +\infty)$ .

**2. Свойства собственного интеграла, зависящего от параметра.**

**Теорема 1** (о непрерывной зависимости собственного интеграла от параметра). *Если функция  $f(x, y)$  непрерывна в прямоугольнике  $K = \{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ , то интеграл (1) есть непрерывная функция параметра  $y$  на  $[c, d]$ .*

Доказательство этой теоремы приведено в § 47.

**Теорема 2** (о перестановке порядка интегрирования). *Если функция  $f(x, y)$  непрерывна в прямоугольнике  $K = \{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ , то*

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \tag{3}$$

○ Каждый из повторных интегралов в формуле (3) равен двойному интегралу от функции  $f(x, y)$  по прямоугольнику  $K$  (см. § 47). ●

Теорема 3 (о дифференцировании собственного интеграла по параметру). Пусть функция  $f(x, y)$  непрерывна в прямоугольнике  $K = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  и имеет непрерывную частную производную  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$  в области  $G$  такой, что  $K \subset G$ .

Тогда интеграл (1) есть непрерывно дифференцируемая функция параметра  $y$  на отрезке  $[c, d]$ , причем

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx, \quad y \in [c, d]. \quad (4)$$

○ Пусть  $y$  — произвольная точка из отрезка  $[c, d]$ . Применяя формулу (3) к функции  $\frac{\partial f(x, \eta)}{\partial y}$  в прямоугольнике  $K_y = \{(x, \eta) : a \leq x \leq b, c \leq \eta \leq y\}$ , получаем равенство

$$\int_c^y d\eta \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta) dx = \int_a^b dx \int_c^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta) d\eta = \int_a^b f(x, y) dx - C_0, \quad (5)$$

$$C_0 = \int_a^b f(x, c) dx.$$

Так как функция  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  непрерывна в прямоугольнике  $K$ , то в силу теоремы 1 функция

$$\varphi(\eta) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta) dx$$

будет непрерывной функцией  $\eta$  на отрезке  $[c, d]$ .

Левая часть равенства (5) может быть записана как  $\int_c^y \varphi(\eta) d\eta$ . Так как функция  $\varphi(\eta)$  непрерывна на отрезке  $[c, d]$ , то

$$\frac{d}{dy} \int_c^y \varphi(\eta) d\eta = \varphi(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx.$$

Так как левая часть равенства (5) есть функция, непрерывно дифференцируемая на отрезке  $[c, d]$ , то и функция  $\int_a^b f(x, y) dx$ , стоящая в правой части равенства (5), непрерывно дифференцируема на отрезке  $[c, d]$ . Поэтому

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \varphi(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx. \quad \bullet$$

Замечание 1. Теоремы 1–3 остаются справедливыми и при замене функции  $f(x, y)$  на функцию  $\psi(x)f(x, y)$ , где функция  $\psi(x)$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ . См. следствие 2 и упр. 1 в § 47.



Упражнение 1. Дифференцируя интеграл по параметру, показать, что функция  $J_0(x)$ , определяемая равенством (2), удовлетворяет уравнению Бесселя

$$xJ_0''(x) + J_0'(x) + xJ_0(x) = 0.$$

Упражнение 2. Пусть функции  $f(x, y)$  и  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  непрерывны в  $R^2$ , а функции  $\alpha(y)$  и  $\beta(y)$  непрерывно дифференцируемы на отрезке  $[c, d]$ . Показать, что справедлива формула

$$\frac{d}{dy} \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx + \beta'(y)f(\beta(y), y) - \alpha'(y)f(\alpha(y), y), \quad y \in [c, d].$$

Указание. Рассмотреть в  $R^3$  непрерывно дифференцируемую функцию

$$\Phi(y, u, v) = \int_u^v f(x, y) dx$$

и показать, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = -f(u, y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} = f(v, y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \int_u^v \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx,$$

$$\Phi(y, \alpha(y), \beta(y)) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx.$$

## § 72. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость несобственного интеграла по параметру

**1. Равномерная сходимость несобственных интегралов по параметру.** Предположим, что выполнены следующие условия:

- 1)  $-\infty < a < b \leq +\infty$ ;
- 2) функция  $f(x, y)$  определена на множестве пар  $(x, y)$ , где  $x \in [a, b)$ ,  $y \in Y$ , а  $Y$  есть известное множество параметров;
- 3) для любого  $\xi \in [a, b)$  и для любого  $y \in Y$  существует интеграл Римана

$$\int_a^\xi f(x, y) dx;$$

- 4) для любого  $y \in Y$  интеграл  $\int_a^b f(x, y) dx$  сходится как несобственный, т. е. (см. § 38) на множестве  $Y$  определена функция

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx = \lim_{\xi \rightarrow b-0} \int_a^\xi f(x, y) dx. \quad (1)$$

Если выполнены условия 1)–4), то будем говорить, что несобст-

венный интеграл  $\int_a^b f(x, y) dx$  (с особой точкой  $b$ ) *сходится на множестве  $Y$ .*

Таким образом, несобственный интеграл  $\int_a^b f(x, y) dx$  *сходится на множестве  $Y$ , если для любого  $y \in Y$  и любого  $\varepsilon > 0$  найдется число  $b'(y, \varepsilon) < b$  такое, что для любого  $\xi \in (b', b)$  выполнено неравенство*

$$\left| \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^\xi f(x, y) dx \right| = \left| \int_\xi^b f(x, y) dx \right| < \varepsilon. \quad (2)$$

Аналогичным образом можно рассмотреть несобственный интеграл  $\int_a^b f(x, y) dx$  с особой точкой  $a$ ,  $-\infty \leq a < b$ . Если и точка  $a$ , и точка  $b$  особые, то интеграл нужно разбить на сумму двух интегралов с одной особой точкой (§ 38). Теоремы 1–3, § 71, вообще говоря, не переносятся на несобственные интегралы, зависящие от параметра, если не накладывать дополнительных ограничений на характер сходимости несобственного интеграла. Например, интеграл

$$I(y) = \int_0^{+\infty} ye^{-xy} dx \quad (3)$$

сходится при  $y \geq 0$ . Очевидно, что  $I(0) = 0$ . Пусть  $y > 0$ . Тогда, полагая  $xy = t$ , получаем, что  $I(y) = 1$ . Следовательно, в точке  $y = 0$  функция  $I(y)$  разрывна, несмотря на то, что подынтегральная функция интеграла (3) непрерывна на множестве  $T = \{(x, y): 0 \leq x < +\infty, 0 \leq y \leq 1\}$ .

**Определение** (равномерной сходимости по параметру несобственного интеграла). Пусть несобственный интеграл  $\int_a^b f(x, y) dx$  *сходится на множестве  $Y$ . Будем говорить, что этот несобственный интеграл сходится равномерно по параметру  $y$  на множестве  $Y$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $b' \in [a, b)$  такое, что для любого  $\xi \in [b', b)$  и для любого  $y \in Y$  выполнено неравенство*

$$\left| \int_\xi^b f(x, y) dx \right| < \varepsilon.$$

**Пример 1.** Интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos xy dx \quad (4)$$

сходится равномерно по параметру  $y$  на интервале  $(-\infty, +\infty) = \mathcal{R}$ .

$\Delta$  Для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $b' = \ln \frac{2}{\varepsilon}$  такое, что для любого  $\xi \in [b', +\infty)$  и любого  $y \in R$  выполняется неравенство

$$\left| \int_{\xi}^{+\infty} e^{-x} \cos xy \, dx \right| \leq \int_{\xi}^{+\infty} e^{-x} \, dx = e^{-\xi} \leq e^{-b'} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Следовательно, интеграл (4) сходится равномерно по параметру  $y$  на интервале  $(-\infty, +\infty)$ .  $\blacktriangle$

Если интеграл  $\int_a^b f(x, y) \, dx$  сходится на множестве  $Y$ , но не является равномерно сходящимся по параметру  $y$  на множестве  $Y$ , то будем говорить, что интеграл  $\int_a^b f(x, y) \, dx$  *сходится неравномерно по параметру  $y$  на множестве  $Y$* . В этом случае существует  $\varepsilon > 0$  такое, что для любого  $b' \in [a, b)$  существует  $\xi \in [b', b)$  и существует  $y \in Y$ , для которых выполняется неравенство

$$\left| \int_{\xi}^b f(x, y) \, dx \right| \geq \varepsilon.$$

**Пример 2.** Интеграл (3) сходится неравномерно по параметру  $y$  на полуинтервале  $[0, +\infty)$ .

$\Delta$  Возьмем  $\varepsilon = e^{-1}$ . Тогда для любого  $b' \in (0, +\infty)$  существует  $\xi = b'$  и  $y = 1/b'$  такие, что

$$\int_{\xi}^{+\infty} ye^{-xy} \, dx = \int_{b'}^{+\infty} ye^{-xy} \, dx = \int_{b'y}^{+\infty} e^{-t} \, dt = \int_1^{+\infty} e^{-t} \, dt = e^{-1} = \varepsilon,$$

и поэтому интеграл (3) сходится неравномерно по параметру  $y$  на множестве  $Y = [0, +\infty)$ .  $\blacktriangle$

## 2. Признаки равномерной сходимости несобственных интегралов по параметру.

**Теорема 1** (признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственного интеграла по параметру). Пусть для любого  $y \in Y$  функция  $f(x, y)$  интегрируема по  $x$  на любом отрезке  $[a, b'] \subset [a, b)$ , и пусть на  $[a, b)$  существует функция  $\varphi(x)$  такая, что для всех  $y \in Y$  и всех  $x \in [a, b)$  выполнено неравенство  $|f(x, y)| \leq \varphi(x)$ , а несобственный интеграл  $\int_a^b \varphi(x) \, dx$  сходится.

Тогда интеграл  $\int_a^b f(x, y) \, dx$  сходится равномерно по параметру  $y$  на множестве  $Y$ .

○ Так как  $\int_a^b \varphi(x) dx$  сходится, то для любого  $\varepsilon > 0$  найдется число  $b' \in [a, b)$  такое, что для всех  $\xi \in [b', b)$  выполнено неравенство  $\int_{\xi}^b \varphi(x) dx < \varepsilon$ . Так как  $\int_a^b f(x, y) dx$  сходится абсолютно при любом  $y \in Y$  по признаку сравнения (§ 38), то для любого  $\xi \in [b', b)$  и любого  $y \in Y$  выполнено неравенство

$$\left| \int_{\xi}^b f(x, y) dx \right| \leq \int_{\xi}^b |f(x, y)| dx \leq \int_{\xi}^b \varphi(x) dx < \varepsilon,$$

т. е. интеграл  $\int_a^b f(x, y) dx$  сходится равномерно по параметру  $y$  на множестве  $Y$ . ●

Пример 3. Интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+x^2} dx \quad (5)$$

сходится равномерно по параметру  $y$  на интервале  $(-\infty, +\infty)$ .

△ Так как  $\frac{|\cos xy|}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$  и  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ , то по признаку Вейерштрасса интеграл (5) сходится равномерно по параметру  $y$  на  $(-\infty, +\infty)$ . ▲

Докажем признак Дирихле равномерной сходимости для интегралов вида

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) g(x, y) dx, \quad y \in Y. \quad (6)$$

Теорема 2 (признак Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла по параметру). Пусть:

1) для любого  $y \in Y \subset R^n$  функции  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$  и  $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$  непрерывны как функции  $x$  на полуинтервале  $[a, +\infty)$ ;

2) функция  $F(x, y)$ , являющаяся при любом  $y \in Y$  первообразной по  $x$  функции  $f(x, y)$ , ограничена при  $y \in Y$ ,  $x \in [a, +\infty)$ ;

3)  $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \leq 0$  при  $y \in Y$  и  $x \in [a, +\infty)$ ;

4) существует непрерывная на  $[a, +\infty)$  функция  $\psi(x)$  такая, что  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = 0$  и  $|g(x, y)| \leq \psi(x)$  для  $y \in Y$  и  $x \in [a, +\infty)$ .

Тогда интеграл (6) сходится равномерно по параметру  $y$  на множестве  $Y$ .

○ По признаку Дирихле (см. § 38) несобственный интеграл (6) сходится при любом  $y \in Y$ . Покажем, что он сходится равномерно по параметру  $y$  на множестве  $Y$ .

Так как по условию 4) функция  $\psi(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $a' > a$  такое, что для любого  $\xi \in [a', +\infty)$  выполнено неравенство

$$\psi(\xi) < \frac{\varepsilon}{2C}, \quad (7)$$

где  $C$  есть постоянная, ограничивающая в силу условия 2) первообразную  $F(x, y)$ .

Пусть  $y \in Y$  и  $\xi \in [a', +\infty)$ . Воспользовавшись формулой интегрирования по частям и тем, что  $g(x, y) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$ , получаем

$$\int_{\xi}^{+\infty} f(x, y) g(x, y) dx = F(\xi, y) g(\xi, y) - \int_{\xi}^{+\infty} F(x, y) \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} dx. \quad (8)$$

Так как по условиям теоремы

$$|F(x, y)| \leq C, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \leq 0, \quad |g(x, y)| \leq \psi(x),$$

то из (8) и (7) получаем, что для любого  $\xi \in [a', +\infty)$  выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \left| \int_{\xi}^{+\infty} f(x, y) g(x, y) dx \right| &\leq C\psi(\xi) + \int_{\xi}^{+\infty} C \left| \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \right| dx = \\ &= C\psi(\xi) - C \int_{\xi}^{+\infty} \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} dx = C\psi(\xi) + Cg(\xi, y) \leq 2C\psi(\xi) < \varepsilon. \end{aligned} \quad (9)$$

Из неравенства (9) следует, что интеграл (6) сходится равномерно по параметру  $y$  на множестве  $Y$ . ●

**Замечание 2.** Если  $+\infty$  — единственная особая точка сходящегося интеграла (6), то этот интеграл сходится равномерно по параметру  $y$  на множестве  $Y$  в том и только том случае, когда при любом  $a' > a$  интеграл

$\int_{a'}^{+\infty} f(x, y) g(x, y) dx$  сходится равномерно по параметру  $y$  на множестве  $Y$ .

Поэтому для справедливости утверждения теоремы 2 достаточно, чтобы условия 1)–4) выполнялись на некотором промежутке  $[a', +\infty) \subset [a, +\infty)$ .

**Пример 4.** Интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx \quad (10)$$

сходится равномерно по параметру  $y$  при  $y \in [0, +\infty)$ .

△ Так как функция  $\sin x$  имеет ограниченную первообразную, а при  $x \geq 1$ ,  $y \geq 0$  выполнены следующие условия:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{e^{-yx}}{x} \right) = -\frac{e^{-yx}}{x^2} (1 + xy) < 0, \quad \frac{e^{-yx}}{x} \leq \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

то интеграл (10) сходится равномерно по параметру  $y$  на множестве  $[0, +\infty)$ . ▲

Теорема 3 (критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла по параметру). *Для того чтобы несобственный интеграл  $\int_a^b f(x, y) dx$  сходилась равномерно по параметру  $y$  на множестве  $Y$ , необходимо и достаточно, чтобы для любого  $\varepsilon > 0$  существовало  $b' \in [a, b)$  такое, что для любых  $\xi, \xi' \in [b', b)$  и для любого  $y \in Y$  выполнялось неравенство*

$$\left| \int_{\xi}^{\xi'} f(x, y) dx \right| < \varepsilon. \quad (11)$$

○ *Необходимость.* Пусть  $\int_a^b f(x, y) dx$  равномерно сходится по параметру  $y$  на множестве  $Y$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $b' \in [a, b)$  такое, что для любого  $\xi \in [b, b')$  и для любого  $y \in Y$  выполнено неравенство

$$\left| \int_{\xi}^b f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (12)$$

Пусть  $\xi, \xi' \in [b', b)$  и  $y \in Y$ . Используя неравенство (12), получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\xi}^{\xi'} f(x, y) dx \right| &= \left| \int_{\xi}^b f(x, y) dx - \int_{\xi'}^b f(x, y) dx \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{\xi}^b f(x, y) dx \right| + \left| \int_{\xi'}^b f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

*Достаточность.* Пусть для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $b' \in [a, b)$  такое, что для любых  $\xi, \xi' \in [b', b)$  и любого  $y \in Y$  выполнено неравенство (11). Тогда в силу критерия Коши сходимости несобственных интегралов  $\int_a^b f(x, y) dx$  сходится при  $y \in Y$ . Воспользуемся произвольностью  $\xi'$  и перейдем в неравенстве (11) к пределу при  $\xi' \rightarrow b - 0$ .

Получаем, что для любого  $\xi \in [b', b)$  и для любого  $y \in Y$  выполнено неравенство  $\left| \int_{\xi}^b f(x, y) dx \right| \leq \varepsilon$ , из которого следует, что интеграл  $\int_a^b f(x, y) dx$  сходится равномерно по параметру  $y$  на множестве  $Y$ . ●

Применяя правило построения отрицания, получаем из критерия Коши полезное следствие.

*Следствие.* Если существует  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что для любого  $b' \in [a, b)$  существуют  $\xi_0, \xi'_0 \in [b', b)$  и существует  $y_0 \in Y$  такие, что

$$\left| \int_{\xi_0}^{\xi'_0} f(x, y_0) dx \right| \geq \varepsilon_0, \quad (13)$$

то интеграл  $\int_a^b f(x, y) dx$  не сходится равномерно по параметру  $y$  на множестве  $Y$ .

Пример 5. Интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx \quad (14)$$

сходится равномерно по параметру  $\alpha$  на множестве  $[\alpha_0, +\infty)$ ,  $\alpha_0 > 0$ , и сходится неравномерно на множестве  $(0, +\infty)$ .

△ Пусть  $\alpha \geq \alpha_0 > 0$ . Так как  $e^{-\alpha x^2} \leq e^{-\alpha_0 x^2}$  и  $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha_0 x^2} dx$  сходится, то по признаку Вейерштрасса интеграл (14) сходится равномерно по параметру  $\alpha$  на множестве  $[\alpha_0, +\infty)$ .

Пусть теперь  $a \in (0, +\infty)$ . Покажем, что на  $(0, +\infty)$  интеграл (14) сходится неравномерно. Воспользуемся следствием из критерия Коши. Возьмем  $\varepsilon_0 = e^{-1}$ , для любого  $b > 0$  возьмем  $\xi_0 = b$ ,  $\xi'_0 = b + 1$ ,  $\alpha_0 = 1/(b + 1)^2$ . Тогда

$$\int_{\xi_0}^{\xi'_0} e^{-\alpha_0 x^2} dx = \int_b^{b+1} e^{-\alpha_0 x^2} dx \geq e^{-\alpha_0 (b+1)^2} \int_b^{b+1} dx = e^{-1} = \varepsilon_0$$

и, следовательно, интеграл (14) сходится неравномерно по параметру  $\alpha$  на множестве  $(0, +\infty)$ . ▲

Упражнение. Пусть функция  $f(x)$  непрерывна и неотрицательна на  $R$ , а несобственный интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$  сходится. Показать, что интегралы

$$I_1(x) = \int_0^{+\infty} f(x-t) dt, \quad I_2(x) = \int_{-\infty}^0 f(x-t) dt$$

сходятся равномерно по параметру  $x$  на любом конечном отрезке  $[a, b] \subset R$ .

**Замечание 2.** Из теоремы 3 легко выводится следующее следствие:

если  $0 \leq f(x, y) \leq \varphi(x, y)$  при  $x \in [a, b)$ ,  $y \in Y$ ,  $\int_a^b f(x, y) dx$  сходится на множестве  $Y$ , а интеграл  $\int_a^b \varphi(x, y) dx$  сходится равномерно по параметру  $y$  на множестве  $Y$ , то и интеграл  $\int_a^b f(x, y) dx$  сходится равномерно по параметру  $y$  на множестве  $Y$ .

### 3. Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость несобственного интеграла по параметру.

**Теорема 4.** Пусть функция  $f(x, y)$  непрерывна на множестве  $\{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  и интеграл  $\int_a^b f(x, y) dx$  сходится равномерно по параметру  $y$  на отрезке  $[c, d]$ .

Тогда  $\int_a^b f(x, y) dx$  есть непрерывная функция параметра  $y$  на  $[c, d]$ .

○ Возьмем любое  $\varepsilon > 0$ . Так как  $\int_a^b f(x, y) dx$  сходится равномерно по параметру  $y$  на  $[c, d]$ , то существует  $b' \in [a, b)$  такое, что для любого  $y \in [c, d]$  выполнено неравенство

$$\left| \int_{b'}^b f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (15)$$

Так как интеграл  $\int_a^{b'} f(x, y) dx$  является собственным, то в силу теоремы 1, § 71 этот интеграл есть непрерывная функция параметра  $y$  на  $[c, d]$ . Пусть  $y_0 \in [c, d]$ . Тогда найдется  $\delta > 0$  такое, что для любого  $y \in [c, d]$  такого, что  $|y - y_0| < \delta$ , имеет место неравенство

$$\left| \int_a^{b'} f(x, y) dx - \int_a^{b'} f(x, y_0) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (16)$$

Тогда для любого  $y \in [c, d]$  такого, что  $|y - y_0| < \delta$ , имеем в силу неравенств (15) и (16)

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^b f(x, y_0) dx \right| &\leq \left| \int_a^{b'} f(x, y) dx - \int_a^{b'} f(x, y_0) dx \right| + \\ &+ \left| \int_{b'}^b f(x, y) dx \right| + \left| \int_{b'}^b f(x, y_0) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$



Итак, интеграл  $\int_a^b f(x, y) dx$  есть непрерывная функция параметра  $y$  в произвольной точке  $y_0 \in [c, d]$ . ●

Пример 6. Доказать равенство

$$\lim_{y \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx. \quad (17)$$

△ Если функцию  $\frac{\sin x}{x}$  доопределить при  $x = 0$  по непрерывности, считая, что при  $x = 0$  функция  $\frac{\sin x}{x}$  принимает значение, равное единице, то подынтегральная функция интеграла (17) будет непрерывной на множестве  $\{(x, y): x \geq 0, y \geq 0\}$ .

При рассмотрении примера 4 было показано, что интеграл (10) сходится равномерно по параметру  $y$  на множестве  $[0, +\infty)$ . В силу теоремы 4 интеграл (10) есть непрерывная функция параметра  $y$  на любом отрезке  $[0, b]$ . В частности, эта функция непрерывна при  $y = 0$ , поэтому должно быть выполнено равенство (17). ▲

Теорема 5 (о перестановке порядка интегрирования). Пусть функция  $f(x, y)$  непрерывна на множестве  $\{(x, y): a \leq x < b, c \leq y \leq d\}$  и интеграл  $\int_a^b f(x, y) dx$  сходится равномерно по параметру  $y$  на  $[c, d]$ .

Тогда справедлива формула

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (18)$$

○ Так как интеграл  $\int_a^b f(x, y) dx$  сходится равномерно по параметру  $y$  на отрезке  $[c, d]$ , то он будет на отрезке  $[c, d]$  непрерывной, а поэтому и интегрируемой функцией. Повторный интеграл в левой части формулы (18) существует. Кроме того, в силу равномерной сходимости интеграла  $\int_a^b f(x, y) dx$  на  $[c, d]$  для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $b' \in [a, b]$  такое, что для любого  $\xi \in (b', b)$  и любого  $y \in Y$  выполнено неравенство

$$\left| \int_{\xi}^b f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{d - c}. \quad (19)$$

Применяя теорему 2, § 71 о перестановке порядка интегрирования в собственных интегралах, получаем равенство

$$\int_c^d dy \int_a^{\xi} f(x, y) dx = \int_a^{\xi} dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (20)$$

Покажем, что интеграл, стоящий в левой части равенства (20), при  $\xi \in b - 0$  стремится к интегралу в левой части равенства (18). Действительно, в силу неравенства (19)

$$\begin{aligned} & \left| \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx - \int_c^d dy \int_a^\xi f(x, y) dx \right| = \\ & = \left| \int_c^d dy \int_\xi^b f(x, y) dx \right| \leq \int_c^d \left( \left| \int_\xi^b f(x, y) dx \right| \right) dy < \frac{\varepsilon}{d-c} \int_c^d dy = \varepsilon. \end{aligned}$$

Итак, левая часть равенства (20) имеет предел при  $\xi \rightarrow b - 0$ . Поэтому, правая часть этого равенства имеет предел при  $\xi \rightarrow b - 0$ . Переходя в равенстве (20) к пределу, получаем формулу (18). ●

Пример 7. Вычислить интеграл Дирихле, доказав, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \quad (21)$$

△ Воспользуемся известной формулой

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x dx = \frac{1}{1+y^2}, \quad y > 0. \quad (22)$$

Интеграл (22) сходится равномерно по параметру  $y$  на любом отрезке  $[\delta, N]$ , где  $\delta > 0$ . Это следует из признака Вейерштрасса равномерной сходимости, так как

$$|e^{-xy} \sin x| \leq e^{-\delta x}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-\delta x} dx = \frac{1}{\delta}.$$

Применяя теорему 5 и интегрируя равенство (22), получаем

$$\operatorname{arctg} N - \operatorname{arctg} \delta = \int_0^{+\infty} dx \int_\delta^N e^{-xy} \sin x dy = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\delta x} - e^{-Nx}}{x} \sin x dx. \quad (23)$$

Так как  $|\sin x| \leq x$  при  $x \geq 0$ , то

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{e^{-Nx} \sin x}{x} dx \right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-Nx} dx = \frac{1}{N}.$$

Переходя к пределу при  $N \rightarrow +\infty$  в равенстве (23), получаем

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \delta = \int_0^{+\infty} e^{-\delta x} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Воспользовавшись равенством (17) и переходя к пределу при  $\delta \rightarrow +0$ , получаем выражение (21) для интеграла Дирихле. ▲

Теорема 6 (о дифференцировании несобственного интеграла по параметру). Пусть функции  $f(x, y)$  и  $f_y(x, y)$  непрерывны на множестве  $\{(x, y): a \leq x < b, c \leq y \leq d\}$  и интеграл  $\int_a^b f_y(x, y) dx$  сходится равномерно по параметру  $y$  на отрезке  $[c, d]$ .

Тогда если интеграл  $\int_a^b f(x, c) dx$  сходится, то интеграл  $\int_a^b f(x, y) dx$  сходится на отрезке  $[c, d]$  и является на этом отрезке непрерывно дифференцируемой функцией параметра  $y$ , причем

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b f_y(x, y) dx. \quad (24)$$

○ Пусть  $c \leq y \leq d$ . Рассмотрим интеграл  $\int_a^b f_y(x, \eta) dx$  при  $\eta \in [c, y]$ .

По условию теоремы этот интеграл сходится равномерно по параметру  $\eta$  на отрезке  $[c, y]$ . В силу теоремы 5 законна перестановка порядка интегрирования

$$\int_c^y d\eta \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta) dx = \int_a^b dx \int_c^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta) d\eta = \int_a^b f(x, y) dx + c_0, \quad (25)$$

где  $c_0 = -\int_a^b f(x, c) dx$ .

Так как интеграл  $\int_a^b f_y(x, \eta) dx$  сходится равномерно по параметру  $\eta$  на  $[c, d]$ , то этот интеграл будет непрерывной функцией  $\eta$  на этом отрезке, и интеграл, стоящий в левой части равенства (25), будет непрерывно дифференцируемой функцией параметра  $y$  на отрезке  $[c, d]$ .

Но тогда и  $\int_a^b f(x, y) dx$  есть непрерывно дифференцируемая функция на  $[c, d]$ . Дифференцируя обе части равенства (25) по  $y$ , получаем формулу (24). ●

Пример 8. Вычислить интегралы Лапласа

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+x^2} dx, \quad I_2(y) = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin xy}{1+x^2} dx, \quad y \in R.$$

△ Пусть  $y \geq \delta > 0$ . Тогда оба интеграла сходятся равномерно по параметру  $y$  на  $[\delta, +\infty)$  в силу признака Дирихле: функции  $\cos xy$  и  $\sin xy$  имеют ограниченные первообразные, а функции  $\frac{1}{1+x^2}$  и  $\frac{x}{1+x^2}$  стре-

мятся к нулю при  $x \rightarrow +\infty$ , причем

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1+x^2} \right) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \leq 0, \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{1+x^2} \right) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \leq 0$$

при  $x \geq 1$ .

Дифференцируя  $I_1(y)$  по параметру, получаем

$$\frac{dI_1(y)}{dy} = -\int_0^{+\infty} \frac{x \sin xy}{1+x^2} dx = -I_2(y), \quad \delta \leq y < +\infty. \quad (26)$$

Дифференцирование по параметру законно, так как интеграл  $I_2(y)$  сходится равномерно по параметру  $y$  при  $y \in [\delta, +\infty)$ . Чтобы найти производную  $I_2(y)$ , заметим, что при  $y \geq \delta > 0$

$$\begin{aligned} I_2(y) &= \int_0^{+\infty} \frac{x \sin xy}{1+x^2} dx = \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x(1+x^2)} \right) \sin xy dx = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x} dx - \int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x(1+x^2)} dx = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{(1+x^2)x} dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{(1+x^2)x} dx. \end{aligned}$$

Применяя теорему 6, получаем

$$\frac{dI_2(y)}{dy} = -\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+x^2} dx = -I_1(y), \quad y \in [\delta, +\infty). \quad (27)$$

Из формул (26) и (27) следует, что при  $y \in [\delta, +\infty)$

$$I_1'(y) = -I_2(y), \quad I_2'(y) = -I_1(y), \quad I_1''(y) - I_1(y) = 0. \quad (28)$$

Решая это дифференциальное уравнение, получаем (см. § 36)

$$I_1(y) = C_1 e^{-y} + C_2 e^y \quad \text{при } y \in [\delta, +\infty), \quad (29)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные.

Покажем, что  $C_2 = 0$ . Так как

$$|I_1(y)| = \left| \int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+x^2} dx \right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{|\cos xy|}{1+x^2} dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2},$$

то  $I_1(y)$  есть ограниченная функция на  $[\delta, +\infty)$ . Так как  $e^y$  — неограниченная функция на  $[\delta, +\infty)$ , то в формуле (29) нужно принять  $C_2 = 0$ .

Итак,

$$I_1(y) = C_1 e^{-y}, \quad I_2(y) = -I_1'(y) = C_1 e^{-y} \quad \text{при } y \in [\delta, +\infty). \quad (30)$$

Так как  $\delta$  — произвольное положительное число, то из (30) следует, что

$$I_1(y) = C_1 e^{-y} = I_2(y) \quad \text{при } y > 0. \quad (31)$$

Замечая, что интеграл Лапласа  $I_1(y)$  есть четная функция на  $(-\infty, +\infty)$ , а интеграл  $I_2(y)$  есть нечетная функция на  $(-\infty, +\infty)$ , перепишем равенство (31) в следующем виде:

$$I_1(y) = C_1 e^{-|y|}, \quad I_2(y) = C_1 \operatorname{sign} y e^{-|y|} \quad \text{при } y \neq 0. \quad (32)$$

Для определения произвольной постоянной  $C_1$  воспользуемся тем, что интеграл Лапласа  $I_1(y)$  сходится равномерно по параметру  $y$  на  $(-\infty, +\infty)$  (см. пример 3). Поэтому  $I_1(y)$  есть непрерывная функция в точке  $y = 0$ . Следовательно,

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = I_1(0) = \lim_{y \rightarrow +0} I_1(y) = \lim_{y \rightarrow +0} C_1 e^{-y} = C_1.$$

Теперь формулы (32) дают, что при любом  $y \in R$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|y|}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x \sin xy}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} y e^{-|y|}. \quad (33)$$

То, что формулы (33) справедливы при  $y = 0$ , проверяется непосредственно.  $\blacktriangle$

**4. Перестановка порядка интегрирования в том случае, когда оба интеграла несобственные.** В теореме 5 была обоснована перестановка порядка интегрирования, когда внутренний интеграл несобственный, а внешний собственный. Сложнее обосновывать перестановку порядка интегрирования, когда оба интеграла несобственные.

**Теорема 7.** Пусть функция  $f(x, y)$  непрерывна на множестве  $\{(x, y): a \leq x < b, c \leq y < d\}$  и выполнены следующие условия:

1) несобственный интеграл  $\int_a^b |f(x, y)| dx$  сходится равномерно по параметру  $y$  на любом отрезке  $[c', d'] \subset (c, d)$ ;

2) несобственный интеграл  $\int_c^d |f(x, y)| dy$  сходится равномерно по параметру  $x$  на любом отрезке  $[a', b'] \subset (a, b)$ ;

3) один из двух повторных интегралов

$$\int_c^d dy \int_a^b |f(x, y)| dx, \quad \int_a^b dx \int_c^d |f(x, y)| dy$$

сходится.

Тогда сходятся оба повторных интеграла  $\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$  и  $\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$  и

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx. \quad (34)$$

○ а) Пусть сначала  $f \geq 0$  и существует повторный интеграл  $\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$ . Возьмем произвольный отрезок  $[c', d'] \subset [c, d]$ . Тогда интеграл по отрезку  $[c', d']$  будет собственным и, применяя теорему 5, получаем

$$\int_{c'}^{d'} dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_{c'}^{d'} f(x, y) dy \leq \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (35)$$

Перестановка интегрирования законна, так как интеграл  $\int_a^b f(x, y) dx$  сходится равномерно по параметру  $y$  на отрезке  $[c', d'] \subset [c, d]$ . Последнее неравенство в формуле (35) следует из неотрицательности  $f$  и существования повторного интеграла  $\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$ . Переходя в формуле (35) к пределу при  $d' \rightarrow d - 0$  и  $c' \rightarrow c + 0$  и замечая, что в силу неотрицательности функции  $f$  интеграл в левой части неравенства (35) есть возрастающая функция верхнего предела  $d'$  и убывающая функция нижнего предела  $c'$ , получаем, что

$$I_2 = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx \leq \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = I_1. \quad (36)$$

Проведя еще раз то же самое рассуждение, но для повторного интеграла  $\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$ , получим вместо неравенства (36) неравенство  $I_1 \leq I_2$ . Поэтому должно выполняться равенство (34).

б) Пусть теперь  $f(x, y)$  — знакопеременная вещественная функция. Представим ее в виде

$$f = f^+ - f^-, \quad \text{где} \quad f^+ = \frac{|f| + f}{2}, \quad f^- = \frac{|f| - f}{2}, \quad f^+ \geq 0, \quad f^- \geq 0.$$

Очевидно, что  $0 \leq f^+ \leq |f|$ ,  $0 \leq f^- \leq |f|$ .

Используя замечание 2 (п. 2) и признаки сравнения для несобственных интегралов (§ 38), получаем, что для  $f^+$  и  $f^-$  выполнены условия теоремы. В силу а) повторные интегралы от  $f^+$  и  $f^-$  равны. Поэтому равны и повторные интегралы от функции  $f = f^+ - f^-$ . ●

Замечание 3. Теоремы 4–7 остаются справедливыми и при замене функции  $f(x, y)$  на функцию  $\psi(x)f(x, y)$ , где функция  $\psi(x)$  интегрируема по Риману на любом отрезке, лежащем в интервале  $(a, b)$ . См. замечание в § 71.

Замечание 4. Если  $f(x, y) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  есть комплекснозначная функция, то

$$|\varphi(x, y)| \leq |f(x, y)|, \quad |\psi(x, y)| \leq |f(x, y)|.$$

Все условия теоремы будут выполнены и для функций  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$ , если  $f(x, y)$  удовлетворяет условиям теоремы 7. Поэтому оба повторных интеграла от каждой из этих функций существуют и равны. Следовательно, существуют и равны повторные интегралы от функции  $f(x, y)$ .

Пример 9. Вычислить интеграл Эйлера–Пуассона (интеграл вероятностей)

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

$\Delta$  Сделаем замену переменной  $t = xy$ ,  $y > 0$ . Тогда

$$I = y \int_0^{+\infty} e^{-x^2 y^2} dx.$$

Умножая это равенство на  $e^{-y^2}$  и интегрируя его от 0 до  $+\infty$  по  $y$ , получаем

$$I^2 = \int_0^{+\infty} I e^{-y^2} dy = \int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} y e^{-y^2(1+x^2)} dx. \quad (37)$$

Меняя порядок интегрирования, получаем

$$I^2 = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} y e^{-y^2(1+x^2)} dy = - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-y^2(1+x^2)}}{2(1+x^2)} \Big|_0^{+\infty} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4},$$

откуда

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Для обоснования законности изменения порядка интегрирования применим теорему 7. Интеграл  $\int_0^{+\infty} y e^{-y^2(1+x^2)} dx$  сходится равномерно по параметру  $y$  на любом отрезке  $[c, d] \subset (0, +\infty)$  по признаку Вейерштрасса, так как  $|y e^{-y^2(1+x^2)}| \leq d e^{-c^2(1+x^2)}$ , а интеграл  $\int_0^{+\infty} d e^{-c^2(1+x^2)} dx$  сходится.

Аналогично доказывается, что интеграл  $\int_0^{+\infty} y e^{-y^2(1+x^2)} dy$  сходится равномерно по параметру  $x$  на любом отрезке  $[a, b] \subset (0, +\infty)$ . Повтор-

ный интеграл  $\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} y e^{-y^2(1+x^2)} dy$  сходится в силу равенства (37). ▲

Пример 10. Вычислить интегралы Френеля

$$J_1 = \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx, \quad J_2 = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx.$$

△ Выполняя замену переменной  $y = x^2$ , получаем

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} e^{-ky} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy, \\ J_2 &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos y}{\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} e^{-ky} \frac{\cos y}{\sqrt{y}} dy. \end{aligned} \quad (38)$$

При написании формул (38) использована равномерная сходимость несобственных интегралов в правых частях равенств (38) по параметру  $k$  при  $k \geq 0$  (признак Дирихле).

Выполняя в интеграле Эйлера-Пуассона  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  замену переменной  $t = x\sqrt{y}$ , получаем

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{y} e^{-x^2 y} dx = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2 y} dx, \quad y > 0.$$

Подставляя выражение для  $\frac{1}{\sqrt{y}}$  в формулы (38) и меняя порядок интегрирования, получаем

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{\pi} \lim_{k \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} e^{-y(k+x^2)} \sin y dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{k \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-y(k+x^2)} \sin y dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{k \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+(k+x^2)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{k \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-y(k+x^2)} \cos y dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{k \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} \frac{k+x^2}{1+(k+x^2)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$



Изменение порядка интегрирования при  $k > 0$  обосновывается при помощи теоремы 7, предельный переход при  $k \rightarrow +0$  под знаком интеграла возможен в силу его равномерной сходимости по параметру  $k$  при  $k \in [0, +\infty)$  (признак Вейерштрасса). Интегралы  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$  и  $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4}$  вычислены в § 38 (примеры 9 и 8). ▲

### § 73. Эйлеровы интегралы

**1. Гамма-функция Эйлера.** Гамма-функция Эйлера  $\Gamma(x)$  определяется как несобственный интеграл

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0, \quad (1)$$

с двумя особыми точками,  $t = 0$  и  $t = +\infty$ .

Для того чтобы можно было применить теоремы предыдущего параграфа, представим интеграл (1) в виде суммы двух интегралов

$$\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (2)$$

Оба интеграла сходятся равномерно по параметру  $x$  на любом конечном отрезке  $[a, b] \subset (0, +\infty)$  по признаку Вейерштрасса. Действительно, пусть  $0 < a < 1, b > 1$ . Тогда  $0 \leq t^{x-1} e^{-t} \leq t^{a-1}$  при  $x \geq a, 0 \leq t \leq 1$  и  $\int_0^1 t^{a-1} dt = a^{-1}$ . Следовательно, интеграл  $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$  сходится равномерно на  $[a, b]$ .

Аналогично  $0 \leq t^{x-1} e^{-t} \leq t^{b-1} e^{-t}$  при  $x \leq b, t \geq 1$ , интеграл  $\int_1^{+\infty} t^{b-1} e^{-t} dt$  сходится, а интеграл  $\int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$  сходится равномерно на  $[a, b]$ .

Так как подынтегральная функция  $t^{x-1} e^{-t}$  непрерывна при  $t > 0, x > 0$ , то в силу теоремы 4, § 72 оба интеграла в формуле (2) будут непрерывными функциями параметра  $x$  на произвольном отрезке  $[a, b] \subset (0, +\infty)$ , а поэтому  $\Gamma(x)$  есть непрерывная функция при  $x > 0$ .

При  $x > 0$  функция  $\Gamma(x)$  непрерывно дифференцируема, причем

$$\Gamma'(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} \ln t dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \ln t dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \ln t e^{-t} dt. \quad (3)$$

Дифференцирование под знаком интеграла законно, так как оба интеграла в формуле (3) сходятся равномерно по параметру  $x$  на любом отрезке  $[a, b] \subset (0, +\infty)$ .

По индукции можно доказать, что  $\Gamma(x)$  есть бесконечно дифференцируемая функция при  $x > 0$  и

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} (\ln t)^n dt. \quad (4)$$

В частности,

$$\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} (\ln t)^2 dt > 0.$$

Поэтому  $\Gamma(x)$  — выпуклая вниз функция при  $x > 0$  и имеет единственный положительный минимум. Нетрудно было бы показать, что формула (3) имеет место и для комплексных  $x$  при  $\operatorname{Re} x > 0$ , и поэтому  $\Gamma(x)$  есть регулярная функция комплексной переменной  $x$  в правой полуплоскости  $\operatorname{Re} x > 0$ .

Выведем теперь основное функциональное соотношение для гамма-функции. Пусть  $x > 0$ . Интегрируя по частям, находим

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = -e^{-t} t^x \Big|_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x \Gamma(x), \quad (5)$$

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x), \quad x > 0.$$

Это и есть основное функциональное соотношение для гамма-функции, найденное Эйлером. На нем в значительной мере основана теория гамма-функции.

Прежде всего заметим, что если  $x \in (0, 1]$ , то  $x+1 \in (1, 2]$ . Поэтому, зная значения  $\Gamma(x)$  на промежутке  $(0, 1]$ , можно при помощи формулы (5) найти значения  $\Gamma(x)$  на промежутке  $(1, 2]$ , а следовательно, и на любом отрезке  $[n, n+1]$ ,  $n = 1, 2, \dots$  Это существенно облегчает вычисление значений гамма-функции.

Далее, формула (5) позволяет исследовать поведение  $\Gamma(x)$  при  $x \rightarrow +0$ . Имеем

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \sim \frac{\Gamma(1)}{x} \quad \text{при } x \rightarrow +0,$$

так как  $\Gamma(x+1)$  — непрерывная функция при  $x=0$ , а  $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$ . Таким образом,  $\Gamma(x) \rightarrow +\infty$  при  $x \rightarrow +0$ .

Из формулы (5) находим

$$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n) = n(n-1) \dots 1 \cdot \Gamma(1) = n!.$$

Функция  $n!$  определена для натуральных  $n$ . Гамма-функция  $\Gamma(x)$  непрерывна для всех  $x > 0$  и  $\Gamma(n+1) = n!$ .

Формула (5) позволяет продолжить функцию  $\Gamma(x)$  с сохранением ее свойств на отрицательные значения  $x$ , не равные  $-1, -2, \dots, -n, \dots$

Положим по определению

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}, \quad -1 < x < 0. \quad (6)$$

Так как при  $x \in (-1, 0)$  имеем  $x+1 \in (0, 1)$ , то определение (6)

корректно. Исследуем поведение  $\Gamma(x)$  при  $x \rightarrow -1+0$ . Полагая  $y = x+1$ , получаем, что  $x \rightarrow -1+0$  эквивалентно  $y \rightarrow +0$ . Поэтому при  $y \rightarrow +0$ , используя (6), получаем

$$\begin{aligned} \Gamma(y-1) &= \\ &= \frac{\Gamma(y)}{y-1} \sim -\Gamma(y) \sim -\frac{1}{y} = -\frac{1}{x+1}. \end{aligned}$$

Итак,

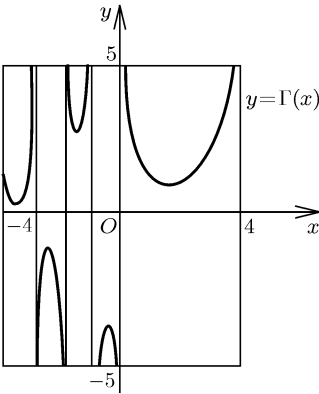
$$\Gamma(x) \sim -\frac{1}{x+1}, \quad x \rightarrow -1+0.$$

По индукции теперь можно определить  $\Gamma(x)$  на любом интервале  $(-(n+1), -n)$ , где  $n \in \mathbb{N}$ , формулой

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}, \quad x \in (-(n+1), -n), \text{ причем } \Gamma(x) \sim \frac{(-1)^n}{x+n} \text{ при } x \rightarrow -n.$$

График  $\Gamma(x)$  изображен на рис. 73.1.

Рис. 73.1



**2. Бета-функция Эйлера.** Рассмотрим интеграл, зависящий от двух параметров и именуемый *бета-функцией Эйлера*:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt. \quad (7)$$

У интеграла две особые точки,  $t = 0$  и  $t = 1$ . Записывая интеграл (7) в виде

$$B(x, y) = \int_0^{1/2} t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt + \int_{1/2}^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt,$$

получаем, что первый интеграл сходится при  $x > 0$ , а второй при  $y > 0$ , так что бета-функция определена при  $x > 0, y > 0$ .

Свойства бета-функции:

1)  $B(x, y) = B(y, x)$ .

○ Делая замену переменной  $\tau = 1 - t$ , получаем

$$B(y, x) = \int_0^1 t^{y-1} (1-t)^{x-1} dt = \int_0^1 (1-\tau)^{y-1} \tau^{x-1} d\tau = B(x, y). \quad \bullet$$

## 2) Справедливы формулы

$$B(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1} du}{(1+u)^{x+y}} = \int_0^1 \frac{u^{x-1} + u^{y-1}}{(1+u)^{x+y}} du. \quad (8)$$

○ Первая из формул (8) получается, если в интеграле (7) сделать замену переменной  $t = \frac{u}{1+u}$ . Вторая формула (8) получается из первой, если разбить интеграл на два: по отрезку  $[0, 1]$  и интервалу  $(1, +\infty)$ , и во втором интеграле сделать замену переменной  $\frac{1}{u} = v$ . ●

## 3) Справедлива формула

$$B(x, 1-x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{1+u} du = \frac{\pi}{\sin x\pi}, \quad 0 < x < 1. \quad (9)$$

○ Полагая в формуле (8)  $y = 1-x$  и пользуясь тождеством

$$\frac{1}{1+u} = \sum_{k=0}^n (-1)^k u^k + (-1)^{n+1} \frac{u^{n+1}}{1+u},$$

получаем

$$\begin{aligned} B(x, 1-x) &= \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{1+u} du = \int_0^1 \frac{u^{x-1} + u^{-x}}{1+u} du = \\ &= (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{u^{n+1}}{1+u} (u^{x-1} + u^{-x}) du + \sum_{k=0}^n (-1)^k \left( \frac{1}{k+x} + \frac{1}{k-x+1} \right). \quad (10) \end{aligned}$$

Так как

$$0 \leq \int_0^1 \frac{u^{n+1}(u^{x-1} + u^{-x})}{1+u} du \leq \int_0^1 (u^{n+x} + u^{n+1-x}) du = \frac{1}{n+x+1} + \frac{1}{n+2-x},$$

то, переходя в формуле (10) к пределу при  $n \rightarrow +\infty$ , получаем

$$\begin{aligned} B(x, 1-x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{1}{k+x} + \frac{1}{k-x+1} \right) = \\ &= \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{1}{x+k} + \frac{1}{x-k} \right) = \frac{\pi}{\sin \pi x}. \end{aligned}$$

Последняя формула получается при  $z = \pi x$  из формулы (10), § 64, задающей разложение  $\frac{1}{\sin z}$  на элементарные дроби. ●

4)  $B(x, y)$  выражается через гамма-функцию, а именно

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (11)$$

○ В интеграле  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$  сделаем замену переменной  $t = (1+u)v$ ,  $v > 0$ , и положим  $s = x+y$ . Тогда

$$\frac{\Gamma(x+y)}{(1+u)^{x+y}} = \int_0^{+\infty} v^{x+y-1} e^{-(1+u)v} dv.$$

Умножим это равенство на  $u^{x-1}$  и проинтегрируем по  $u$  от 0 до  $+\infty$ . В левой части, пользуясь формулой (8), получим произведение  $\Gamma(x+y)B(x,y)$ , а в правой — изменим порядок интегрирования. Тогда

$$\begin{aligned} B(x,y)\Gamma(x+y) &= \\ &= \int_0^{+\infty} du \int_0^{+\infty} u^{x-1} v^{x+y-1} e^{-(1+u)v} dv = \int_0^{+\infty} dv \int_0^{+\infty} u^{x-1} v^{x+y-1} e^{-v} e^{-uv} du. \end{aligned}$$

Сделаем еще замену переменной  $uv = t$ . Тогда

$$\begin{aligned} B(x,y)\Gamma(x+y) &= \int_0^{+\infty} dv \int_0^{+\infty} t^{x-1} v^{y-1} e^{-v} e^{-t} dt = \\ &= \int_0^{+\infty} v^{y-1} e^{-v} dv \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \Gamma(x)\Gamma(y). \end{aligned}$$

Обоснование изменения порядка интегрирования производится при помощи теоремы 7, § 72 аналогично тому, как это делалось в примере 9, § 72 при вычислении интеграла вероятностей. ●

Следствие (формула дополнения для гамма-функции). *При  $x \neq \pm k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n, \dots$ , справедлива формула*

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin x\pi}. \quad (12)$$

○ Используя (9) и (11), получаем

$$\frac{\pi}{\sin x\pi} = B(x, 1-x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(1)} = \Gamma(x)\Gamma(1-x).$$

При  $x = \frac{1}{2}$  из формулы дополнения следует, что  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ . ●

Многие интегралы могут быть выражены через эйлеровы интегралы.

Пример 1. Выразить через гамма-функцию следующий интеграл:

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^{a-1} \varphi \cos^{b-1} \varphi d\varphi, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

△ Сделаем замену переменной  $x = \sin^2 \varphi$ . Тогда

$$dx = 2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi, \quad d\varphi = \frac{1}{2} x^{-1/2} (1-x)^{-1/2} dx,$$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 x^{(a/2)-1} (1-x)^{(b/2)-1} dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right) \Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)}.$$

Полагая  $a = 1 + c$ ,  $b = 1 - c$  и пользуясь формулой дополнения (12), получаем при  $|c| < 1$  формулу

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^c \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{c}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{c}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sin \pi \left(\frac{c}{2} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\cos \frac{c\pi}{2}},$$

$$|c| < 1. \quad \blacktriangle$$

## § 74. Интеграл Фурье

**1. Понятие об интеграле Фурье.** Пусть функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема на  $R = (-\infty, +\infty)$ . Это означает, что найдутся точки  $a_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , такие, что  $-\infty < a_1 < \dots < a_n \leq +\infty$ , и на каждом из отрезков  $[a, b]$ , не содержащих точек  $a_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , функция  $f(x)$  интегрируема по Риману, а интегралы

$$\int_{-\infty}^{a_1} |f(x)| dx, \quad \int_{a_i}^{a_{i+1}} |f(x)| dx, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \int_{a_n}^{+\infty} |\varphi(x)| dx$$

сходятся как несобственные интегралы с двумя особыми точками.

По определению

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \int_{-\infty}^{a_1} |f(x)| dx + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} |f(x)| dx + \int_{a_n}^{+\infty} |f(x)| dx. \quad (1)$$

Введем понятие *интеграла Фурье абсолютно интегрируемой на  $R$  функции  $f(x)$* . Для такой функции по признаку сравнения являются сходящимися следующие интегралы:

$$a(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos ty dt, \quad b(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin ty dt. \quad (2)$$

Поставим в соответствие функции  $f(x)$  несобственный интеграл:

$$f(x) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} (a(y) \cos xy + b(y) \sin xy) dy, \quad (3)$$

который называется *интегралом Фурье абсолютно интегрируемой на  $R$  функции  $f(x)$* .

Для интеграла Фурье, как и для ряда Фурье, важно знать:

а) при каких условиях интеграл (3) сходится;

б) если интеграл (3) сходится, как его величина связана со значениями функции  $f(x)$ .

Если выражения для коэффициентов  $a(y)$  и  $b(y)$ , задаваемые формулами (2), подставить в формулу (3), то интеграл Фурье можно представить в следующем виде:

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(t-x) dt \right) dy. \quad (4)$$

**2. Представление функции интегралом Фурье.** Докажем несколько вспомогательных лемм.

*Лемма 1. Для любого  $a > 0$  справедливо равенство*

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{\sin \omega x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \quad (5)$$

○ Переходя при  $\omega \rightarrow +\infty$  к пределу в равенстве

$$\int_0^a \frac{\sin \omega x}{x} dx = \int_0^{\omega a} \frac{\sin x}{x} dx$$

и воспользовавшись выражением (21), § 72 для интеграла Дирихле, получаем равенство (5). ●

*Лемма 2. Для функции  $f(x)$ , абсолютно интегрируемой на интервале  $(0, a)$  и удовлетворяющей в точке 0 условию Гёльдера, справедливо равенство*

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_0^a f(x) \frac{\sin \omega x}{x} dx = \frac{\pi}{2} f(+0). \quad (6)$$

○ Так как функция  $f(x)$  удовлетворяет в точке 0 условию Гёльдера, то существуют такие числа  $\delta > 0$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  и  $c_0 > 0$ , что при  $x \in (0, \delta)$  выполняется неравенство

$$|f(x) - f(+0)| < c_0 x^\alpha. \quad (7)$$

Если разбить интервал  $(0, a)$  на интервалы  $(0, \delta)$  и  $(\delta, a)$ , то

$$\begin{aligned} & \int_0^a f(x) \frac{\sin \omega x}{x} dx = \\ & = \int_0^\delta (f(x) - f(+0)) \frac{\sin \omega x}{x} dx + f(+0) \int_0^\delta \frac{\sin \omega x}{x} dx + \int_\delta^a f(x) \frac{\sin \omega x}{x} dx. \end{aligned} \quad (8)$$

Функция  $\frac{f(x) - f(+0)}{x}$  в силу условия (7) абсолютно интегрируема на интервале  $(0, \delta)$ , а функция  $\frac{f(x)}{x}$  абсолютно интегрируема на

интервале  $(\delta, a)$ . На основании леммы Римана можно заключить, что первый и третий интегралы в формуле (8) стремятся к нулю при  $\omega \rightarrow +\infty$ . Второй интеграл в формуле (8) стремится к  $\frac{\pi}{2} f(+0)$  в силу леммы 1. ●

**Лемма 3.** Для функции  $f(x)$ , абсолютно интегрируемой на интервале  $(-\infty, +\infty)$  и удовлетворяющей в точке  $x_0$  условию Гёльдера, справедливо равенство

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega(x_0 - t)}{x_0 - t} f(t) dt = \frac{\pi}{2} (f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)). \quad (9)$$

○ Разбивая в (9) интервал интегрирования  $(-\infty, +\infty)$  на интервалы  $(-\infty, x_0)$  и  $(x_0, +\infty)$  и делая в первом интеграле замену переменной  $x_0 - t = t'$ , а во втором интеграле замену  $t - x_0 = t'$ , получаем, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x_0 - t)}{x_0 - t} f(t) dt = \int_0^{+\infty} (f(x_0 + t) + f(x_0 - t)) \frac{\sin \omega t}{t} dt.$$

Формула (9) получается теперь как результат применения к функции  $f(x_0 + t) + f(x_0 - t)$  леммы 2. ●

**Теорема 1.** Если абсолютно интегрируемая на  $R$  функция удовлетворяет в точке  $x_0$  условию Гёльдера, то справедливо равенство

$$\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(x_0 - t) dt. \quad (10)$$

Если функция  $f(x)$  еще и непрерывна в точке  $x_0$ , то

$$f(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(x_0 - t) dt. \quad (11)$$

○ Запишем интеграл в левой части формулы (9) в виде

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega(x_0 - t)}{x_0 - t} f(t) dt &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_0^{\omega} f(t) \cos y(x_0 - t) dy = \int_0^{\omega} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(x_0 - t) dt. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при  $\omega \rightarrow +\infty$ , учитывая равенство (9) и четность подынтегральной функции по переменной  $y$ , получаем равенство (10). Если же функция  $f(x)$  еще и непрерывна в точке  $x_0$ , то из (10) получаем (11).

Если функция  $f(x)$  непрерывна, то законность изменения порядка интегрирования следует из теоремы 5 в § 72. В общем случае законность перестановки следует из замечания 4 в этом же параграфе. ●



Так как функция, дифференцируемая или имеющая обе односторонние производные в точке, удовлетворяет в этой точке условию Гёльдера, то справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** *Если непрерывная, абсолютно интегрируемая на  $R$  функция  $f(x)$  имеет в каждой точке или конечную производную или конечные односторонние производные, то эта функция представима на  $R$  интегралом Фурье*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(x-t) dt = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} (a(y) \cos xy + b(y) \sin xy) dy, \quad (12)$$

где функции  $a(y)$  и  $b(y)$  определены равенствами (2).

О Теорема 2 является следствием теоремы 1, так как функция, имеющая в каждой точке односторонние производные, удовлетворяет в каждой точке условию Гёльдера (см. § 64). ●

**Пример 1.** Представить интегралом Фурье функцию  $f(x) = e^{-|x|}$ .

△ Функция  $f(x) = e^{-|x|}$  абсолютно интегрируема и непрерывна на  $R$ ; в любой точке  $x \neq 0$  функция  $f(x)$  имеет производную  $f'(x) = e^{-|x|} \text{sign}(-x)$ , при  $x = 0$  функция  $f(x)$  имеет односторонние производные  $f'_+(0) = -1$  и  $f'_-(0) = 1$ .

Все условия теоремы 2 выполнены. Пользуясь формулами (2), получаем равенства

$$a(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} \cos ty dt = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+y^2}, \quad b(y) = 0.$$

Из формулы (12) следует, что

$$e^{-|x|} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+y^2} dy. \quad \blacktriangle$$

**3. Интегралы в смысле главного значения. Комплексная форма интеграла Фурье.** Пусть функция  $f(x)$  определена на  $R$  и абсолютно интегрируема на любом конечном отрезке  $[a, b]$ .

Если существует конечный предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N f(x) dx,$$

то этот предел будем называть *интегралом в смысле главного значе-*

ния и обозначать через *v.p.*  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ . Таким образом,

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N}^N f(x) dx.$$

Если  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  существует как несобственный, то он существует и в смысле главного значения. Обратное утверждение является неверным. Например, если  $f(x) = x$ , то

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} x dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N}^N x dx = 0,$$

а интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$  не сходится как несобственный.

Ясно, что для любой нечетной, абсолютно интегрируемой на любом конечном отрезке функции *v.p.*  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0$ .

Интеграл в смысле главного значения можно рассматривать и на конечном отрезке  $[a, b]$ . Пусть функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема на любом отрезке  $[a, \beta]$ , принадлежащем отрезку  $[a, b]$  и не содержащем точки  $c \in (a, b)$ . Тогда по определению

$$\text{v.p.} \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[ \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right].$$

Упражнение 1. Показать, что если  $0 \in (a, b)$ , то

$$\text{v.p.} \int_a^b \frac{dx}{x} = \ln \left| \frac{b}{a} \right|.$$

Пусть для абсолютно интегрируемой на  $R$  функции  $f(x)$  справедливо представление в виде интеграла Фурье, т. е. для любого  $x \in R$  справедливо равенство

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(x-t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} a(y) \cos yx dy + \int_{-\infty}^{+\infty} b(y) \sin yx dy, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$a(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos yt dt, \quad b(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin yt dt. \quad (14)$$

Лемма 4. Если  $f(x)$  — абсолютно интегрируемая на  $R$  функция, то функции  $a(y)$  и  $b(y)$ , определенные равенствами (14), непрерывны на  $R$ .

○ Докажем, например, непрерывность  $a(y)$ . Из (14) следует, что

$$|\Delta a(y)| = |a(y + \Delta y) - a(y)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \left| \sin \left( \frac{t \Delta y}{2} \right) \right| dt. \quad (15)$$

Так как функция  $f(t)$  абсолютно интегрируема, то интервал  $(-\infty, +\infty)$  можно разбить на три таких интервала  $(-\infty, -c)$ ,  $(-c, c)$  и  $(c, +\infty)$ , что по бесконечным интервалам интегралы от функции  $|f(x)|$  не будут превышать  $\frac{\varepsilon}{3}$ . Сумма первого и третьего интегралов в формуле (15) не превысит  $\frac{2\varepsilon}{3}$ . Второй интеграл в формуле (15) меньше, чем

$$\frac{c}{2\pi} |\Delta y| \int_{-c}^c |f(t)| dt,$$

и, следовательно, существует  $\delta > 0$  такое, что при  $|\Delta y| < \delta$  второй интеграл в (15) меньше  $\frac{\varepsilon}{3}$ . Из (15) следует, что при  $|\Delta y| < \delta$  приращение  $|\Delta a(y)| < \varepsilon$ . ●

Рассмотрим несобственный интеграл

$$K(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin y(x-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) (\sin yx \cos yt - \cos yx \sin yt) dt = 2\pi(a(y) \sin yx - b(y) \cos yx).$$

В силу леммы 4 функция  $K(y)$  непрерывна на  $R$ . Так как эта функция нечетна, то

$$\frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} K(y) dy = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin y(x-t) dt = 0. \quad (16)$$

Теорема 3. Если для абсолютно интегрируемой на  $R$  функции  $f(x)$  справедливо равенство (13), то справедливы и следующие равенства:

$$f(x) = \text{v.p.} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt} dt \right) e^{iyx} dy, \quad (17)$$

$$f(x) = \text{v.p.} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iyt} dt \right) e^{-iyx} dy. \quad (18)$$

○ Формула (17) получается, если умножить равенство (16) на мнимую единицу  $i$ , сложить его с равенством (13) и воспользоваться формулами Эйлера

$$\cos y(x-t) + i \sin y(x-t) = e^{iy(x-t)} = e^{iyx} e^{-iyt}.$$

Аналогично получается и формула (18). Нужно умножить равенство (16) на  $-i$  и сложить его с равенством (13). ●

Интеграл, стоящий в правой части равенства (17), называется *интегралом Фурье функции  $f(x)$  в комплексной форме*.

**Замечание.** Интеграл Фурье в комплексной форме может быть написан и для комплекснозначной абсолютно интегрируемой функции  $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ . Если для действительной и мнимой части функции  $f(x)$ , т. е. для  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ , справедливо представление (17) интегралом Фурье, то очевидно, что такое представление справедливо и для функции  $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ .

## § 75. Преобразование Фурье

**1. Понятие преобразования Фурье и обратного преобразования Фурье.** Пусть  $f(x)$  есть комплекснозначная функция действительного переменного. Тогда *преобразование Фурье* функции  $f(x)$  (оно обозначается через  $F[f]$  или  $\hat{f}$ ) определяется формулой

$$\hat{f}(y) = F[f] = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iyx} dx. \quad (1)$$

*Обратное преобразование Фурье* (обозначается через  $F^{-1}[f]$  или  $\tilde{f}$ ) определяется формулой

$$\tilde{f}(y) = F^{-1}[f] = \text{v.p.} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iyx} dx. \quad (2)$$

Предполагается, что интегралы (1) и (2) существуют. Если функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема, то несобственные интегралы  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iyx} dx$  и  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iyx} dx$  существуют и совпадают с соответствующими интегралами в смысле главного значения. Поэтому для абсолютно интегрируемых функций преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье определяются как следующие несобственные интегралы:

$$F[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iyx} dx, \quad (3)$$

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iyx} dx. \quad (4)$$

**2. Свойства преобразования Фурье абсолютно интегрируемых на  $R$  функций.**

**Лемма 1.** *Преобразование Фурье абсолютно интегрируемой на  $R$  функции есть ограниченная и непрерывная на  $R$  функция.*

○ Так как функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема на  $R$ , то

$$|\widehat{f}(y)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iyx} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = C_0$$

и, следовательно,  $\widehat{f}(y)$  есть ограниченная функция на  $R$ .

Для доказательства непрерывности функции  $\widehat{f}(y)$  запишем ее в виде

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos yx dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin yx dx = a(y) - i b(y)$$

и заметим, что, в силу леммы 4, § 74 функции  $a(y)$  и  $b(y)$  непрерывны на  $R$ . ●

Упражнение 1. Доказать, что множество абсолютно интегрируемых функций на  $R$  и множество непрерывных функций на  $R$  образуют линейные пространства. Показать, что  $F$  можно понимать как линейный оператор, действующий из линейного пространства абсолютно интегрируемых функций в пространство непрерывных функций на  $R$ .

Указание. Доказать, что для любых  $\lambda, \mu \in C$  выполнено равенство

$$F[\lambda f(x) + \mu g(x)] = \lambda F[f] + \mu F[g]$$

и воспользоваться результатом леммы 1.

**Теорема 1.** Если функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема на  $R$  и имеет в каждой точке конечную производную  $f'(x)$ , то справедливы формулы обращения

$$F^{-1}[F[f]] = f, \quad F[F^{-1}[f]] = f. \quad (5)$$

○ Так как выполнены условия теоремы 3, § 74, то справедливо равенство (12), § 74, а следовательно, и равенства (17) и (18), § 74, которые, применяя обозначения (1) и (2), можно записать в виде (5). ●

### 3. Преобразование Фурье производной.

**Теорема 2.** Если непрерывная и абсолютно интегрируемая на  $R$  функция  $f(x)$  является кусочно гладкой на любом отрезке  $[a, b] \subset R$ , а функция  $f'(x)$  абсолютно интегрируема на  $R$ , то

$$F[f'] = iyF[f]. \quad (6)$$

○ Для функции  $f(x)$  справедлива формула Ньютона–Лейбница (см. § 64)

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt.$$

Так как производная  $f'(x)$  абсолютно интегрируемая функция, то существует

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(x) dx = A.$$

Покажем, что  $A = 0$ . Если, например,  $A > 0$ , то существует такое число  $a \in R$ , что при  $x > a$  выполнено неравенство  $f(x) > \frac{1}{2} A$ , откуда по признаку сравнения следует, что интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  является расходящимся, что противоречит условию теоремы. Итак,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

Аналогично доказывается, что  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ .

Применяя интегрирование по частям, получаем равенство

$$F[f'] = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-ixy} dx = f(x) e^{-ixy} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + iy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx.$$

Так как  $|e^{-ixy}| = 1$ , то внеинтегральный член в правой части этого равенства обращается в нуль и, следовательно, справедливо равенство (6). ●

Следствие. Если функции  $f(x)$ ,  $f'(x)$ , ...,  $f^{(k)}(x)$  непрерывны и абсолютно интегрируемы на  $R$ , то

$$F[f^{(k)}] = (iy)^k F[f]. \quad (7)$$

○ Формула (7) доказывается по индукции с использованием формулы (6). ●

#### 4. Дифференцирование преобразования Фурье.

Теорема 3. Если функция  $f(x)$  непрерывна на  $R$ , а функции  $f(x)$  и  $xf(x)$  абсолютно интегрируемы на  $R$ , то функция  $\hat{f}(y) = F[f]$  имеет на  $R$  непрерывную производную, причем

$$\hat{f}'(y) = \frac{d}{dy} (F[f]) = F[(-ix)f(x)]. \quad (8)$$

○ Дифференцируя интеграл (3) по параметру  $y$ , получаем равенство

$$\frac{d}{dy} (F[f]) = \frac{d}{dy} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix)f(x) e^{-ixy} dx. \quad (9)$$

Обоснование законности дифференцирования под знаком интеграла сводится к проверке условий теоремы 6, § 72. Интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} (-ix)f(x) e^{-ixy} dx$  сходится равномерно по параметру  $y$  на  $R$  по признаку Вейерштрасса, так как  $|(-ix)f(x) e^{-ixy}| = |xf(x)|$ , а интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)| dx$  сходится. ●

Следствие. Если  $f(x)$  есть непрерывная на  $R$  функция, а функции  $f(x), xf(x), \dots, x^n f(x)$  абсолютно интегрируемы на  $R$ , то

$$\frac{d^k}{dy^k} (F[f]) = F[(-ix)^k f(x)], \quad k = \overline{1, n}.$$

Иногда функцию  $f(x)$  называют оригиналом, а функцию  $\widehat{f}(y) = F[f]$  ее изображением по Фурье. Из теорем 2 и 3 следует, что операции дифференцирования оригинала соответствует операция умножения изображения на независимую переменную  $iy$ , а операции умножения оригинала на независимую переменную  $-ix$  соответствует операция дифференцирования изображения. Эти свойства преобразования Фурье являются основой операционных методов решения дифференциальных уравнений.

Упражнение 2. Пусть  $S$  есть класс бесконечно дифференцируемых функций таких, что любая производная  $f^{(k)}(x)$  убывает на бесконечности быстрее любой отрицательной степени  $x^{-m}$ .

Показать, что:

- 1) класс  $S$  непуст;
- 2)  $S$  есть линейное пространство;
- 3) оператор Фурье  $F$  отображает  $S$  в  $S$  линейно и взаимно однозначно.

Указание. Воспользоваться следствиями из теорем 2 и 3 и результатом упр. 1.

Пример 1. Найти изображение по Фурье функции  $e^{-x^2/2}$ .

△ Пусть

$$I(y) = F[e^{-x^2/2}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2/2)-ixy} dx. \quad (10)$$

Дифференцируя интеграл (10) по параметру  $y$ , получаем

$$\begin{aligned} I'(y) &= -i \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-(x^2/2)-ixy} dx = i \int_{-\infty}^{+\infty} (-iy - x + iy) e^{-(x^2/2)-ixy} dx = \\ &= i \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{d}{dx} e^{-(x^2/2)-ixy} \right) dx - y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2/2)-ixy} dx = \\ &= i e^{-(x^2/2)-ixy} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - y I(y) = -y I(y), \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{I'(y)}{I(y)} = -y, \quad \frac{d}{dy} (\ln I(y)) = -y, \quad \ln I(y) = -\frac{y^2}{2} + \ln c, \quad I(y) = c e^{-y^2/2},$$

$$c = I(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2\sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt =$$

$$= 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{2\pi}, \quad I(y) = \sqrt{2\pi} e^{-y^2/2}.$$

Здесь было использовано выражение для интеграла Эйлера–Пуассона  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$  (см. пример 9, § 72).

Таким образом,

$$F[e^{-x^2/2}] = \sqrt{2\pi} e^{-y^2/2}. \quad \blacktriangle \quad (11)$$

Пример 2. Доказать, что для любого  $t > 0$  справедлива формула

$$F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4t)}\right] = e^{-y^2 t}.$$

△ Используя результат примера 1, получаем

$$\begin{aligned} F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4t)}\right] &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2/(4t)) - ixy} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\xi^2/2) - i\xi(\sqrt{2t}y)} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} I(y\sqrt{2t}) = e^{-y^2 t}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

## § 76. Элементы теории обобщенных функций

**1. Введение.** В физике постоянно пользуются такими идеализированными понятиями, как материальные точки, точечные заряды, магнитные диполи и т. д. На самом деле сосредоточенных в точке масс или зарядов не существует. Когда говорят о материальной точке массы 1, то это идеализированная модель шара достаточно малого радиуса  $\varepsilon$  и массы 1. Если в пространстве нет других масс, то плотность материи в пространстве будет распределена по следующему закону:

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon^3/3}, & |x| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon, \end{cases} \quad (1)$$

где  $x \in R^3$ . Заметим, что

$$\int_{R^3} \delta_\varepsilon(x) dx = 1. \quad (2)$$

Если устремить  $\varepsilon$  к  $+0$ , то из (1) получим, что предельная плотность  $\delta(x)$  имеет вид

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Зная плотность (3), нельзя по ней восстановить массу при помощи интегрирования, так как функция (3) не интегрируема ни по Риману, ни в несобственном смысле.



Чтобы обойти это затруднение, рассмотрим вместо поточечного предела функций  $\delta_\varepsilon(x)$  при  $\varepsilon \rightarrow +0$  так называемый “слабый предел”.

Будем  $\delta_\varepsilon(x)$  рассматривать как линейный функционал над линейным пространством непрерывных в  $R^3$  функций, ставящий в соответствие каждой непрерывной в  $R^3$  функции  $\varphi(x)$  число

$$(\delta_\varepsilon, \varphi) = \int_{R^3} \delta_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \int_{|x| \leq \varepsilon} \frac{\varphi(x) dx}{4\pi\varepsilon^3/3}.$$

Применяя теорему о среднем, получаем, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\delta_\varepsilon, \varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varphi(\tilde{x}_\varepsilon) = \varphi(0) = (\delta, \varphi), \quad (4)$$

где  $\delta$  есть линейный функционал, ставящий в соответствие непрерывной функции число  $\varphi(0)$ .

Если для любой непрерывной функции выполнено равенство (4), то говорят, что линейный функционал  $\delta$  есть слабый предел линейных функционалов  $\delta_\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow +0$ .

При таком подходе по плотности легко восстановить массу точки. Она равна

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{R^3} \delta_\varepsilon(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\delta_\varepsilon, 1) = (\delta, 1) = 1.$$

Функционал (4) называют  $\delta$ -*функцией* Дирака.

Перейдем теперь к более строгому и систематическому изложению так называемых распределений или обобщенных функций.

**2. Пространство  $\mathscr{D}$  основных функций.** Пространство непрерывных функций слишком широко для того, чтобы, используя его, можно было построить содержательную теорию обобщенных функций. Удобно рассматривать некоторые специальные подпространства. Для простоты ограничимся функциями одной переменной.

Будем рассматривать комплекснозначные функции, определенные на  $R$ . *Носителем функции*  $\varphi(x)$  назовем замыкание множества тех  $x$ , где  $\varphi(x) \neq 0$ . Если носитель функции есть ограниченное множество, то функция  $\varphi(x)$  называется *финитной* (она обращается в нуль вне некоторого отрезка). Пусть  $\mathscr{D}$  есть множество финитных и бесконечно дифференцируемых на  $R$  функций. Очевидно, что  $\mathscr{D}$  есть линейное пространство. Введем в этом пространстве *сходимость*.

Будем говорить, что последовательность функций  $\{\varphi_n(x)\}$ , где  $\varphi_n \in \mathscr{D}$  при любом  $n \in N$ , сходится к функции  $\varphi(x) \in \mathscr{D}$ , и писать

$$\varphi_n(x) \xrightarrow{\mathscr{D}} \varphi(x) \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

если выполнены следующие условия:

- 1) носители всех  $\varphi_n(x)$  лежат на некотором отрезке  $[a, b]$ ;
- 2) при любом  $k \in N$  последовательность  $\varphi_n^{(k)}(x)$  равномерно на  $R$  сходится к  $\varphi^{(k)}(x)$ .

Будем линейное пространство  $\mathscr{D}$  с введенной выше сходимостью называть *пространством основных функций*.

Упражнение 1. Показать, что функция

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} e^{-a^2/(a^2-x^2)}, & |x| < a, \\ 0, & |x| \geq a, \end{cases} \quad (5)$$

при любом  $a \in \mathcal{R}$  принадлежит пространству  $\mathcal{D}$ . Нарисовать график этой функции.

**3. Пространство  $\mathcal{D}$  обобщенных функций.** Пусть каждой функции  $\varphi \in \mathcal{D}$  поставлено в соответствие комплексное число  $(f, \varphi)$ , причем для любых двух комплексных чисел  $\alpha, \beta$  и любых двух функций  $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$  выполнено равенство

$$(f, \alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha(f, \varphi) + \beta(f, \psi).$$

Тогда говорят, что на  $\mathcal{D}$  определен *линейный функционал*  $f$ . Функционал  $f$  называется *непрерывным*, если из  $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$  при  $n \rightarrow \infty$  следует, что  $(f, \varphi_n) \rightarrow (f, \varphi)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Множество всех линейных непрерывных функционалов будем обозначать через  $\mathcal{D}'$ . Множество  $\mathcal{D}'$  будет линейным пространством, если естественным образом определить операцию сложения непрерывных линейных функционалов и операцию умножения непрерывных линейных функционалов на комплексные числа. Если  $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$ ,  $f_1, f_2 \in \mathcal{D}'$ , то по определению  $\alpha f_1 + \beta f_2$  есть непрерывный линейный функционал, действующий на основные функции  $\varphi \in \mathcal{D}$  по следующему правилу:

$$(\alpha f_1 + \beta f_2, \varphi) = \alpha(f_1, \varphi) + \beta(f_2, \varphi). \quad (6)$$

Нетрудно показать, что определение корректно, т. е. что функционал  $\alpha f_1 + \beta f_2$ , определяемый равенством (6), действительно линеен и непрерывен.

В  $\mathcal{D}'$  выделяют класс регулярных функционалов. Если функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема на любом конечном отрезке (локально интегрируема), то она порождает функционал

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx. \quad (7)$$

**Лемма 1.** *Формула (7) определяет линейный и непрерывный функционал в  $\mathcal{D}$ , если  $f(x)$  — локально интегрируемая функция.*

○ Для любой функции  $\varphi \in \mathcal{D}$  несобственный интеграл (7) сходится. Действительно, пусть носитель финитной функции  $\varphi$  расположен на отрезке  $[a, b]$  и пусть функция  $\varphi(x)$ , будучи непрерывной на  $[a, b]$ , ограничена по модулю на  $[a, b]$  числом  $M$ . Интеграл (7) сходится, так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) \varphi(x)| dx \leq \int_a^b |f(x)| |\varphi(x)| dx \leq M \int_a^b |f(x)| dx,$$

а функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема на любом конечном отрезке  $[a, b]$ .

Линейность функционала, определенного равенством (7), следует из линейности интеграла относительно функции  $\varphi$ .

Докажем непрерывность функционала (7). Пусть  $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ . Тогда носители всех  $\varphi_n$  лежат на некотором отрезке  $[a, b]$  и  $\sup_{x \in \mathcal{R}} |\varphi_n - \varphi| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Поэтому  $\varphi = 0$  при  $x \notin [a, b]$  и

$$\begin{aligned} |(f, \varphi_n) - (f, \varphi)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\varphi_n(x) - \varphi(x)) dx \right| \leq \\ &\leq \sup_{a \leq x \leq b} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \int_a^b |f(x)| dx \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Таким образом,  $(f, \varphi_n) \rightarrow (f, \varphi)$  при  $n \rightarrow \infty$ , т. е. функционал (7) непрерывен. ●

Линейные непрерывные функционалы, не являющиеся регуляльными, будем называть *сингулярными*.

Например,  $\delta$ -функция, определяемая как функционал, действующий на функции  $\varphi \in \mathcal{D}$  по правилу

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \quad (8)$$

будет сингулярным функционалом пространства  $\mathcal{D}$ .

○ Линейность и непрерывность функционала (8) очевидны. Докажем его сингулярность. Пусть существует такая локально интегрируемая функция, что

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx \quad \text{для любой } \varphi \in \mathcal{D}. \quad (9)$$

В частности, равенство (9) должно быть выполнено для функции  $\tilde{\varphi}(x)$ , определенной равенством (5), при любом  $a > 0$ . Поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \tilde{\varphi}(x) dx = \tilde{\varphi}(0) = e^{-1}. \quad (10)$$

С другой стороны, пользуясь локальной интегрируемостью функции  $f(x)$ , подберем такое  $a$ , что

$$\int_{-a}^a |f(x)| dx < 1. \quad (11)$$

Воспользовавшись тем, что  $\tilde{\varphi}(x) \leq \tilde{\varphi}(0)$ , получаем

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \tilde{\varphi}(x) dx \right| = \left| \int_{-a}^a f(x) \tilde{\varphi}(x) dx \right| \leq \tilde{\varphi}(0) \int_{-a}^a |f(x)| dx < e^{-1}, \quad (12)$$

что противоречит равенству (10). Противоречие доказывает, что  $\delta$ -функция есть сингулярный линейный и непрерывный на  $\mathcal{D}$  функционал. ●

Пространство  $\mathcal{D}'$  называют *пространством обобщенных функций*, а элементы этого пространства — *обобщенными функциями*.

**4. Сходимость в пространстве  $\mathcal{D}'$ .** Будем говорить, что последовательность  $\{f_n\}$ , где  $f_n \in \mathcal{D}'$ , сходится в  $\mathcal{D}'$  к элементу  $f \in \mathcal{D}'$ , и писать  $f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} f$ , если для любой функции  $\varphi \in \mathcal{D}$  выполнено равенство

$$(f_n, \varphi) \rightarrow (f, \varphi) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Такую сходимость функционалов называют *слабой сходимостью*.

Вместо последовательности функционалов  $f_n \in \mathcal{D}'$  иногда рассматривают семейство функционалов  $\{f_\varepsilon\}$ , зависящих от параметра  $\varepsilon$ . В этом случае запись

$$f_\varepsilon \xrightarrow{\mathcal{D}'} f \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0$$

означает, что  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (f_\varepsilon, \varphi) = (f, \varphi)$  для любой функции  $\varphi \in \mathcal{D}$ . В частности, запись

$$f_\varepsilon \rightarrow \delta \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0$$

означает, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (f_\varepsilon, \varphi) = (\delta, \varphi) = \varphi(0) \quad \text{для любой } \varphi \in \mathcal{D}. \quad (13)$$

**Пример 1.** Доказать, что

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta(x) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0.$$

△ Очевидно, что функции  $f_\varepsilon(x)$  локально интегрируемы и поэтому порождают регулярные функционалы в  $\mathcal{D}'$ . Возьмем любую функцию  $\varphi \in \mathcal{D}$ . Пусть ее носитель лежит на отрезке  $[-A, A]$ . Тогда

$$\begin{aligned} (f_\varepsilon, \varphi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \int_{-A}^A f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} [\varphi(x) - \varphi(0) + \varphi(0)] dx. \end{aligned} \quad (14)$$

Так как функция  $\varphi(x)$  дифференцируема на  $R$  и финитна, то, применяя формулу конечных приращений Лагранжа, получаем неравенство

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| = |x\varphi'(\xi)| \leq |x| \max_{x \in [-A, A]} |\varphi'(x)| = c_0|x|. \quad (15)$$

Справедливы следующие утверждения:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} dx = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{A}{\varepsilon} \rightarrow 1 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \varepsilon \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2 + \varepsilon^2} dx \right| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{c_0 \varepsilon |x|}{x^2 + \varepsilon^2} dx = \\ &= \frac{c_0 \varepsilon}{\pi} \ln \frac{A^2 + \varepsilon^2}{\varepsilon^2} \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0. \end{aligned} \quad (17)$$

Из (14)–(17) следует, что для любой функции  $\varphi \in \mathcal{D}$  выполнено равенство (13), т. е.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (f_\varepsilon, \varphi) = \varphi(0) = (\delta, \varphi).$$

Согласно определению это означает, что  $f_\varepsilon \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta$ .  $\blacktriangle$

Упражнение 2. Показать, что

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-x^2/\varepsilon} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta(x) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0.$$

**5. Умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую функцию.** Введем операцию умножения обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую функцию  $\psi(x)$ . По определению, если  $f \in \mathcal{D}'$ , а  $\psi(x)$  есть бесконечно дифференцируемая функция, то  $\psi f$  — такая обобщенная функция, которая действует на произвольную функцию  $\varphi \in \mathcal{D}$  по следующему правилу:

$$(\psi f, \varphi) = (f, \psi \varphi). \quad (18)$$

Определение корректно, поскольку  $\psi \varphi \in \mathcal{D}$ .

По определению обобщенная функция  $f$  равна нулю на интервале  $(a, b)$ , если для любой функции  $\varphi \in \mathcal{D}$ , носитель которой лежит в  $(a, b)$ , выполнено равенство  $(f, \varphi) = 0$ . Так,  $\delta$ -функция равна нулю на любом интервале  $(a, b)$ , не содержащем точку  $x = 0$ . Две обобщенные функции  $f_1$  и  $f_2$  называются *равными на интервале  $(a, b)$* , если  $f_1 - f_2 = 0$  на  $(a, b)$ . В частности,  $f_1$  и  $f_2$  равны на  $R$ , если их значения совпадают на любой основной функции  $\varphi \in \mathcal{D}$ .

Пример 2. Показать, что  $x\delta = 0$ .

$\Delta$  Пользуясь равенством (18), получаем

$$(x\delta, \varphi) = (\delta, x\varphi) = (x\varphi)_{x=0} = 0 = (0, \varphi).$$

Так как на всех основных функциях значения функционалов  $x\delta$  и 0 совпадают, то эти обобщенные функции равны.  $\blacktriangle$

**6. Производная обобщенной функции.** Пусть  $f(x)$  — непрерывно дифференцируемая на  $R$  функция; тогда функция  $f'(x)$  порождает регулярный функционал

$$(f', \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Интегрируя по частям, получаем, пользуясь тем, что  $\varphi = 0$  вне некоторого отрезка  $[-A, A]$ , следующее равенство:

$$\begin{aligned} (f', \varphi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \varphi(x) dx = \\ &= f(x) \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi'(x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi'(x) dx. \end{aligned}$$

Итак, в рассматриваемом случае

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi'), \quad \varphi \in \mathcal{D}. \quad (19)$$

Равенство (19) лежит в основе определения производной обобщенной функции.

*Производной обобщенной функции*  $f \in \mathcal{D}'$  называется линейный и непрерывный функционал  $f' \in \mathcal{D}'$ , действующий на основные функции  $\varphi \in \mathcal{D}$  по правилу, выражающемуся формулой (19).

Проверим, что  $f'$  есть действительно линейный и непрерывный функционал.

○ Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  — произвольные комплексные числа, а  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — произвольные функции из пространства  $\mathcal{D}$ . Тогда, пользуясь определением производной обобщенной функции и линейностью функционала  $f$ , получаем равенство

$$\begin{aligned} (f', \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) &= -(f, \alpha\varphi_1' + \beta\varphi_2') = -\alpha(f, \varphi_1') - \beta(f, \varphi_2') = \\ &= \alpha(f', \varphi_1) + \beta(f', \varphi_2), \end{aligned}$$

из которого следует линейность функционала  $f'$ .

Докажем, что  $f'$  — непрерывный функционал. Пусть  $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ . Нужно показать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f', \varphi_n) = (f', \varphi)$ . Пользуясь формулой (19) и непрерывностью функционала  $f$ , получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f', \varphi_n) = - \lim_{n \rightarrow \infty} (f, \varphi_n') = -(f, \varphi') = (f', \varphi),$$

так как из  $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$  следует, что и  $\varphi_n' \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi'$ .

Итак,  $f'$  есть линейный и непрерывный функционал, т. е.  $f' \in \mathcal{D}'$ . ●

Производные высших порядков определяются для обобщенных функций по индукции:

$$f^{(k)} = (f^{(k-1)})', \quad k = 2, 3, \dots$$

Легко проверить, что для любой функции  $\varphi \in \mathcal{D}$  выполнено равенство

$$(f^{(k)}, \varphi) = (-1)^k (f, \varphi^{(k)}).$$

Таким образом, обобщенные функции имеют производные всех порядков.

**Пример 3.** Найти производную функции Хевисайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$\Delta$  Функция Хевисайда локально интегрируема и поэтому порождает обобщенную функцию, действующую на основные функции по правилу

$$(\theta, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x) \varphi(x) dx = \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx.$$

Докажем, что  $\theta' = \delta$ . Для любой функции  $\varphi \in \mathcal{D}$  имеем равенство

$$(\theta', \varphi) = -(\theta, \varphi') = - \int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi).$$

Следовательно,  $\theta' = \delta$ .  $\blacktriangle$

**Пример 4.** Пусть  $\psi(x)$  — бесконечно дифференцируемая функция, а  $f$  — обобщенная функция. Доказать формулу

$$(\psi f)' = \psi' f + \psi f'. \quad (20)$$

$\Delta$  Воспользовавшись определением обобщенной функции  $\psi f$  и определением производной обобщенной функции, получаем, что для любой функции  $\varphi \in \mathcal{D}$  справедливо равенство

$$\begin{aligned} ((\psi f)', \varphi) &= -(\psi f, \varphi') = -(f, \psi \varphi') = -(f, (\psi \varphi)' - \psi' \varphi) = \\ &= -(f, (\psi \varphi)') + (f, \psi' \varphi) = (f', \psi \varphi) + (\psi' f, \varphi) = \\ &= (\psi f', \varphi) + (\psi' f, \varphi) = (\psi f' + \psi' f, \varphi), \end{aligned}$$

из которого следует формула (20).  $\blacktriangle$

**Упражнение 3.** Найти производные следующих обобщенных функций: а)  $\text{sign } x$ ; б)  $|x|$ ; в)  $e^x \text{sign } x$ .

**Указание.** Воспользоваться равенствами

$$\text{sign } x = 2\theta(x) - 1, \quad |x| = x \text{sign } x$$

и формулой (20).

**Упражнение 4.** Показать, что  $x\delta' = -\delta$ .

**7. Операция сдвига аргумента для обобщенных функций.**

Пусть  $f(x)$  есть локально интегрируемая на  $R$  функция. Для нее определена операция *сдвига аргумента*  $T_h$ , а именно  $T_h f(x) = f(x - h)$ . Если  $\varphi \in \mathcal{D}$ , то

$$(T_h f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - h) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x + h) dx = (f, T_{-h} \varphi). \quad (21)$$

Хотя значение обобщенной функции в точке не определено, но для нее можно формально ввести операцию сдвига аргумента по аналогии с формулой (21):

$$(T_h f, \varphi) = (f, T_{-h} \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}. \quad (22)$$

Упражнение 5. Показать, что при любом  $h \in R$  формула (22) определяет  $T_h f$  как линейный и непрерывный функционал в пространстве  $\mathcal{D}$ , т. е.  $T_h f \in \mathcal{D}'$ .

Если  $\delta(x)$  есть  $\delta$ -функция, то  $T_h \delta$  обычно обозначают через  $\delta(x - h)$ . Тогда для любой функции  $\varphi \in \mathcal{D}$

$$(\delta(x - h), \varphi(x)) = (\delta(x), \varphi(x + h)) = \varphi(h).$$

Упражнение 6. Пусть функция  $f(x)$  имеет в  $R$  конечное число точек разрыва первого рода  $x_1, \dots, x_N$ , на каждом из интервалов  $(-\infty, x_1)$ ,  $(x_i, x_{i+1})$ ,  $i = \overline{1, N-1}$ ,  $(x_N, +\infty)$  функция  $f(x)$  имеет непрерывную производную, а функции  $f(x)$  и  $f'(x)$  являются локально интегрируемыми. Тогда  $f(x)$  и  $f'(x)$  порождают регулярные функционалы  $f$  и  $\chi$ . Показать, что для производной  $f'$  в смысле обобщенных функций справедлива формула

$$f' = \chi + \sum_{i=1}^N (f(x_i + 0) - f(x_i - 0)) \delta(x - x_i).$$

**§ 77. Асимптотические оценки интегралов**

**1. Интегралы Лапласа.** Это интегралы вида

$$\int_a^b f(x) e^{-\lambda S(x)} dx. \quad (1)$$

Будет изучено поведение интегралов при  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

**Теорема 1.** Пусть  $f(x)$  и  $S(x)$  — дважды непрерывно дифференцируемые функции на конечном отрезке  $[a, b]$ , и пусть на отрезке  $[a, b]$  функция  $S(x)$  имеет единственный минимум в точке  $x_0 \in (a, b)$ , причем  $S''(x_0) > 0$ ,  $S'(x) > 0$  при  $x < x_0$  и  $S'(x) < 0$  при  $x > x_0$ , а  $f(x_0) \neq 0$ .



Тогда при  $\lambda \rightarrow +\infty$  справедлива асимптотическая формула

$$\int_a^b f(x) e^{-\lambda S(x)} dx \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}} f(x_0) e^{-\lambda S(x_0)}. \quad (2)$$

○ Разобьем доказательство на ряд пунктов.

1. Покажем, что при  $a > 0$

$$\int_0^a e^{-\lambda x^2} dx \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty. \quad (3)$$

Действительно, делая в интеграле (3) замену переменной  $x\sqrt{\lambda} = t$  и используя интеграл вероятностей  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , получаем, что

$$\begin{aligned} \int_0^a e^{-\lambda x^2} dx &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{a\sqrt{\lambda}} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left[ \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt - \int_{a\sqrt{\lambda}}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

2. Пусть функция  $f(x)$  непрерывно дифференцируема на конечном отрезке  $[0, a]$  и  $f(0) \neq 0$ . Тогда при  $\lambda \rightarrow +\infty$  имеем

$$\int_0^a f(x) e^{-\lambda x^2} dx \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} f(0). \quad (4)$$

Применяя теорему о среднем Лагранжа, имеем

$$|f(x) - f(0)| = |xf'(\theta x)| \leq Cx, \quad \text{где } C = \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|, \quad 0 < \theta < 1.$$

Поэтому, используя (3), получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_0^a f(x) e^{-\lambda x^2} dx - f(0) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \right| &\leq \left| \int_0^a (f(x) - f(0)) e^{-\lambda x^2} dx \right| + \\ &+ o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \leq C \int_0^a x e^{-\lambda x^2} dx + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right). \end{aligned}$$

3. Переходим к доказательству теоремы. Без ограничения общности можем считать, что  $x_0 = 0$ . Пусть сначала  $S(0) = 0$ .

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^b f(x) e^{-\lambda S(x)} dx \quad (5)$$

и сделаем замену переменной  $y = \sqrt{S(x)}$ . В силу монотонности функции  $y$  обратная функция  $x = \varphi(y)$  при  $x \in [0, b]$  существует,  $\varphi(0) = 0$  и

$$\varphi'(0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\varphi(y)}{y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{S(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\frac{S(x)}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{S''(0)}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{S''(0)}}. \quad (6)$$

Применяя формулу (4) и используя равенство (6), получаем

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\varphi(b)} f(\varphi(y)) \varphi'(y) e^{-\lambda y^2} dy \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} f(0) \varphi'(0) = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} f(0) \sqrt{\frac{2}{S''(0)}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda S''(0)}} f(0). \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогично получаем, что

$$\int_a^0 f(x) e^{-\lambda S(x)} dx \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda S''(0)}} f(0) \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty. \quad (8)$$

Если  $S(x_0) \neq 0$ , то представляем интеграл (5) в виде

$$\int_a^b f(x) e^{-\lambda S(x)} dx = e^{-\lambda S(x_0)} \int_a^b f(x) e^{-\lambda(S(x)-S(x_0))} dx.$$

Разбивая отрезок интегрирования  $[a, b]$  на отрезки  $[a, 0]$  и  $[0, b]$  и применяя к каждому из полученных отрезков формулы (7) и (8), получаем (2). ●

**Пример 1.** Докажем формулу Стирлинга

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt \sim x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x} \quad \text{при } x \rightarrow +\infty. \quad (9)$$

△ Делаем в формуле (9) замену переменной  $t = xu$ :

$$\Gamma(x+1) = x^{x+1} \int_0^{+\infty} u^x e^{-ux} du = x^{x+1} \int_0^{+\infty} e^{-xS(u)} du, \quad (10)$$

$$S(u) = u - \ln u, \quad S'(u) = \frac{u-1}{u}, \quad S''(u) = \frac{1}{u^2}.$$

Функция  $S(u)$  имеет единственный минимум в точке  $u = 1$ . Кроме того,  $S''(1) = 1$ ;  $|S'(u)| \geq \frac{1}{2}$  при  $u \notin \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ . Применяя формулу (2),

получаем

$$\int_{1/2}^2 e^{-xS(u)} du \sim \sqrt{\frac{2\pi}{x}} e^{-x} \quad \text{при } x \rightarrow +\infty,$$

$$\int_2^{+\infty} e^{-xS(u)} du < 2 \int_2^{+\infty} S'(u) e^{-xS(u)} du = \frac{2}{x} e^{-xS(2)} < \frac{2}{x} e^{-xS(1)} = \frac{2}{x} e^{-x}.$$
(11)

Аналогично  $\int_0^{1/2} e^{-xS(u)} du < \frac{2}{x} e^{-x}$ .

Подставляя выражения (11) в формулу (10), получаем формулу Стирлинга (9).

Так как  $\Gamma(n+1) = n!$ , то из (9) имеем

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad \blacktriangle$$
(12)

**2. Метод стационарной фазы.** Для вычисления интегралов

$$\int_a^b f(x) e^{i\lambda S(x)} dx$$

при больших значениях параметра  $\lambda$  Стоксом был предложен метод стационарной фазы.

**Теорема 2.** Пусть функции  $f(x)$  и  $S(x)$  дважды непрерывно дифференцируемы на конечном отрезке  $[a, b]$ , и пусть на  $(a, b)$  функция  $S(x)$  имеет единственный экстремум в точке  $x_0 \in (a, b)$ , причем  $S''(x_0) \neq 0$ ,  $f(x_0) \neq 0$ .

Тогда при  $\lambda \rightarrow \infty$  справедлива асимптотическая формула

$$\int_a^b f(x) e^{i\lambda S(x)} dx \sim f(x_0) \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(x_0)|}} e^{i\left(\lambda S(x_0) + \frac{\pi}{4} \text{sign } S''(x_0)\right)}.$$
(13)

О Техника доказательства теоремы 2 во многом повторяет технику доказательства теоремы 1. Опять разобьем доказательство на пункты.

1. Если  $\lambda \rightarrow \infty$ , то (см. § 72, пример 10)

$$\begin{aligned} \int_0^a e^{i\lambda x^2} dx &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{a\sqrt{\lambda}} e^{it^2} dt \sim \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{+\infty} e^{it^2} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left( \int_0^{+\infty} \cos t^2 dt + i \int_0^{+\infty} \sin t^2 dt \right) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} + i \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{i\pi/4}. \end{aligned}$$

2. Пусть функция  $f(x)$  непрерывно дифференцируема на конечном отрезке  $[0, a]$  и  $f(0) \neq 0$ ; тогда при  $\lambda \rightarrow \infty$  имеем

$$\int_0^a f(x) e^{i\lambda x^2} dx \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{i\pi/4} f(0).$$

Действительно,  $f(x) - f(0) = x\varphi(x)$ , где  $\varphi(x)$  — непрерывная функция. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^a (f(x) - f(0)) e^{i\lambda x^2} dx &= \int_0^a x \varphi(x) e^{i\lambda x^2} dx = \frac{1}{2i\lambda} \int_0^a \varphi(x) d(e^{i\lambda x^2}) = \\ &= \frac{1}{2i\lambda} \varphi(x) e^{i\lambda x^2} \Big|_0^a - \frac{1}{2i\lambda} \int_0^a \varphi'(x) e^{i\lambda x^2} dx = o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Дальнейшее доказательство теоремы 2 в точности повторяет соответствующее доказательство теоремы 1, и мы его опускаем. ●

**Пример 2.** Найдем асимптотику функции Бесселя

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \sin u} du.$$

△ Пусть  $S(u) = \sin u$ . Тогда  $S'(u) = \cos u$ ,  $S''(u) = -\sin u$ ,

$$S'\left(\frac{\pi}{2}\right) = S'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0, \quad S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad S\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1,$$

$$S''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1, \quad S''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1.$$

Разбивая интервал интегрирования на  $[0, \pi]$  и  $[\pi, 2\pi]$  и используя на каждом из интервалов формулу (13), получаем при  $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} J_0(x) &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \left( e^{i(x-\pi/4)} + e^{i(-x+\pi/4)} \right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right). \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

### УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ XV

1. Выразить интеграл

$$\int_{-1}^1 \frac{\cos xt}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

через функцию Бесселя  $J_0(x)$ .

2. Показать, что под знаком интеграла

$$\int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-(x/y)^2} dx$$

нельзя совершить предельный переход при  $y \rightarrow 0$ .

3. Вычислить интеграл

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

4. Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^a}, \quad a > 1.$$

5. Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2} dx$$

для  $y \in [c, d]$  и для  $y \in (-\infty, +\infty)$ .

6. Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int_0^1 x^p \sin \frac{1}{x} dx, \quad p > \varepsilon - 2, \quad \varepsilon > 0.$$

7. Пусть функция  $f(x)$  непрерывна и интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$  сходится. Доказать формулу Фруллани

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

8. Вычислить интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx.$$

9. Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx, \quad a > 0.$$

10. Пусть  $0 < p < 1$ . Используя интеграл Эйлера

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi},$$

вычислить интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} \ln^2 x}{1+x} dx.$$

11. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x, & \text{если } |x| \leq a, \quad a > 0, \\ 0, & \text{если } |x| > a. \end{cases}$$

12. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{при } |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } |x| \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

13. Решить интегральное уравнение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-|x-t|} dt = xe^{-|x|}.$$

14. Показать, что обобщенную функцию  $\frac{1}{x}$  можно определить как функционал, действующий на любую функцию  $\varphi \in \mathcal{D}$  по правилу

$$\left(\frac{1}{x}, \varphi\right) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx,$$

где через *v.p.* обозначен интеграл в смысле главного значения.

15. Пусть  $(y', \varphi) = 0$  для любой функции  $\varphi \in \mathcal{D}$ . Показать, что  $y = \text{const}$ .

Указание. Воспользоваться тем, что функция  $\varphi$  из пространства  $\mathcal{D}$  есть производная некоторой функции  $\psi \in \mathcal{D}$  в том и только том случае, когда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 0.$$

16. Найти при  $x \rightarrow +\infty$  асимптотическую формулу для интеграла

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

17. Пусть функция  $f(x, y)$  непрерывна при  $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq y \leq d$ , а функция  $\varphi(x)$  интегрируема на  $[a, b]$ . Показать, что интеграл

$$\int_a^b \varphi(x) f(x, y) dx$$

непрерывен по параметру  $y$  на отрезке  $[c, d]$  и

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) \varphi(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) \varphi(x) dy.$$

18. Пусть функция  $f(x, y)$  непрерывна и ограничена в прямоугольнике  $a \leq x < b$ ,  $c \leq y \leq d$ , функция  $\varphi(x)$  интегрируема по Риману на любом отрезке  $[a, \xi] \subset [a, b)$ , а несобственный интеграл  $\int_a^b |\varphi(x)| dx$  сходится. Показать, что:

а) интеграл  $\int_a^b f(x, y) \varphi(x) dx$  сходится равномерно по параметру  $y$  на отрезке  $[c, d]$  и непрерывен по параметру на этом отрезке;

б) справедлива формула перестановки порядка интегрирования

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) \varphi(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) \varphi(x) dy.$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. Т. I, II. — М.: Наука, 1983.
2. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. Т. I, II. — М.: Высшая школа, 1981.
3. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I, II, III. — М.: Наука, 1969.
4. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х.* Математический анализ. — М.: Наука, 1979.
5. *Зорич В.А.* Математический анализ. Ч. I, II. — М.: Наука, 1981, 1984.
6. *Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1982.
7. *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Наука, 1980.
8. *Беклемишев Д.В.* Дополнительные главы линейной алгебры. — М.: Наука, 1983.
9. *Грауэрт Г., Либ И., Фишер В.* Дифференциальное и интегральное исчисление — М.: Мир, 1971.
10. *Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И.* Курс математического анализа. — М.: Наука, 1988.
11. *Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чезлов В.И., Шабунин М.И.* Сборник задач по математическому анализу (предел, непрерывность, дифференцируемость). — М.: Наука, 1984.
12. *Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чезлов В.И., Шабунин М.И.* Сборник задач по математическому анализу (интегралы, ряды). — М.: Наука, 1986.
13. *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1985.
14. *Рудин У.* Основы математического анализа. — М.: Мир, 1966.
15. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972.
16. *Треногин В.А.* функциональный анализ. — М.: Наука, 1980.
17. *Ращевский П.К.* Курс дифференциальной геометрии. — М.: ГИТТЛ, 1956.
18. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. — М.: Наука, 1975.
19. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1988.
20. *Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чезлов В.И., Шабунин М.И.* Сборник задач по математическому анализу (функции нескольких переменных). — М.: Наука, 1995.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- А**  
Абеля подстановка 311  
— преобразование 401  
— признак сходимости 402  
— теорема о сходимости степенного ряда 425  
Абсолютно интегрируемая функция 375  
— сходящийся несобственный интеграл 375  
— — ряд 395  
Алгебры основная теорема 297  
Аргумент комплексного числа 289  
Арифметическая прогрессия 35  
Арифметический корень 25  
Арккосинус 100  
Арсинус 99  
Арктангенс 100  
Асимптота 188  
Асимптотические оценки интегралов 657  
— равенства 116
- Б**  
Банахово пространство 605  
Бернулли лемниската 349  
— неравенство 27  
Бесселя неравенство 610  
— функция 618  
Бета-функция 636  
Бином дифференциальный 311  
— Ньютона 30  
Бинормаль 217  
Больцано–Вейерштрасса теорема 56
- В**  
Вейерштрасса признак равномерной сходимости интеграла 620  
— — — — ряда 417  
— теоремы о непрерывных функциях 91  
Вектор-функция 194  
Верхняя грань множества 15  
Вещественное число 9  
Вихрь 540
- Выпуклая функция 185  
Выпуклое множество 231
- Г**  
Гамильтона оператор 254  
Гамма-функция 634  
Гейне–Бореля лемма 230  
— определение предела 75  
Гельдера условие 582  
Геометрическая прогрессия 36  
Гиперболические функции 108  
Главная нормаль 211  
Гладкая кривая 204  
Градиент функции 254  
Граница множества 230  
Граничная точка 230  
График функции 63  
Грина формула 501
- Д**  
Д'Аламбера признак сходимости ряда 392  
Дарбу сумма 320  
Декартов лист 505  
Десятичная дробь 8  
Десятичное приближение 10  
Дивергенция 539  
Дирака дельта-функция 652  
Дирихле признак 377, 400, 419  
— формула 579  
— ядро 580  
Дифференциал функции 131, 149, 198, 250, 257  
Дифференцирование 125  
Длина кривой 205  
Допустимое преобразование параметра кривой 202, 204  
Дробь рациональная 298  
Дуга кривой 202
- Е**  
Евклидово пространство 225
- Ж**  
Жорданова мера 449



- Замена переменных** 269  
— — в интеграле 470  
**Замкнутая кривая** 203  
**Замкнутое множество** 228  
**Замыкание множества** 228  
**Знак общности** 7  
**Знак равносильности** 7  
— существования 7  
**Знакопередающийся ряд** 399
- Инвариантность вихря** 549  
— дивергенции 545  
— формы первого дифференциала 138, 250  
**Интеграл абсолютно сходящийся** 375  
— двойной 454  
— Дирихле 627  
— кратый 453  
— криволинейный 493, 496  
— Лапласа 628, 657  
— неопределенный 276  
— несобственный 358, 361, 363  
— определенный 318  
— поверхностный 527, 529  
— повторный 460  
— с переменным верхним пределом 334  
— тройной 454  
— условно сходящийся 375  
— Фурье 639  
— Эйлера 632  
**Интегральная сумма** 318  
— теорема о среднем 332  
**Интегральный косинус** 315  
— логарифм 315  
— синус 315  
**Интегрирование иррациональных функций** 308  
— по частям 282, 341, 365  
— подстановкой 281  
— рациональных функций 302  
— тригонометрических функций 312  
**Итегрируемая функция по Риману** 318  
**Интервал сходимости степенного ряда** 430  
**Иррациональное число** 10
- Кантора теорема о вложенных отрезках** 54  
**Кантора теорема о равномерной непрерывности** 240  
**Касательная к графику функции** 124, 127  
— к кривой 203  
— плоскость 252  
**Квадрируемая фигура** 344  
**Клейна бутылка** 518  
**Клетка** 446  
**Клеточная фигура** 343  
**Клеточное множество** 446  
**Компакт** 229  
**Комплекснозначные функции** 293  
**Комплексные числа** 285  
**Композиция функций** 62  
**Контур** 203  
**Координаты криволинейные** 484  
— полярные 382, 475  
— сферические 482  
— цилиндрические 481  
**Корень многочлена** 295  
**Коши–Адамара формула** 428  
— критерий 58, 85, 373, 386, 412, 623  
— неравенство 223  
— признак сходимости 393  
— теорема о промежуточных значениях 94  
— формула конечных приращений 153  
**Кривая гладкая** 204  
— кусочно гладкая 204  
— ориентированная 493  
— параметризуемая 202  
— плоская 201  
— простая 201  
— спрямляемая 205  
**Кривизна кривой** 211  
**Кривизны радиус** 213  
— центр 215  
**Круг сходимости** 425  
**Кубируемое тело** 349
- Лагранжа множители** 563  
— теорема о среднем 153  
— форма остаточного члена 158, 436, 594  
— формула конечных приращений 153, 251  
**Легандра многочлены** 573  
**Лейбница теорема** 399  
— формула 147

- Логарифм натуральный 108  
Логарифмическая производная 140  
Лопиталя правило 172
- Маклорена** ряд 438  
— формула 162
- Максимум и минимум функции** 67, 150, 557
- Метрика** 222
- Метрическое пространство** 222
- Минковского неравенство** 224
- Мнимая единица** 285
- Мнимая часть комплексная числа** 285
- Множество выпуклое** 231  
— замкнутое 228  
— меры нуль 449  
— несчетное 33  
— открытое 227  
— плотное 606  
— пустое 15  
— связное 231  
— счетное 32
- Модуль числа** 15, 316
- Монотонная последовательность** 50  
— функция 68
- Муавра формула** 291
- Натуральное уравнение кривой** 208
- Непрерывность функции** 86, 237
- Несобственный интеграл** 358, 361, 363  
— — абсолютно сходящийся 375  
— — зависящий от параметра 618  
— — кратный 487, 488  
— — условно сходящийся 375
- Неявная функция** 73, 259
- Нижняя грань** 15
- Норма** 603
- Нормаль к кривой** 210  
— к поверхности 253, 516
- Нормальная плоскость** 209
- Ньютона–Лейбница формула** 336
- Область** 231  
— замкнутая 231  
— объемно односвязная 543  
— односвязная 501  
— определения функции 69
- Область** поверхностно односвязная 550  
— элементарная 462
- Образ множества** 61, 267
- Обратные функции** 70  
— — гиперболические 108  
— — тригонометрические 98
- Объединение множеств** 15
- Объем тела** 350
- Окрестность точки** 39, 228  
— — проколотая 73, 232
- Остаток ряда** 386
- Остаточный член формулы Тейлора** 160, 761
- Остроградского–Гаусса формула** 542  
— метод 308
- Отображение** 61  
— непрерывно дифференцируемое 267  
— непрерывное 267  
— регулярное 267
- Парсеваля равенство** 610
- Пеано форма остаточного члена** 161
- Первая квадратичная форма поверхности** 522
- Первообразная** 275
- Первый дифференциал** 149, 250
- Перегиба точка** 187
- Пересечение множеств** 15
- Периодические десятичные дроби** 8  
— функции 69
- Площадь криволинейного сектора** 348  
— криволинейной трапеции 345  
— поверхности 524  
— — вращения 354
- Поверхность кусочно гладкая** 518  
— неориентируемая 519  
— ориентируемая 519  
— простая 511
- Подпоследовательность** 55
- Поле векторное** 538  
— потенциальное 550  
— соленоидальное 546
- Полнота пространства** 605  
— системы элементов 610
- Пополнение пространства** 608
- Последовательность бесконечно большая** 46

- Последовательность бесконечно  
   малая 45  
   — монотонная 50  
   — ограниченная 40  
   — сходящаяся 36  
   — числовая 35  
 Поток 530  
 Предел бесконечный 46, 79  
   — вектор-функции 194  
   — верхний 55  
   — двойной 232  
   — нижний 55  
   — односторонний 77  
   — по множеству 77, 234  
   — по направлению 234  
   — повторный 235  
   — последовательности 36  
   — слева 77  
   — справа 78  
   — функции 75  
   — частичный 55  
 Предельная точка 77, 228  
 Признак Абеля 379, 402, 420  
   — д'Аламбера 392  
   — Дирихле 377, 400, 419  
 Признак интегральный 388  
   — Коши 393  
   — Лейбница 393  
   — сравнения 390  
 Производная 124  
   — бесконечная 130  
   — вектор-функции 197  
   — левая 129  
   — обобщенной функции 655  
   — обратной функции 135  
   — по направлению 253  
   — правая 129  
   — сложной функции 137  
   — смешанная 255  
   — неявной функции 261  
   — частная 242  
   —  $n$ -го порядка 143  
 Пространство банахово 605  
   — гильбертово 605  
   — евклидово 224  
   — линейное 601  
   — метрическое 222  
   — нормированное 603  
   — полное 605  
   — унитарное 601  
   —  $R^n$  223  
 Раабе признак 394  
 Равномерная непрерывность  
   функции 239  
   — сходимости интеграла 619  
   — — последовательности функ-  
   ции 409  
   — — функционального ряда 414  
 Разбиение множества 446  
 Разложение на элементарные дро-  
   бы 301  
 Римана интеграл 318  
   — лемма 576  
   — сумма 453  
 Ролля теорема 151  
 Ряд абсолютно сходящийся 395  
   — гармонический 387  
   — знакопередающийся 399  
   — Маклорена 438  
   — равномерно сходящийся 414  
   — расходящийся 383  
   — с неотрицательными членами  
   388  
   — степенной 425  
   — сходящийся 383  
   — Тейлора 434  
   — тригонометрический 575  
   — условно сходящийся 403  
   — функциональный 414  
   — Фурье 575  
 Синус гиперболический 108  
 Сопровождающий трехгранник  
   217  
 Степенной ряд 425  
 Стокса теорема 548  
 Сумма вещественных чисел 20  
   — Дарбу 320, 453  
   — ряда 383  
   — частичная 383  
 Сходимость в смысле среднего  
   квадратичного 612, 605  
   — равномерная интеграла 619  
   — — ряда 414  
   — слабая 653  
 Тейлора многочлен 158  
   — ряд 434  
   — формула 161, 158  
 Точка внутренняя множества 227  
   — предельная 228  
   — разрыва функции 88  
   — самопересечения кривой 203  
   — стационарная 179, 558

- Точная верхняя грань 16  
— нижняя грань 16
- Фейера** сумма 590  
— теорема 596
- Ферма** теорема 151
- Френе** трехгранник 217  
— формулы 217
- Френеля** интегралы 633
- Фундаментальная** последовательность 57
- Функциональная** последовательность 408
- Функция** 61  
— абсолютно интегрируемая 375  
— бесконечно большая 79  
— бесконечно малая 83  
— возрастающая 68  
— выпуклая 185  
— гиперболическая 108  
— дифференцируемая 131  
— интегрируемая 318, 454  
— комплекснозначная 293  
— кусочно гладкая 584  
— кусочно непрерывная 589  
— логарифмическая 107  
— нечетная 66  
— неявная 73, 259  
— обобщенная 653  
— обратная 69  
— ограниченная 60
- Функция** периодическая 69  
— показательная 102  
— рациональная 62  
— регулярная 430  
— сложная 62  
— степенная 101  
— строго монотонная 68  
— тригонометрическая 97  
— четная 66  
— элементарная 62
- Фурье** интеграл 639  
— преобразование 645  
— ряд 574
- Цилиндр** 459
- Цилиндрическое** тело 350
- Циркуляция** 549
- Эвольвента** 215
- Эволюта** 215
- Эйлера** интегралы 634  
— подстановки 280, 309  
— формула 290
- Эквивалентные** функции 116
- Экстремум** локальный 150, 557  
— строгий 179, 557  
— условный 562
- Элемент** последовательности 37
- Якобиан** отображения 268

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к третьему изданию . . . . .	3
<b>ГЛАВА I. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА . . . . .</b>	<b>5</b>
§ 1. Рациональные числа. Бесконечные десятичные дроби . . . . .	5
§ 2. Точные грани числовых множеств . . . . .	15
§ 3. Операции над вещественными числами . . . . .	20
<b>ГЛАВА II. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ . . . . .</b>	<b>35</b>
§ 4. Определение предела последовательности. Свойства сходящихся последовательностей . . . . .	35
§ 5. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Арифметические операции над сходящимися последовательностями . . . . .	45
§ 6. Предел монотонной последовательности . . . . .	50
§ 7. Подпоследовательности. Частичные пределы . . . . .	55
§ 8. Критерий Коши сходимости последовательности . . . . .	57
<b>ГЛАВА III. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ . . . . .</b>	<b>61</b>
§ 9. Числовые функции . . . . .	61
§ 10. Предел функции . . . . .	73
§ 11. Непрерывность функции . . . . .	86
§ 12. Непрерывность элементарных функций . . . . .	96
§ 13. Вычисление пределов функций . . . . .	110
<b>ГЛАВА IV. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ . . . . .</b>	<b>123</b>
§ 14. Производная и дифференциал . . . . .	123
§ 15. Правила дифференцирования . . . . .	133
§ 16. Производные и дифференциалы высших порядков . . . . .	143
§ 17. Основные теоремы для дифференцируемых функций . . . . .	150
§ 18. Формула Тейлора . . . . .	158
§ 19. Правило Лопиталя . . . . .	172
§ 20. Исследование функций с помощью производных . . . . .	176
§ 21. Вектор-функции . . . . .	194
§ 22. Кривые . . . . .	200

---

ГЛАВА V. <b>ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ</b> . . . . .	222
§ 23. Пространство $R^n$ . . . . .	222
§ 24. Предел функции многих переменных . . . . .	232
§ 25. Непрерывность функции многих переменных . . . . .	237
§ 26. Дифференцируемость функции многих переменных . . . . .	241
§ 27. Частные производные и дифференциалы высших порядков . . . . .	254
§ 28. Неявные функции . . . . .	259
§ 29. Замена переменных . . . . .	269
ГЛАВА VI. <b>НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ</b> . . . . .	275
§ 30. Определение и свойства неопределенного интеграла. Основные методы интегрирования . . . . .	275
§ 31. Комплексные числа . . . . .	284
§ 32. Разложение рациональной функции на простые дроби . . . . .	295
§ 33. Интегрирование рациональных, иррациональных, тригонометрических и гиперболических функций . . . . .	302
ГЛАВА VII. <b>ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ</b> . . . . .	316
§ 34. Определение и условия существования определенного интеграла . . . . .	316
§ 35. Свойства определенного интеграла . . . . .	326
§ 36. Интеграл с переменным верхним пределом. Вычисление определенных интегралов . . . . .	334
§ 37. Приложения определенного интеграла . . . . .	343
§ 38. Несобственные интегралы . . . . .	358
ГЛАВА VIII. <b>ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ</b> . . . . .	383
§ 39. Определение и свойства сходящихся рядов . . . . .	383
§ 40. Ряды с неотрицательными членами . . . . .	388
§ 41. Абсолютно и условно сходящиеся ряды . . . . .	395
ГЛАВА IX. <b>ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ</b> . . . . .	408
§ 42. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов . . . . .	408
§ 43. Степенные ряды . . . . .	425
§ 44. Ряд Тейлора . . . . .	434
ГЛАВА X. <b>КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ</b> . . . . .	446
§ 45. Мера Жордана в $R^n$ . . . . .	446
§ 46. Определение и свойства кратного интеграла Римана . . . . .	452
§ 47. Сведение кратных интегралов к повторным . . . . .	460
§ 48. Формула замены переменных в кратном интеграле . . . . .	470
§ 49. Несобственные кратные интегралы . . . . .	486

<b>ГЛАВА XI. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ</b> . . . . .	491
§ 50. Криволинейные интегралы . . . . .	491
§ 51. Формула Грина на плоскости . . . . .	500
§ 52. Поверхности . . . . .	510
§ 53. Площадь поверхности . . . . .	522
§ 54. Поверхностные интегралы . . . . .	527
<b>ГЛАВА XII. ТЕОРИЯ ПОЛЯ</b> . . . . .	536
§ 55. Скалярные и векторные поля . . . . .	536
§ 56. Формула Остроградского–Гаусса . . . . .	542
§ 57. Формула Стокса . . . . .	547
<b>ГЛАВА XIII. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ</b> . . . . .	554
§ 58. Формула Тейлора для функций многих переменных . . . . .	554
§ 59. Экстремумы функций многих переменных . . . . .	557
§ 60. Условный экстремум . . . . .	562
<b>ГЛАВА XIV. РЯДЫ ФУРЬЕ</b> . . . . .	572
§ 61. Ортогональные системы функций. Ряды Фурье по ортогональным системам . . . . .	572
§ 62. Лемма Римана . . . . .	576
§ 63. Формула для частных сумм тригонометрического ряда Фурье . . . . .	578
§ 64. Сходимость ряда Фурье в точке . . . . .	581
§ 65. Почленное дифференцирование и интегрирование ряда Фурье . . . . .	589
§ 66. Равномерная сходимость ряда Фурье . . . . .	592
§ 67. Комплекснозначные функции. Ряд Фурье в комплексной форме . . . . .	594
§ 68. Суммирование ряда Фурье методом средних арифметических . . . . .	596
§ 69. Теоремы Вейерштрасса о равномерных приближениях непрерывных функций многочленами . . . . .	598
§ 70. Сходимость ряда Фурье в смысле среднего квадратичного . . . . .	601
<b>ГЛАВА XV. ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА</b> . . . . .	616
§ 71. Собственные интегралы, зависящие от параметра . . . . .	616
§ 72. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость несобственного интеграла по параметру . . . . .	618
§ 73. Эйлеровы интегралы . . . . .	634
§ 74. Интеграл Фурье . . . . .	639
§ 75. Преобразование Фурье . . . . .	645
§ 76. Элементы теории обобщенных функций . . . . .	649
§ 77. Асимптотические оценки интегралов . . . . .	657
Список литературы . . . . .	664
Предметный указатель . . . . .	665