Министерство образования Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(государственный университет)

С.В. Иванова

ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИЙ

Учебно-методическое пособие

Москва, 2011

С.В. Иванова. Формула Тейлора и ее приложения к вычислению пределов функций.
Учебно-методическое пособие. М.: МФТИ, 2011. 66 с.

В методическом пособии изложены практические приемы представления функций формулой Тейлора, а также приемы вычисления пределов функций с использованием формулы Тейлора. Рассмотрено большое количество примеров. Кратко приведены необходимые теоретические сведения, в том числе в компактной форме представлены таблицы представлений формулой Маклорена основных элементарных функций для представления функций и для использования при вычислении пределов (первые 3-4 члена представления). Предложено большое количество задач разной степени сложности с ответами. Пособие предназначено для студентов и преподавателей университетов и технических вузов.

Содержание

1. СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Сравнение функций

Пусть функция $g(x)$ не обращается в ноль в некоторой проколотой окрестности точки x_0. Тогда:
а) если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$, то говорят, что функция $f(x)$ эквивалентна функции $g(x)$ при $x \to x_0$, и пишут

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

б) если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, то говорят, что функция $f(x)$ есть o-малое от функции $g(x)$ при $x \to x_0$, и пишут

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{при} \quad x \to x_0. \tag{1}$$

Замечание 1. Формулу вида (1) следует читать только слева направо, так как правая часть обозначает класс функций, бесконечно малых по сравнению с $g(x)$ при $x \to x_0$. Равенство (1) можно понимать как обозначение принадлежности функции $f(x)$ к классу $o(g(x))$.

Запись $f(x) = o(1)$ означает, что функция $f(x)$ является бесконечно малой при $x \to x_0$, то есть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Если $f(x) = o(g(x))$, где $g(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to x_0$, то функцию $f(x)$ называют бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с функцией $g(x)$ при $x \to x_0$.

Для того чтобы функция $f(x)$ была эквивалентна функции $g(x)$ при $x \to x_0$, необходимо и достаточно, чтобы имела место формула

$$f(x) - g(x) = o(g(x)) \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

в) в представлении вида $f(x) = a(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$ при $x \to x_0$, где $a \neq 0$, слагаемое $a(x-x_0)^n$ называется главной частью функции $f(x)$ при $x \to x_0$.

1.2. Некоторые формулы преобразования выражений, содержащих o-малое

Пусть в левой части равенства запись вида $o(f)$ обозначает конкретного представителя класса $o(f)$, $x \to x_0$, $C \neq 0$ — постоянная. Тогда имеют место формулы:

$$o(Cf) = o(f)\,; \tag{2}$$

$$C \cdot o(f) = o(f)\,; \tag{3}$$

$$o(f) + o(f) = o(f)\,; \tag{4}$$

$$o(o(f)) = o(f)\,; \tag{5}$$

$$o(f + o(f)) = o(f)\,; \tag{6}$$

$$o(f) \cdot o(g) = o(fg)\,; \tag{7}$$

$$f^{n-1}\, o(f) = o(f^n)\,; \tag{8}$$

$$\frac{o(f^n)}{f} = o\big(f^{n-1}\big)\,, \text{ если } f\,(x) \neq 0 \;\; \forall x \in \dot{U}_\delta\,(x_0)\,; \tag{9}$$

$$(o(f))^\alpha = o(f^\alpha)\,, \alpha > 0. \tag{10}$$

Например, формула (7) означает, что произведение $\alpha\,(x) \cdot \beta\,(x)$ любого элемента $\alpha\,(x)$ из класса функций $o(f)$ и $\beta\,(x)$ из класса функций $o(g)$ является элементом класса функций $o(fg)$.

Замечание 2. Приведенные формулы следует читать только слева направо, учитывая, что в левых частях указан конкретный представитель класса, а в правых — класс функций. Некоторые из указанных формул неверны при использовании их справа налево.

1.3. Формула Тейлора

1.3.1. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

Пусть существует $f^{(n)}\,(x_0)$. Тогда имеет место представление

$$f\,(x) = f\,(x_0) + \frac{f'\,(x_0)}{1!}\,(x - x_0) + \frac{f''\,(x_0)}{2!}\,(x - x_0)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n)}\,(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \;\text{ при }\; x \to x_0$$

или, в сокращенной форме,

$$f\,(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}\,(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \text{ при } x \to x_0. \tag{11}$$

Многочлен

$$P_n\,(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}\,(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k$$

называется многочленом Тейлора функции $f\,(x)$ в точке x_0.

Функция $r_n\,(x) = f\,(x) - P_n\,(x)$, где $r_n\,(x) = o((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$, называется остаточным членом n-го порядка формулы Тейлора.

Формула (11) называется формулой Тейлора n-го порядка для функции $f\,(x)$ в окрестности точки x_0 с остаточным членом в форме Пеано.

1.3.2. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

Если функция $f\,(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 производные до $(n+1)$-го порядка включительно, то для любой точки x из этой окрестности найдется точка ξ, лежащая между x и x_0 ($x < \xi < x_0$ или $x_0 < \xi < x$), и такая, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (12)$$

Формула (12) называется формулой Тейлора с остаточным членом $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ в форме Лагранжа.

1.3.3. Теорема единственности представления формулой Тейлора

Пусть существует $f^n(x_0)$. Тогда функция $f(x)$ единственным образом представима в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) \quad \text{при} \quad x \to x_0, \qquad (13)$$

причем коэффициенты представления (13) определяются формулами $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

1.3.4. Формула Маклорена

Если $x_0 = 0$, то формула Тейлора принимает вид

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n) \quad \text{при} \quad x \to 0 \qquad (14)$$

и называется формулой Маклорена.

Приведем представления формулой Маклорена основных функций:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad \text{или}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \quad \text{при} \quad x \to 0. \qquad (15)$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\big(x^{2n+1}\big) \quad \text{или}$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\big(x^{2n+1}\big) \quad \text{при} \quad x \to 0. \qquad (16)$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\big(x^{2n+2}\big) \quad \text{или}$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\big(x^{2n+2}\big) \quad \text{при} \quad x \to 0. \qquad (17)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\big(x^{2n+1}\big) \quad \text{или}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\big(x^{2n+1}\big) \quad \text{при} \quad x \to 0. \qquad (18)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\big(x^{2n+2}\big) \quad \text{или}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\big(x^{2n+2}\big) \quad \text{при} \quad x \to 0. \qquad (19)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \\ + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n) \quad \text{или}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} C_\alpha^k x^k + o(x^n), \quad \text{при} \quad x \to 0, \ \alpha \notin \mathbb{N}, \alpha \neq 0, \qquad (20)$$

где $C_\alpha^0 = 1, C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(k-1))}{k!}$, $k = 1, 2, \ldots$; в частности,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) \quad \text{при} \quad x \to 0; \qquad (21)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) \quad \text{при} \quad x \to 0. \quad (22)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \quad \text{или}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^n) \quad \text{при} \quad x \to 0; \quad (23)$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \quad \text{при} \quad x \to 0. \quad (24)$$

Важными на практике являются свойства представлений формулой Маклорена *четных и нечетных функций.*

Пусть $f(x)$ — четная функция и существует $f^{(2n+1)}(0)$, тогда ее формула Маклорена примет вид

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + o\big(x^{2n+1}\big) \quad \text{при} \quad x \to 0. \quad (25)$$

Пусть $f(x)$ — нечетная функция и существует $f^{(2n+2)}(0)$, тогда ее формула Маклорена примет вид

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o\big(x^{2n+2}\big) \quad \text{при} \quad x \to 0. \quad (26)$$

Замечание 3. Порядок o-малого в представлениях (25) и (26) на единицу выше степени последнего члена многочлена, так как в обоих представлениях слагаемое, следующее за старшей степенью многочлена Тейлора, равно нулю.

1.4. Операции над представлениями формулой Маклорена

Замечание 4. Арифметические операции над представлениями формулой Тейлора в окрестности точки x_0 выполняют аналогично формуле Маклорена. Важно, что арифметические операции применимы только к представлениям формулой Тейлора в окрестности одной и той же точки x_0.

Сложение и вычитание представлений функций формулой Маклорена осуществляется путем выполнения соответствующих операций над коэффициентами при одинаковых степенях. Если

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n), \quad g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n), \ x \to 0, \ \text{то}$$

$$1) \ f(x) \pm g(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k \pm b_k) x^k + o(x^n), \ x \to 0;$$

$$2) \ f(x)\,g(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + o(x^n), \ x \to 0, \ \text{где} \quad c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}.$$

Замечание 5. Умножение и возведение в степень представлений формулой Маклорена осуществляется по стандартным формулам умножения и возведения в степень многочленов, но с учетом правил преобразования выражений, содержащих o-малое ((2) — (10), с. 6).

Представление *формулой Маклорена сложной функции* $F(x) = f(\varphi(x))$ до $o(x^n)$, где $\varphi(x) = o(1)$ при $x \to 0$, получаем следующим образом:
1) представляем функцию $\varphi(x)$ формулой Маклорена до $o(x^n)$;
2) представляем функцию $f(y)$ формулой Маклорена до $o(y^n)$;
3) заменяем y представлением формулой Маклорена функции $\varphi(x)$;

4) раскрываем скобки, сохраняя члены степени не выше n.

В частности, если $\varphi(x) = Ax^m$, $m \in \mathbb{N}$, $f(y) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k y^k + o(y^n)$, то

$$F(x) = f(Ax^m) = \sum_{k=0}^{n} A^k a_k x^{mk} + o(x^{mn}), \ x \to 0.$$

Представление формулой Маклорена частного двух функций получают используя правило представления сложной функции. Пусть $f(x) = \frac{\alpha(x)}{1+\beta(x)} = \alpha(x) \cdot \frac{1}{1+\beta(x)}$, где $\beta(x) \to 0$. Второй множитель представляем формулой Маклорена по правилу представления сложной функции для внешней функции $\frac{1}{1+y}$. Затем перемножаем представления сомножителей.

Для получения представления частного двух функций формулой Маклорена используется также *метод неопределенных коэффициентов*.

Пусть $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ и известны представления функций $g(x)$ и $h(x)$ формулой Маклорена, то от равенства $f(x)\,h(x) = g(x)$ переходим к равенству соответствующих представлений формулой Маклорена, причем для функции $f(x)$ берем представление с неопределенными коэффициентами. В левой части раскрываем скобки по правилу умножения представлений и получаем систему уравнений. Приравниваем коэффициенты при соответствующих степенях представлений в левой и правой частях. Решения системы являются коэффициентами искомого представления функции $f(x)$.

Связь представлений формулой Маклорена функции и ее производной.

Пусть существует $f^{(n+1)}(0)$ и известно, что

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n), \text{ тогда}$$

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o\left(x^{n+1}\right), \quad (27)$$

то есть слагаемые многочлена Тейлора функции $f(x)$ получаются почленным интегрированием многочлена Тейлора производной $f'(x)$. Важно при интегрировании не потерять член нулевого порядка $f(0)$.

1.5. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Предел функции вида $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Пусть $f(x) = ax^n + o(x^n)$ и $g(x) = bx^n + o(x^n)$, $x \to 0$, $b \neq 0$.

$$\text{Тогда } \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{ax^n + o(x^n)}{bx^n + o(x^n)} = \frac{a}{b}.$$

Предел функции вида $(f(x))^{\frac{1}{g(x)}}$.

Пусть $f(x) = 1 + ax^n + o(x^n)$, $x \to 0$, $a \neq 0$ и
$g(x) = bx^n + o(x^n)$, $x \to 0$, $b \neq 0$.

$$\text{Тогда } \lim_{x\to 0} f(x)^{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x\to 0} \left(1 + ax^n + o(x^n)\right)^{\frac{1}{(bx^n + o(x^n))}} = e^{\frac{a}{b}}.$$

2. ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

2.1. Преобразование выражений, содержащих o-малое

Пример 2.1. Упростить выражение
$\big(2x+3x^2+o\big(x^3\big)\big)-\big(x+3x^2+o\big(x^3\big)\big)$ при $x\to 0$.
$\triangleright$ $\big(2x+3x^2+o\big(x^3\big)\big)-\big(x+3x^2+o\big(x^3\big)\big)=x+o\big(x^3\big)$. $\triangleleft$

Замечание 6. Взаимное уничтожение квадратичных членов не влечет понижения порядка o-малого. Разность $o\big(x^3\big)-o\big(x^3\big)=o\big(x^3\big)$. Неверно считать ее равной нулю, так как мы находим разность двух, вообще говоря, различных функций одного класса.

Пример 2.2. Упростить выражение
$\big(3x+5x^2+x^4-o\big(x^4\big)\big)\,\big(1+5x-x^3+o\big(x^3\big)\big)$ при $x\to 0$.

$\triangleright$ Почленно умножим выражения в скобках (см. замечание 5, с. 11). Используем табличную запись для приведения подобных слагаемых:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & 3x & + & 5x^2 & + & & & & x^4 & + & o\big(x^4\big) & + \\
 & & + & 15x^2 & + & 25x^3 & + & & & & o\big(x^4\big) & - \\
 & & & & & & & - & 3x^4 & + & o\big(x^4\big) & = \\
= & 3x & + & 20x^2 & + & 25x^3 & - & & 2x^4 & + & o\big(x^4\big). &
\end{array}$$

Члены выше четвертой степени являются $o\big(x^4\big)$ при $x\to 0$. $\triangleleft$

Замечание 7. Табличная форма записи предполагает, что подобные слагаемые выписываются по мере их получения при раскрытии скобок по строкам или по столбцам.

2.2. Представление функций формулой Маклорена

2.2.1. Представление функций формулой Маклорена до $o\big(x^k\big)$, где k — фиксированное число

Пример 2.3. Представить формулой Маклорена функцию $f(x)=e^x+x^2|x|$ до $o(x^n)$. Какие значения может принимать n?

$\triangleright$ В соответствии с определением точность представления формулой Тейлора в окрестности точки x_0 не может быть выше, чем наибольший порядок производной, существующей в этой точке.

Пусть $g(x)=x^2|x|$, тогда $g(0)=g'(0)=g''(0)=0$, $g'''(0)$ не существует. Поэтому представления формулой Маклорена функции $g(x)$ до $o(x^n)$ имеют вид: $g(x)=o(x)$ при $n=1$; $g(x)=o\big(x^2\big)$ при $n=2$; при $n\geq 3$ представления не существуют.

Используя табличное представление показательной функции (15) и правило сложения представлений, имеем
$f(x)=1+x+o(x)$ при $n=1$; $f(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+o\big(x^2\big)$ при $n=2$; при $n\geq 3$ представление не существует. $\triangleleft$

При возведении в степень и перемножении представлений формулой Тейлора точность представления определяется наименьшим порядком o-малого в результирующем выражении. Члены более высокого порядка можно не выписывать и не учитывать в вычислениях, так как они являются o-малым.

Пример 2.4. Представить формулой Маклорена функцию $f(x)=e^x\cdot\sqrt{1+x}$ до $o\big(x^2\big)$.

$\triangleright$ Функция является произведением двух функций. Так как $e^x\sim 1$ и $\sqrt{1+x}\sim 1$ при $x\to 0$, то находим представления обеих функций до искомого порядка:

$$f(x) \quad = \quad \left(1+x+\frac{x^2}{2}+o\big(x^2\big)\right)\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o\big(x^2\big)\right)$$

Раскрываем первую скобку, в каждом слагаемом учитываем только те члены второго множителя, степень которых после раскрытия всех скобок не превосходит 2, то есть точности представления, тогда

$$f(x)=\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o\big(x^2\big)\right)+x\left(1+\frac{x}{2}+o(x)\right)+$$
$$+\frac{x^2}{2}\,(1+o(1))=1+\frac{3x}{2}+\frac{7x^2}{8}+o\big(x^2\big)\,,\ x\to 0. \triangleleft$$

Пример 2.5. Представить формулой Маклорена функцию $f(x)=\sin x\cdot\ln(1+x)$ до $o\big(x^5\big)$.

$\triangleright$ Так как $\sin x\sim x$, $\ln(1+x)\sim x$ при $x\to 0$, то $\sin x$ и $\ln(1+x)$ представляем формулой Маклорена до $o\big(x^4\big)$:

$$f(x)=\left(x-\frac{x^3}{3!}+o\big(x^4\big)\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o\big(x^4\big)\right)=$$
$$=x\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o\big(x^4\big)\right)-\frac{x^3}{3!}\left(x-\frac{x^2}{2}+o\big(x^2\big)\right)=$$
$$=x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{6}-\frac{x^5}{6}+o\big(x^5\big)\,,\ x\to 0.$$

Остальные члены опущены по правилам преобразования выражений, содержащих o-малое.$\triangleleft$

При возведении в степень представления формулой Тейлора **важно** не потерять члены, являющиеся попарными произведениями слагаемых, например:

$$\big(x+2x^2+3x^3+o\big(x^3\big)\big)^2=x^2+\big(2x^2\big)^2+\big(3x^3\big)^2+$$
$$+2\left(x\cdot 2x^2+x\cdot 3x^3+2x^2\cdot 3x^3\right)+o\big(x^3\big)\left(x+2x^2+3x^3+o\big(x^3\big)\right).$$

Пример 2.6. Представить формулой Маклорена функцию $f(x)=e^{x-x^2}$ до $o\big(x^3\big)$.

$\triangleright$ $f(x)$ является сложной функцией (см. с. 11—12). Внутренняя функция $x-x^2\sim x$ при $x\to 0$, поэтому внешнюю функцию представляем формулой Маклорена до искомого порядка: $e^t=1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+o\big(t^3\big)$, где $t=\big(x-x^2\big)\to 0$ при $x\to 0$. Тогда

$$f(x)=1+\big(x-x^2\big)+\frac{\big(x-x^2\big)^2}{2}+\frac{\big(x-x^2\big)^3}{6}+o\big(x^3\big)\,.$$

Полученное представление не является представлением формулой Маклорена, для получения представления формулой Маклорена раскрываем скобки и получаем

$$f(x)=1+x-\frac{x^2}{2}-\frac{5x^3}{6}+o\big(x^3\big)\,,\ x\to 0. \triangleleft$$

Пример 2.7. Представить формулой Маклорена функцию $f(x)=e^{\sin\ln(1+2x)}$ до $o\big(x^3\big)$.

$\triangleright$ Функция $f(x)$ является сложной функцией с несколькими вложеннными функциями. Представление начинаем с внутренней функции. Так как $\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+o\big(t^3\big)$, где $t=2x\to 0$ при $x\to 0$, то

$$\ln(1+2x)=2x-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3}+o\big(x^3\big)=2x-2x^2+\frac{8x^3}{3}+o\big(x^3\big)\,.$$

Обозначая $u=\left(2x-2x^2+\frac{8x^3}{3}+o\big(x^3\big)\right)$, имеем $u\to 0$ при $x\to 0$, $\sin u=u-\frac{u^3}{6}+o\big(u^3\big)$, тогда

$$\sin\ln(1+2x)=\left(2x-2x^2+\frac{8x^3}{3}+o\big(x^3\big)\right)-\frac{1}{6}\,(2x+o(x))^3=$$
$$=2x-2x^2+\frac{4x^3}{3}+o\big(x^3\big)\,.$$

Для $y=\left(2x-2x^2+\frac{4x^3}{3}+o\big(x^3\big)\right)$ имеем $y\to 0$ при $x\to 0$, $e^y=1+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}+o\big(y^3\big)$, тогда

$$f(x)=1+\left(2x-2x^2+\frac{4x^3}{3}+o\big(x^3\big)\right)+\frac{1}{2}\left(2x-2x^2+o\big(x^2\big)\right)^2+$$
$$+\frac{1}{6}\,(2x+o(x))^3+o\big(x^3\big)=1+2x-\frac{4x^3}{3}+o\big(x^3\big)\,. \triangleleft$$

▷ Решение примера можно записать в другой форме. Представление начинаем с внутренних функций, выписывая "схему" представления соответствующей функции и подставляя в нее соответствующий аргумент:

$$f(x)=\exp\left\{\sin\left(2x-2x^2+\frac{8x^3}{3}+o\big(x^3\big)\right)\right\}=$$
$$=\exp\left\{\left(2x-2x^2+\frac{8x^3}{3}+o\big(x^3\big)\right)-\frac{1}{6}\left(2x+o(x)\right)^3+o\big(x^3\big)\right\}=$$
$$=\exp\left\{2x-2x^2+\frac{4x^3}{3}+o\big(x^3\big)\right\}=$$

$$=1+\left(2x-2x^2+\frac{4x^3}{3}+o\big(x^3\big)\right)+\frac{1}{2}\left(2x-2x^2++o\big(x^2\big)\right)^2+$$
$$+\frac{1}{6}\left(2x+o(x)\right)^3+o\big(x^3\big)=1+2x-\frac{4x^3}{3}+o\big(x^3\big),\ x\to 0.◁$$

Пример 2.8. Представить формулой Маклорена функцию $f(x)=\frac{\arcsin x^3}{\ln(1+x^2)}$ до $o\big(x^5\big)$.

▷ Так как $\arcsin x^3\sim x^3$, $\ln\left(1+x^2\right)\sim x^2$ при $x\to 0$, то $\arcsin x^3$ представляем формулой Маклорена до $o\big(x^7\big)$, а $\ln\left(1+x^2\right)$ — до $o\big(x^6\big)$ и сокращаем дробь:

$$f(x)=\frac{x^3+o\big(x^7\big)}{x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}+o\big(x^6\big)}=\frac{x+o\big(x^5\big)}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{3}+o\big(x^4\big)}=$$
$$=\left(x+o\big(x^5\big)\right)\left(1-\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{3}+o\big(x^4\big)\right)+\left(-\frac{x^2}{2}+o\big(x^2\big)\right)^2\right)=$$
$$=\left(x+o\big(x^5\big)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o\big(x^4\big)\right)=x+\frac{x^3}{2}-\frac{x^5}{12}+o\big(x^5\big).◁$$

Замечание 8. При решении задач представление формулой Тейлора сложной функции используется для небольших фиксированных n, так как этап раскрытия скобок в общем случае трудно выполним для произвольного n. Исключение

составляют частные случаи, типа $\varphi(x)=Ax^m, m\in\mathbb{N}$. В других случаях целесообразно преобразовать функцию таким образом, чтобы избежать представления сложной функции формулой Тейлора.

Пример 2.9. Представить формулой Маклорена функцию $f(x)=\operatorname{tg}x$ до $o\big(x^6\big)$.

▷ Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. $\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$, тогда $\cos x\cdot\operatorname{tg}x=\sin x$. Так как функция $y=\operatorname{tg}x$ нечетная, то ее представление формулой Маклорена с неопределенными коэффициентами берем только по нечетным степеням. Приравниваем представления формулами Маклорена с точностью до $o\big(x^6\big)$: $\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\big(x^5\big)\right)\left(ax+bx^3+cx^5+o\big(x^6\big)\right)=$ $=\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o\big(x^6\big)\right)$.

Раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} x: & a=1;\\ x^3: & -\frac{a}{2}+b=-\frac{1}{6};\\ x^5: & \frac{a}{24}-\frac{b}{2}+c=\frac{1}{120}.\end{array}$$

Решая систему, получаем $a=1, b=\frac{1}{3}, c=\frac{2}{15}$. Итак,

$$\operatorname{tg}x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o\big(x^6\big),\ x\to 0.◁$$

Замечание 9. Аналогично предыдущему примеру можно получить представление формулой Маклорена функции $y=\operatorname{th}x$ до $o\big(x^6\big)$. А именно,

$$\operatorname{th}x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o\big(x^6\big),\ x\to 0.$$

Пример 2.10. Представить формулой Маклорена функцию $f(x)=\arcsin x$ до $o\big(x^6\big)$.

▷ Найдем представление формулой Маклорена производной до $o\big(x^6\big)$:

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{3x^4}{8}+o\big(x^5\big)\,.$$

Интегрируя представление производной и учитывая, что $\arcsin 0=0$, имеем (см. формулу (27), с. 13):

$$\arcsin x=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+o\big(x^6\big)\,.\triangleleft$$

Пример 2.11. Представить формулой Маклорена функцию $f(x)=\arccos\left(\frac{1}{2}+x\right)$ до $o\big(x^2\big)$.

$\triangleright$ Аргумент функции не стремиться к нулю при $x\to 0$. Тем не менее можно воспользоваться связью представлений формулой Маклорена функции и ее производной:

$$\left(\arccos\left(\frac{1}{2}+x\right)\right)'=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}+x\right)^2}}=-\frac{2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-\frac{4(x+x^2)}{3}}}=$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{2\left(x+x^2\right)}{3}+o(x)\right)=-\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{4x}{3\sqrt{3}}+o(x)\,.$$

Тогда $f(x)=\arccos\left(\dfrac{1}{2}+x\right)=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{2}{\sqrt{3}}x-\dfrac{2x^2}{3\sqrt{3}}+o\big(x^2\big)\,,\ x\to 0.\triangleleft$

Пример 2.12. Представить формулой Маклорена функцию $f(x)=x^2\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ до $o\big(x^{2n}\big)$.

$\triangleright$ Найдем представление формулой Маклорена производной функции $g(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$. По формуле (4.7.) при $\alpha=-\frac{1}{2}$, где $C^k_{-\frac{1}{2}}=\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-(k-1)\right)}{k!}=\frac{(-1)^k(2k-1)!!}{2^k k!}$, и правилу представления формулой Маклорена сложной функции имеем

$$g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k\,(2k-1)!!}{2^k k!}x^{2k}+o\big(x^{2n}\big)\,,\ x\to 0.$$

Учитывая, что $f(0)=\ln 1=0$, получаем

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=x+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!\,(2k+1)}x^{2k+1}+o\big(x^{2n}\big)\,,\ x\to 0.$$

Тогда $\quad f(x)=x^2\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=$

$$=x^2\left(x+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(2k-1)!!}{2^k\cdot k!\,(2k+1)}x^{2k+1}+o\big(x^{2n}\big)\right)=$$

$$=x^3+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{(2k-1)!!}{2^k\cdot k!\,(2k+1)}x^{2k+3}+o\big(x^{2n}\big)\,,\ x\to 0.\triangleleft$$

Замечание 10. Типичной ошибкой является применение приема дифференцирования к произведению трансцендентной функции на многочлен, например, к функции $f(x)$ в примере *2.12.* В этом случае выражение производной сложнее исходного произведения.

2.2.2. Показательная функция

Показательную функцию приводим к основанию e и пользуемся правилом представления сложной функции (см. с. 12—13).

Пример 2.13. Представить формулой Маклорена функцию $f(x)=5^{x^2}$до $o\big(x^{2n+1}\big)$.

$$\triangleright\, f(x)=\exp\left\{x^2\ln 5\right\}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(x^2\ln 5\right)^k}{k!}+o\big(x^{2n+1}\big)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}\ln^k 5}{k!}+o\big(x^{2n+1}\big)\,,\ x\to 0.\triangleleft$$

Пример 2.14. Представить формулой Маклорена функцию $f(x)=\exp\{4\cos x\}$ до $o\big(x^3\big)$.

$$\triangleright\ f(x) = \exp\left\{4\left(1 - \frac{x^2}{2} + o\big(x^3\big)\right)\right\} =$$
$$= e^4 \cdot \exp\left\{-2x^2 + o\big(x^3\big)\right\} = e^4 \cdot \big(1 - 2x^2 + o\big(x^3\big)\big) =$$
$$= e^4 - 2e^4x^2 + o\big(x^3\big),\ x \to 0. \triangleleft$$

Пример 2.15. Представить формулой Маклорена функцию $f(x) = (\operatorname{ch} x)^{\sin x}$ до $o\big(x^5\big)$.

$$\triangleright\ f(x) = \exp\{\sin x \cdot \ln \operatorname{ch} x\} =$$
$$= \exp\left\{\left(x - \frac{x^3}{3!} + o\big(x^4\big)\right)\ln\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o\big(x^4\big)\right)\right\} =$$
$$= \exp\left\{\left(x - \frac{x^3}{3!} + o\big(x^4\big)\right)\left(\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o\big(x^4\big)\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2!} + o\big(x^2\big)\right)^2 + o\big(x^4\big)\right)\right\} =$$
$$= \exp\left\{\left(x - \frac{x^3}{6} + o\big(x^4\big)\right)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o\big(x^4\big)\right)\right\} =$$
$$= \exp\left\{\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{6} + o\big(x^5\big)\right\} = 1 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{6} + o\big(x^5\big),\ x \to 0. \triangleleft$$

2.2.3. Гиперболические функции

Для получения представления произведения гиперболических функций преобразуем исходное выражение в сумму гиперболических функций других аргументов:

Пример 2.16. Представить формулой Маклорена функцию $f(x) = \operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch} x$ до $o\big(x^{2n+1}\big)$.

$$\triangleright\ f(x) = \operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1)\operatorname{ch} x = \frac{1}{4}(\operatorname{ch} 3x - \operatorname{ch} x) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(3x)^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\big(x^{2n+1}\big)\right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{3^{2k}-1}{4\cdot(2k)!}x^{2k} + o\big(x^{2n+1}\big),\ x \to 0. \triangleleft$$

Замечание 11. Для преобразования выражений удобно использовать формулы:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1; \quad \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1); \quad \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1);$$
$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x; \quad \operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x;$$
$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x;$$
$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} x;$$
$$2\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \operatorname{ch}(x + y) + \operatorname{ch}(x - y);$$
$$2\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \operatorname{ch}(x + y) - \operatorname{ch}(x - y);$$
$$2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = \operatorname{sh}(x + y) + \operatorname{sh}(x - y).$$

2.2.4. Тригонометрические функции

Пример 2.17. Представить формулой Маклорена функцию $f(x) = \sin^2 x \cdot \cos x$ до $o\big(x^{2n+1}\big)$.

$$\triangleright\ f(x) = \sin^2 x \cdot \cos x = \frac{(1 - \cos 2x)}{2}\cos x = \frac{\cos x - \cos 3x}{4} =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(3x)^{2k}}{(2k)!} + o\big(x^{2n+1}\big)\right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1-3^{2k}}{4\cdot(2k)!}x^{2k} + o\big(x^{2n+1}\big),\ x \to 0. \triangleleft$$

Пример 2.18. Представить формулой Маклорена функцию $f(x) = \sin(\operatorname{ch} x)$ до $o(x^3)$.

$$\triangleright\ f(x) = \sin(\operatorname{ch} x) = \sin\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)$$

Так как аргумент синуса не стремиться к нулю при $x \to 0$, то используя формулу синуса суммы, получаем

$$f(x) = \sin\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = \sin 1 \cdot \cos\left(\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) +$$

$$+\cos 1 \cdot \sin\left(\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = \sin 1 + \cos 1 \cdot \frac{x^2}{2} + o(x^3),\ x \to 0.\triangleleft$$

2.2.5. Степенная функция

Пример 2.19. Представить формулой Маклорена функции $\sqrt{1+x}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$, $\sqrt[3]{1+x}$ до $o(x^3)$.

$\triangleright$ а) Используя табличное представление (20) степенной функции при $\alpha = \frac{1}{2}$, получаем

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{6}x^3 + o(x^3) =$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3),\ x \to 0.$$

б) Используя табличное представление (20) степенной функции при $\alpha = -\frac{1}{2}$, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}x^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{6}x^3 + o(x^3) =$$

$$= 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + o(x^3),\ x \to 0.$$

в) Используя табличное представление (20) степенной функции при $\alpha = \frac{1}{3}$, получаем

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)}{6}x^3 + o(x^3) =$$

$$= 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} + o(x^3),\ x \to 0.\triangleleft$$

Замечание 12. Для упрощения вычислений полезно использовать рекуррентное соотношение

$$C_\alpha^{k+1} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))(\alpha-k)}{(k+1)!} = C_\alpha^k \cdot \frac{\alpha-k}{k+1}.$$

Пример 2.20. Представить формулой Маклорена функции $\sqrt{1+x^2}$ и $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ до $o(x^{2n+1})$.

$\triangleright$ Используя правило сложной функции, свойства представлений четных функций и представления функций $\sqrt{1+x}$ и $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$, получаем

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(2k-3)!!}{2^k \cdot k!}x^{2k} + o(x^{2n+1}),\ x \to 0;$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)!!}{2^k \cdot k!}x^{2k} + o(x^{2n+1}),\ x \to 0.\triangleleft$$

Пример 2.21. Представить формулой Маклорена функцию $f(x) = \sqrt{4+x}$ до $o(x^n)$.

$\triangleright$Так как $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(2k-3)!!}{2^k \cdot k!}x^k + o(x^n),\ x \to 0,$

то $\sqrt{4+x} = 2\sqrt{1+\frac{x}{4}} =$

$$= 2\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{4} + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(2k-3)!!}{2^k \cdot k!}\left(\frac{x}{4}\right)^k + o(x^n)\right) =$$

$$= 2 + \frac{x}{4} + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(2k-3)!!}{2^{3k-1} \cdot k!}x^k + o(x^n),\ x \to 0.\triangleleft$$

2.2.6. Дробно-рациональная функция

1. Дробь представляем в виде суммы многочлена (возможно нулевого) и правильной дроби.

2. При необходимости правильную дробь раскладываем на сумму дробей со знаменателем вида $1+\alpha t^m$, отвечающих или сводящихся к табличным представлениям.

3. Получаем представления по формуле Маклорена для всех входящих в представления дробей. Приводим подобные слагаемые.

Для получения представления дроби вида $\frac{P_k(t)}{1+\alpha t^m}$ формулой Маклорена, где $P_k(t)$ — многочлен, имеющий несколько отличных от нуля слагаемых, можно представить формулой Маклорена дробь $\frac{1}{1+\alpha t^m}$ и умножить ее на многочлен.

Пример 2.22. Представить формулой Маклорена функцию $f(x)=\frac{x^2+2x+7}{1-x^4}$ до $o\big(x^{4n+3}\big)$.

$\triangleright$ $\frac{1}{1-x^4}=\sum\limits_{k=0}^{n}x^{4k}+o\big(x^{4n+3}\big)$, $x\to 0$. Умножим полученное представление на многочлен x^2+2x+7 и приведем подобные слагаемые:

$$f(x)=\big(x^2+2x+7\big)\left(\sum_{k=0}^{n}x^{4k}+o\big(x^{4n+3}\big)\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}x^{4k+2}+o\big(x^{4n+5}\big)+\sum_{k=0}^{n}2\cdot x^{4k+1}+o\big(x^{4n+4}\big)+\sum_{k=0}^{n}7\cdot x^{4k}+o\big(x^{4n+3}\big)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\Big(7\cdot x^{4k}+2\cdot x^{4k+1}+x^{4k+2}\Big)+o\big(x^{4n+3}\big),\ x\to 0.\triangleleft$$

Пример 2.23. Представить формулой Маклорена функцию $f(x)=\frac{2x^2+2x-7}{x^2+x-2}$ до $o(x^n)$.

$\triangleright$ Представим функцию в виде суммы многочлена и правильной дроби и разложим правильную дробь на сумму

$$f(x)=2-\frac{3}{x^2+x-2}=2+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-1}.$$

Тогда $f(x)=2+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{x}{2}}+\dfrac{1}{1-x}=$

$$=2+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^k+o(x^n)\right)+\sum_{k=0}^{n}x^k+o(x^n),\ x\to 0.$$

Так как члены нулевой степени не попадают под общую формулу, то, приводя подобные слагаемые, выписываем константу отдельно:

$$f(x)=\frac{7}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}+1\right)x^k+o(x^n),\ x\to 0.\triangleleft$$

Замечание 13. Если $\alpha\in\mathbb{N}$, то остаточный член в представлении формулой Маклорена $(1+x)^\alpha=\sum_{k=1}^{\alpha}C_\alpha^k x^k$ равен нулю. О представлении многочлена формулой Тейлора в окрестности точки $x_0\neq 0$ см. пример *2.27*.

2.2.7. Логарифмическая функция

Замечание 14. Так как $(\ln(1+x))'=\frac{1}{1+x}$ и $\ln 1=0$, то формула (23) может быть получена интегрированием формулы (21). Формула (24) может быть получена из формулы (23) по правилу сложной функции.

Представление логарифмической функции выполняют, записав функцию в виде линейной комбинации функций вида $\ln(1+\alpha x^m)$ и, возможно, константы.

Пример 2.24. Представить формулой Маклорена функцию $f(x)=\ln\frac{4-x}{(3-2x)(5-x)}$ до $o(x^n)$.

$$\triangleright\ f(x)=\ln\frac{4}{15}+\ln\left(1-\frac{x}{4}\right)-\ln\left(1-\frac{2x}{3}\right)-\ln\left(1-\frac{x}{5}\right)=$$

$$=\ln\frac{4}{15}-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{4^k k}+\sum_{k=9}^{n}\frac{2^k x^k}{3^k k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{5^k k}+o(x^n)=$$

$$= \ln\frac{4}{15} + \sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^k + \frac{1}{5^k} - \frac{1}{4^k}\right) + o(x^n)\,, \quad x \to 0.\triangleleft$$

Пример 2.25. Представить формулой Маклорена функцию $f(x) = \ln\frac{4+x^3}{3-x^3}$ до $o\big(x^{3n+2}\big)$.

$$\triangleright\, f(x) = \ln\frac{4}{3} + \ln\left(1 + \frac{x^3}{4}\right) - \ln\left(1 - \frac{x^3}{3}\right) =$$

$$= \ln\frac{4}{3} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^{3k}}{4^k k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{x^{3k}}{3^k k} + o\big(x^{3n+2}\big) =$$

$$= \ln\frac{4}{3} + \sum_{k=1}^{n}\frac{x^{3k}}{k}\left(\frac{(-1)^{k-1}}{4^k} + \frac{1}{3^k}\right) + o\big(x^{3n+2}\big)\,, \ x \to 0.\triangleleft$$

2.3. Представление формулой Тейлора. Замена переменной

Решение задачи представления функции формулой Тейлора в окрестности точки $x_0 \neq 0$ состоит из трех этапов:

а) заменой переменной $t = x - x_0$ исходная задача сводится к представлению формулой Маклорена функции $g(t) = f(x_0 + t)$ до того же порядка o-малого, что и исходная задача;

б) решается задача представления формулой Маклорена функции $g(t) = f(x_0 + t)$;

в) выполняется обратная замена переменного, то есть подстановка выражения $x - x_0$ вместо переменной t.

Пример 2.26. Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0 = -1$ функцию $f(x) = \ln(x+2)$ до $o((x+1)^n)$.

$\triangleright$ Пусть $t = x + 1$. Так как $f(x) = \ln(x+2) = \ln(1+(1+x))$, то $g(t) = \ln(1+t) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{t^k}{k} + o(t^n)\,,\ t \to 0$. Тогда

$$f(x) = \ln(1+(1+x)) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(x+1)^k}{k} + o((x+1)^n)\,,$$

$$x \to -1.\triangleleft$$

Замечание 15. Не забывайте выполнить обратную замену переменных. Получение представления формулой Маклорена функции $g(t) = f(x_0 + t)$ не является решением поставленной задачи.

Пример 2.27. Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0 = -1$ многочлена $f(x) = x^3$.

$$\triangleright f(x) = (x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 3(x+1) - 1.$$

Опускать скобки нельзя даже в линейном члене. $\triangleleft$

Так как формула Тейлора является специального вида представлением функции в некоторой окрестности точки представления, то при решении задач необходимо обратить внимание на следующие моменты:

1. Представление формулой Тейлора в окрестности точки x_0 функции $f(x)$ должно представлять собой сумму слагаемых вида $a_k(x-x_0)^k$, в которой приведены все подобные слагаемые.

2. Недопустимо раскрытие скобок в выражении $(x-x_0)^k$ при любом k.

3. Представление функции суммой по степеням $(x-x_0)^k$ при $x \not\to x_0$ по определению не является представлением формулой Тейлора в окрестности точки x_0.

2.4. Представление формулой Тейлора при $x \to \infty$

Для получения представления формулой Тейлора функции $f(x)$ при $x \to \infty$ до $o\big(\frac{1}{x^n}\big)$ выполняем замену переменной $t = \frac{1}{x}$, представляем формулой Маклорена функцию $f\left(\frac{1}{t}\right)$ до $o(t^n)$ и выполняем обратную замену переменной.

Пример 2.28. Представить формулой Тейлора функцию $f(x)=\sqrt{x^2-x-1}-x$ до $o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ при $x\to+\infty$.

▷ Пусть $t=\frac{1}{x}$, тогда $t\to 0$ при $x\to\infty$.

$$y(t)=\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}-1}-\frac{1}{t}=\frac{\sqrt{1-(t+t^2)}-1}{t}.$$

Так как результирующее представление до $o(t^2)$, то числитель представляем до $o(t^3)$:

$$y(t)=$$

$$=\frac{1-\frac{1}{2}\left(t+t^2\right)-\frac{1}{8}\left(t+t^2\right)^2-\frac{1}{16}\left(t+t^2\right)^3+o\left(\left(t+t^2\right)^3\right)-1}{t}=$$

$$=\frac{1}{t}\left(-\frac{1}{2}t-\frac{5}{8}t^2-\frac{5}{16}t^3+o\left(t^3\right)\right)=-\frac{1}{2}-\frac{5}{8}t-\frac{5}{16}t^2+o\left(t^2\right),\ t\to 0.$$

$$f(x)=\sqrt{x^2-x-1}-x=-\frac{1}{2}-\frac{5}{8x}-\frac{5}{16x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right),\ x\to\infty. \triangleleft$$

2.5. Представление формулой Тейлора произведения многочлена на трансцендентную или иррациональную функцию

Задача представления формулой Тейлора произведения многочлена на трансцендентную или иррациональную функцию решается в несколько этапов:

1. Заменой переменной сводим задачу к представлению формулой Маклорена.

2. ***Трансцендентную или иррациональную*** функцию представляем формулой Маклорена.

3. Умножаем полученное представление ***на многочлен*** (как правило, двучлен).

4. Приводим подобные члены, при необходимости используя замену индекса суммирования.

5. Выполняем обратную замену.

Пример 2.29. Представить формулой Тейлора функцию $f(x)=(x+1)\ln\frac{x^2+2x+2}{1-2x-x^2}$ в окрестности точки $x_0=-1$ до $o\left((x+1)^{2n}\right)$.

▷ Выполним замену переменной $t=x+1$. Получим

$$g(t)=t\ln\frac{1+t^2}{2-t^2}=t\left(-\ln 2+\ln\left(1+t^2\right)-\ln\left(1-\frac{t^2}{2}\right)\right).$$

Представление необходимо выполнить с точностью до $o(t^{2n})$, но так как логарифмические функции умножаются на t, то их можно представить с точностью до $o(t^{2n-1})$:

$$\ln\left(1+t^2\right)=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{t^{2k}}{k}+o\left(t^{2n-1}\right),\ t\to 0;$$

$$\ln\left(1-\frac{t^2}{2}\right)=-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{t^{2k}}{2^k\cdot k}+o\left(t^{2n-1}\right),\ t\to 0.$$

$$g(t)=t\left(-\ln 2+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}t^{2k}}{k}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{t^{2k}}{2^k\cdot k}+o\left(t^{2n-1}\right)\right)=$$

$$=-t\cdot\ln 2+\sum_{k=1}^{n-1}\left((-1)^{k-1}+\frac{1}{2^k}\right)\frac{t^{2k+1}}{k}+o\left(t^{2n}\right),\ t\to 0.$$

Выполняем обратную замену:

$$f(x)=-(x+1)\ln 2+\sum_{k=1}^{n-1}\left((-1)^{k-1}+\frac{1}{2^k}\right)\frac{(x+1)^{2k+1}}{k}+$$

$$+o\left((x+1)^{2n}\right),\ x\to -1. \triangleleft$$

Пример 2.30. Представить формулой Тейлора функцию $f(x)=\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\cos(2x-4)$ в окрестности точки $x_0=2$ до $o\left((x-2)^{2n+1}\right)$.

$\triangleright$ Пусть $t = x - 2$. Получим $g(t) = \left(\frac{t^2}{2} - 2\right) \cos 2t$.

Представление необходимо выполнить с точностью до $o\left(t^{2n+1}\right)$, тригонометрическая функция умножается на многочлен с отличным от нуля младшим членом, следовательно, при умножении на многочлен точность представления не повысится.

Представим формулой Маклорена функцию $y(t) = \cos 2t$ до $o\left(t^{2n+1}\right)$:

$$\cos 2t = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2^{2k} \cdot t^{2k}}{(2k)!} + o\left(t^{2n+1}\right), \ t \to 0.$$

Тогда $g(t) = \left(\dfrac{t^2}{2} - 2\right) \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2^{2k} \cdot t^{2k}}{(2k)!} + o\left(t^{2n+1}\right)\right)$.

Для приведения подобных слагаемых выполним замену индекса суммирования. Раскроем первую скобку и внесем множители под знаки суммирования:

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^{2k+2} \cdot 2^{2k-1}}{(2k)!} + o\left(t^{2n+3}\right) - \\ - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^{2k} \cdot 2^{2k+1}}{(2k)!} + o\left(t^{2n+1}\right).$$

Заметим, что при фиксировании индекса суммирования в обеих суммах степени переменной соответственно равны $2k+2$ и $2k$. Значит, заменив в первой сумме $k+1$ на новый индекс суммирования, мы получим в обеих суммах одинаковые степени переменной при одинаковых индексах суммирования. Выделяем в явном виде $k+1$ во всех местах вхождения индекса суммирования в первой сумме:

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1-1} \frac{t^{2(k+1)} \cdot 2^{2(k+1)-3}}{(2(k+1)-2)!} + o\left(t^{2n+3}\right) - \\ - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^{2k} \cdot 2^{2k+1}}{(2k)!} + o\left(t^{2n+1}\right).$$

При изменении k от 0 до n новый индекс $k+1$ изменяется от 1 до $n+1$, обозначая новый индекс суммирования любой буквой, например, k, получаем

$$g(t) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{t^{2k} \cdot 2^{2k-3}}{(2k-2)!} + o\left(t^{2n+3}\right) - \\ - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^{2k} \cdot 2^{2k+1}}{(2k)!} + o\left(t^{2n+1}\right).$$

Приводим подобные слагаемые: первый член второй суммы — константа — не попадает под общую формулу, так как эта степень присутствует только во второй сумме, его выписываем отдельно. Кроме того, отбрасываем члены представления, содержащиеся в $o\left(t^{2n+1}\right)$:

$$g(t) = 2 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(2k^2 - k + 8\right) \frac{t^{2k} \cdot 2^{2k-2}}{(2k)!} + o\left(t^{2n+1}\right), \ t \to 0.$$

После обратной замены переменной имеем

$$f(x) = 2 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(2k^2 - k + 8\right) \frac{(x-2)^{2k} \cdot 2^{2k-2}}{(2k)!} + o\left((x-2)^{2n+1}\right), \\ x \to 2.$$

Второй вариант выполнения замены индекса суммирования. Индекс суммирования заменяем в сумме, в которой степень переменной при одинаковом значении текущего индекса суммирования больше, в данном случае в первой сумме:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^{2k+2} \cdot 2^{2k-1}}{(2k)!} + o\left(t^{2n+3}\right).$$

Обозначим немой индекс суммирования в другой сумме через l. Для того чтобы можно было привести подобные слагаемые, необходимо, чтобы при одинаковых значениях индекса суммирования степени переменной в первой и во второй суммах совпадали, то есть $2k+2=2l$. Тогда $k=l-1$. Новый индекс меняется от 1 до $n+1$. Подставляя, получаем

$$\sum\nolimits_{l=1}^{n+1}(-1)^{l-1}\frac{t^{2l}\cdot 2^{2l-3}}{(2l-2)!}+o\left(t^{2n+3}\right).$$

Вновь заменив немой индекс суммирования на k, приводим подобные слагаемые так же, как в первом решении. ◁

Пример 2.31. Представить формулой Тейлора функцию $f(x)=\left(x^2+6x+7\right)3^{-x-1}$ в окрестности точки $x_0=-3$ до $o((x+3)^n)$.

▷ Выполним замену переменной $t=x+3$. Получим $g(t)=9\left(t^2-2\right)e^{-t\ln 3}$.

Представим формулой Маклорена функцию $y(t)=e^{-t\ln 3}$ до $o(t^n)$:

$$y(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k t^k\ln^k 3}{k!}+o(t^n),\ t\to 0.$$

Тогда $g(t)=9\left(t^2-2\right)\left(\sum\nolimits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k t^k\ln^k 3}{k!}+o(t^n)\right)$.

Выполняем замену индекса суммирования,обозначая новый индекс суммирования буквой k

$$g(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\cdot 9\cdot t^{k+2}\ln^k 3}{k!}+o\left(t^{n+2}\right)-$$
$$-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\cdot 18\cdot t^k\ln^k 3}{k!}+o(t^n)=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+2-2}\cdot 9\cdot t^{k+2}\ln^{k+2-2}3}{((k+2)-2)!}+o\left(t^{n+2}\right)-$$
$$-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\cdot 18\cdot t^k\ln^k 3}{k!}+o(t^n)=$$

$$=\sum_{k=2}^{n+2}\frac{(-1)^{k-2}\cdot 9\cdot t^k\ln^{k-2}3}{(k-2)!}+o\left(t^{n+2}\right)-$$
$$-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\cdot 18\cdot t^k\ln^k 3}{k!}+o(t^n)=$$

$$=-18+18t\cdot\ln 3+$$
$$+\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k\cdot 9\cdot t^k\ln^{k-2}3}{k!}\left(k(k-1)-2\ln^2 3\right)+o(t^n),\ t\to 0.$$

После обратной замены переменной при $x\to -3$ имеем

$$f(x)=-18+18(x+3)\cdot\ln 3+$$
$$+\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k\cdot 9\cdot(x+3)^k\ln^{k-2}3}{k!}\left(k^2-k-2\ln^2 3\right)+o((x+3)^n).\triangleleft$$

Замечание 16. Нельзя раскрывать скобки в линейном члене представления, так как оно выполнено в окрестности точки $x_0=-3$.

Пример 2.32. Представить формулой Тейлора функцию $f(x)=\left(x^2-2x-1\right)\left(2x-x^2\right)^{\frac{1}{2}}$ в окрестности точки $x_0=1$ до $o\left((x-1)^{2n+1}\right)$.

▷ Пусть $t=x-1$. Получим $g(t)=\left(t^2-2\right)\sqrt{1-t^2}$.

Представим формулой Маклорена функцию $y(t)=\sqrt{1-t^2}$ до $o\left(t^{2n+1}\right)$:

$$y(t)=1-\frac{t^2}{2}+\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k(2k-3)!!}{2^k\cdot k!}t^{2k}+o\left(t^{2n+1}\right),\ t\to 0.$$

Имеем

$$g(t)=\left(t^2-2\right)\left(1-\frac{t^2}{2}+\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k(2k-3)!!}{2^k\cdot k!}t^{2k}+o\left(t^{2n+1}\right)\right).$$

Выполняем замену индекса суммирования

$$g(t) = -2 + 2t^2 - \frac{t^4}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k (2k-3)!!}{2^k \cdot k!} t^{2k+2} + o\big(t^{2n+3}\big) - \\ - \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k (2k-3)!!}{2^{k-1} \cdot k!} t^{2k} + o\big(t^{2n+1}\big) =$$

$$= -2 + 2t^2 - \frac{t^4}{2} + \sum_{k=3}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1} (2k-5)!!}{2^{k-1} \cdot (k-1)!} t^{2k} + o\big(t^{2n+1}\big) + \\ + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k (2k-3)!!}{2^{k-1} \cdot k!} t^{2k} + o\big(t^{2n+1}\big) =$$

$$= -2 + 2t^2 - \frac{t^4}{4} + \sum_{k=3}^{n} \frac{(-1)^k (2k-5)!!}{2^{k-1} \cdot k!} (k-3) t^{2k} + o\big(t^{2n+1}\big), \ t \to 0.$$

После обратной замены переменной имеем

$$f(x) = -2 + 2(x-1)^2 - \frac{(x-1)^4}{4} + \\ + \sum_{k=3}^{n} \frac{(-1)^k (2k-5)!!}{2^{k-1} \cdot k!} (k-3)(x-1)^{2k} + o\Big((x-1)^{2n+1}\Big), \ x \to 1. \lhd$$

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИЙ

Замечание 17. При вычислении пределов вида $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ и вида $\lim\limits_{x\to 0} f(x)^{\frac{1}{g(x)}}$ представление функций формулой Маклорена будем писать подразумевая, что $x \to 0$.

3.1. Представления формулой Маклорена табличных функций при $x \to 0$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\big(x^6\big),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\big(x^5\big),$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\big(x^6\big),$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\big(x^5\big),$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o\big(x^6\big),$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o\big(x^6\big),$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o\big(x^6\big),$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\big(x^6\big),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o\big(x^4\big),$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o\big(x^4\big),$$

$$\ln\Big(x + \sqrt{1+x^2}\Big) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o\big(x^6\big),$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o\big(x^4\big)\,,$$
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o\big(x^4\big)\,,$$
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o\big(x^3\big)\,,$$
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + o\big(x^3\big)\,.$$

3.2. Предел функции вида $\frac{f(x)}{g(x)}$

Замечание 18. В данном разделе во всех примерах мы используем обозначение $f\,(x)$ для числителя дроби и $g\,(x)$ для знаменателя.

Пример 3.1. Найти $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \operatorname{arctg} x}{\ln\left(1-x^3\right)}$.

▷ Так как в знаменателе дроби одна функция, то представим ее формулой Маклорена до первого значимого (не нулевого) члена: $g\,(x) = -x^3 + o\big(x^3\big)$.

Числитель дроби также представим формулой Маклорена до $o\big(x^3\big)$. Так как $\cos x$ умножается на x, то его следует представить до $o\big(x^2\big)$.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o\big(x^2\big)\,, \quad \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o\big(x^3\big)\,.$$

$$f\,(x) = x - \frac{x^3}{2} + o\big(x^3\big) - x + \frac{x^3}{3} + o\big(x^3\big) = -\frac{x^3}{6} + o\big(x^3\big)\,.$$

$$\text{Тогда}\quad \lim_{x\to 0}\frac{f\,(x)}{g\,(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6} + o\big(x^3\big)}{-x^3 + o\big(x^3\big)} = \frac{1}{6}.\triangleleft$$

Пример 3.2. Найти $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{1-x}\right) + \ln\left(1-x\right) - \frac{x^2}{2}}{\operatorname{tg}\left(\operatorname{sh} x\right) - \operatorname{arctg} x}$.

▷ В представлении $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{sh} x$ все члены первого и третьего порядка положительны, а в представлении $\operatorname{arctg} x$ член третьего порядка — отрицателен. Поэтому в знаменателе член третьего порядка отличен от 0. Представим формулой Маклорена знаменатель дроби до $o\big(x^3\big)$:

Так как $\operatorname{sh} x = x + \dfrac{x^3}{3!} + o\big(x^3\big)$, $\operatorname{tg} t = t + \dfrac{t^3}{3} + o\big(t^3\big)$, $t \to 0$, то

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{sh} x\right) = \left(x + \frac{x^3}{3!} + o\big(x^3\big)\right) + \frac{\left(x + o(x)\right)^3}{3} + o\big(x^3\big) =$$
$$= x + \frac{x^3}{3!} + o\big(x^3\big) + \frac{x^3}{3} + o\big(x^3\big) = x + \frac{x^3}{2} + o\big(x^3\big)\,.$$

Так как $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o\big(x^3\big)$, то

$$g\,(x) = x + \frac{x^3}{2} + o\big(x^3\big) - \left(x - \frac{x^3}{3} + o\big(x^3\big)\right) = \frac{5x^3}{6} + o\big(x^3\big)\,.$$

Так как найдена главная часть представления, то точность представления выбрана правильно.

Представим формулой Маклорена числитель дроби до $o\big(x^3\big)$. Знаменатель дроби $\frac{x}{1-x}$ представим с точностью до $o\big(x^2\big)$, так как числитель порядка x:

$$\frac{x}{1-x} = x\left(1 + x + x^2 + o\big(x^2\big)\right) = x + x^2 + x^3 + o\big(x^3\big)\,.$$

Так как $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + o\big(t^3\big)\,, t \to 0$, то

$$\sin\left(\frac{x}{1-x}\right) = \left(x + x^2 + x^3 + o\big(x^3\big)\right) - \frac{\left(x + o(x)\right)^3}{3!} + o\big(x^3\big) =$$
$$= x + x^2 + x^3 + o\big(x^3\big) - \frac{x^3 + o\big(x^3\big)}{3!} = x + x^2 + \frac{5x^3}{6} + o\big(x^3\big)\,.$$
$$\ln\left(1-x\right) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o\big(x^3\big)\,.$$

$$f(x) = \left(x + x^2 + \frac{5x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) +$$
$$+ \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)\right) - \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right).$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right)}{\frac{5x^3}{6} + o\left(x^3\right)} = \frac{3}{5}.\triangleleft$$

Пример 3.3. Найти $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\left(xe^{-x^2}\right) - \frac{\ln\left(\operatorname{ch}^2 x\right)}{x}}{\operatorname{arctg}(x\cos) - \operatorname{tg} x}$.

$\triangleright$ Представления $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{arctg} x$ отличаются знаком кубического члена, поэтому попробуем представить формулой Маклорена знаменатель дроби до $o\left(x^3\right)$.

В аргументе сложной функции $\cos x$ умножается на x, значит, $\cos x$ представляем до $o\left(x^2\right)$:
$$x\cos x = x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) = x - \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right).$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right), \quad \operatorname{arctg} t = t - \frac{t^3}{3} + o\left(t^3\right), t \to 0.$$

Тогда $\operatorname{arctg}(x\cos x) =$
$$= \left(x - \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right)\right) - \frac{(x + o(x))^3}{3} + o\left(x^3\right) =$$
$$= x - \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right) - \frac{x^3 + o\left(x^3\right)}{3} + o\left(x^3\right) = x - \frac{5x^3}{6} + o\left(x^3\right).$$

$$g(x) = x - \frac{5x^3}{6} + o\left(x^3\right) - \left(x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)\right) = -\frac{7x^3}{6} + o\left(x^3\right).$$

Так как найдена главная часть представления, то точность представления выбрана правильно.

Представим формулой Маклорена числитель дроби до $o\left(x^3\right)$. Экспоненту представляем до $o\left(x^2\right)$, так как она умножается на x. Так как аргумент показательной функции порядка x^2, то в представлении экспоненты достаточно взять два первых члена $e^t = 1 + t + o(t)$, тогда, подставляя $-x^2$ вместо t, получаем: $xe^{-x^2} = x\left(1 - x^2 + o\left(x^2\right)\right) = x - x^3 + o\left(x^3\right)$.

Так как $\operatorname{tg} t = t + \dfrac{t^3}{3} + o\left(t^3\right)$, $t \to 0$, то
$$\operatorname{tg}\left(xe^{-x^2}\right) = \left(x - x^3 + o\left(x^3\right)\right) + \frac{(x + o(x))^3}{3} + o\left(x^3\right) =$$
$$= x - x^3 + o\left(x^3\right) + \frac{x^3 + o\left(x^3\right)}{3} + o\left(x^3\right) = x - \frac{2x^3}{3} + o\left(x^3\right).$$

Логарифмическая функция делится на x, поэтому представляем ее до $o\left(x^4\right)$. Квадрат гиперболического косинуса можно преобразовать по формуле понижения степени, но так как он является аргументом логарифмической функции, то удобнее представить формулой Маклорена функцию

$$\ln\left(\operatorname{ch}^2 x\right) = 2\ln(\operatorname{ch} x) = 2\ln\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)\right) =$$
$$= 2\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right) - \frac{\left(\frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right)^2}{2} + o\left(x^4\right)\right) =$$
$$= 2\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right) - \frac{x^4}{8} + o\left(x^4\right)\right) = x^2 - \frac{x^4}{6} + o\left(x^4\right).$$

$$f(x) = x - \frac{2x^3}{3} + o\left(x^3\right) - \frac{1}{x}\left(x^2 - \frac{x^4}{6} + o\left(x^4\right)\right) = -\frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right).$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right)}{-\frac{7x^3}{6} + o\left(x^3\right)} = \frac{3}{7}.\triangleleft$$

Пример 3.4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\ln(e(1+2x)))^{1/4}+\sqrt{1-x}-2\cos x}{\exp\left(\frac{x}{\sqrt{1-4x}}\right)-(x+1)\operatorname{ch}\left(\sqrt{5}x\right)}$.

▷Если трудно предположить необходимую точность представления, то находим первые три значимых (отличных от нуля) члена. Записи ведем так, чтобы при необходимости легко было дописать дополнительные члены для выделения главной части.

Представим формулой Маклорена знаменатель дроби до $o(x^3)$.

Для того чтобы представить аргумент показательной функции до $o(x^3)$, функцию $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ представим с точностью до $o(x^2)$, так как она умножается на x.

Так как, $\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}=1+\dfrac{t}{2}+\dfrac{3t^2}{8}+o(t^2)$, $t\to 0$, то

$$\frac{x}{\sqrt{1-4x}}=x\left(1+\frac{4x}{2}+\frac{3(4x)^2}{8}+o(x^2)\right)=x+2x^2+6x^3+o(x^3).$$

$$\exp\left(\frac{x}{\sqrt{1-4x}}\right)=\exp\left(x+2x^2+6x^3+o(x^3)\right)=$$
$$=1+\left(x+2x^2+6x^3+o(x^3)\right)+\frac{\left(x+2x^2+o(x^2)\right)^2}{2}+$$
$$+\frac{(x+o(x))^3}{6}+o(x^3)=$$

$$=1+x+2x^2+6x^3+\frac{x^2+4x^3+o(x^3)}{2}+\frac{x^3+o(x^3)}{6}+o(x^3)=$$
$$=1+x+\frac{5x^2}{2}+\frac{49x^3}{6}+o(x^3).$$

Представим формулой Маклорена второй член знаменателя. Так как $x+1\sim 1$ при $x\to 0$, то гиперболическую функцию представляем до $o(x^3)$: $\operatorname{ch}\left(\sqrt{5}x\right)=1+\frac{5x^2}{2}+o(x^3)$.

$$(x+1)\operatorname{ch}\left(\sqrt{5}x\right)=(x+1)\left(1+\frac{5x^2}{2}+o(x^3)\right)=$$
$$=1+x+\frac{5x^2}{2}+\frac{5x^3}{2}+o(x^3).$$

$$g(x)=\left(1+x+\frac{5x^2}{2}+\frac{49x^3}{6}+o(x^3)\right)-$$
$$-\left(1+x+\frac{5x^2}{2}+\frac{5x^3}{2}+o(x^3)\right)=\frac{17x^3}{3}+o(x^3).$$

Представим формулой Маклорена числитель дроби до $o(x^3)$. Так как логарифмическая функция представима формулой Маклорена в окрестности точки 1, а не точки e, то воспользуемся формулой преобразования логарифма произведения:

$$\ln(e(1+2x))=\ln e+\ln(1+2x)=$$
$$=1+2x-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3}+o(x^3)=1+2x-2x^2+\frac{8x^3}{3}+o(x^3).$$

$$(1+t)^{1/4}=1+\frac{t}{4}+\frac{\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)t^2}{2}+\frac{\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{7}{4}\right)t^3}{6}+o(t^3)=$$
$$=1+\frac{t}{4}-\frac{3t^2}{32}+\frac{7t^3}{128}+o(t^3).$$

$$(\ln(e(1+2x)))^{1/4}=\left(1+2x-2x^2+\frac{8x^3}{3}+o(x^3)\right)^{1/4}=$$
$$=1+\frac{\left(2x-2x^2+\frac{8x^3}{3}+o(x^3)\right)}{4}-\frac{3\left(2x-2x^2+o(x^2)\right)^2}{32}+$$
$$+\frac{7(2x+o(x))^3}{128}+o(x^3)=$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + o\big(x^3\big) - \frac{3x^2}{8} + \frac{3x^3}{4} + o\big(x^3\big) + \frac{7x^3}{16} + o\big(x^3\big)\,.$$

Так как учет кубического члена представления корня квадратного значительно упростит приведение подобных слагаемых, то пока не приводим подобные слагаемые.

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o\big(x^3\big)\,, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o\big(x^3\big)\,.$$

Воспользуемся табличной записью для приведения подобных членов (см. замечание *7*, с. 14).

$$f\,(x) = (\ln\,(e\,(1+2x)))^{1/4} + \sqrt{1-x} - 2\cos x =$$

$$\begin{array}{lll}
= 1 & +1 & -2+ \\
+\frac{x}{2} & -\frac{x}{2} & + \\
+\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{3x^2}{8}\right) & -\frac{x^2}{8} & +x^2+ \\
+\left(\frac{2x^3}{3} + \frac{3x^3}{4} + \frac{7x^3}{16}\right) & -\frac{x^3}{16} & +o\big(x^3\big) =
\end{array}$$

$$= \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8}\right)x^3 + o\big(x^3\big) = \frac{43}{24}x^3 + o\big(x^3\big)\,.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f\,(x)}{g\,(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{43}{24}x^3 + o\big(x^3\big)}{\frac{17x^3}{3} + o\big(x^3\big)} = \frac{43}{136}.\triangleleft$$

Пример 3.5. Найти $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch} x + \cos\left(\frac{2x}{2+x^2}\right) - 2\sqrt[6]{1+3x^4}}{x\operatorname{arctg} x - \exp\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) + 1}$.

$\triangleright$ Арктангенс — нечетная функция, следовательно, его представление формулой Маклорена содержит только нечетные степени. После умножения на x получим представление, содержащее только четные степени. Аргумент показательной функции — четная функция, значит, сложная

функция — четная, ее представление тоже будет содержать только четные степени.

В представлении знаменателя члены нулевого порядка взаимно уничтожатся. Далее, $x \cdot \operatorname{arctg} x \sim x^2$, $\frac{x^2}{1+x^2} \sim x^2$ и $1 - \exp\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) \sim x^2$ при $x \to 0$. Итак, члены второго порядка также взаимно уничтожатся. Представление знаменателя до $o\big(x^3\big)$ недостаточно, так как имеет вид $o\big(x^3\big)$ и не определяет главную часть.

Представим формулой Маклорена знаменатель дроби до $o\big(x^5\big)$. Так как арктангенс умножается на x, то его достаточно представить до $o\big(x^4\big)$, то есть $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o\big(x^4\big)$.

Знаменатель дроби $\frac{x^2}{1+x^2}$ достаточно представить до $o\big(x^3\big)$:

$$\frac{x^2}{1+x^2} = x^2\left(1 - x^2 + o\big(x^3\big)\right) = x^2 - x^4 + o\big(x^5\big)\,.$$

Тогда $\exp\left(\dfrac{x^2}{1+x^2}\right) = \exp\left(x^2 - x^4 + o\big(x^5\big)\right) =$

$$= 1 + \left(x^2 - x^4 + o\big(x^5\big)\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 + o\big(x^3\big)\right)^2 + o\big(x^5\big) =$$

$$= 1 + x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o\big(x^5\big)\,.$$

Важно: слагаемое в виде $\frac{1}{2}\left(x^2 + o\big(x^2\big)\right)^2$ вместо $\frac{1}{2}\left(x^2 + o\big(x^3\big)\right)^2$ приведет к понижению точности представления до $o\big(x^4\big)$.

$$g\,(x) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o\big(x^5\big) - \left(1 + x^2 - \frac{x^4}{2} + o\big(x^5\big)\right) + 1 = \frac{x^4}{6} + o\big(x^5\big)\,.$$

Главная часть знаменателя найдена. Точность представления выбрана правильно.

Представим формулой Маклорена числитель дроби до $o\big(x^5\big)$:

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o\big(x^5\big)\,.$$

Так как $\frac{2x}{2+x^2} \sim x$ при $x \to 0$, косинус — четная функция и ее представление содержит члены только четных степеней, то его аргумент достаточно представить до $o\left(x^4\right)$. То есть знаменатель дроби достаточно представить до $o\left(x^3\right)$:

$$\frac{2x}{2+x^2} = \frac{x}{1+\frac{x^2}{2}} = x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right) = x - \frac{x^3}{2} + o\left(x^4\right).$$

Тогда $\cos\left(\dfrac{2x}{2+x^2}\right) = \cos\left(x - \dfrac{x^3}{2} + o\left(x^4\right)\right) =$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{2} + o\left(x^4\right)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x + o\left(x^2\right)\right)^4 + o\left(x^5\right) =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{13x^4}{24} + o\left(x^5\right).$$

$$2\sqrt[6]{1+3x^4} = 2\left(1 + \frac{3x^4}{6} + o\left(x^5\right)\right) = 2 + x^4 + o\left(x^5\right).$$

$$f(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right) + \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{13x^4}{24} + o\left(x^5\right)\right) -$$

$$- \left(2 + x^4 + o\left(x^5\right)\right) = -\frac{5x^4}{12} + o\left(x^5\right).$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{5x^4}{12} + o\left(x^5\right)}{\frac{x^4}{6} + o\left(x^5\right)} = -\frac{5}{2}. \triangleleft$$

Пример 3.6. Найти $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sqrt{1-2x}} + \frac{e\left(x^3+x^2-1\right)}{x+1}}{\operatorname{sh}\left(\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)\right) - \sin\left(\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)\right)}$.

$\triangleright$ Аргументы гиперболического и тригонометрического синуса в знаменателе дроби совпадают. Следовательно, члены первого порядка взаимно уничтожатся. В силу нечетности обеих функций представления содержат только члены нечетной степени. Причем члены третьего порядка

отличаются только знаком. Поэтому представим знаменатель дроби формулой Маклорена до $o\left(x^3\right)$.

Логарифмическую функцию представляем до $o\left(x^3\right)$:

$$\ln\left(1+\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + o\left(x^3\right).$$

$$\operatorname{sh}\left(\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)\right) = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + o\left(x^3\right)\right) +$$

$$+ \frac{1}{6}\left(\frac{x}{2} + o(x)\right)^3 + o\left(x^3\right).$$

Первую скобку можно не раскрывать, так как она взаимно уничтожается с такой же скобкой в представлении тригонометрического синуса. Кубическое слагаемое в представлении тригонометрического синуса отличается только знаком. Следовательно,

$$g(x) = 2\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{x}{2} + o(x)\right)^3 + o\left(x^3\right) = \frac{x^3}{24} + o\left(x^3\right).$$

Аналогично представим числитель дроби формулой Маклорена до $o\left(x^3\right)$:

$$\sqrt{1-2x} = 1 - \frac{(2x)}{2} - \frac{(2x)^2}{8} - \frac{(2x)^3}{16} + o\left(x^3\right) =$$

$$= 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right).$$

$$\exp\left\{\sqrt{1-2x}\right\} = \exp\left\{1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right)\right\} =$$

$$= e\cdot\exp\left\{-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right)\right\} =$$

$$= e\left(1 - \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right)\right) + \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right)^2 -\right.$$

$$\left. - \frac{(x+o(x))^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) =$$

$$= e\left(1-\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)+\frac{(x^2+x^3+o(x^3))}{2}-\right.$$

$$\left.-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right) = e - ex - \frac{ex^3}{6}+o(x^3)\,.$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)\,.$$

$$\frac{e\,(x^3+x^2-1)}{x+1} = \left[e\,(x^3+x^2-1)\,(1-x+x^2-x^3+o(x^3))\right] =$$

$$= e\left[(x^3\,(1+o(1))+x^2\,(1-x+o(x))-\right.$$

$$\left.-\,(1-x+x^2-x^3+o(x^3)))\right] = -e+ex+ex^3+o(x^3)\,.$$

$$f\,(x) = e - ex - \frac{ex^3}{6}+o(x^3)+(-e+ex+ex^3+o(x^3)) =$$

$$= \frac{5ex^3}{6}+o(x^3)\,.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f\,(x)}{g\,(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{5ex^3}{6}+o(x^3)}{\frac{x^3}{24}+o(x^3)} = 20e.\lhd$$

Пример 3.7. Найти

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln\left((1-3x)^{2/3}-(1+3x)^{2/3}+\operatorname{ch}\sqrt{8x}-\frac{8}{3}x^2\right)}{\sin\,(\sin x)-\operatorname{arctg}\,(\operatorname{arctg} x)}.$$

$\rhd$ Представим знаменатель формулой Маклорена до $o(x^3)$:

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!}+o(t^3)\,,\quad \operatorname{arctg} t = t - \frac{t^3}{3}+o(t^3)\,,\ t\to 0.$$

$$\sin\,(\sin x) = \left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-\frac{(x+o(x))^3}{6}+o(x^3) =$$

$$= x - \frac{x^3}{3}+o(x^3)\,.$$

$$\operatorname{arctg}\,(\operatorname{arctg} x) = \left(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)-\frac{(x+o(x))^3}{3}+o(x^3) =$$

$$= x - \frac{2x^3}{3}+o(x^3)\,.$$

$$g\,(x) = \left(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)-\left(x-\frac{2x^3}{3}+o(x^3)\right) = \frac{x^3}{3}+o(x^3)\,.$$

Представим числитель формулой Маклорена до $o(x^3)$. Так как в первых двух слагаемых члены четных степеней совпадают, а нечетных степеней отличаются знаком, то

$$(1-3x)^{2/3}-(1+3x)^{2/3} =$$

$$= -2\cdot\frac{2}{3}\,(3x)-2\cdot\frac{\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)}{6}\,(3x)^3+o(x^3) = -4x-\frac{8}{3}x^3+o(x^3)\,,$$

$$\operatorname{ch}\sqrt{8x} = 1+\frac{\left(\sqrt{8x}\right)^2}{2}+\frac{\left(\sqrt{8x}\right)^4}{24}+\frac{\left(\sqrt{8x}\right)^6}{24\cdot 30}+o(x^3) =$$

$$= 1+4x+\frac{8x^2}{3}+\frac{32x^3}{45}+o(x^3)\,.$$

$$f\,(x) = \ln\left(\left(-4x-\frac{8x^3}{3}+o(x^3)\right)+1+4x+\frac{8x^2}{3}+\right.$$

$$\left.+\frac{32x^3}{45}+o(x^3)-\frac{8x^2}{3}\right) = \ln\left(1-\frac{88}{45}x^3+o(x^3)\right) = -\frac{88}{45}x^3+o(x^3)\,,$$

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{f\,(x)}{g\,(x)} = \lim_{x\to 0+0}\frac{-\frac{88}{45}x^3+o(x^3)}{\frac{x^3}{3}+o(x^3)} = -\frac{88}{15}.\lhd$$

Пример 3.8. Найти $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}\left(3+x^2\right)-\operatorname{arctg}\,(2+\cos x)}{\ln\,(1+x)-e^x+1}$.

▷ Представим знаменатель формулой Маклорена до $o(x^2)$:

$$g(x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + 1 = -x^2 + o(x^2).$$

Аргументы арктангенса в числителе дроби не стремятся к нулю при $x \to 0$. Продифференцируем $\operatorname{arctg}(3+x^2)$ и представим производную формулой Маклорена до $o(x)$:

$$\left(\operatorname{arctg}(3+x^2)\right)' = \frac{2x}{1+(3+x^2)^2} = \frac{1}{5} \cdot \frac{x}{1+\frac{3x}{5}+\frac{x^2}{10}} = \frac{x}{5} + o(x).$$

Тогда (см. с. 8) $\operatorname{arctg}(3+x^2) = \operatorname{arctg} 3 + \dfrac{x^2}{10} + o(x^2)$.

Аналогично $\quad (\operatorname{arctg}(2+\cos x))' = \dfrac{-\sin x}{1+(2+\cos x)^2} =$

$$= \frac{-\sin x}{5+4\cos x+\cos^2 x} = \frac{-x+o(x)}{5+4+o(x)+1+o(x)} = -\frac{x}{10} + o(x).$$

Тогда $\quad \operatorname{arctg}(2+\cos x) = \operatorname{arctg} 3 - \dfrac{x^2}{20} + o(x^2)$.

$$f(x) = \operatorname{arctg} 3 + \frac{x^2}{10} + o(x^2) - \left(\operatorname{arctg} 3 - \frac{x^2}{20} + o(x^2)\right) = \frac{x^2}{20} + o(x^2).$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{20}+o(x^2)}{-x^2+o(x^2)} = -\frac{1}{20}. \triangleleft$$

Пример 3.9. Найти $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}x\right) - \operatorname{arctg}\left(1+x\sqrt{2}\right)}{(\cos 2x)^{\operatorname{ctg} x} - (1-\operatorname{th} 5x)^{2/5}}$.

▷ Представим знаменатель дроби по формуле Тейлора до $o(x^2)$:

$$\ln\cos 2x = \ln\left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^3)\right) = \ln\left(1-2x^2+o(x^3)\right) = -2x^2 + o(x^3).$$

$$(\cos 2x)^{\operatorname{ctg} x} = \exp\left\{\frac{\cos x \cdot \ln\cos 2x}{\sin x}\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{(1+o(x))\cdot\left(-2x^2+o(x^3)\right)}{(x+o(x^2))}\right\} = \exp\left\{-2x+o(x^2)\right\} =$$

$$= 1 + \left(-2x+o(x^2)\right) + \frac{1}{2}\left(-2x+o(x^2)\right)^2 = 1 - 2x + 2x^2 + o(x^2).$$

$$(1-\operatorname{th} 5x)^{2/5} = \left(1-5x+o(x^2)\right)^{2/5} =$$

$$= 1 + \frac{2}{5}\left(-5x+o(x^2)\right) - \frac{3}{25}\left(-5x+o(x^2)\right)^2 + o(x^2) =$$

$$= 1 - 2x - 3x^2 + o(x^2).$$

$$g(x) = \left(1-2x+2x^2+o(x^2)\right) -$$

$$- \left(1-2x-3x^2+o(x^2)\right) = 5x^2 + o(x^2).$$

Представим числитель дроби формулой Маклорена до $o(x^2)$. Для этого необходимо представить производные обоих слагаемых до $o(x)$:

$$\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{x}{2}\right)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{x}{\sqrt{2}}+o(x)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{x}{2\sqrt{2}}+o(x)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{x}{4\sqrt{2}}+o(x)\right).$$

$$\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x^2}{16} + o(x^2).$$

Аналогично

$$\operatorname{arctg}\left(1+x\sqrt{2}\right)' = \frac{1}{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}x+o(x)\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\sqrt{2}x+o(x)\right).$$

$$\operatorname{arctg}\left(1+x\sqrt{2}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

$$f(x)=\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{x^2}{16}+o\big(x^2\big)\right)-$$
$$-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{x^2}{2}+o\big(x^2\big)\right)=\frac{9x^2}{16}+o\big(x^2\big)\,.$$
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{9x^2}{16}+o\big(x^2\big)}{5x^2+o(x^2)}=\frac{9}{80}.\triangleleft$$

3.3. Предел функции вида $f(x)^{\frac{1}{g(x)}}$

Замечание 19. В данном разделе во всех примерах мы используем обозначение $f(x)$ для основания и $g(x)$ для показателя степени.

Пример 3.10. Найти $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\cos x}\right)^{\frac{1}{x^4}}$.

$\triangleright$ Так как знаменатель показателя выражения имеет четвертую степень, то представим основание формулой Маклорена до $o\big(x^4\big)$ (см. с. 13).

$$f(x)=\frac{1-\frac12x^2-\frac18x^4+o\big(x^4\big)}{1-\frac12x^2+\frac1{24}x^4+o(x^4)}=$$
$$=\left(1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o\big(x^4\big)\right)\left(1-\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\big(x^4\big)\right)+\right.$$
$$\left.+\left(-\frac{x^2}{2}+o\big(x^2\big)\right)^2+o\big(x^4\big)\right)=$$
$$=\left(1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o\big(x^4\big)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+o\big(x^4\big)\right)=1-\frac{x^4}{6}+o\big(x^4\big)\,.$$
$$\lim_{x\to0}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to0}\left(1-\frac{x^4}{6}+o\big(x^4\big)\right)^{\frac{1}{x^4}}=\exp\left\{-\frac16\right\}.\triangleleft$$

Пример 3.11. Найти $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{6}{3+x^2}-\sqrt[3]{\cos 2x}\right)^{\frac{5x}{\arcsin^5 x}}$.

$\triangleright$ Рассмотрим показатель степени $\arcsin^5 x=x^5+o\big(x^5\big)$. Так как в числителе $5x$, то основание функции достаточно представить формулой Маклорена до $o\big(x^4\big)$:

$$\frac{6}{3+x^2}=\frac{2}{1+\frac{x^2}{3}}=2\left(1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{9}+o\big(x^4\big)\right).$$
$$\sqrt[3]{\cos 2x}=\sqrt[3]{1-2x^2+\frac{2x^4}{3}+o(x^4)}=$$
$$=1+\frac13\left(-2x^2+\frac{2x^4}{3}+o\big(x^4\big)\right)-\frac1{27}\left(-2x^2+o\big(x^2\big)\right)^2+o\big(x^4\big)=$$
$$=1-\frac{2x^2}{3}+\frac{2x^4}{27}+o\big(x^4\big)\,.$$
$$f(x)=2\left(1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{9}+o\big(x^4\big)\right)-$$
$$-\left(1-\frac{2x^2}{3}+\frac{2x^4}{27}+o\big(x^4\big)\right)=1+\frac{4x^4}{27}+o\big(x^4\big)\,.$$
$$\lim_{x\to0}(f(x))^{g(x)}=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{4x^4}{27}+o\big(x^4\big)\right)^{\frac{5x}{x^5+o(x^5)}}=e^{\frac{20}{27}}.\triangleleft$$

Пример 3.12. Найти $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1-\cos x}{\operatorname{sh}\frac{x^2}{2}}\right)^{\frac{1}{\ln\frac{(1+x)^3}{1+3x}}}$.

$\triangleright$ Заметим, что $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$, $\operatorname{sh}\frac{x^2}{2}\sim\frac{x^2}{2}$ при $x\to0$. Если представить основание до $o\big(x^3\big)$, то после сокращения дроби на $\frac{x^2}{2}$ мы получим отношение $\frac{1+o(x)}{1+o(x)}$.

Полученное выражение не позволяет выделить главную часть основания. Необходимо учесть следующий член представления и выполнить представление до $o(x^4)$. Причем второй член представления знаменателя шестого порядка, а числителя — четвертого порядка. После выполнения деления представлений значимым окажется только член меньшей степени, поэтому представление до $o(x^4)$ достаточно.

Поясним: учитывая следующий член представления знаменателя, необходимо выполнить представление дроби до $o(x^6)$. То есть $1-\cos x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{24\cdot 30} + o(x^6)$, $\operatorname{sh}\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^6}{48} + o(x^6)$.

$$f(x) = \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{24\cdot 30} + o(x^6)}{\frac{x^2}{2} + \frac{x^6}{48} + o(x^6)} = \frac{1 - \frac{x^2}{12} + \frac{x^4}{12\cdot 30} + o(x^4)}{1 + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} =$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{12} + \frac{x^4}{12\cdot 30} + o(x^4)\right)\left(1 - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = 1 - \frac{x^2}{12} + o(x^2),$$

так как на значение предела влияет только значение второго члена представления основания. То есть мы взяли лишние члены в представлении дроби.

$$\text{Итак,}\quad 1-\cos x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4), \qquad \operatorname{sh}\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} + o(x^4).$$

$$f(x) = \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)}{\frac{x^2}{2} + o(x^4)} = \frac{1 - \frac{x^2}{12} + o(x^2)}{1 + o(x^2)} = 1 - \frac{x^2}{12} + o(x^2).$$

Представим формулой Маклорена до $o(x^2)$ знаменатель показателя степени:

$$\ln\left(\frac{(1+x)^3}{1+3x}\right) = 3\ln(1+x) - \ln(1+3x) =$$

$$= 3\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \left(3x - \frac{9x^2}{2} + o(x^2)\right) = 3x^2 + o(x^2).$$

$$\lim_{x\to 0} (f(x))^{g(x)} = \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right)^{\frac{1}{3x^2+o(x^2)}} = e^{-\frac{1}{36}}. \triangleleft$$

Пример 3.13. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x\operatorname{tg} x}{\operatorname{ch} x - \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}\right)^{\frac{1}{\ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}}$.

$\triangleright$ Рассмотрим основание. Числитель представим до второго значимого члена:

$$x\operatorname{tg} x = x\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4).$$

Знаменатель представим до $o(x^4)$:

$$\operatorname{ch} x - \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) -$$

$$- \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right) = x^2 - \frac{x^4}{12} + o(x^4).$$

$$\text{Тогда } f(x) = \frac{x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^2 - \frac{x^4}{12} + o(x^4)} = \frac{1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)}{1 - \frac{x^2}{12} + o(x^2)} =$$

$$= \left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)\left(1 + \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right) = 1 + \frac{5x^2}{12} + o(x^2).$$

Показатель степени достаточно представить до $o(x^2)$, то есть $\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ до $o(x)$:

$$\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = \ln(x + 1 + o(x)) = x + o(x).$$

$$\text{Итак,}\quad \lim_{x\to 0}(f(x))^{g(x)} = \lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{5x^2}{12} + o(x^2)\right)^{\frac{1}{x^2+o(x^2)}} = e^{\frac{5}{12}}. \triangleleft$$

Пример 3.14. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+2x}}{2x\operatorname{ch}x-\ln\left(1+\operatorname{sh}x\right)^2}\right)^{x^2\operatorname{ctg}x^4}$.

▷ Представим показатель степени так, чтобы определить первые значимые члены числителя и знаменателя:

$$x^2\operatorname{ctg}x^4=\frac{x^2\cos x^4}{\sin x^4}=\frac{x^2\left(1+o\left(x^4\right)\right)}{x^4+o(x^4)}=\frac{1+o\left(x^2\right)}{x^2+o(x^2)}.$$

Следовательно, основание достаточно представить формулой Маклорена до $o\left(x^2\right)$.

$$2x\operatorname{ch}x-\ln\left(1+\operatorname{sh}x\right)^2=2x\left(1+\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)\right)-$$
$$-2\ln\left(1+x+\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right)\right)=\left(2x+x^3+o\left(x^4\right)\right)-$$
$$-2\left(\left(x+\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right)\right)-\frac{\left(x+\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right)\right)^2}{2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\left(x+o\left(x^2\right)\right)^3}{3}-\frac{\left(x+o(x)\right)^4}{4}\right)=x^2+\frac{5x^4}{6}\,o\left(x^4\right).$$

$$e^{\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+2x}=$$
$$=\exp\left\{x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^4\right)\right\}-\left(1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}-\frac{5x^4}{8}+o\left(x^4\right)\right)=$$
$$=1+\left(x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)+\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)^2+$$
$$+\frac{1}{6}\left(x+o\left(x^2\right)\right)^3+\frac{1}{24}\left(x+o\left(x^2\right)\right)^4+o\left(x^4\right)-$$
$$-\left(1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}-\frac{5x^4}{8}+o\left(x^4\right)\right)=x^2+x^4+o\left(x^4\right).$$

$$f(x)=\frac{1+x^2+o\left(x^2\right)}{1+\frac{5x^2}{6}+o(x^2)}=$$
$$=\left(1+x^2+o\left(x^2\right)\right)\left(1-\frac{5x^2}{6}+o\left(x^2\right)\right)=1+\frac{x^2}{6}+o\left(x^2\right).$$

$$\lim_{x\to 0}\left(f(x)\right)^{g(x)}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x^2}{6}+o\left(x^2\right)\right)^{\frac{1+o\left(x^2\right)}{x^2+o\left(x^2\right)}}=e^{\frac{1}{6}}.◁$$

Пример 3.15. Найти $\lim\limits_{x\to+0}\left(\cos x+x^2\cdot\sqrt[3]{x+\dfrac{1}{8}}\right)^{\frac{3}{x^3}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}$.

▷ Так как $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\sim\frac{\pi}{2}$ при $x\to 0$, то для показателя степени имеем: $\frac{3}{x^3}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\sim\frac{3\pi}{2x^3}$ при $x\to 0$.

Основание представляем до $o\left(x^3\right)$:

$$f(x)=1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)+\frac{1}{2}x^2\cdot\sqrt[3]{1+8x}=$$
$$=1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)+\frac{1}{2}x^2\left(1+\frac{8x}{3}+o(x)\right)=1+\frac{4x^3}{3}+o\left(x^3\right).$$

$$\lim_{x\to+0}\left(f(x)\right)^{g(x)}=\lim_{x\to+0}\left(1+\frac{4x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)^{\frac{3\pi}{2x^3}}=e^{2\pi}.◁$$

Пример 3.16. Найти $\lim\limits_{x\to+0}\left(\ln\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)+\operatorname{ch}x\right)^{\frac{2+\cos x}{x^4}}$.

▷ Аналогично примеру *3.15*, в представлении косинуса формулой Маклорена в показателе степени на значение предела влияет только первый член. А именно, $\frac{2+\cos x}{x^4}\sim\frac{3}{x^4}$ при $x\to 0$.

Представим формулой Маклорена основание до $o(x^4)$:

$$f(x)=\left(-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)\right)+$$
$$+\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)=1-\frac{x^4}{12}+o(x^4).$$

$$\lim_{x\to+0}(f(x))^{g(x)} = \lim_{x\to+0}\left(1-\frac{x^4}{12}+o(x^4)\right)^{\frac{3}{x^4}} = e^{-\frac{1}{4}}.\triangleleft$$

4. ЗАДАЧИ

4.1. Представление формулой Тейлора

Задача 1. Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0=5$ функцию $y=\log_3(2x^2-20x+53)$ до $o\Big((x-5)^{2n+1}\Big)$.

Задача 2. Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0=2$ функцию $y=5^{x^3-6x^2+12x}$ до $o\Big((x-2)^{3n+2}\Big)$.

Задача 3. Представить формулой Маклорена функцию $y=$ $=x\,\mathrm{sh}^2\,x$ до $o\Big((x)^{2n}\Big)$.

Задача 4. Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0=-1$ функцию $y=(x+1)\ln\frac{x^2+2x+2}{1-2x-x^2}$ до $o\Big((x+1)^{2n}\Big)$.

Задача 5. Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0=-\frac{\pi}{4}$ функцию $y=\left(x+\frac{\pi}{4}\right)(\sin x+\cos x)$ до $o\Big(\left(x+\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}\Big)$.

Задача 6. Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0=2$ функцию $y=\frac{x^2-4x+4}{\sqrt[3]{7-3x}}$ до $o((x-2)^n)$.

Задача 7. Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0=-2$ функцию $y=\cos(x+2)\cdot\cos(x+3)$ до $o\Big((x+2)^{2n}\Big)$.

Задача 8. Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0=3$ функцию $y=\mathrm{sh}\,(x-3)\,\mathrm{ch}\,(x-4)$ до $o\Big((x-3)^{2n}\Big)$.

Задача 9. Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0=\frac{1}{2}$ функцию $y=(2x+3)\,e^{4x^2+4x-3}$ до $o\Big(\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\Big)$.

Задача 10. Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0=-3$ функцию $y=(x+5)\,e^{(x^2+6x+8)(x^2+6x+10)}$ до $o\Big((x+3)^{4n+3}\Big)$.

Задача 11. Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0=2$ функцию $y=\frac{x-2}{(x-3)^2}$ до $o((x-2)^n)$.

Задача 12. Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0=1$ функцию $y=\frac{x-1}{(4x-2x^2-1)^2}$ до $o\Big((x-1)^{2n}\Big)$.

Задача 13. Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0=-1$ функцию $y=\frac{2x^2+2x-7}{x^2+x-2}$ до $o((x+1)^n)$.

Задача 14. Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0=-1$ функцию $y=\frac{3x+9}{-x^2-x+2}$ до $o((x+1)^n)$.

Задача 15. Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0=-1$ функцию $y=\frac{x+2}{x(x^2+3x+3)}$ до $o\Big((x+2)^{3n+2}\Big)$.

Задача 16. Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0=-1$ функцию $y=(x+2)\ln(x+3)$ до $o((x+1)^n)$.

Задача 17. Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0=1$ функцию $y=\left(x^2-2x-1\right)\ln\sqrt{x^2-2x+5}$ до $o\Big((x-1)^{2n+1}\Big)$.

Задача 18. Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0=\frac{1}{2}$ функцию $y=\log_5\left(\frac{3+2x}{5-2x}\right)^{\left(x^2-x+\frac{5}{4}\right)}$ до $o\Big(\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2n}\Big)$.

Задача 19. Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0=\frac{\pi}{2}$ функцию $y=\left(x^2-\pi x\right)\cos^2 x$ до $o\Big(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}\Big)$.

Задача 20. Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0=-1$ функцию $y=\frac{5x^2+10x-3}{x+1}\left(1+\sin\frac{\pi x}{2}\right)$ до $o\Big((x+1)^{2n}\Big)$.

Задача 21. Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0 = -1$ функцию $y = (x+2)\sqrt{-x}$ до $o((x+1)^n)$.

Задача 22. Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0 = 2$ функцию $y = \left(x^2-4x\right)2^{x^2-4x+5}$ до $o\Big((x-2)^{2n+1}\Big)$.

Задача 23. Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0 = 3$ функцию $y = \left(x^2-6x\right)e^{6-2x}$ до $o((x-3)^n)$.

Задача 24. Представить формулой Маклорена функцию $y = \left(x^2-3\right)\operatorname{ch}^2 x$ до $o\Big((x)^{2n+1}\Big)$.

Задача 25. Представить формулой Маклорена функцию $y = \left(4x-x^3\right)\operatorname{sh}2x$ до $o\Big((x)^{2n}\Big)$.

Задача 26. Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0 = -\frac{\pi}{4}$ функцию $y = \left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin x + \cos x$ до $o\Big(\left(x+\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}\Big)$

Задача 27. Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0 = -1$ функцию $y = \left(x^2+2x\right)\sqrt{-2x-1}$ до $o((x+1)^n)$.

Задача 28. Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0 = 4$ функцию $y = (2x-6)\operatorname{sh}\left(\ln\sqrt{x-1}\right) + \frac{x-3}{\sqrt{x-1}}$ до $o((x-4)^n)$.

Задача 29. Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0 = -3$ функцию $y = \left(x^2+6x\right)\operatorname{th}\left(\ln\sqrt[4]{x+7}\right)$ до $o((x+3)^n)$.

Задача 30. Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0 = -3$ функцию $y = \operatorname{arctg}\frac{2x+8}{1-x}$ до $o\Big((x+3)^{2n}\Big)$.

Задача 31. Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0 = 4$ функцию $y = \ln\left(\sqrt{5+x}+3\right)$ до $o((x-4)^n)$.

Задача 32. Представить формулой Маклорена функцию $y = x\arcsin\sqrt{\frac{1}{2}-x^3}$ до $o\left(x^{2n+1}\right)$.

Задача 33. Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0 = -2$ функцию $y = (x+2)\arccos\frac{(x+2)}{\sqrt{x^2+4x+5}}$ до $o\Big((x+2)^{2n+1}\Big)$.

Задача 34. Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0 = 1$ функцию $y = \left(x^2-2x+3\right)\arccos\frac{x-1}{\sqrt{10-2x+x^2}}$ до $o\Big((x-1)^{2n}\Big)$.

4.2. Вычисление пределов

Найти пределы

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\frac{x}{1+x^2}}{\arcsin x - x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{x^2}}{\sqrt{1+x^2}-1}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch}\frac{2x}{2+x^2}+4\ln\sqrt[4]{\cos x}-1}{e^{-x^2/2}-\sqrt{1-x^2}}$.

4. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}\ln x\right)^{\frac{1}{\cos^2 x\sin^2(1-x)}}$.

5. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{3-x}+\ln\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\sin^2(x-2)}}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+\operatorname{tg}x}{x\left(\operatorname{ch}x-e^{x^2}\right)}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg}x}-x-\operatorname{ch}x}{\sin x-\operatorname{arctg}x}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\left(xe^x\right)-x\sqrt[3]{1+3x}}{\ln\left(1+\sin 2x\right)-2\operatorname{sh}\left(x-x^2\right)}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x\arcsin x}{\ln\left(1+x^2\right)}\right)^{ctg^2 x}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2\sin x+x^2}-\sqrt{1+4x}-5x^2}{\operatorname{sh}2x-\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{3x+\operatorname{ch}2x}-\frac{\operatorname{arctg}x}{x}-x}{\operatorname{tg}x\cdot e^{-x/2}-\ln\left(1+x\right)}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x-\cos x+x}+\arcsin x\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}.$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin\left(e^{x}-1\right)+\ln\left(1-x\right)\right)^{\frac{\operatorname{sh}^2 x}{x^5}}.$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{x}{\sin x}}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}-ex\sqrt[3]{1-5x}+\frac{2e}{9}x^3}{\operatorname{tg}\operatorname{sh} x-x}.$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2/2}\arcsin x-\sqrt[3]{\cos 3x}\operatorname{sh} x}{\ln\left(\frac{1+\operatorname{arctg} x}{1-\operatorname{arctg} x}\right)-2x\cos x}.$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sqrt{\operatorname{ch} x}-\operatorname{tg}^2\left(\frac{1}{2}\operatorname{sh} x\right)}{e^{\sqrt{1+x^2}-1}-\operatorname{ch} x}.$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\left(1+x^2\right)^2-\left(1-x^2\right)^{-2}+\frac{2}{3}x^3}{\left(\operatorname{tg} x-\operatorname{arctg} x\right)\ln\left(e+x\right)}\right)^{1/x}.$

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{x}{4}\right)-\operatorname{arcctg}\left(\sqrt{3}+2x\right)}{\left(\operatorname{ch}\left(x\sqrt{3}\right)\right)^{\operatorname{ctg} x}-\left(1+\operatorname{tg} 2x\right)^{3/4}}.$

19. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x-\sqrt[3]{x^3-x^5}}{\sin x+\operatorname{sh} x}-\dfrac{2}{x^2}\ln\left(\cos x\right)\right)^{\frac{1}{x^2}}.$

20. $\lim\limits_{x\to +0}\left(\dfrac{x}{\sin x}-\dfrac{\operatorname{sh} x}{x}+\dfrac{\sin^4 x}{10}\right)^{\frac{1}{\ln(\operatorname{tg} x)}}.$

21. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\left(1-\operatorname{sh}\left(x^2-x\right)\right)^{-1}\cdot\dfrac{1}{\cos x}+\operatorname{tg} x\right)^{\frac{3}{x-\ln\left(1+x+x^2\right)}}$

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi+\operatorname{sh} 2x-4\operatorname{arctg}\left(e^{x}\right)}{\operatorname{tg} x-\sin x}.$

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2\ln\frac{\ln(1+x)}{x}}{\pi-2\arcsin\left(1-2x^4\right)}.$

24. $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-\frac{x^2}{3}}\left(\dfrac{x}{4}\ln\dfrac{x+2}{x-2}\right)^{x^4}.$

25. $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}}{2}\right)^{x^4}.$

26. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\ln\left(\operatorname{tg}^2\ln\left(\dfrac{x+1}{x}-\operatorname{sh}^2\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)\right)+4\ln x\right).$

27. $\lim\limits_{x\to +0}\left(4\ln x-\ln\left(x\operatorname{ctg} x-\sqrt[3]{1-\operatorname{sh}^2 x}\right)\right).$

28. $\lim\limits_{x\to +0}\left(3\ln x-\ln\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{3}\sin 2x-\dfrac{\cos x}{\operatorname{sh} x}\right)\right).$

5. ОТВЕТЫ

5.1. Представление формулой Тейлора

1. $1+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\cdot 2^k}{3^k\cdot k\cdot\ln 3}\left(x-5\right)^{2k}+o\Big(\left(x-5\right)^{2n+1}\Big).$

2. $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{5^8\cdot\ln^k 5}{k!}\left(x-2\right)^{3k}+o\Big(\left(x-2\right)^{3n+2}\Big).$

3. $\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}x^{2k+1}+o\big(x^{2n}\big).$

4. $(x+1)\ln 2+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left((-1)^{k-1}+\frac{1}{2^k}\right)\frac{(x+1)^{2k+1}}{k}+o\Big(\left(x+1\right)^{2n}\Big).$

5. $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}\sqrt{2}}{(2k+1)!}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)^{2k+2}+o\Big(\left(x+\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}\Big).$

6. $(x-2)^2+(x-2)^3+2\left(x-2\right)^4+\sum\limits_{k=3}^{n-2}\frac{(3k-2)(3k-5)\cdot\ldots\cdot 1}{k!}\left(x-2\right)^{k+2}+$
$+\,o\left(\left(x-2\right)^{n}\right).$

7. $\cos 1+\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^k 2^{2k-2}\sin 1}{(2k-1)!}\,(x+2)^{2k-1}+\frac{(-1)^k 2^{2k-1}\cos 1}{(2k)!}\,(x+2)^{2k}\right)+$
$+\,o\Big((x+2)^{2n}\Big)$.

8. $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{2^{2k-2}\operatorname{ch}1}{(2k-1)!}\,(x-3)^{2k-1}+\frac{2^{2k-1}\operatorname{sh}1}{(2k)!}\,(x-3)^{2k}\right)+o\Big((x-3)^{2n}\Big)$.

9. $\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\frac{4^{k+1}}{e^4\cdot k!}\,\left(x-\frac12\right)^{2k}+\frac{2\cdot 4^k}{e^4\cdot k!}\,\left(x-\frac12\right)^{2k+1}\right)+o\Big(\left(x-\frac12\right)^{2n+1}\Big)$.

10. $\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\frac{-2}{e\cdot k!}\,(x+3)^{4k}+\frac{1}{e\cdot k!}\,(x+3)^{4k+1}\right)+o\Big((x+3)^{4n+3}\Big)$.

11. $\sum\limits_{k=0}^{n-1}k\,(x-2)^{k+1}+o((x-2)^n)$.

12. $\sum\limits_{k=0}^{n-1}k\,(x-1)^{2k+1}+o\Big((x-1)^{2n}\Big)$.

13. $\frac52+\sum\limits_{k=1}^{n}\left((-1)^k-\frac{1}{2^{k+1}}\right)(x+1)^k+o((x+1)^n)$.

14. $\sum\limits_{k=0}^{n}\left((-1)^k+\frac{1}{2^{k-1}}\right)(x+1)^k+o((x+1)^n)$.

15. $\sum\limits_{k=0}^{n}\Big(-(x+1)^{3k}-(x+1)^{3k+1}\Big)+o\Big((x+1)^{3n+2}\Big)$.

16. $\ln 2+\left(\ln 2+\frac12\right)(x+1)+\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k(k+1)}{2^k\cdot k(k-1)}\,(x+1)^k+o((x+1)^n)$.

17. $-\ln 4+\left(\ln 2-\frac14\right)(x-1)^2+\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k(2k-1)}{4^k\cdot k(k-1)}\,(x-1)^{2k}+$
$+\,o\Big((x-1)^{2n+1}\Big)$.

18. $\ln\frac15\cdot\left(x-\frac12\right)+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{(10k+3)}{(4k^2-1)4^k\ln 5}\,\left(x-\frac12\right)^{2k+1}+o\Big(\left(x-\frac12\right)^{2n}\Big)$.

19. $-\frac{\pi^2}{4}+\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k-1}2^{2k-3}}{(2k)!}\,\left(4k^2-2k+\pi^2\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k}+$
$+\,o\Big(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}\Big)$.

20. $-\pi^2\,(x+1)+\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k\pi^{2k-2}}{2^{2k-2}(2k)!}\,\left(20k^2-10k+5\pi^2\right)(x+1)^{2k-1}+$
$+\,o\Big((x+1)^{2n}\Big)$.

21. $1+\frac12\,(x+1)-\frac58\,(x+1)^2-\sum\limits_{k=3}^{n}\frac{(2k-5)!!}{2^k\cdot k!}\,(4k-3)\,(x+1)^k+$
$+\,o((x+1)^n)$.

22. $-8+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2\ln^{k-1}2}{k!}\,(k-4\ln 2)\,(x-2)^{2k}+o\Big((x-2)^{2n+1}\Big)$.

23. $-9+18\,(x-3)+\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{(-2)^{k-2}}{k!}\,\left(k^2-k-36\right)(x-3)^k+$
$+\,o((x-3)^n)$.

24. $-3+2x^2+\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{2^{2k-3}}{(2k)!}\,\left(4k^2-2k-12\right)x^{2k}+o\big(x^{2n+1}\big)$.

25. $8x^2+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{2^{2k-1}}{(2k+1)!}\,\left(16-4k^2-4k\right)x^{2k+1}+o\big(x^{2n}\big)$.

26. $\frac{1}{\sqrt2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^k(1-2k)}{\sqrt2(2k)!}\,\left(x+\frac{\pi}{4}\right)^{2k}+\frac{(-1)^{k+1}(2k)}{\sqrt2(2k+1)!}\,\left(x+\frac{\pi}{4}\right)^{2k+1}\right)+$
$+\,o\Big(\left(x+\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}\Big)$.

27. $-1+(x+1)+\frac32\,(x+1)^2-\frac12\,(x+1)^3+$
$+\sum\limits_{k=4}^{n}\frac{(2k-7)!!}{k!}\,\left(3k^2-17k+15\right)(x+1)^k+o((x+1)^n)$.

28. $\sqrt3+\frac{7\sqrt3}{6}\,(x-4)+\frac{11\sqrt3}{72}\,(x-4)^2+$
$+\sum\limits_{k=3}^{n}\frac{(-1)^n(2k-5)!!}{6^k k!}\,(4k+3)\,(x-4)^k+o((x-4)^n)$.

29. $-27+3\,(x+3)+\frac{19}{8}\,(x+3)^2+$
$+\sum\limits_{k=3}^{n}\frac{(-1)^k\cdot 4\cdot(2k-5)!!}{8^k k!}\,(14k-9)\,(x+3)^k+o((x+3)^n)$.

30. $\operatorname{arctg}\frac12+\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{2^{2k+1}(2k+1)}\,(x+3)^{2k+1}+o\Big((x+3)^{2n}\Big)$

31. $\ln 6+\sum\limits_{k=4}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(2k-1)!!}{2^{k+1}\cdot 9^k\cdot k\cdot k!}\,(x-4)^k+o((x-4)^n)$

32. $\frac{\pi}{4}x-x^2+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}2^k(2k-1)!!}{k!(2k+1)}x^{2k+2}+o\big(x^{2n+1}\big)$

33. $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}\,(x+2)^{2k+2}+o\Big((x+2)^{2n+1}\Big)$

34. $\pi+\frac29\,(x-1)+\frac{\pi}{2}\,(x-1)^2+$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k}{9^{k+1}}\left(\frac{2}{2k+1}-\frac{9}{2k-1}\right)(x-1)^{2k+1}+o\Big((x-1)^{2n}\Big)$$

5.2. Вычисление пределов

1. -4. *2*. -3. *3*. $-\frac{13}{6}$. *4*. $\exp\{\frac{1}{8\cos^2 1}\}$. *5*. $\exp\{-\frac{1}{4}\}$. *6*. $\frac{1}{3}$. *7*. 3. *8*. $\frac{5}{3}$. *9*. $\exp\{\frac{2}{3}\}$. *10*. $-\frac{3}{2}$. *11*. $-\frac{8}{3}$. *12*. $\exp\{\frac{1}{3}\}$. *13*. $\exp\{-\frac{1}{3}\}$. *14*. 13. *15*. 6. *16*. -2. *17*. e^4. *18*. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. *19*. $\sqrt{e}$. *20*. e^2. *21*. $\exp\{-\frac{15}{2}\}$. *22*. $\frac{10}{3}$. *23*. $\frac{1}{24}$. *24*. $\exp\{\frac{4}{5}\}$. *25*. $\exp\{\frac{3}{2}\}$. *26*. $\ln\frac{5}{4}$. *27*. $\ln 5$. *28*. $\ln\frac{3}{10}$.