Московский государственный технический университет

имени Н.Э.Баумана

Ф.Х. Ахметова, С.Н. Ефремова, Т.А. Ласковая

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ.

Часть 2

Методические указания к выполнению домашнего задания

Москва

2013

Цель данных методических указаний «Теория пределов», 1 и 2 части, – помочь студентам первого курса разобраться в вычислении пределов числовых последовательностей и пределов функций; в выделении главных частей бесконечно малых и бесконечно больших функций; в сравнении бесконечно малых (или бесконечно больших) функций.

Методические указания содержат краткие теоретические сведения, необходимые для решения типовых задач, контрольные задания (задачи для самостоятельной работы). Предлагаемые методические указания предназначены для самостоятельного изучения данной темы студентами.

Бесконечно малые функции

Введем понятие бесконечно малой (**б.м.ф.**) функции.

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

По определению предела функции это равенство означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon$.

Запишем это определение, используя логическую символику:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow ((\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall x\colon 0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$$

Аналогично определяется **б.м.ф.** при $x \to x_0 + 0$, $x \to x_0 - 0$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$: во всех этих случаях $f(x) \to 0$ при данных стремлениях аргумента.

Бесконечно малые функции часто называются бесконечно малыми величинами или просто бесконечно малыми; обозначаются они обычно греческими буквами $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и т. д.

Примеры бесконечно малых функций:

$$y = x^2 \ \ \textit{при}\ x \to 0 \ \left(\textit{т.к.}\ \lim_{x\to 0} x^2 = 0 \right)$$

$$y = x - 2 \ \ \textit{при}\ x \to 2 \ \left(\textit{т.к.}\ \lim_{x\to 2}(x-2) = 0 \right)$$

$$y = \sin x \ \ \textit{при}\ x \to \pi k,\ \ k \in \boldsymbol{Z} \ \left(\textit{т.к.}\ \lim_{x\to \pi k} \sin x \ = 0 \right)$$

Свойства бесконечно малых функций

Перечислим свойства бесконечно малых функций в виде основных теорем.

Теорема 1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций при $x \to x_0$ есть бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Теорема 2. Произведение бесконечно малой функции при $x \to x_0$ на ограниченную функцию есть бесконечно малая функция $x \to x_0$.

Из **Теоремы 2** вытекают два следствия:

Следствие 1. Произведение бесконечно малой функции при $x \to x_0$ на число есть бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Следствие 2. Произведение двух бесконечно малых функций при $x \to x_0$ есть бесконечно малая функция при $x \to x_0$ (т.к. всякая **б.м.ф.** при $x \to x_0$ является ограниченной).

Теорема 3. Функция имеет предел, равный $\boldsymbol{a}$ при при $x \to x_0$ тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде суммы числа $\boldsymbol{a}$ и некоторой бесконечно малой функции $\alpha(x)$ при $x \to x_0$, т.е. $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \;\Leftrightarrow f(x) = \boldsymbol{a} + \alpha(x),$ *где* $\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$.

Рассмотрим два предела, которые неоднократно будут встречаться в дальнейшем.

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Этот предел называется **первым замечательным пределом.**

Он часто используется при вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{5x}$

В данном случае имеем неопределенность вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, поэтому теорема о пределе дроби здесь не применима. Чтобы вычислить этот предел, воспользуемся теоремой о замене переменной:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{5x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\frac{5}{2}\cdot 2x} = \frac{2}{5}\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \left\{\begin{matrix} \textit{замена}: 2x = t \\ \textit{при}\; x \to 0, t \to 0 \end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{2}{5}\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{2}{5}\cdot 1 = \frac{2}{5}$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg} x}{x}$

Выполним необходимые преобразования:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\cdot \frac{1}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\cdot \frac{\lim\limits_{x\to 0} 1}{\lim\limits_{x\to 0} \cos x} = 1\cdot \frac{1}{1} = 1$$

Второй замечательный предел

Равенства:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

называются **вторым замечательным пределом.**

Они широко используются при вычислении пределов в случае неопределенности вида $\{1^{\infty}\}$.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$

Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2} = \left\{\begin{matrix} \textit{замена}: \dfrac{x}{2} = t \\ \textit{при } x\to\infty, t\to\infty \end{matrix}\right\} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t\cdot 2} =$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{2} = e^{2}$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+8}{x-2}\right)^{x}$

Чтобы воспользоваться вторым замечательным пределом, выделим единицу в основании степени:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+8}{x-2}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x-2)+10}{x-2}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{10}{x-2}\right)^{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{10}}\right)^{\frac{x-2}{10}\cdot\frac{10}{x-2}\cdot x} = = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{10}}\right)^{\frac{x-2}{10}}\right]^{\frac{10x}{x-2}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x}{x-2}} = e^{10}$$

Сравнение бесконечно малых функций

Сравним две **б.м.ф.** между собой с помощью их отношения. Как известно, сумма, разность и произведение двух **б.м.ф.** есть функция бесконечно малая. Этого нельзя, вообще говоря, сказать об их частном. Отношение двух **б.м.ф.** может вести себя различным образом: предел этого отношения может быть конечным числом, равным нулю или отличным от него, быть равен бесконечности, или даже не существовать. Рассмотрим все возможные случаи.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ есть две **б.м.ф.** при одном и том же стремлении аргумента $x \to x_0$, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0 \; и \; \lim_{x\to x_0} \beta(x) = 0$$

1. Если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$,

то $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$ при $x \to x_0$. При этом используется следующая запись:

$$\alpha(x) = \boldsymbol{o}\big(\beta(x)\big), \;\; x \to x_0$$

(Читается: $\alpha(x)$ есть ***o*** малое от $\beta(x)$ при x, стремящемся к x_0)

Например: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} 2x = 0 \;\Rightarrow\; 2x^3 = \boldsymbol{o}(x^2), x \to 0.$

2. Если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$,

то $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более низкого порядка, чем $\beta(x)$ при $x \to x_0$, т.е. $\beta(x) = \boldsymbol{o}\big(\alpha(x)\big), \;\; x \to x_0$.

Например : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{2x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2x} = \infty \;\Rightarrow\; 2x^3 = \boldsymbol{o}(x^2), x \to 0.$

3. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{A} \neq 0$ $(\boldsymbol{A} \in \mathbf{R})$,

то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка при $x \to x_0$. При этом используется следующая запись:

$$\alpha(x) = \boldsymbol{O}\big(\beta(x)\big) \; \textit{или} \; \beta(x) = \boldsymbol{O}\big(\alpha(x)\big)$$

(Читается: $\alpha(x)$ есть $\boldsymbol{O}$ большое от $\beta(x)$ при x, стремящемся к x_0)

Например: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{2x} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \boldsymbol{O}(2x),\ x \to 0.$

4. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1,$

то бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными при $x \to x_0$. При этом используется следующая запись:

$$\alpha(x) \sim \beta(x), x \to x_0.$$

Например: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} x \sim x, x \to 0.$

5. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} -$ не существует,

то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются несравнимыми бесконечно малыми.

Например: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cdot \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x} -$ этот предел не существует,

$\Rightarrow \alpha(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ и $\beta(x) = x$ - несравнимые **б.м.ф.** при $x \to x_0$.

Определение 2. Бесконечно малая $\alpha(x)$ называется бесконечно малой $\boldsymbol{k}-$го порядка относительно бесконечно малой $\beta(x)$ при $x \to x_0$, если существует число $\boldsymbol{k} > 0$ такое, что:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k} = \boldsymbol{A}\,, где\ \boldsymbol{A} \neq 0, \boldsymbol{A} \in \mathbf{R}.$$

При этом используется следующая запись: $\alpha(x) = \boldsymbol{O}\left(\left(\beta(x)\right)^k\right), x \to x_0$

Пример 5. Найти порядок малости **б.м.ф.** $\alpha(x)$ относительно $\beta(x)$ при $x \to 0$, где $\alpha(x) = 1 - \cos x,\ \beta(x) = x$.

Рассмотрим предел отношения:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\left(\beta(x)\right)^{\,k}} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^k} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^k\cdot 2^k} = \{\text{при } k = 2\} = \frac{1}{2}$$

Значит, при $k = 2$ **б.м.ф.** $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ - сравнимы и одного порядка.

Говорят: $\alpha(x) = 1 - \cos x$ - **б.м.ф.** 2-го порядка малости относительно $\beta(x) = x$, т.е.

$1 - \cos x = \boldsymbol{O}(x^2)$ при $x \to 0$.

Эквивалентные бесконечно малые функции и основные теоремы о них

Среди бесконечно малых одного порядка особую роль играют так называемые **эквивалентные** бесконечно малые. Еще раз напомним это определение.

Определение 3.

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **эквивалентными бесконечно малыми** функциями при $x \to x_0$. Обозначается это так: $\alpha(x) \sim \beta(x), x \to x_0$.

Например: $\sin x \sim x$, при $x \to 0$, т. к. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

$$\text{tg}x \sim x, \text{при } x \to 0, \text{т. к.} \lim_{x\to 0}\frac{\text{tg}\, x}{x} = 1$$

Теорема 4. Для того, чтобы две **б.м.ф.** $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ были эквивалентными при $x \to x_0$, необходимо и достаточно, чтобы их разность была бесконечно малой большего порядка малости, чем каждая из этих бесконечно малых.

$$\begin{pmatrix} \alpha(x) \sim \beta(x), \\ x \to x_0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \Big(\alpha(x) - \beta(x) = \boldsymbol{o}\big(\alpha(x)\big)\Big)$$
$$\wedge \Big(\alpha(x) - \beta(x) = \boldsymbol{o}\big(\beta(x)\big)\Big), \textit{при } x \to x_0$$

Теорема 5. Сумма конечного числа бесконечно малых разных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка.

Например: $3x^3 + 7x^2 + 4x \sim 4x$, при $x \to 0$,

$$\text{т. к.} \lim_{x\to 0}\frac{3x^3 + 7x^2 + 4x}{4x} = \lim_{x\to 0}\frac{4x\left(\frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{4}x + 1\right)}{4x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{4}x + 1\right)$$
$$= 1$$

Теорема 6. Предел отношения двух **б.м.ф.** не изменится, если каждую или одну из них заменить эквивалентной ей бесконечно малой.

Теорема 6 о замене функций на эквивалентные широко используется при вычислении пределов, в частности для раскрытия неопределенностей вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Например, задачу, уже рассмотренную выше в **Примере 1**, можно решить следующим образом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5x} = \{\sin 2x \sim 2x, \text{при } x \to 0\} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$$

Пример 6.

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^3 + 7x^2 + 4x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{4x}{2x} = 2,$$

поскольку $3x^3 + 7x^2 + 4x \sim 4x;\ \sin 2x \sim 2x$ при $x \to 0$

Приведем еще примеры эквивалентных б.м.ф.

Пример 7. $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}} = 1\cdot 1 = 1 \quad \Rightarrow 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2} \text{ при } x \to 0$$

Пример 8. $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\sin(\arcsin x)} = \left\{\begin{matrix}\text{замена:}\\ \arcsin x = t\\ \text{при } x \to 0, t \to 0\end{matrix}\right\} =$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{1}{1} = 1 \quad \Rightarrow \arcsin x \sim x \text{ при } x \to 0$$

Пример 9. $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\log_a(1+x)$

$$= \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{т. к. функция } \log_a x - \text{непрерывная,}\\ \text{то можно использовать теорему о пределе}\\ \text{непрерывной функции}\end{matrix}\right\}$$

$$= \log_a\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \log_a e \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\log_a(1+x) \sim x\cdot\log_a e\\ \ln(1+x) \sim x\end{matrix}\right. \text{ при } x$$

$$\to 0$$

Пример 10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{x}{2}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)(\sqrt{1+x}+1)}{\frac{x}{2}(\sqrt{1+x}+1)}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{x}{2}(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x}-1 \sim \frac{x}{2} \text{ при } x\to 0$$

Ниже приведем **важнейшие эквивалентности**, которые используются при вычислении пределов. Все они выполняются **только при** $\boldsymbol{x\to 0}$.

$\boldsymbol{\sin x \sim x}$	$\boldsymbol{a^x - 1 \sim x\cdot \ln a}$
$\boldsymbol{\mathrm{tgx} \sim x}$	$\boldsymbol{e^x - 1 \sim x}$
$\boldsymbol{\arcsin x \sim x}$	$\boldsymbol{\ln(1+x) \sim x}$
$\boldsymbol{\mathrm{arctg}\, x \sim x}$	$\boldsymbol{\log_a(1+x) \sim x\cdot \log_a e}$
$\boldsymbol{1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}}$	$\boldsymbol{(1+x)^k - 1 \sim kx, k} > 0$ (в частности: $\boldsymbol{\sqrt{1+x}-1 \sim \frac{x}{2}}$)

Пример 11.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\arcsin(x-1)}{x^2-5x+4} = \left\{\begin{matrix}\arcsin(x-1)\sim(x-1), \text{т. к.}\\ \text{при x} \to 1 \Rightarrow (x-1)\to 0\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{\mathrm{x}\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x-4)} = \lim_{\mathrm{x}\to 1}\frac{1}{(x-4)} = -\frac{1}{3}$$

Пример 12.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3-4}{x^2-2}\right)^{\frac{x}{\sin 3x}} = \left\{\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^3-4}{x^2-2}\right)=2 \\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin 3x} = \{\sin 3x \sim 3x, \text{при } x\to 0\} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{3x} = \frac{1}{3} \end{matrix}\right\}$$

$$= 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$$

Пример 13.

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{\sin x}{\sin 4}\right)^{\frac{1}{x-4}} = \left\{\begin{matrix} \text{Имеем неопределенность вида } \{1^\infty\}, \\ \text{т. к. } \lim\limits_{x\to 4}\frac{\sin x}{\sin 4} = 1,\ \lim\limits_{x\to 4}\frac{1}{x-4} = \infty \end{matrix}\right\}$$

$$= \left\{\begin{matrix} \text{Замена: } t = x-4 \\ \text{при } x\to 4,\ \ t\to 0 \end{matrix}\right\} == \lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin(t+4)}{\sin 4}\right)^{\frac{1}{t}}$$

$$= \{\text{Используем } 2-\text{ой зам. предел}\} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(1+\left(\frac{\sin(t+4)}{\sin 4}-1\right)\right)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to 0}\left(1+\frac{\sin(t+4)-\sin 4}{\sin 4}\right)^{\frac{1}{t}}$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(1+\frac{2\cos\frac{t+8}{2}\cdot\sin\frac{t}{2}}{\sin 4}\right)^{\frac{\sin 4}{2\cos\frac{t+8}{2}\cdot\sin\frac{t}{2}}\cdot\frac{2\cos\frac{t+8}{2}\cdot\sin\frac{t}{2}}{\sin 4}\cdot\frac{1}{t}}$$

$$= \boldsymbol{e}^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{2\cos\frac{t+8}{2}\cdot\sin\frac{t}{2}}{\sin 4}\cdot\frac{1}{t}} == \boldsymbol{e}^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{2\cos\frac{t+8}{2}\cdot\frac{t}{2}}{\sin 4}\cdot\frac{1}{t}} = \boldsymbol{e}^{\frac{\cos 4}{\sin 4}} = \boldsymbol{e}^{\mathrm{ctg} 4}$$

Пример 14.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x} = \left\{\begin{matrix} \ln(1+\sin x) \sim \sin x \sim x,\ \ x\to 0 \\ \sin 4x \sim 4x,\ \ x\to 0 \end{matrix}\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{4x} = \frac{1}{4}$$

Особенности при вычислении пределов

Пример 15.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(\frac{\sin x-\sin x\cos x}{\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

Важное замечание. Замена функций на эквивалентные подчиняется правилам, которые изложены в **Теоремах 5** и **6**. Одна из самых распространенных ошибок при вычислении предела некоторого выражения заключается в замене функции, не являющейся множителем всего этого выражения, на эквивалентную функцию (чаще всего такая ошибочная замена делается в разности).

Например, если в данном примере сразу воспользоваться эквивалентностями $\boldsymbol{\sin x\sim x}$ и $\boldsymbol{\mathrm{tg}x\sim x}$ (при $x\to 0$) и заменить функции $\mathrm{tg}x$ и $\sin x$ на эквивалентную им при $x\to 0$ функцию x, то в числителе получим ноль. Было бы ошибкой на основании этого делать вывод, что предел тоже равен нулю.

Пример 16.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)\,(1-x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\mathrm{x}^2)}{x^2}=$$
$$=\left\{\ln(1-\mathrm{x}^2)=\ln\big(1+(-\mathrm{x}^2)\big)\sim(-x^2),\text{при } x\to 0\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x^2}=-1$$

(В данном примере также нельзя сразу воспользоваться эквивалентностями $\boldsymbol{\ln(1+x)\sim x}$ и $\boldsymbol{\ln(1-x)\sim -x}$)

Пример 17.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos\mathrm{x}}{\ln(1+\sin\mathrm{x}^2)}$$

$$=\left\{\begin{matrix}\ln(1+\sin\mathrm{x}^2)\sim\sin\mathrm{x}^2\sim\mathrm{x}^2, x\to 0\\ \ln\cos\mathrm{x}=\ln(1+(-1+\cos\mathrm{x}))\sim-(1-\cos x)\sim-\dfrac{x^2}{2}, x\to 0\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

Главная часть функции

Определение 4. Если функция $\beta(x)$ представима в виде $\beta(x)=\alpha(x)+o\big(\alpha(x)\big)$, то функция $\alpha(x)$ называется **главной частью** функции $\beta(x)$ при $x\to x_0$.

Выделение главной части бесконечно малой функции

Для начала выделим главную часть суммы **б.м.ф.**

Рассмотрим сумму $\boldsymbol{n}$ бесконечно малых функций $\alpha_k(x)$, определенных в окрестности точки x_0 :

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(x)=\alpha_1(x)+\cdots+\alpha_n(x),\ и\ \lim_{x\to x_0}\alpha_k(x)=0, \forall k=\overline{1,n}$$

Согласно **Теореме 1** алгебраическая сумма конечного числа **б.м.ф.** есть **б.м.ф.** Пусть при этом выполняется условие: $\alpha_k(x)=\boldsymbol{o}\big(\alpha_1(x)\big), k=\overline{2,n}$ при $x\to x_0$, т.е. $\forall\alpha_k(x)$ (где $k=\overline{2,n}$) имеет больший порядок малости по сравнению с $\alpha_1(x)$. В свою очередь $\alpha_1(x)$ имеет наименьший порядок малости по сравнению со всеми остальными слагаемыми. Тогда, согласно **Теореме 6**, имеем:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x) \sim \alpha_1(x), \text{если } \alpha_k(x) = \boldsymbol{o}\big(\alpha_1(x)\big), k = \overline{2,n} \text{ при } x \to x_0$$

$\Rightarrow$ {по **Теореме 4**} $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x) = \alpha_1(x) + \boldsymbol{o}\big(\alpha_1(x)\big) \Rightarrow$

$\alpha_1(x)$ - является **главной частью** этой суммы.

Таким образом, доказано следующее утверждение:

Утверждение 1. Главная часть суммы конечного числа бесконечно малых функций – это слагаемое более низкого порядка малости по сравнению с каждым из остальных слагаемых.

Очевидно, что если в сумме есть несравнимые слагаемые, то выделить главную часть нельзя.

Пример 18.

а) Главной частью суммы **б.м.ф.** $8x^3 + 7x^2 + 3x$ при $x \to 0$, является функция $3x$, т.к.

$$\lim_{x\to 0} \frac{8x^3 + 7x^2 + 3x}{3x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{8}{3}x^2 + \frac{7}{3}x + 1\right) = 1$$

б) Главная часть суммы **б.м.ф.** $8x^3 + 7x^2 + x\sin\frac{1}{x}$ при $x \to 0$ не существует, т.к. в последнее слагаемое в качестве множителя входит функция $y = \sin\frac{1}{x}$, предел которой при $x \to 0$ не существует.

Замена суммы **б.м.ф.** ее главной частью называется отбрасыванием бесконечно малых высшего порядка.

В общем случае можно говорить о выделении главной части не только у алгебраической суммы конечного числа **б.м.ф.**, но и у произвольной **б.м.ф.** при $x \to x_0$.

Согласно **Определению 4** и **Теореме 4**, любая функция $\alpha(x)$, эквивалентная данной $\beta(x)$, является ее главной частью. Однако, если задаваться **определенным видом** этой главной части, то главную часть можно определить однозначно. Обычно главную часть **б.м.ф.** (при $x \to x_0$) ищут в виде $\boldsymbol{C \cdot (x - x_0)^k}$.

Представим в виде таблицы возможные варианты выделения главной части **б.м.ф.** при различном стремлении аргумента и рассмотрим примеры для каждого случая.

$\boldsymbol{x_0}$	**Вид главной части**	**Выделение главной части б.м.ф. $\boldsymbol{f(x)}$**
$x \to 0$ $x_0 = 0$	$C \cdot x^k$	Если $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^k} = C$, где $C \neq 0$ $\Rightarrow f(x) = C \cdot x^k + o(x^k)$ $\Rightarrow \boldsymbol{f(x) \sim C \cdot x^k}$
$x \to x_0$ $x_0 = const \neq 0$	$C \cdot (x - x_0)^k$	Если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{(x-x_0)^k} = C$, где $C \neq 0$ $\Rightarrow f(x) = C \cdot (x - x_0)^k + o((x - x_0)^k)$ $\Rightarrow \boldsymbol{f(x) \sim C \cdot (x - x_0)^k}$
$x \to \infty$	$C \cdot \left(\dfrac{1}{x}\right)^k$	Если $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{f(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^k} = C$, где $C \neq 0$ $\Rightarrow f(x) = C \cdot \left(\dfrac{1}{x}\right)^k + o(x^k)$ $\Rightarrow \boldsymbol{f(x) \sim C \cdot \left(\dfrac{1}{x}\right)^k}$

Пример 19.

Выделить главную часть **б. м. ф.** $f(x) = \dfrac{2x}{1-x^3}$, $\quad x \to 0$

При данном стремлении аргумента главную часть функции будем искать в виде: $\boldsymbol{C \cdot x^k}$. Для того, чтобы найти числа $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{k}$, рассмотрим предел отношения:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^k} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{(1-x^3)x^k} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{(1-x^3)}\cdot\frac{x}{x^k} = \{\text{при } k=1\}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{2}{1-x^3} = 2$$

$\Rightarrow$ при $k = 1, C = 2 \;\Rightarrow \boldsymbol{f(x) = \dfrac{2x}{1-x^3} \sim 2x}$, при $\boldsymbol{x \to 0}$

Пример 20.

Выделить главную часть **б.м.ф.** $f(x) = x^2 + 4x + 4$, $x \to -2$

В этом случае ищем главную часть в виде $\boldsymbol{C \cdot (x+2)^k}$. Найдем числа $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{k}$:

$$\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{(x+2)^k} = \lim_{x\to -2}\frac{x^2+4x+4}{(x+2)^k} = \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)^2}{(x+2)^k} = \{\text{при } k=2\} = 1$$

$\Rightarrow$ при $k = 2, C = 1 \;\Rightarrow \boldsymbol{f(x) = x^2 + 4x + 4 \sim (x+2)^2}$, при $\boldsymbol{x \to -2}$

Пример 21.

Выделить главную часть **б. м. ф.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\cdot\sin\dfrac{1}{x}$, $\quad x \to \infty$

При $x \to \infty$ главную часть ищем в виде $\boldsymbol{C \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^k}$. Найдем числа $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{k}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^k}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}\cdot\sin\frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^k}=\left\{\begin{matrix}\sin\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x}\text{ , т. к.}\\ \text{при } x\to\infty,\frac{1}{x}\to 0\end{matrix}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^k}=1$$

$$\Rightarrow \text{при } k=3, C=1\ \Rightarrow \boldsymbol{f(x)=\frac{1}{x^2}\cdot\sin\frac{1}{x}\sim\left(\frac{1}{x}\right)^3}\ ,\ \textbf{при } \boldsymbol{x\to\infty}$$

Бесконечно большие функции (б.б.ф.)

Введем понятие бесконечно большой (**б.б.ф.**) функции.

Определение 5. Функция $y=f(x)$ называется **бесконечно большой** при $x\to x_0$, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$$

По определению предела функции это равенство означает, что для любого числа $M>0$ существует число $\delta=\delta(M)>0$ такое, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $0<|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)|>M$.

В логической символике:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty\ \Leftrightarrow ((\forall M>0\ \exists\delta=\delta(M)>0, \forall x: 0<|x-x_0|<\delta)$$
$$\Rightarrow |f(x)|>M)$$

Например, функция $f(x)=\dfrac{1}{x-5}$ есть б. б. ф. при $x\to 5$.

Сравнение бесконечно больших функций

Пусть $A(x)$ и $B(x)$ есть две **б.б.ф.** при одном и том же стремлении аргумента $x \to x_0$, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} A(x) = \infty \; и \; \lim_{x\to x_0} B(x) = \infty$$

Сравним две **б.б.ф.** между собой с помощью их отношения (аналогично сравнению **б.м.ф.**) и рассмотрим все возможные случаи.

1. Если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{A(x)}{B(x)} = 0$,

то $A(x)$ называется бесконечно большой более низкого порядка роста, чем $B(x)$ при $x \to x_0$, т.е. $A(x) = \boldsymbol{o}\big(B(x)\big),\ x \to x_0$.

2. Если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{A(x)}{B(x)} = \infty$,

то $A(x)$ называется бесконечно большой более высокого порядка роста, чем $B(x)$ при $x \to x_0$, т.е. $B(x) = \boldsymbol{o}\big(A(x)\big),\ x \to x_0$.

3. Если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{A(x)}{B(x)} = \boldsymbol{C}$, где $\boldsymbol{C} \neq 0$ ($\boldsymbol{C} \in \mathbf{R}$),

то $A(x)$ и $B(x)$ называются бесконечно большими одного порядка роста при $x \to x_0$, т.е. $A(x) = \boldsymbol{O}\big(B(x)\big)$ или $B(x) = \boldsymbol{O}\big(A(x)\big), x \to x_0$.

4. Если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{A(x)}{B(x)} = 1$,

то бесконечно большие $A(x)$ и $B(x)$ называются эквивалентными при $x \to x_0$, т.е. $A(x) \sim B(x), x \to x_0$.

5. Если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{A(x)}{B(x)}$ не существует,

то $A(x)$ и $B(x)$ называются несравнимыми бесконечно большими.

Например, функции $A(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ и $B(x) = x$ при $x \to \infty$ являются эквивалентными **б.б.ф.**, т.к.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\cdot\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x} = 1;$$

а функции $A(x) = x(2+\cos x)$ и $B(x) = x$ - несравнимые **б.б.ф.** при $x \to \infty$,

т. к. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(2+\cos x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}(2+\cos x) -$ не существует.

Определение 6. Бесконечно большая функция $A(x)$ называется бесконечно большой $\boldsymbol{k}-$го порядка относительно бесконечно большой $B(x)$ при $x \to x_0$, если существует число $\boldsymbol{k} > 0$ такое, что:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{A(x)}{(B(x))^k} = \boldsymbol{C}\text{, где } \boldsymbol{C} \neq 0 \ (\boldsymbol{C} \in \mathbf{R}).$$

При этом используется следующая запись: $A(x) = \boldsymbol{O}\left(\left(B(x)\right)^k\right),\ x \to x_0$.

Пример 22. Найти порядок роста **б.б.ф.** $A(x)$ относительно $B(x)$ при $x \to \infty$, если

$$A(x) = \frac{5x^6}{3x^4 + x^3 + 2}\ , \qquad B(x) = x$$

Рассмотрим предел:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{A(x)}{\left(B(x)\right)^k} = \lim_{x\to\infty}\frac{5x^6}{x^k(3x^4 + x^3 + 2)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{5x^6}{3x^{4+k} + x^{3+k} + 2x^k} = \ (\text{при } k = 2) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{5x^6}{3x^6 + x^5 + 2x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{5}{3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^4}} = \frac{5}{3} \neq 0$$

$\Rightarrow A(x) -$ **б.б.ф.** $2 -$ го порядка роста относительно $B(x)$ при $x \to \infty$,

$\Rightarrow A(x) = \boldsymbol{O}\left(\left(B(x)\right)^k\right), x \to \infty.$

Выделение главной части бесконечно большой функции

Для начала выделим главную часть суммы **б.б.ф.**

Рассмотрим конечную сумму $\boldsymbol{n}$ бесконечно больших функций $\beta_k(x)$, определенных в окрестности точки x_0, в которой одно из слагаемых имеет более высокий порядок роста по сравнению с остальными. Тогда, используя **Определение 4** главной части функции, можно доказать следующее утверждение:

Утверждение 2. Главной частью суммы конечного числа бесконечно больших функций является слагаемое более высокого порядка роста по сравнению с каждым из остальных слагаемых.

(Доказательство проводится так же, как и для суммы бесконечно малых функций.)

В общем случае можно говорить о выделении главной части не только у алгебраической суммы конечного числа **б.б.ф.**, но и у произвольной **б.б.ф.** при $x \to x_0$.

Представим в виде таблицы возможные варианты выделения главной части **б.б.ф.** при различном стремлении аргумента, аналогичную приведенной выше таблице для **б.м.ф.**

$\boldsymbol{x_0}$	**Вид главной части**	**Выделение главной части б.б.ф. $\boldsymbol{f(x)}$**
$x \to 0$ $x_0 = 0$	$C \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^k$	Если $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^k} = C,$ где $C \neq 0$ $\Rightarrow f(x) = C \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^k + o(\left(\frac{1}{x}\right)^k)$ $\Rightarrow \boldsymbol{f(x) \sim C \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^k}$
$x \to x_0$ $x_0 = const \neq 0$	$C \cdot \left(\frac{1}{x - x_0}\right)^k$	Если $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x-x_0}\right)^k} = C,$ где $C \neq 0$ $\Rightarrow f(x) = C \cdot \left(\frac{1}{x-x_0}\right)^k$ $+ o(\left(\frac{1}{x-x_0}\right)^k)$ $\Rightarrow \boldsymbol{f(x) \sim C \cdot \left(\frac{1}{x-x_0}\right)^k}$
$x \to \infty$	$C \cdot x^k$	Если $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x^k} = C,$ где $C \neq 0$ $\Rightarrow f(x) = C \cdot x^k + o(x^k)$ $\Rightarrow \boldsymbol{f(x) \sim C \cdot x^k}$

Пример 23. Выделить главную часть **б.б.ф.**

$f(x) = \dfrac{2x^5}{1 - x^3}$ при $x \to \infty$

При данном стремлении аргумента будем искать главную часть **б.б.ф.** в виде $\boldsymbol{C \cdot x^k}$. Для нахождения чисел $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{k}$ найдем предел отношения:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^k}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5}{(1-x^3)x^k}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5}{x^k-x^{k+3}}=\{k+3=5\Rightarrow k=2\}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5}{x^2-x^5}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\frac{1}{x^3}-1}=-2\Rightarrow k=2, C=-2, f(x)\sim C\cdot x^k$$

Следовательно $f(x)=\dfrac{2x^5}{1-x^3}\sim-2x^2$ при $x\to\infty$

Между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями существует связь. Сформулируем соответствующую теорему.

Теорема 7. Если функция $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x\to x_0$ ($\alpha(x)\neq 0$) , то функция $\frac{1}{\alpha(x)}$ есть бесконечно большая при $x\to x_0$ и наоборот: если функция $\beta(x)$ - бесконечно большая при $x\to x_0$ ($\beta(x)\neq 0$) то функция $\frac{1}{\beta(x)}$ есть бесконечно малая при $x\to x_0$.

В следующих задачах **24, 25, 26** нужно для двух заданных функций $f(x)$ и $g(x)$:

а) Показать что обе функции являются **б.м.** или **б.б.** при $x\to 3$.

б) Для каждой функции $f(x)$ и $g(x)$ записать главную часть вида

$\boldsymbol{C\cdot(x-x_0)^k}$, указать порядок малости (роста) этих функций.

в) Сравнить функции $f(x)$ и $g(x)$, если это возможно.

Пример 24.

$\boldsymbol{f(x)=\sin\pi x}$ **;** $\boldsymbol{g(x)=\log_2\left(\frac{x}{3}\right)}$ $\boldsymbol{x\to 3}$

а) Покажем, что при $x \to 3$ обе функции являются **б.м.ф.** Вычислим пределы:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \sin \pi x = \sin 3\pi = 0 \;\Rightarrow \boldsymbol{f(x)} - \textbf{б. м. ф. при } \boldsymbol{x \to 3}$$

$$\lim_{x\to 3} g(x) = \lim_{x\to 3} \log_2\left(\frac{x}{3}\right) = \log_2 1 = 0 \;\Rightarrow \boldsymbol{g(x)} - \textbf{б. м. ф. при } \boldsymbol{x \to 3}$$

б) $f(x)$ и $g(x)$ являются **б.м.ф.** при $x \to 3$. Следовательно главную часть этих функций будем искать в виде $\boldsymbol{C \cdot (x-3)^k}$. Найдем числа $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{k}$:

$$\lim_{x\to 3} \frac{f(x)}{(x-3)^k} = \lim_{x\to 3} \frac{\sin \pi x}{(x-3)^k} = \begin{Bmatrix} \textit{замена}: \\ t = x - 3 \Rightarrow x = t + 3 \\ \textit{при } x \to 3, t \to 0 \end{Bmatrix} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(\pi t + 3\pi)}{t^k}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-\sin \pi t}{t^k} == \begin{Bmatrix} \sin \pi t \sim \pi t \\ \textit{при } t \to 0, \pi t \to 0 \end{Bmatrix} = -\lim_{t\to 0} \frac{\pi t}{t^k} = -\pi \lim_{t\to 0} \frac{t}{t^k}$$

$$= (\textit{при } k = 1) = -\pi$$

$$\Rightarrow k = 1, C = -\pi \;;\;\; f(x) \sim C \cdot (x - x_0)^k$$

Следовательно:

$$\boldsymbol{f(x) \sim -\pi(x-3)} \;\; \textbf{при } \boldsymbol{x \to 3}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{g(x)}{(x-3)^k} = \lim_{x\to 3} \frac{\log_2\left(\frac{x}{3}\right)}{(x-3)^k} = \begin{Bmatrix} \textit{замена}: \\ t = x - 3 \Rightarrow x = t + 3 \\ \textit{при } x \to 3, t \to 0 \end{Bmatrix} = \lim_{t\to 0} \frac{\log_2\left(\frac{t+3}{3}\right)}{t^k} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\log_2\left(1 + \frac{t}{3}\right)}{t^k} = \begin{Bmatrix} \log_2\left(1 + \frac{t}{3}\right) \sim \frac{t}{3} \log_2 e \\ \textit{при } t \to 0, \frac{t}{3} \to 0 \end{Bmatrix} = \lim_{t\to 0} \frac{\log_2 e}{3} \cdot \frac{t}{t^k}$$

$$== (\textit{при } k = 1) = \frac{\log_2 e}{3}$$

$$\Rightarrow k = 1, C = \frac{1}{3} \log_2 e \;;\;\; g(x) \sim C \cdot (x - x_0)^k$$

Значит:

$$\boldsymbol{g(x) \sim \left(\frac{1}{3}\log_2 e\right) \cdot (x-3)} \ \textbf{при}\ \boldsymbol{x \to 3}$$

в) Выделив главные части обеих функций, мы видим, что при $x \to 3$ обе функции имеют первый порядок малости относительно **б.м.ф.** $(x-3)$. Следовательно они являются **б.м.ф**. одного порядка при $x \to 3$. В этом можно убедиться и непосредственно, вычислив предел их отношения при $x \to 3$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{g(x)} = \left\{\begin{matrix} \text{при } x \to 3 \\ f(x) \sim -\pi(x-3) \\ g(x) \sim \left(\frac{1}{3}\log_2 e\right)\cdot(x-3) \end{matrix}\right\} = \lim_{x\to 3}\frac{-\pi(x-3)}{\left(\frac{1}{3}\log_2 e\right)\cdot(x-3)} = \frac{-3\pi}{\log_2 e}$$

$$= -3\pi \ln 2 \neq 0$$

Следовательно:

$$\boldsymbol{f(x) = O\big(g(x)\big)} \ \textbf{при}\ \boldsymbol{x \to 3}.$$

Пример 25.

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3 + x\sin x}{x + \sqrt[3]{x}};\ \ g(x) = \frac{x^2+x+1}{x+2} \quad x \to \infty}$$

а) Докажем, что обе функции при $\boldsymbol{x} \to \infty$ являются **б.б.ф.**

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3 + x\sin x}{x + \sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1 + \frac{1}{x^2}\sin x}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^8}}} = \infty$$

$\Rightarrow \boldsymbol{f(x) - \text{б.б.ф.}}$ при $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x+2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = \infty$$

$\Rightarrow \boldsymbol{g(x)} - \textbf{б. б. ф.}$ при $x \to \infty$

б) $f(x)$ и $g(x)$ являются **б.б.ф.** при $x \to \infty$. Следовательно главную часть этих функций будем искать в виде $\boldsymbol{C \cdot x^k}$ $(\boldsymbol{k} > 0)$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^k} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + x\sin x}{(x + \sqrt[3]{x})x^k} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + x\sin x}{x^{k+1} + x^{k+\frac{1}{3}}} = \{\text{при } k + 1 = 3 \Rightarrow k = 2\}$$

$$== \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + x\sin x}{x^3 + x^{\frac{7}{3}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}\sin x}{1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}} = 1$$

$\Rightarrow k = 2, C = 1;\ f(x) \sim C \cdot x^k$

Таким образом:

$$\boldsymbol{f(x) \sim x^2} \text{ при } x \to \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x^k} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x + 1}{(x + 2)x^k} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^{k+1} + 2x^k} = \{\text{при } k + 1 = 2 \Rightarrow k = 1\} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} = 1$$

$\Rightarrow k = 1, C = 1;\ g(x) \sim C \cdot x^k$

Следовательно:

$$\boldsymbol{g(x) \sim x} \text{ при } x \to \infty$$

в) Выделив главные части обеих функций, мы видим, что при $x \to \infty$ функция $f(x)$ имеет второй порядок, а функция $g(x)$ - первый порядок роста относительно **б.б.ф.** x. Следовательно $f(x)$ имеет более высокий порядок роста (а именно второй) по сравнению с $g(x)$ при $x \to \infty$. Убедимся в этом непосредственно:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} x = \infty \;\Rightarrow\; \boldsymbol{g(x) = o\big(f(x)\big)}\ \textbf{\textit{при}}\ \boldsymbol{x} \to \infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\big(g(x)\big)^k} = \begin{Bmatrix} f(x)\sim x^2 \ \text{ при } x\to\infty \\ g(x)\sim x \ \text{ при } x\to\infty \end{Bmatrix} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^k} = \{\text{при } k=2\} = 1 \neq 0$$

Следовательно:

$$\boldsymbol{g(x) = o\big(f(x)\big)} \quad \text{при } x\to\infty$$

$$\textbf{или } \boldsymbol{f(x)\sim\big(g(x)\big)^2} \quad \text{при } x\to\infty$$

Пример 26.

$$\boldsymbol{f(x) = x\cdot\sin\frac{1}{x};\quad g(x) = \sin x \qquad x\to 0}$$

а) Покажем, что при $x\to 0$ обе функции являются **б.м.ф.** Вычислим пределы:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x} = (\text{по } \textbf{Теореме 2}) = 0 \;\Rightarrow \boldsymbol{f(x)} - \textbf{б. м. ф. при } \boldsymbol{x\to 0}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\sin x = 0 \Rightarrow \boldsymbol{g(x)} - \textbf{б. м. ф. при } \boldsymbol{x\to 0}$$

б) Мы доказали , что$f(x)$ и $g(x)$ являются **б.м.ф.** при $x\to 0$. Значит главную часть этих функций будем искать в виде $\boldsymbol{C\cdot x^k}$ ($\boldsymbol{k} > 0$).

Рассмотрим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^k} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin\frac{1}{x}}{x^k} = \begin{cases} \nexists, \text{при } \forall k \geq 1 \\ 0, \text{при } \forall k < 1 \end{cases}$$

А это означает, что $\boldsymbol{f(x)}$ – **не имеет главной части вида** $\boldsymbol{C\cdot x^k}$ (**C** $\neq$ **0**) **при** $\boldsymbol{x\to 0}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^k} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^k} = \{\text{при } k=1\} = 1$$

$\Rightarrow k = 1, C = 1;\ \ g(x) \sim C \cdot x^k$

Следовательно:

$$\boldsymbol{g(x) \sim x} \text{ при } x \to 0$$

в) Сравним две функции:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x \cdot \sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \left\{\begin{matrix}\text{при } x \to 0 \\ \sin x \sim x\end{matrix}\right\} = \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x} - \text{не существует}$$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{f(x)}$ **и** $\boldsymbol{g(x)}$ **не сравнимы при** $\boldsymbol{x \to 0}$.

Контрольное задание для самостоятельной работы

N1

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\mathrm{tg}(3x)}{\mathrm{tg}x}$ $\left(\dfrac{1}{3}\right)$	11. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\mathrm{tg}\pi x}$ $\left(\dfrac{1}{2\pi}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to-\pi}\dfrac{\sin 4x}{x^2+\pi x}$ $\left(-\dfrac{4}{\pi}\right)$	12. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(3-2x)}{\mathrm{arctg}(3x-3)}$ $\left(-\dfrac{2}{3}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\lg(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}$ $\left(\dfrac{8}{3\ln 10}\right)$	13. $\lim\limits_{x\to2\pi}\dfrac{\sin 7x-\sin 3x}{e^{x^2}-e^{4\pi^2}}$ $\left(\dfrac{1}{\pi e^{4\pi^2}}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{5-5^x}$ $\left(\dfrac{\pi}{10\ln 5}\right)$	14. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x^2-\pi x}{\sin x}$ $(-\pi)$
5. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\arcsin^2(3x-3)}{1+\cos\pi x}$ $\left(\dfrac{18}{\pi^2}\right)$	15. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sin 2x}{(\pi-4x)^2}$ $\left(\dfrac{1}{8}\right)$
6. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3^{5x-3}-3^{2x^2}}{\mathrm{tg}\pi x}$ $\left(\dfrac{9\ln 3}{\pi}\right)$	16. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{\ln x}$ (2)
7. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cos\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)\pi\right)\mathrm{tg}\pi x}{\arcsin((1-x)^2)}$ (π^2)	17. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}$ $\left(\dfrac{9}{98}\right)$
8. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{\sin\pi x}$ $\left(\dfrac{1}{2\pi}\right)$	18. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}$ $\left(-\dfrac{7}{8}\right)$
9. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos 3x}{\mathrm{tg}^2 2x}$ $\left(\dfrac{9}{8}\right)$	19. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x^2-\pi^2}{\sin x}$ (-2π)
10. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+\cos\pi x}{\mathrm{tg}^2 2x}$ $\left(\dfrac{1}{2}\right)$	20. $\lim\limits_{x\to3\pi}\dfrac{2^x-8^\pi}{\sin 7x-\sin 3x}$ $(-2^{3\pi-2}\cdot\ln 2)$

***) В скобках дан правильный ответ**

N2

1. $\lim\limits_{x\to 8}\left(\dfrac{2x-7}{x+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-2}}$ $\left(e^{\frac{4}{3}}\right)$	11. $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 2x}}$ $\left(e^{-\frac{1}{8}}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{\arcsin^2\sqrt{x}}\right)^{\frac{3}{x}}$ (e^{-3})	12. $\lim\limits_{x\to +0}\left(2-5^{\arcsin x^2}\right)^{\frac{\mathrm{cosec} x}{x}}$ $\left(\dfrac{1}{5}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos 3x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$ $\left(e^{\frac{9}{2}}\right)$	13. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{6-x}{3}\right)^{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{6}}$ $\left(e^{\frac{2}{\pi}}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right)^{\mathrm{ctg} x}$ (e^{-2})	14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-3^{\sin x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ $\left(\dfrac{1}{3}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{9-2x}{3}\right)^{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{6}}$ $\left(e^{\frac{4}{\pi}}\right)$	15. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2 3x)^{\frac{1}{\ln\cos x}}$ (e^{-18})
6. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}$ (e^{3})	16. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x\sin x)^{\frac{1}{\ln(1+\pi x^2)}}$ $\left(e^{-\frac{1}{\pi}}\right)$
7. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{9x-7}{x+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}$ (e^{12})	17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{3x^2}}$ $\left(e^{\frac{1}{2}}\right)$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\right)^{\frac{\arcsin x}{\sqrt[3]{x^4}}}$ (e^{-1})	18. $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}}\left(2-\dfrac{2x}{3}\right)^{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{6}}$ $\left(e^{\frac{2}{\pi}}\right)$
9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{\sin x}\right)^{\mathrm{ctg}\pi x}$ $\left(e^{-\frac{1}{\pi}}\right)$	19. $\lim\limits_{x\to 1}(1+\mathrm{tg}\pi x)^{\frac{1}{x-1}}$ (e^{π})
10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(5-\dfrac{4}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ (e^{-8})	20. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}$ (e^{3})

***) В скобках дан правильный ответ**

Литература

1. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / под ред. Б.П.Демидовича. М.: Астрель, 2003.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: В2-ч т. Т.1. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1982.
3. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1979.
4. Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах: Функции одной переменной. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1970.
5. Морозова В.Д. Введение в анализ. М.:Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005.
6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учеб.пособ. для втузов: В 2-ч т. Т. 1. М.: Интеграл-Пресс, 2006.
7. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа/ Под ред. А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича. В 3-ч т. Т. 1. М.:Наука, 1993.

Оглавление