Числовые ряды

Знакоположительные

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \forall a_n \geq 0$$

Знакопеременные

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n - \sum_{n=0}^{\infty} v_n, \forall u_n \geq 0, \forall v_n \geq 0$$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Необходимый признак сх-ти

Да → Признак ответа не дает

Нет → Ряд расходящийся

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$

Абсолютная сх-ть

Нет → Требуются дополнительные

Да → Ряд из модулей сходится → Знакопеременный ряд сходится абсолютно

Достаточные признаки сходимости

I теорема сравнения	II теорема сравнения	Признак Даламбера	Интегральный признак Коши	Радикальный признак Коши
$u_n \leq v_n$ сх. $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ расх	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = c \neq 0,$ $(\lvert c \rvert < \infty)$ оба ряда ведут себя одинаково	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p$ $p < 1$ – сх-ся $p > 1$ – расх-ся $p = 1$ – ответа нет	Интеграл $\int_k^{\infty} a_n dn,\ n \in R$ и ряд $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ – ведут себя одинаково	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p$ $p < 1$ – сх-ся $p > 1$ – расх-ся $p = 1$ – ответа нет

Знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n, \forall a_n \geq 0$$

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
2. $a_{n+1} < a_n$ (признак Лейбница)

Да → Сходится условно

Нет → $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ → Ряд расходится

Нет → $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ → Требуются дополнительные исследования

Эталонные ряды

1. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ – *геом. прогрессия* $|q| < 1$ – сх; $|q| \geq 1$ – расх
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ – *обобщ. гарм. ряд* $p > 1$ – сх; $p \leq 1$ – расх

Эталонный интеграл

$$\int_k^{\infty} \frac{dn}{n \cdot \ln^{\alpha} n} = \begin{cases} \ln\ln n \Big|_k^{\infty}, \alpha = 1, \\ \dfrac{\ln^{1-\alpha} n}{1-\alpha} \Big|_k^{\infty}, \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$\alpha > 1$ – сх

$\alpha \leq 1$ – расх

Функциональные ряды
ТВТ©ТПУВМ05

$$\sum_n u_n(z)$$

В каждой точке $z \in D$
$$\exists S(z) = \lim_{n\to\infty} S_n(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_n u_n(z), \qquad |S(z)| < \infty \ \ \forall z \in D$$

да → Ряд $\sum_n u_n(z)$ сходится в D

нет → Ряд $\sum_n u_n(z)$ расходится в D

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| < 1, \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(z)|} < 1$$ и другие признаки сходимости числовых рядов

На границе D соответствующий числовой ряд исследуется отдельно

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| > 1, \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(z)|} > 1$$ и другие признаки сходимости числовых рядов

Ряды степеней $(z - z_0)$
$$\sum c_n (z - z_0)^n$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma\subset D}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

$n \geq 0$
Ряд Тейлора

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Сходится внутри круга $|z-z_0| < R$ абсолютно и равномерно по т.Абеля
$R = |z_1 - z_0|$, z_1 – ближайшая к z_0 изолированная особая точка

n-целое
$n = 0, \pm1, \pm2, ..$

Ряд Лорана

$n = 0,1,2,\ldots$ – правильная часть

Сходится внутри кольца $r < |z-z_0| < R$

$n < 0$ – главная часть

Сходится вне круга $r < |z-z_0|$

$$x \in [0, \ell]$$

Нечетное продолжение
$$\forall a_n = 0$$
$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{\pi n x}{\ell}dx$$

Четное продолжение
$$\forall b_n = 0$$
$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\cos\frac{\pi n x}{\ell}dx$$

Ряды Фурье
$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{\ell} + b_n \sin\frac{\pi n x}{\ell}$$
$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_a^{a+2\ell} f(x)\cos\frac{\pi n x}{\ell}dx \qquad T = 2\ell$$
$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_a^{a+2\ell} f(x)\sin\frac{\pi n x}{\ell}dx$$

1. *S(x)* –непрерывна в области сходимости *D*
2. Ряд можно почленно дифференцировать любое число раз в *D*
3. Ряд можно почленно интегрировать по любой кривой $L \subset D$ любое число раз.

Условия Дирихле
1. *f(x)*-периодическая, $T=2\ell$;
2. *f(x)*-кусочно-непрерывная на любом конечном $[x_1, x_2]$ и может иметь разрывы только I рода;
3. *f(x)*-кусочно-монотонная

$$S(x) = \begin{cases} f(x) - \text{в т. непр – ти} \\ \dfrac{f(x-x_0) + f(x+x_0)}{2} - \end{cases}$$

в x_0 - т.р. I рода