Московский государственный технический университет
имени Н.Э.Баумана

Ф.Х.Ахметова, А.В.Косова, И.Н.Пелевина

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ.
Часть 1

Методические указания к выполнению домашнего задания

Москва
2013

Предел числовой последовательности

Определение 1.Бесконечной числовой последовательностью называется функция $a_n = f(n): \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, заданная на множестве натуральных чисел.

Обозначается она следующим образом: $\{a_n\}$.

Пример 1. $\left\{\frac{n+1}{2n}\right\}:\{1;2;3;4;...\} \to \left\{1;\frac{3}{4};\frac{4}{6};\frac{5}{8};...;\frac{n+1}{2n};...\right\}$.

Определение 2. Число $a \in \mathbb{R}$ называется **пределом числовой последовательности** $\{a_n\}$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для любого $n > N$ выполняется неравенство: $|a_n - a| < \varepsilon$.

Запишем определение, используя логические символы: $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a\right) := \left(\left(\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \;\; N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N\right) \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon\right)$, где знак $:=$ – равенство по определению.

Рассмотрим неравенство из определения: $|a_n - a| < \varepsilon$ $\Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ для $\forall n > N$.

Таким образом, вне интервала $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ окажется только конечное число членов последовательности $a_1, a_2, a_3, ..., a_{N-1}, a_N$. Начиная же с номера $n = N + 1$, все члены последовательности попадают в интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Определение 3.Если предел числовой последовательности существует и конечен, то числовая последовательность называется **сходящейся**. Если предел последовательности не существует (в частности равен ∞), то числовая последовательность называется **расходящейся**.

В задачах 1, 2:доказать $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, определить для каждого значения $\varepsilon(\varepsilon = 0{,}1, \varepsilon = 0{,}01, \varepsilon = 0{,}001)$число $N = N(\varepsilon)$ такое, что $|a_n - a| < \varepsilon$ для всех $n > N$, где a_n и a заданы.

Задача 1. $a_n = \dfrac{n+1}{2n}, a = \dfrac{1}{2}$.

Вычислим предел заданной числовой последовательности:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2n} = \frac{1}{2}$$

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Найдем $N = N(\varepsilon)$, начиная с которого выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$, т.е. $\left|\dfrac{n+1}{2n} - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow$ $\left|\dfrac{n+1-n}{2n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{2n}\right| < \varepsilon$. Поскольку $n \in \mathbb{N} \Rightarrow 2n > 0, \left|\dfrac{1}{2n}\right| = \dfrac{1}{2n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{2\varepsilon}$.

$N(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]$ - целая часть числа, т.к. $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$.

При ε_1=0,1 $N = \left[\dfrac{1}{2\cdot 0{,}1}\right] = 5$.

Значит, при $n > 5$ $\{a_6, a_7, ...\} \in \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{10}\right) = (0{,}4; 0{,}6)$

При ε_2=0,01 $N = \left[\dfrac{1}{2\cdot 0{,}01}\right] = 50$.

Следовательно, при $n > 50$

$\{a_{51}, a_{52}, ...\} \in \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{100}, \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{100}\right) = (0{,}49; 0{,}51)$

При ε_3=0,001 $N = \left[\dfrac{1}{2\cdot 0{,}001}\right] = 500$.

Таким образом,при $n > 500$

$\{a_{501}, a_{502}, \dots\} \in \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1000}, \frac{1}{2} + \frac{1}{1000}\right) = (0,499; 0,501)$

Задача 2. $a_n = \frac{2-3n^2}{4+5n^2}, a = -\frac{3}{5}$.

Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-3n^2}{4+5n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2\left(\frac{2}{n^2} - 3\right)}{n^2\left(\frac{4}{n^2} + 5\right)} = -\frac{3}{5}$

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Найдем $N = N(\varepsilon)$, начиная с которого выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$, т.е. $\left|\frac{2-3n^2}{4+5n^2} + \frac{3}{5}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\left|\frac{22}{5(4+5n^2)}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{22}{5(4+5n^2)} < \varepsilon \Leftrightarrow 4 + 5n^2 > \frac{22}{5\varepsilon} \Leftrightarrow n^2 > \frac{22}{25\varepsilon} - \frac{4}{5} \Leftrightarrow$

$n > \sqrt{\frac{22}{25\varepsilon} - \frac{4}{5}} \Leftrightarrow n > \frac{1}{5}\sqrt{\frac{22}{\varepsilon} - 20}$.

Таким образом $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{5}\sqrt{\frac{22}{\varepsilon} - 20}\right]$

При ε_1=0,1 $N = \left[\frac{1}{5}\sqrt{200}\right] = [2,82] = 2$.

При ε_2=0,01 $N = \left[\frac{1}{5}\sqrt{2180}\right] = [9,3] = 9$.

При ε_3=0,001 $N = \left[\frac{1}{5}\sqrt{21980}\right] = [29,65] = 29$.

Пример 2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n} = \infty \Rightarrow \left\{\frac{n^2+1}{n}\right\}$ – расходящаяся числовая последовательность.

Определение 4. Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется **ограниченнойсверху**, если существует такое число $M \in \mathbb{R}$, что для любого n выполняется неравенство $a_n \le M$.

Определение 5. Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется **ограниченной снизу**, если существует такое число $m \in \mathbb{R}$, что для любого n выполняется неравенство $a_n \geq m$.

Определение 6. Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется **ограниченной**, если она ограничена сверху и снизу, т.е. для любого n выполняется неравенство $m \leq a_n \leq M$.

Пример 3. Последовательность $\{-1; -4; -9; ...; -n^2; ...\}$ ограничена сверху и не ограничена снизу, т.к. $a_n \leq -1 \Rightarrow M \geq -1$.

Пример 4. Последовательность $\left\{1; \frac{1}{2^2}; \frac{1}{3^2}; ...; \frac{1}{n^2}; ...\right\}$ ограничена, т.к. $0 \leq a_n \leq 1$.

Пример 5. Последовательность $\{1; 2; 1; 3; ...; 1; n; 1; n+1; ...\}$ ограничена снизу, поскольку $a_n \geq 1$.

Определение 7. Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется **возрастающей (убывающей)**, еслидля любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $a_n < a_{n+1}$ $(a_n > a_{n+1})$

Определение 8. Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется **невозрастающей (неубывающей)**, еслидля любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $a_n \geq a_{n+1}$ $(a_n \leq a_{n+1})$.

Определение 9. Возрастающие и убывающие последовательности называются **строгомонотонными**. Неубывающие и невозрастающие числовые последовательности называются **монотонными**.

Пример 6.Последовательность $\left\{\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; ...; \frac{n}{n+1}; ...\right\}$ - возрастающая.

Последовательность $\{1; 1; 2; 2; ...; n; n; ...\}$ - неубывающая.

Последовательность $\left\{1;1;\frac{1}{2};\frac{1}{2};...;\frac{1}{n};\frac{1}{n};...\right\}$- невозрастающая.

Последовательность $\left\{1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};...;\frac{1}{n};...\right\}$- убывающая.

Определение 10. Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется **бесконечно малой**, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, т.е. для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ справедливо неравенство $|a_n| < \varepsilon$.

Пример 7. $\left\{\frac{1}{n}\right\}$; $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$; $\left\{\frac{1}{n^3}\right\}$;...; $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$; $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$– бесконечно малые числовые последовательности.

Определение 11. Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется **бесконечно большой**, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, т.е.для любого сколь угодно большого числа $M > 0$ найдется такой номер $N = N(M)$, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|a_n| > M$.

Пример 8. $\{\sqrt{n}\}$; $\{n\}$; $\{n^2\}$; $\{n^3\}$;...; $\{2^n\}$; $\{3^n\}$– бесконечно большие числовые последовательности.

Теорема 1. $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$, где c – постоянная.

Теорема 2 (арифметические операции над сходящимися числовыми последовательностями). Если существуют и конечны $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то существуют и конечны:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$, где $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

Следствие. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(c\cdot a_n\right)=c\cdot\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, где c – постоянная.

Теорема 3 (об ограниченности сходящейся последовательности). Любая сходящаяся числовая последовательность ограничена.

Замечание. Не всякая ограниченная числовая последовательность является сходящейся.

Пример 9. $\{0;1;0;1;0;1;...;0;1;...\}$ – последовательность ограничена, но не имеет предела, т.е. не является сходящейся.

Рассмотрим некоторые приемы, которые помогут при решении задач.

При вычислении пределов вида $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{g(n)}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ нужно в числителе и в знаменателе «главное»слагаемое (растущее быстрее всех) вынести за скобки. Если слагаемое, выносимое за скобки, выбрано верно, то предел скобки равен константе, неравной нулю.

Задача 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{7-14n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)}{-14n\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)}=-\dfrac{1}{7}$. В приведенном примере в качестве функций $f(n)$ и $g(n)$ использованы многочлены,поэтому «главными» будут слагаемые, содержащие старшие степени многочленов.

Задача 4.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^3-(n-2)^3}{95n^2+39n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+6n^2+12n+8-n^3+6n^2-12n+8}{95n^2+39n}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{12n^2+16}{95n^2+39n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(12+\dfrac{16}{n^2}\right)}{n^2\left(95+\dfrac{39}{n}\right)}=\frac{12}{95}.$$

Если неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ связана с отношением двух многочленов, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_0n^k+A_1n^{k-1}+\ldots+A_k}{B_0n^m+B_1n^{m-1}+\ldots+B_m}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\begin{cases}\dfrac{A_0}{B_0}, & если \quad k=m;\\ 0, & если \quad k<m;\\ \infty, & если \quad k>m.\end{cases}$$

Задача 5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^4+5n}}{n^{\frac{2}{3}}+\sqrt[4]{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2\sqrt{1+\dfrac{5}{n^3}}}{n^{\frac{2}{3}}\left(1+\dfrac{1}{n^{\frac{5}{12}}}\right)}=\infty$.

Задача 6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n}{2^n-3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1\right)}{3^n\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-1\right)}=\left|\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\to 0 \quad при \quad n\to\infty\right|=-1$.

Раскрытие неопределенности вида $[\infty-\infty]$ обычно сводится к неопределенности вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ преобразованием разности двух последовательностей к дроби. Это можно сделать, например, приведя слагаемые к общему знаменателю или домножив имеющуюся разность на сопряженное выражение.

Задача 7.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=0.$$

Задача 8.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=\left|\begin{array}{l}\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\\ \ldots\\ \frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

Пределы функций

Пусть $x_0\in\mathbb{R}$ и $\delta>0$.

Определение 12. δ**– окрестностью конечной точки** x_0 называется интервал с центром в точке x_0 длиной 2δ.

Обозначается она так:

$$U_\delta(x_0)=(x_0-\delta;x_0+\delta)=\{x\in\mathbb{R}:x_0-\delta<x<x_0+\delta\}=\{x\in\mathbb{R}:|x-x_0|<\delta\}$$

Определение 13.Проколотой δ**–окрестностью** конечной точки x_0 называется окрестность этой точки без самой точки x_0.

Обозначается следующим образом:

$$\mathop{U}\limits^{\circ}{}_\delta(x_0)=(x_0-\delta;x_0)\cup(x_0;x_0+\delta)=\{x\in\mathbb{R}:0<|x-x_0|<\delta\}$$

Определение 14.Окрестностью бесконечноудаленной точки называется объединение следующих интервалов: $\mathop{U}\limits^{\circ}(\infty)=(-\infty;-M)\cup(M;+\infty)=\{x\in\mathbb{R}:|x|>M\}$, где $M>0;M\in\mathbb{R}$.

Рассмотрим различные стремления аргумента и соответствующие им проколотые окрестности. Результаты запишем в виде таблицы.

Тип стремления	Проколотая окрестность

$x \to a$	$\overset{\circ}{U}_{\delta}(a) = (a-\delta; a) \cup (a; a+\delta) = \{0 < \lvert x-a \rvert < \delta\}$
$x \to a^{+} = x \to a+0$ $(x \to a, x > a)$	$\overset{\circ}{U}{}^{+}_{\delta}(a) = (a; a+\delta) = \{a < x < a+\delta\}$
$x \to a^{-} = x \to a-0$ $(x \to a, x < a)$	$\overset{\circ}{U}{}^{-}_{\delta}(a) = (a-\delta; a) = \{a-\delta < x < a\}$
$x \to \infty$	$\overset{\circ}{U}(\infty) = (-\infty; -M) \cup (M; +\infty) = \{\lvert x \rvert > M\}$
$x \to +\infty$	$\overset{\circ}{U}(+\infty) = (M; +\infty) = \{x > M\}$
$x \to -\infty$	$\overset{\circ}{U}(-\infty) = (-\infty; -M) = \{x < -M\}$

Приведем определения пределов функции $f(x)$ при разных стремлениях аргумента x.

Определение 15. Число A называется **пределом функции** $f(x)$ в точке $x = a$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(a)$ (или для всех $x : 0 < \lvert x-a \rvert < \delta$) выполняется неравенство $\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$.

Или с помощью логических символов: $\left(\lim\limits_{x \to a} f(x) = A\right) :=$

$$\left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(a)\right) \Rightarrow \left(\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon\right).$$

Определение 16. Число A называется **правым пределом функции** $f(x)$ в точке $x = a$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \in \overset{\circ}{U}{}^{+}_{\delta}(a)$ (или для всех $x : a < x < a+\delta$) выполняется неравенство $\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$.

Или с помощью логических символов: $\left(\lim\limits_{x\to a+0} f\left(x\right)=A\right):=$

$$\left(\forall\varepsilon>0\ \ \exists\ \ \delta=\delta\left(\varepsilon\right)>0:\forall x\in\overset{\circ}{U}{}^{+}_{\delta}\left(a\right)\right)\Rightarrow\left(\left|f\left(x\right)-A\right|<\varepsilon\right).$$

Определение 17. Число A называется **левым пределом функции** $f\left(x\right)$ в точке $x=a$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta=\delta\left(\varepsilon\right)>0$, что для всех $x\in\overset{\circ}{U}{}^{-}_{\delta}\left(a\right)$ (или для всех $x:a-\delta<x<a$) выполняется неравенство $\left|f\left(x\right)-A\right|<\varepsilon$.

Или с помощью логических символов: $\left(\lim\limits_{x\to a-0} f\left(x\right)=A\right):=$

$$\left(\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta=\delta\left(\varepsilon\right)>0:\forall x\in\overset{\circ}{U}{}^{-}_{\delta}\left(a\right)\right)\Rightarrow\left(\left|f\left(x\right)-A\right|<\varepsilon\right).$$

Определение 18. Число A называется **пределом функции** $f\left(x\right)$ **в бесконечноудаленной точке** ($x\to\infty$), если для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ найдется такое $M=M\left(\varepsilon\right)>0$, что для всех $x\in\overset{\circ}{U}\left(\infty\right)$ (или для всех $x:\left|x\right|>M$) выполняется неравенство $\left|f\left(x\right)-A\right|<\varepsilon$.

Или с помощью логических символов: $\left(\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right)=A\right):=$

$$\left(\forall\varepsilon>0\ \exists\,M=M\left(\varepsilon\right)>0:\forall x\in\overset{\circ}{U}\left(\infty\right)\right)\Rightarrow\left(\left|f\left(x\right)-A\right|<\varepsilon\right).$$

Определение 19. Число A называется **правым пределом функции** $f\left(x\right)$ **в бесконечноудаленной точке** ($x\to+\infty$), если для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ найдется такое $M=M\left(\varepsilon\right)>0$, что для всех $x\in\overset{\circ}{U}\left(+\infty\right)$ (или для всех $x:x>M$) выполняется неравенство $\left|f\left(x\right)-A\right|<\varepsilon$.

Или с помощью логических символов: $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=A\right):=$

$$\left(\forall\varepsilon>0\ \exists\,M=M\left(\varepsilon\right)>0:\forall x\in\overset{\circ}{U}\left(+\infty\right)\right)\Rightarrow\left(\left|f\left(x\right)-A\right|<\varepsilon\right).$$

Определение 20. Число A называется **левым пределом функции** $f(x)$ **в бесконечноудаленной точке**($x \to -\infty$), если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $M = M(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \in \overset{\circ}{U}(-\infty)$ (или для всех $x : x < -M$) выполняется неравенство $\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$.

Или с помощью логических символов: $\left(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A \right) :=$

$$\left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists M = M(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}(-\infty) \right) \Rightarrow \left(\left| f(x) - A \right| < \varepsilon \right).$$

Определение 21. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, если для сколь угодно большого числа $K > 0$ найдется такое $\delta = \delta(K) > 0$, что для всех $x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(a)$ выполняется неравенство $\left| f(x) \right| > K$.

Или с помощью логических символов: $\left(\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty \right) :=$

$$\left(\forall K > 0 \ \exists \delta = \delta(K) > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(a) \right) \Rightarrow \left(\left| f(x) \right| > K \right).$$

Определение 22. $\left(\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = -\infty \right) :=$

$$\left(\forall K > 0 \ \exists \delta = \delta(K) > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}{}^{+}_{\delta}(a) \right) \Rightarrow \left(f(x) < -K \right).$$

Определение 23. $\left(\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = +\infty \right) :=$

$$\left(\forall K > 0 \ \exists \delta = \delta(K) > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}{}^{-}_{\delta}(a) \right) \Rightarrow \left(f(x) > K \right).$$

Определение 24. $\left(\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \right) :=$

$$\left(\forall K > 0 \ \exists M = M(K) > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}(\infty) \right) \Rightarrow \left(\left| f(x) \right| > K \right).$$

Определение 25. $\left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \right) :=$

$$\left(\forall K > 0 \ \exists M = M(K) > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}(+\infty) \right) \Rightarrow \left(f(x) < -K \right).$$

Пределы 16, 17, 19, 20, 22, 23, 25 называют односторонними.Все рассмотренные определения – определения предела функции по Коши.

Задача 9. Доказать по определению: $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x+1\right)=3$.

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и найдем $\delta=\delta\left(\varepsilon\right)>0$: $\left|2x+1-3\right|<\varepsilon\Leftrightarrow$ $2\left|x-1\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|x-1\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}=\delta\left(\varepsilon\right)$. Таким образом для $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta\left(\varepsilon\right)=\dfrac{\varepsilon}{2}>0$ такое, что для $\forall x:\left|x-1\right|<\delta$ выполняется неравенство $\left|2x+1-3\right|<\varepsilon$. Например для $\varepsilon=0{,}1\ \exists\,\delta=0{,}05$.

Задача 10. Доказать по определению: $\lim\limits_{x\to 3+0}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$.

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и найдем $\delta=\delta\left(\varepsilon\right)>0$: $\left|\dfrac{x^2-9}{x-3}-6\right|<\varepsilon\Leftrightarrow$ $\left|x+3-6\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|x-3\right|<\varepsilon=\delta\left(\varepsilon\right)$. Таким образом для $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta\left(\varepsilon\right)=\varepsilon>0$ такое, что для $\forall x:3<x<3+\delta$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{x^2-9}{x-3}-6\right|<\varepsilon$.

Задача 11. Доказать по определению: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{3x}=\dfrac{2}{3}$.

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и найдем $M=M\left(\varepsilon\right)>0:\left|\dfrac{2x+1}{3x}-\dfrac{2}{3}\right|<\varepsilon$ $\Leftrightarrow\left|\dfrac{2x+1-2x}{3x}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\dfrac{1}{3\left|x\right|}<\varepsilon\Leftrightarrow\left|x\right|>\dfrac{1}{3\varepsilon}=M\left(\varepsilon\right)$. Таким образом,для $\forall\varepsilon>0$ $\exists\,M=\dfrac{1}{3\varepsilon}>0$ такое, что для $\forall x:\left|x\right|>M$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{2x+1}{3x}-\dfrac{2}{3}\right|<\varepsilon$.

Рассмотрим определение конечного предела функции по Гейне.

Определение 26. Число A называется **пределом функции** $f\left(x\right)$ в точке $x=a$, если для любой такой последовательности $\left\{x_n\right\}$ значений аргумента, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ и $x_n\neq a$ при любых $n\in\mathbb{N}$, соответствующие последовательности $\left\{f\left(x_n\right)\right\}$ значений функции сходятся к одному и тому же A (имеют один и тот же предел, равный A).

Или с помощью логических символов: $\left(\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)=A\right):=$ $\left(\forall\left\{x_n\right\}:\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\ \ x_n\neq a\ \ \forall\ \ n\in\mathbb{N}\right)\Rightarrow\left(\lim\limits_{n\to\infty}f\left(x_n\right)=A\right).$

Определение 27. Число A называется **правым пределом функции** $f\left(x\right)$ в точке $x=a$, если для любой такой последовательности $\left\{x_n\right\}$ значений аргумента, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ и $x_n>a$ при любых $n\in\mathbb{N}$, соответствующие последовательности $\left\{f\left(x_n\right)\right\}$ значений функции сходятся к одному и тому же A (имеют один и тот же предел, равный A).

Или с помощью логических символов: $\left(\lim\limits_{x\to a+0}f\left(x\right)=A\right):=$ $\left(\forall\left\{x_n\right\}:\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\ \ x_n>a\ \ \forall\ \ n\in\mathbb{N}\right)\Rightarrow\left(\lim\limits_{n\to\infty}f\left(x_n\right)=A\right).$

Определение 28. Число A называется **левым пределом функции** $f\left(x\right)$ в точке $x=a$, если для любой такой последовательности $\left\{x_n\right\}$ значений аргумента, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ и $x_n<a$ при любых $n\in\mathbb{N}$, соответствующие последовательности $\left\{f\left(x_n\right)\right\}$ значений функции сходятся к одному и тому же A (имеют один и тот же предел, равный A).

Или с помощью логических символов: $\left(\lim\limits_{x\to a-0}f\left(x\right)=A\right):=$ $\left(\forall\left\{x_n\right\}:\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\ \ x_n<a\ \ \forall\ \ n\in\mathbb{N}\right)\Rightarrow\left(\lim\limits_{n\to\infty}f\left(x_n\right)=A\right).$

Определение 29. Число A называется **пределом функции** $f(x)$ **при** $x \to \infty$, если для любой бесконечно большой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента соответствующие последовательности $\{f(x_n)\}$ значений функции имеют один и тот же предел, равный A.

Или с помощью логических символов: $\left(\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A\right) :=$

$$\left(\forall \{x_n\}: \ \lim_{n\to\infty} x_n = \infty \ \ \forall \ \ n \in \mathbb{N}\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A\right).$$

Теорема 4. Определения конечного предела функции по Коши и Гейне эквивалентны.

Задача 12. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ не существует.

Для доказательства, что функция $f(x)$ не имеет предела, удобно пользоваться определением предела функции по Гейне. Для этого достаточно показать, что существуют две последовательности $\left\{x_n^{(1)}\right\}$ и $\left\{x_n^{(2)}\right\}$ такие, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{x_n^{(1)}\right\} = \lim\limits_{n\to\infty}\left\{x_n^{(2)}\right\} = a$, но соответствующие последовательности $f\left(x_n^{(1)}\right)$ и $f\left(x_n^{(2)}\right)$ не имеют одинаковых пределов.

Выберем две числовые последовательности: $\left\{x_n^{(1)}\right\} = \{\pi n\}$ и $\left\{x_n^{(2)}\right\} = \dfrac{\pi(4n+1)}{2}$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \pi n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(2)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(4n+1)\pi}{2} = +\infty$, но

$\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n^{(1)}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin \pi n = 0$, а $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n^{(2)}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin \dfrac{\pi(4n+1)}{2} = 1$.

Следовательно, функция $f(x) = \sin x$ не имеет предела при $x \to +\infty$.

Основные теоремы о пределах функций

Теорема 5 (о единственности предела). Если предел функции в точке существует, то он единственный.

Определение 30. Функция $y=f(x)$ называется **локально ограниченной**, если она ограничена при $x\to a$: существуют такое $c>0$ и такая $\overset{\circ}{U}(a)$, что для всех $x\in\overset{\circ}{U}(a)$ выполняется неравенство $|f(x)|\le c$.

Пример 10. Функция $y=x^2+2$ локально ограничена при $x\to 0$.

Теорема 6 (о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел). Если функция $y=f(x)$ имеет конечный предел в точке $x=a$, то она локально ограничена.

Теорема 7 (о пределе промежуточной функции). Если существуют конечный $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, конечный $\lim\limits_{x\to a} g(x)=A$, и такая $\overset{\circ}{U}(a)$, что для любых $x\in\overset{\circ}{U}(a)$ выполняется неравенство $f(x)\le h(x)\le g(x)$, то существует конечный $\lim\limits_{x\to a} h(x)=A$.

Теорема 8 (арифметические операции с функциями, имеющими конечные пределы). Если существуют конечный $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ и конечный $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, то:

1) существует конечный
$\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\pm g(x)\big)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)=A\pm B$;

2) существует конечный
$\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)=A\cdot B$;

3) существует конечный $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\dfrac{A}{B}$ при условии, что $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B\neq 0$.

Теорема 9 (о замене переменной в пределе или о пределе сложной функции).Если функция $y=f(x)$ имеет в точке a конечный предел b и не принимает значение b в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ точки a, а функция $g(y)$ имеет в точке b конечный предел c, то сложная функция $g(f(x))$ имеет предел в точке a и он равен c.

Задача 13. Вычислим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[k]{1+x}-1}{x}=\left|\begin{array}{l}\text{замена}:\\ 1+x=y^k\\ x\to 0\Rightarrow y\to 1\end{array}\right|=\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{y^k-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{(y-1)\left(y^{k-1}+y^{k-2}+\ldots+y+1\right)}=$$

$$\left|\text{причем}\quad y\neq 1\quad\text{для}\quad\forall x\in\overset{\circ}{U}(0)\right|=\lim_{y\to 1}\frac{1}{y^{k-1}+y^{k-2}+\ldots+y+1}=\frac{1}{k}.$$

Вычисление пределов функций

Если точка $x=a$ принадлежит области определения элементарной функции $f(x)$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Задача 14. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin 3x=\sin\left(3\cdot\dfrac{\pi}{6}\right)=1$.

Рассмотрим задачи на вычисление пределов, когда $f(a)$ не существует. Решение любого примера начинаем с подстановки вместо x его предельного значения. Лишь убедившись, что получается неопределенность $\left(\left[\frac{0}{0}\right];\ \left[\frac{\infty}{\infty}\right];\ [\infty-\infty]\right)$, решаем, как преобразовать функцию, чтобы эту неопределенность раскрыть.

В случае неопределенности $\left[\frac{0}{0}\right]$ при $x \to a$ в числителе и знаменателе дроби необходимо выделить «критический» множитель вида $(x-a)^k$, на который затем дробь сократить.

Задача 15.Вычислить $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^4+2x^3-x^2-4x-2}{x^3+3x^2+3x+1}$.

При подстановке $x=-1$ в числитель и знаменатель получаем $\left[\frac{0}{0}\right]$. Это значит, что и в числителе и в знаменателе есть общий множитель $(x+1)$. Разложим на множители многочлены числителя и знаменателя.

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^4+2x^3-x^2-4x-2}{x^3+3x^2+3x+1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)^2(x^2-2)}{(x+1)^3}=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-2}{x+1}=\frac{-1}{0}=\infty.$$

Задача 16. Вычислить $\lim\limits_{x\to64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$.

Снова имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для выделения «критического» множителя в этом случае удобно использовать замену переменной, выбрав ее так, чтобы избавиться от иррациональностей в числителе и знаменателе: $\sqrt[6]{x}=t$. При $x\to64, t\to\sqrt[6]{64}=2$

$$\lim_{x\to64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}=\lim_{t\to2}\frac{t^3-8}{t^2-4}=\lim_{t\to2}\frac{(t-2)(t^2+2t+4)}{(t-2)(t+2)}=\lim_{t\to2}\frac{t^2+2t+4}{t+2}=\frac{12}{4}=3.$$

Задача 17. Вычислить $\lim\limits_{x\to10}\frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$.

Для раскрытия неопределенности $\left[\frac{0}{0}\right]$ снова можно воспользоваться заменой переменной $\sqrt{x-1}=t$, устранив при этом иррациональность. Но мы рассмотрим другой способ: перевод иррациональности из числителя в знаменатель. Для этого домножим числитель на сопряженное. Для того чтобы равенство не нарушилось, знаменатель будем домножатьна тоже выражение:

$$\lim_{x\to 10}\frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}=\lim_{x\to 10}\frac{\left(\sqrt{x-1}-3\right)\left(\sqrt{x-1}+3\right)}{\left(x-10\right)\left(\sqrt{x-1}+3\right)}=\lim_{x\to 10}\frac{x-1-9}{\left(x-10\right)\left(\sqrt{x-1}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 10}\frac{1}{\sqrt{x-1}+3}=\frac{1}{\sqrt{10-1}+3}=\frac{1}{6}.$$

Задача 18. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$. Как видим, здесь неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$, но в условии присутствуют корни с разными подкоренными выражениями, а значит, метод замены переменной не подойдет. Числитель будем домножать на сопряженное, а знаменатель – до формулы суммы кубов:

$$\lim_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to -8}\left(\frac{\left(\sqrt{1-x}-3\right)\left(\sqrt{1-x}+3\right)}{\left(2+\sqrt[3]{x}\right)\left(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}\cdot\frac{\left(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{\left(\sqrt{1-x}+3\right)}\right)=$$

$$\lim_{x\to -8}\frac{\left(1-x-9\right)\left(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{\left(8+x\right)\left(\sqrt{1-x}+3\right)}=\lim_{x\to -8}\frac{-1\cdot\left(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{\sqrt{1-x}+3}=\frac{-\left(4+4+4\right)}{3+3}=-2.$$

Правила раскрытия неопределенностей вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$; $\left[\infty-\infty\right]$ такие же, как при вычислении пределов числовых последовательностей.

Задача 19.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)\left(x^2-x\cdot\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}\right)}{x^2-x\cdot\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1-x^3}{x^2-x\cdot\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0.$$

Для сведения выражения к дроби мы домножили числитель на неполный квадрат разности (до формулы разности кубов), поэтому и в знаменателе появился тот же множитель.

Задача 20.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{3}{1-\sqrt{x}}-\frac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)=[\infty-\infty]=\left|\begin{array}{l}\text{замена}:\\ x=t^6\\ x\to1,t\to1\end{array}\right|=\lim_{t\to1}\left(\frac{3}{1-t^3}-\frac{2}{1-t^2}\right)=$$

$$=\lim_{t\to1}\frac{3(1+t)-2\left(1+t+t^2\right)}{(1-t)(1+t)\left(1+t+t^2\right)}=\lim_{t\to1}\frac{1+t-2t^2}{(1-t)(1+t)\left(1+t+t^2\right)}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{t\to1}\frac{(1-t)(2t+1)}{(1-t)(1+t)\left(1+t+t^2\right)}=\lim_{t\to1}\frac{2t+1}{(1+t)\left(1+t+t^2\right)}=\frac{2+1}{2\cdot3}=\frac{1}{2}.$$

Задача 21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3\left(1+\dfrac{3}{2x}\right)^3 9x^2\left(1-\dfrac{2}{3x}\right)^2}{x^5\left(1+\dfrac{5}{x^5}\right)}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{8x^3\cdot9x^2}{x^5}=72$$

Далее рассмотрим примеры односторонних пределов.

Задача 22. Вычислить $\lim\limits_{x\to3\pm0}\dfrac{x-3}{|x-3|}$. Раскрывая модуль, получим

$$\lim_{x\to3+0}\frac{x-3}{|x-3|}=\lim_{x\to3+0}\frac{x-3}{x-3}=1;\ \lim_{x\to3-0}\frac{x-3}{|x-3|}=\lim_{x\to3-0}\frac{x-3}{-(x-3)}=-1.$$

Задача23. $\lim\limits_{x\to 2+0} 3^{\frac{1}{2-x}} = \lim\limits_{x\to 2+0} 3^{\frac{1}{2-2-0}} = \lim\limits_{x\to 2+0} 3^{\frac{1}{-0}} = \lim\limits_{x\to 2+0} 3^{-\infty} = 0$;

$\lim\limits_{x\to 2-0} 3^{\frac{1}{2-x}} = \lim\limits_{x\to 2+0} 3^{\frac{1}{2-2+0}} = \lim\limits_{x\to 2+0} 3^{\frac{1}{+0}} = \lim\limits_{x\to 2+0} 3^{+\infty} = +\infty$.

Задача 24. $\lim\limits_{x\to -\infty} arctgx = -\dfrac{\pi}{2}$ (по графику функции видно, что при $x \to -\infty$ $arctgx \to -\dfrac{\pi}{2}$);

$\lim\limits_{x\to +\infty} arctgx = \dfrac{\pi}{2}$.

Задача 25. $\lim\limits_{x\to 4^-} e^{\frac{1}{(x+3)(x-4)}} = \lim\limits_{x\to 4^-} e^{\frac{1}{7(4-0-4)}} = \lim\limits_{x\to 4^-} e^{\frac{1}{-0}} = \lim\limits_{x\to 4^-} e^{-\infty} = 0$;

$\lim\limits_{x\to 4^+} e^{\frac{1}{(x+3)(x-4)}} = \lim\limits_{x\to 4^+} e^{\frac{1}{7(4+0-4)}} = \lim\limits_{x\to 4^+} e^{\frac{1}{+0}} = \lim\limits_{x\to 4^+} e^{+\infty} = +\infty$.

Задача 26. Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x\to -\infty \\ (x\to +\infty)}} \left(\sqrt{4x^2+5x+1} - \sqrt{4x^2-5x+1}\right)$.

В приведенном примере существует неопределенность вида $[\infty - \infty]$. Чтобы раскрыть ее, необходимо свести выражение, стоящее под знаком предела, к дроби. Сделаем это, домноживна сопряженное. В результате тип неопределенности сменится на $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Раскроем эту неопределенность, вынося самые «весомые» слагаемые числителя и знаменателя за скобки:

$$\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{4x^2+5x+1} - \sqrt{4x^2-5x+1}\right) =$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2+5x+1} - \sqrt{4x^2-5x+1}\right)\left(\sqrt{4x^2+5x+1} + \sqrt{4x^2-5x+1}\right)}{\left(\sqrt{4x^2+5x+1} + \sqrt{4x^2-5x+1}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{4x^2+5x+1-4x^2+5x-1}{\sqrt{4x^2+5x+1} + \sqrt{4x^2-5x+1}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{10x}{\sqrt{4x^2+5x+1} + \sqrt{4x^2-5x+1}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{10x}{\sqrt{4x^2}\left(\sqrt{1+\frac{5}{4x}+\frac{1}{4x^2}}+\sqrt{1-\frac{5}{4x}+\frac{1}{4x^2}}\right)} = \left| \begin{array}{l} \textit{напомним, что} \\ \sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & \textit{если} \quad x \ge 0; \\ -x, & \textit{если} \quad x < 0 \end{cases} \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{10x}{2|x|\left(\sqrt{1+\frac{5}{4x}+\frac{1}{4x^2}}+\sqrt{1-\frac{5}{4x}+\frac{1}{4x^2}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{10x}{-2x\left(\sqrt{1+\frac{5}{4x}+\frac{1}{4x^2}}+\sqrt{1-\frac{5}{4x}+\frac{1}{4x^2}}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{10x}{-2x\cdot 2} = -\frac{5}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+5x+1}-\sqrt{4x^2-5x+1}\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2+5x+1}-\sqrt{4x^2-5x+1}\right)\left(\sqrt{4x^2+5x+1}+\sqrt{4x^2-5x+1}\right)}{\left(\sqrt{4x^2+5x+1}+\sqrt{4x^2-5x+1}\right)} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2+5x+1-4x^2+5x-1}{\sqrt{4x^2+5x+1}+\sqrt{4x^2-5x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{10x}{\sqrt{4x^2+5x+1}+\sqrt{4x^2-5x+1}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{10x}{\sqrt{4x^2}\left(\sqrt{1+\frac{5}{4x}+\frac{1}{4x^2}}+\sqrt{1-\frac{5}{4x}+\frac{1}{4x^2}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{10x}{2|x|\left(\sqrt{1+\frac{5}{4x}+\frac{1}{4x^2}}+\sqrt{1-\frac{5}{4x}+\frac{1}{4x^2}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{10x}{2x\cdot 2} = \frac{5}{2}$$

Контрольное задание №1 (для самостоятельной работы):

№ задачи	Вычислить	Ответ
1.	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3+3n^2+1}{0,001n^4-2n^3}$	0

2.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{5n+2}-\sqrt[3]{8n^3+5}}{\sqrt[4]{16n+7}}$	∞
3.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^4+n^2+1}$	0
4.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt[5]{n^7+3n^2+1}}$	0
5.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^2-(n-1)^2}{(2n+1)^2+(n-1)^2}$	$\dfrac{3}{5}$
6.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2-(n-1)^2}$	∞
7.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3-2n^2+1}}{\sqrt[4]{n^6+6n^5+2}}$	1
8.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2\sqrt{n^2+1}}+3n}{n}$	4
9.	$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$	1
10.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{(n+1)^3}-\sqrt{n(n-1)(n-3)}}{\sqrt{n}}$	$\dfrac{7}{2}$

Контрольное задание №2

№ задачи	Вычислить	Ответ
1.	$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^3-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$	0

2.	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(x^3-2x-1\right)^2}{x^4+2x+1}$	0
3.	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$	0
4.	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x+1}{2x^2-x-1}$	$\frac{1}{3}$
5.	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^3-1}$	2
6.	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3+4x^2-4x-1}$	$\frac{16}{7}$
7.	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(2x^2-x-1\right)^2}{x^3+2x^2-x-2}$	0
8.	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}$	$-\frac{1}{3}$
9.	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{x^3-6x^2+32}$	∞
10.	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^3+x^2-8x+4}$	$\frac{5}{8}$
11.	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x-2}{x^4-4x-8}$	$\frac{9}{28}$
12.	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$	2
13.	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^3-81}{x^2-5x+6}$	81
14.	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^3-x-6}$	$\frac{3}{11}$
15.	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$	2

16.	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3+5x^2+7x+3}$	-1
17.	$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\left(x^2+2x-3\right)^2}{x^3+4x^2-9}$	0
18.	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x+2}{x^2-12x+20}$	$-\dfrac{7}{8}$
19.	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4+2x^3-x^2-4x-2}{x^3+3x^2+3x+1}$	∞
20.	$\lim\limits_{x\to -2}\left(-\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{x^3}{x^2-4}\right)$	$-\dfrac{5}{2}$
21.	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$	$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
22.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}\sqrt{1+2x}-1}{x}$	$\dfrac{3}{2}$
23.	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$	$-\dfrac{1}{16}$
24.	$\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$	$\dfrac{12}{5}$
25.	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$	0
26.	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}$	$-\dfrac{4}{3}$
27.	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$	$\dfrac{1}{4}$
28.	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$	$-\dfrac{1}{3}$

29.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}$	-1
30.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$	$\dfrac{2}{27}$
31.	$\lim\limits_{x\to \infty}x^2\left(\sqrt[3]{9+x^3}+\sqrt[3]{7-x^3}\right)$	$\dfrac{16}{3}$
32.	$\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$	12
33.	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+2}-1}{x^3+1}$	$\dfrac{1}{6}$
34.	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$	$\dfrac{1}{144}$
35.	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$	$\dfrac{4}{3}$
36.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}-1}$	$\dfrac{2}{3}$
37.	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$	$\dfrac{3}{4}$
38.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{2-x}}$	$3\cdot 2^{-\frac{5}{6}}$
39.	$\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$	0

Контрольное задание №3

№ задачи	Вычислить	Ответ

1.	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+\sqrt{16x^4-x\sqrt{x}}}{3x^2+1}$	$\frac{5}{3}$
2.	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^2+1}}+3x}{x}$	4
3.	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\sqrt[3]{4x^4-x^7\sqrt{x}}}{2x^2-3x+5}$	$+\infty$
4.	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+3x-5}{x\sqrt{x}+\sqrt[3]{8x^7-1}}$	0
5.	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-3\sqrt[3]{9x^4-x^6}}{\sqrt{2x^3+9x^4}}$	$\frac{5}{3}$
6.	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x\sqrt{x}+\sqrt{1+9x^3}+x}{3x\sqrt{x+10}}$	$\frac{5}{3}$
7.	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x^2-\sqrt[3]{x^4+4}}{\sqrt{x}(2-x)-x\sqrt{x+2}}$	$-\infty$
8.	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{16x^3+1}-\sqrt[3]{5x^2}+2}{4x\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2+1}}$	1
9.	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(4x^2+1)\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^4}}{x\sqrt{16x^3+x}}$	1
10.	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\sqrt[3]{1-8x^4}}{1-3\sqrt[5]{x^6}}$	$+\infty$
11.	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-3\sqrt{x^4+1}+7x^2}{\sqrt[3]{27x^3+x^6}}$	4
12.	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+\sqrt{1+9x^4}}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt[3]{x}-2)^3}$	5
13.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{9x^4+3}-\sqrt[3]{x^6+1}}{x^2+100x}$	2

14.	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+100x\sqrt{x}}{(x+2)\sqrt{x^3+8x+7}}$	0
15.	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x^4+3}-\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^5}}{\left(x^2+9\right)^{\frac{3}{2}}}$	0
16.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{3x^4+2\sqrt[3]{x^{16}-4x}}}{\sqrt[3]{x^8+x^2-1}}$	$\sqrt{2}$
17.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2\sqrt[4]{x^8-8x}}{\sqrt{x^4+12}-4x^2}$	$-\dfrac{1}{3}$
18.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+\sqrt{x^8+9x^5}+x^4}{3x^4-2x^3}$	$\dfrac{2}{3}$
19.	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^4+2x^2\sqrt{x^6-x^3+1}}{\left(\sqrt[3]{x^4+4}-\sqrt{x^5}\right)^2}$	2
20.	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-x+1}{\sqrt[3]{x^6+x}+\sqrt{1+x^4}}$	$\dfrac{3}{2}$

Литература

1. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / под ред. Б.П.Демидовича. М.: Астрель, 2003.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: В2-ч т. Т.1. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1982.
3. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1979.
4. Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах: Функции одной переменной.М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1970.
5. Морозова В.Д. Введение в анализ. М.:Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005.
6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учеб.пособ. для втузов: В 2-ч т. Т. 1. М.: Интеграл-Пресс, 2006.
7. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа/ Под ред. А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича. В 3-ч т. Т. 1. М.:Наука, 1993.

Оглавление